ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CHASLES

Géométrie de situation. Mémoire sur les propriétés des systèmes de sections coniques, situées dans un même plan

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 277-301

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__277_0>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Mémoire sur les propriétés des systèmes de sections coniques, situées dans un même plan ;

Par M. Chasles, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

M. Poncelet paraît être le premier qui ait publié des recherches sur les propriétés du systèmes de deux coniques quelconques, situées d'une manière quelconque dans un même plan ; propriétés fort remarquables, comme on peut le prévoir d'après celles du système de deux cercles. Je m'étais occupé, lorsque j'étais encore à l'école polytechnique, c'est à-dire dès 1813, de l'étude des coniques semblables et semblablement situées. J'en ai dit quelques mots dans la *Correspondance* de M. Hachette (tom. III, pag. 326), où j'ai fait voir que leurs propriétés sont tout-à-fait analogues à celles des cercles.

En m'occupant postérieurement des applications de la théorie des polaires réciproques, j'ai reconnu que cette théorie offrait un moyen très-facile de traiter les questions relatives au système de deux coniques quelconques, situées dans un même plan, en les ramenant, par une méthode générale, à des coniques semblables et semblablement situées.

Exposer cette méthode, et en faire connaître les principales applications, tel est l'objet que je me propose dans ce qu'on va lire. Elle est différente de celle de M. Poncelet, bien que j'y emploie la théorie des polaires réciproques, qui offre un des points les plus remarquables de son bel ouvrage. Je prie d'ailleurs M. Poncelet de m'excuser si, me rencontrant avec lui dans quelques résultats, je néglige de le faire remarquer. Mon excuse est que, me trouvant ici momentanément et seulement depuis peu de jours, je n'ai sous la main aucune des ressources qui me seraient nécessaires pour remplir envers lui un devoir de justice et de convenance, auquel je me garderais bien de me soustraire dans des circonstances plus favorables.

§. I.

Considérations préliminaires.

1. On a tellement étudié, dans ces derniers temps, les propriétés de deux ou d'un plus grand nombre de cercles tracés sur un même plan, qu'on peut aujourd'hui considérer ces propriétés comme généralement connues des géomètres; elles se trouvent d'ailleurs développées avec beaucoup de détail dans un mémoire de M. Gaultier, de Tours, faisant partie du XVI.e cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*, ainsi que dans plusieurs endroits des *Annales de Mathématiques* (*). Il doit donc suffire à notre but de rappeler ici sommairement celles d'entre elles sur lesquelles nous aurons le plus fréquemment besoin de nous appuyer.

2. Deux cercles étant tracés sur un même plan, si on leur mène quatre tangentes parallèles de direction arbitraire, les points de contact de ces tangentes seront les quatre sommets d'un quadrilatère dont deux côtés opposés seront des diamètres des deux cercles, tandis que le point de concours des deux autres côtés opposés, ainsi que celui des diagonales seront deux points fixes, indépendans de la direction commune des tangentes; ces points se-

---

(*) Voy. notamment tom. XIII, pag. 193, et tom. XVII, pag. 285.

ront les points de concours des deux couples de tangentes communes, tant extérieures qu'intérieures aux deux cercles, si ces deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre Ces mêmes points sont, ce qu'on appelle, les *centres de similitude* des deux cercles; d'où l'on voit que, pour que le point de concours de deux tangentes communes soit un centre de similitude, il est nécessaire que les cercles soient inscrits tous deux dans l'un des quatre angles formés par ces tangentes, ou que l'un d'eux étant inscrit dans l'un de ces angles, l'autre le soit dans son opposé au sommet.

3 Si, par l'un ou l'autre des deux centres de similitude de deux cercles on leur mène une sécante commune mobile, les quatre tangentes menées aux deux cercles en leurs points d'intersection avec cette sécante, formeront un parallélogramme, dont deux sommets opposés, qui seront les pôles de la sécante relatifs aux deux cercles, seront en ligne droite avec le centre de similitude dont il s'agit, et décriront les polaires de ce centre, relatives aux deux cercles, tandis que les deux autres sommets opposés du parallélogramme, décriront une droite fixe, indépendante du centre de similitude qu'on aura choisi, laquelle sera la corde commune aux deux cercles, lorsque ceux-ci se couperont. Cette droite est ce qu'on appelle *l'axe radical* des deux cercles.

4. Si, par un point mobile sur l'axe radical de deux cercles on leur mène quatre tangentes, leurs points de contact seront les quatre sommets d'un quadrilatère dont deux côtés opposés, seront les polaires du point mobile, relatives aux deux cercles, tandis que les deux autres côtés opposés du quadrilatère iront concourir en l'un des centres de similitude, et les deux diagonales à l'autre.

5. Les polaires des deux centres de similitude de deux cercles, prises par rapport à ces cercles, sont ce qu'on appelle leurs *polaires de similitude*, et il y en a deux pour chaque cercle. Ce sont quatre droites parallèles entre elles et à l'axe radical, par rapport auquel elles sont symétriquement situées; de manière que la distance

entre les deux polaires relatives à l'un des cercles se trouve être égale à la distance entre les deux polaires relatives à l'autre.

6. Trois cercles, situés dans un même plan, ont deux à deux trois axes radicaux concourant en un même point qu'on appelle leur *centre radical*, et six centres de similitude distribués trois à trois aux intersections de quatre droites qu'on appelle leurs *axes de similitude.*

7. Nous pourrions démontrer directement, d'une manière purement géométrique, à l'aide de la doctrine des projections stéréographiques, que ces diverses propriétés du système de deux et trois cercles appartiennent généralement au système de deux coniques quelconques, semblables et semblablement disposées; mais, pour ne point étendre ces préliminaires outre mesure, nous regarderons cette vérité comme admise; elle est évidente, au surplus, pour des ellipses semblables et semblablement disposées, qui peuvent toujours être projetées orthogonalement suivant des cercles.

8. Pour éviter les périphrases, nous dirons à l'avenir de deux coniques tracées dans un même plan, qu'elles sont *homothétiques*, pour exprimer qu'elles sont à la fois semblables et semblablement disposées; nous abandonnerons d'ailleurs très-volontiers cet adjectif, si l'on nous en offre un autre plus convenable.

9. Deux coniques homothétiques ont donc, comme deux cercles, deux centres de similitude points de concours soit de deux côtés opposés soit des deux diagonales d'un quadrilatère dont les sommets sont les points de contact des quatre tangentes parallèles de direction arbitraire, lesquels sont aussi les points de concours, toujours réels, de leurs tangentes communes, réelles ou imaginaires; en ne prenant toutefois, pour tangentes d'une même couple, que celles qui touchent les deux courbes de la même manière. Elles ont aussi deux couples de polaires de similitude toutes parallèles, tellement situées que la distance entre celles qui appartiennent à l'une des deux courbes est égale à la distance entre celles qui appartiennent à l'autre; elles ont enfin un axe radical, lieu de deux

sommets opposés du parallélogramme variable dont les côtés sont des tangentes à quatre points des deux courbes en ligne droite avec l'un quelconque de leurs deux centres de similitude. Cet axe radical, parallèle aux deux couples de polaires de similitude, et également distant des unes et des autres, est la droite, toujours réelle, qui contient les deux points d'intersection, réels ou imaginaires des deux courbes.

10. On sait qu'en général deux coniques, situées dans un même plan, ont quatre points d'intersection, réels ou imaginaires ; mais lorsque deux coniques sont homothétiques, deux de ces quatre points passent à l'infini, de sorte qu'il n'en reste au plus que deux d'accessibles, réels ou imaginaires. Cela se voit évidemment pour deux hyperboles; et le calcul l'indique également pour deux ellipses. Il est aisé de voir que, réciproquement, deux coniques dont deux des quatre points d'intersection sont situés à l'infini, sont par cela même deux coniques homothétiques.

§. II.

Exposition de la méthode.

11. Considérons deux coniques quelconques, tracées sur un même plan, et concevons que l'on construise la figure polaire réciproque de leur système, relative à une conique directrice quelconque, ayant son centre au point de concours de deux tangentes communes, tellement choisies d'ailleurs que les deux courbes soient l'une et l'autre inscrites dans l'un des angles formés par ces tangentes, ou que l'une de ces courbes soit inscrite dans l'un de ces angles et l'autre dans son opposé au sommet. La polaire réciproque sera, comme l'on sait, le système de deux autres coniques dont tous les points seront les pôles des tangentes aux deux premières, tandis que les points de contact auront, à l'inverse, pour polaires les tangentes aux différens points des deux dernières.

Les intersections des deux proposées auront donc pour polaires les tangentes communes à leurs polaires réciproques, dont les intersections seront, à l'inverse, les pôles des tangentes communes aux deux premières.

Or, deux de ces tangentes communes, passant par le centre de la conique directrice, doivent avoir leurs pôles à l'infini; donc, des quatre intersections des coniques polaires réciproques des proposées doivent être situées à l'infini, d'où il résulte que ces polaires sont homothétiques. On a donc ce théorème fondamental :

12. *Deux coniques quelconques, situées d'une manière quelconque dans un même plan, et rapportées à une conique directrice ayant son centre au point de concours de deux tangentes communes aux deux courbes, ont pour polaires réciproques deux coniques homothétiques.*

Mais il ne faut pas perdre de vue, dans l'application de ce théorème (2, 9), que les deux tangentes communes doivent être choisies de telle sorte que les deux coniques soient inscrites dans le même angle, ou l'une dans un angle et l'autre dans son opposé au sommet.

13. Or, il peut ici se présenter trois cas : 1.° Si les deux courbes sont extérieures l'une à l'autre, elles auront quatre tangentes communes et deux seulement de leurs six points d'intersection pourront être pris pour centres de la conique directrice; 2.° si les deux courbes se coupent en deux points, elles n'auront que deux tangentes communes, et conséquemment aucune difficulté n'aura lieu; 3.° enfin, si les deux courbes se coupent en quatre points, elles auront de nouveau quatre tangentes communes; mais alors chacun de leur six points de concours pourra être pris pour centre de la conique directrice.

14. Si l'on prenait pour centre de la conique directrice le point de concours de deux tangentes telles que les deux courbes se trouvassent inscrites dans deux angles consécutifs, leurs polaires réciproques ne seraient plus des coniques homothétiques, mais deux

hyperboles qui, ayant leurs asymptotes respectivement parallèles, auraient bien, à la vérité, deux intersections à l'infini, mais qui, lors même qu'elles seraient équilatères, et conséquemment semblables, ne seraient pas semblablement disposées; les angles des asymptotes qui contiendraient les courbes n'étant pas alors de même direction.

15. On voit donc que *le système de deux coniques quelconques, situées comme on le voudra dans un même plan, est toujours polaire conjugué du système de deux coniques homothétiques, situées dans ce plan.* Cette considération va nous conduire rapidement à la découverte des propriétés les plus remarquables du système de deux coniques quelconques. Pour plus de clarté et de brièveté, nous appellerons *système primitif*, le système de ces coniques, et *système transformé* le système des coniques homothétiques dont il est le polaire réciproque.

§. III.

Propriétés de deux coniques quelconques.

16. Soient menées aux deux courbes du système transformé, quatre tangentes parallèles de direction arbitraire; leurs points de contact seront (9) les sommets d'un quadrilatère, dont deux côtés opposés concourront à l'un des centres de similitude, tandis que ses deux diagonales concourront à l'autre. Le polaire réciproque de ce quadrilatère, dans le système primitif, sera un autre quadrilatère dont les côtés seront quatre tangentes aux deux courbes ayant leurs points de contact aux pôles des quatre tangentes parallèles du système transformé, et les deux couples de sommets opposés de ce quadrilatère devront être constamment sur deux droites fixes polaires des deux centres de similitude du système transformé. D'un autre côté, les quatre tangentes du système transformé étant parallèles, leurs pôles, points de contact des côtés du quadrilatère pri-

mitif doivent être en ligne droite avec le centre de la conique directrice, point de concours de deux tangentes communes aux courbes de ce système; on a donc, dabord, immédiatement, puis par la théorie des polaires réciproques, les deux théorèmes que voici :

17. *Si une droite mobile, sur le plan de deux coniques quelconques, tourne autour du point de concours de deux tangentes communes à ces courbes, de manière à les couper en quatre points; les tangentes aux quatre points d'intersection seront telles que les quatre points de concours des tangentes à l'une des courbes avec les tangentes à l'autre, décriront le système de deux droites fixes; lesquelles seront des cordes communes, si les deux courbes se coupent.*

17. *Si un point mobile, sur le plan de deux coniques quelconques, parcourt une corde commune à ces courbes, de manière à pouvoir être le point de départ de quatre tangentes; les points de contact de ces quatre tangentes seront tels que les quatre droites qui joindront les points de contact sur l'une des courbes avec les points de contact sur l'autre, concourront en deux points fixes; lesquels seront les points de concours des tangentes communes, si les deux courbes ne se coupent pas.*

18. Dans le cas où les deux courbes du système primitif ont quatre tangentes communes, si au point de concours des tangentes d'une même paire on substitue le point de concours des tangentes de l'autre paire, on retrouvera encore les deux mêmes droites fixes. En effet, ce deuxième point de concours est le pôle de la corde commune aux deux courbes du système transformé; et l'on sait (4) que les quatre points de contact des tangentes issues d'un point de cette corde commune, sont les sommets d'un quadrilatère dont deux côtés opposés concourrent en l'un des centres de similitude et les deux diagonales à l'autre; d'où il suit que les polaires de ces points de contact, dans le système primitif, lesquelles ne sont autre chose que les tangentes menées aux deux courbes, aux quatre points où elles sont coupées par la droite issue du

point de concours des tangentes communes, doivent se couper deux à deux sur les deux droites fixes, polaires des centres de similitude du système transformé.

On verra pareillement, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, que, dans le cas où les deux courbes se coupent en quatre points, soit qu'on prenne pour corde commune celle qui joint deux quelconques de ces points, ou qu'on prenne au contraire celle qui joint les deux autres, l'application du second des théorèmes (17) conduira toujours aux deux mêmes points fixes.

Ces droites fixes qui, lorsque deux courbes se coupent, en sont des cordes communes, ont été appelées par M. Poncelet, dans le cas contraire, des cordes communes *idéales*, ce qui pourrait faire penser qu'alors ces droites disparaissent, tandis qu'elles ont une existence réelle dans tous les cas, et qu'il n'y a alors d'imaginaires que les intersections des deux courbes. D'un autre côté, la dénomination d'*axes radicaux* ne saurait convenir ici où il n'est plus question de cercles. En conséquence, en attendant qu'on ait trouvé pour ces droites, qui jouent un rôle très-important dans la théorie des sections coniques, une dénomination plus convenable, je les appelerai des *axes de symptose*, à raison de leurs propriétés relatives aux tangentes issues de leurs différens points. Quant au point de concours des tangentes communes, choisies comme il a été expliqué ci-dessus (2, 9, 14), comme la dénomination de centre de similitude ne saurait leur convenir, lorsqu'il s'agit de coniques quelconques, ou même de coniques semblables qui ne seraient pas semblablement disposées, nous continuerons à les appeler, avec M. Poncelet, des *centres d'homologie*. Le centre d'homologie, dans le système primitif, est donc le pôle de l'axe radical du système transformé, tandis que ses axes de symptose sont les polaires des deux centres de similitude de ce second système.

Au moyen de ces dénominations, nos deux théorèmes (17) peuvent être énoncés plus brièvement comme il suit :

19. *Tous les quadrilatères dont*

19. *Tous les quadrilatères qui*

les côtés touchent deux coniques aux quatre points où elles sont coupées par une droite menée arbitrairement par leur centre d'homologie ont leurs quatre sommets sur les deux axes de symptose de ces deux courbes, pourvu qu'on ne prenne, pour aucun sommet, le point de concours de deux tangentes à la même courbe.

ont leurs sommets aux quatre points de contact de deux coniques avec leurs tangentes issues d'un même point de leur axe de symptose ont leur quatre côtés concourant aux deux centres d'homologie de ces deux courbes, pourvu qu'on ne prenne, pour aucun côté, une droite contenant les deux points de contact d'une même courbe.

20. M. Poncelet a discuté très-clairement l'existence des centres d'homologie et des axes de symptose, et nous ne saurions mieux faire que de renvoyer, sur ce sujet, à son *Traité des propriétés projectives*. On y verra que, quand deux coniques se coupent en quatre points, elles ont, comme nous l'avons déjà vu (13), six centres d'homologie, qui sont les six intersections deux à deux de leurs quatre tangentes communes, et six axes de symptose, qui sont les six droites qui joignent deux à deux leurs quatre points d'intersection. On peut alors appeler *centres d'homologie conjugués* deux centres d'homologie qui n'appartiennent pas à une même tangente, et *axes de symptose conjugués*, ceux qui ne concourrent pas en un même point commun aux deux courbes.

Dans tous les autres cas, où les deux courbes ne se coupent pas ou bien n'ont que deux points d'intersection, il n'y a que deux axes de symptose et deux centres d'homologie seulement ; et ces droites et ces points ont toujours une existence réelle. La raison analytique de ce fait est que les trois systèmes d'axes de symptose conjugués, ainsi que les trois systèmes de centres d'homologie conjugués, sont donnés par une même équation du troisième degré qui a nécessairement une racine réelle, au moins ; mais qui n'en a qu'une seule de réelle lorsqu'elles ne le sont pas toutes les trois.

On sait (3, 4) que, dans le système transformé, toute droite qui contient l'un des centres de similitude, a ses pôles relatifs aux deux courbes en ligne droite avec ce même centre, et que tout point situé sur l'axe radical a le point de concours de ses polaires relatives aux deux courbes sur ce même axe. En repassant donc au système primitif, on aura ces deux théorèmes :

21. *Les polaires de tout point situé sur l'un des axes de symptose de deux coniques, prises relativement à ces courbes, vont concourir sur ce même axe.*

21. *Les pôles de toute droite qui passe par l'un des centres d'homologie de deux coniques, pris relativement à ces courbes, sont en ligne droite avec ce même centre.*

Or, comme l'on sait, avec la règle seulement, construire la polaire d'un point donné ou le pôle d'une droite donnée, par rapport à une conique quelconque, il s'ensuit qu'avec la règle seulement, on peut résoudre ces deux problèmes.

22. *Etant donné un seul des points d'un axe de symptose de deux coniques, construire un autre point de cet axe, et par suite cet axe lui-même ?*

22. *Etant donnée une seule des droites qui contiennent un centre d'homologie de deux coniques, construire une autre droite qui le contienne également, et par suite ce centre lui-même ?*

23. L'axe de symptose étant ainsi construit, on en pourra conclure (19) les deux centres d'homologie correspondans, et ensuite, au moyen de l'un d'eux, l'axe de symptose conjugué.

Ainsi, pour déterminer deux axes de symptose conjugués, il suffit simplement de connaître un des points de la direction de l'un d'eux.

23. Le centre d'homologie étant ainsi construit, on en pourra conclure (19) les deux axes de symptose correspondans, et ensuite, au moyen de l'un d'eux, le centre d'homologie conjugué.

Ainsi, pour déterminer deux centres d'homologie conjugués, il suffit simplement de connaître une droite qui passe par l'un d'eux.

Il faut pourtant excepter le cas où le point donné serait un point commun aux deux courbes, car alors la construction se trouverait en défaut.

Il faut pourtant excepter le cas où la droite donnée serait une tangente commune aux deux courbes, car alors la construction serait en défaut.

La raison analytique de ce fait, est qu'alors le point donné ou la droite donnée se trouvant appartenir à la fois aux trois couples d'axes de symptose ou de centres d'homologie conjugués, le problème doit alors s'élever au troisième degré, et n'être plus dès lors résoluble avec la ligne droite et le cercle. Le cas où, au contraire, le problème se résout par les élémens, doit répondre à quelque circonstance particulière dans les équations du troisième degré.

24. Les axes de symptose de deux coniques, sont des lignes fort importantes, puisqu'elles font connaître les points d'intersection des deux courbes, et que ces points d'intersection donnent la solution de tout problème déterminé qui admet plus de deux solutions sans en admettre plus de quatre, lors même qu'un tel problème est étranger à la géométrie. On aurait donc beaucoup étendu le domaine de la géométrie, si l'on parvenait à construire, par la ligne droite et le cercle, les axes de symptose de deux coniques; on saurait alors résoudre les problèmes qui admettent trois et quatre solutions, comme on sait résoudre ceux qui n'en admettent que deux.

25. Algébriquement parlant, chacun des trois systèmes d'axes de symptose est une conique qui passe par les quatre points d'intersection, réels ou imaginaires, des deux courbes proposées. On pourra donc les déterminer comme il suit : Soient $M=0$, $M'=0$ les équations des deux courbes; l'équation commune à toutes coniques passant par les quatre mêmes points sera $M+\lambda M'=0$; et il s'agira de déterminer λ de telle sorte que le premier membre de cette dernière équation se décompose en deux facteurs rationnels du premier dégré, ce qui conduira à une équation du troisième degré

en λ. Les trois systèmes d'axes de symptose de deux coniques faisant ainsi partie des coniques qu'on peut faire passer par les points d'intersection de ces deux là, ces systèmes d'axes doivent jouir des propriétés communes à toutes ces courbes.

Avant d'aller plus loin, faisons remarquer quelques relations harmoniques qui existent entre deux axes de symptose conjugués et les deux centres d'homologie correspondans, relations qu'il peut être utile de connaître.

On sait que, dans deux coniques homothétiques (9), l'axe radical est également distant des deux polaires de similitude qui répondent à un même centre; il en résulte ces deux théorèmes :

26. *Les pôles de l'un des axes de symptose de deux coniques quelconques, pris par rapport à ces courbes, divisent harmoniquement la droite qui joint les deux centres d'homologie relatifs à cet axe.*

26. *Les polaires de l'un des centres d'homologie de deux coniques quelconques, prises par rapport à ces courbes, forment un faisceau harmonique avec les deux axes de symptose relatifs à cet axe.*

Ces deux propositions serviront à résoudre la question suivante :

27. *Etant donnés un axe de symptose et un centre d'homologie, déterminer l'axe de symptose et le centre d'homologie conjugués ?*

Nous ne nous sommes occupés, dans ce qui précède, que de la propriété principale du système de deux coniques, laquelle consiste dans l'existence des axes de symptose et des centres d'homologie; mais il en est d'autres moins importantes qui se rattachent à celles-là, et qu'on déduira également de la considération des coniques homothétiques.

Par exemple, de ce que les centres de figure et les centres de similitude de deux coniques homothétiques sont quatre points en ligne droite, il en résultera les propositions suivantes :

28. *Les polaires relatives à deux coniques de deux centres d'homologie conjugués l'un à l'autre et les deux axes de symptose qui leur répondent, sont quatre droites qui concourent en un même point.*

28. *Les pôles relatifs à deux coniques de deux axes de symptose conjugués l'un à l'autre et les deux centres d'homologie qui leur répondent, sont quatre points qui appartiennent à une même droite.*

Pareillement, de ce qu'un point situé à l'infini, sur l'axe radical de deux coniques homothétiques a pour polaires dans les deux courbes, la droite qui joint leurs centres de similitude, il en résultera les propositions suivantes qui n'en font proprement qu'une seule :

29. *La droite qui joint des centres d'homologie conjugués de deux coniques a pour pôle commun, dans les deux courbes, le point de concours des axes de symptose conjugués correspondant à ces deux centres*

29. *Le point de concours des axes de symptose conjugués de deux coniques a pour polaire commune, dans les deux courbes, la droite qui joint les centres d'homologie conjugués correspondant à ces deux axes.*

30. Si donc on construit deux triangles dont l'un ait pour ses sommets les points de concours des trois couples d'axes de symptose conjugués de deux coniques, et dont l'autre ait pour côtés les droites qui joignent leurs trois couples de centres d'homologie conjugués, les sommets du premier triangle seront, pour l'une et l'autre conique, les pôles communs respectifs des côtés correspondans du second, lesquels seront à l'inverse, pour ces deux courbes, les polaires communes respectives des sommets correspondans du premier. Ces deux triangles pourront quelquefois se réduire à un point et une droite, mais ils pourront aussi avoir une existence effective, dans le cas même où les deux coniques n'auront qu'un seul système d'axes de symptose et un seul système de centres d'homologie.

§. IV.

Propriétés des séries de coniques qui ont un centre d'homologie ou un axe de symptose commun.

31. Occupons-nous présentement des séries de coniques qui ont un centre d'homologie commun ou un axe de symptose commun. Il nous suffira de nous occuper ici des séries de coniques de la première de ces deux sortes ; tout ce qui concerne les autres pourra être déduit de ce que nous aurons dit de celles-là, à l'aide de la théorie des polaires réciproques.

En prenant le centre d'homologie commun pour centre de la conique directrice, toutes les polaires réciproques de ces courbes seront des coniques homothétiques ; leurs propriétés dépendront d'ailleurs des conditions particulières auxquelles elles se trouveront assujetties ; et, avec les modifications convenables, ces propriétés seront transportables aux coniques proposées.

Par exemple, on sait (6) que les cordes communes à trois coniques homothétiques prises deux à deux concourent toutes trois en un même point ; d'où on conclura les propositions suivantes :

32. *Si trois coniques ont un centre d'homologie commun, les centres d'homologie conjugués à celui-là, dans les trois courbes, appartiendront à une même droite.*

32. *Si trois coniques ont un axe de symptose commun, les axes de symptose conjugués à celui-là, dans les trois courbes, concourront en un même point.*

De ce que trois coniques homothétiques ont (6), prises deux à deux, six centres de similitude, distribués trois à trois aux intersections de quatre droites, il en résultera ce qui suit :

33. *Si trois coniques ont un centre d'homologie commun, leurs*

33. *Si trois coniques ont un axe de symptose commun, leurs six*

six axes de symptose conjugués, relatifs à ce centre, passeront trois à trois par les quatre mêmes points.

centres d'homologie conjugués, relatifs à cet axe, seront distribués trois à trois aux intersections de quatre droites.

On sait que si, du centre radical de trois coniques homothétiques, on mène des tangentes à ces courbes, leurs six points de contact appartiendront à une quatrième conique qui leur sera homothétique, et qui aura ce point pour centre. De là résulte ce qui suit :

34. *Si trois coniques ont un centre d'homologie commun, la transversale qui contiendra leurs trois centres d'homologie conjugués à celui-là, les coupera en six points dont les tangentes envelopperont une quatrième conique qui aura pour centre d'homologie, avec chacune des trois autres, le centre d'homologie commun. La transversale sera la polaire de ce centre, relativement à cette quatrième conique, considérée comme directrice.*

34. *Si trois coniques ont un axe de symptôse commun, et que, du point de concours des trois axes de symptose conjugués à celui-là, on mène des tangentes à ces courbes, leurs six points de contact appartiendront à une quatrième conique qui aura pour axe de symptose avec chacune des trois autres l'axe de symptose commun. Le point de concours des tangentes sera le pôle de cet axe, relativement à cette quatrième conique considérée comme directrice.*

35. Quand deux coniques se touchent, il est manifeste que leur point de contact est un de leurs centres d'homologie, et que leur tangente commune en ce point est un de leurs axes de symptose. En appliquant cette remarque aux précédens théorèmes, on en obtiendra de nouveaux qui correspondront aux théorèmes sur le contact des courbes homothétiques. En voici quelques exemples.

Deux coniques étant homothétiques, toutes les coniques qui leur sont tangentes et homothétiques ont leurs centres sur deux autres coniques, et leurs centres de similitude avec l'une et l'autre des deux proposées sont aussi sur deux autres coniques. De là résultent les conséquences suivantes :

36. *Si tant de coniques qu'on voudra sont toutes tangentes à deux coniques données, et ont pour centre d'homologie avec elles un des centres d'homologie de ces deux courbes, toutes les polaires de ce centre, dans cette suite de coniques, envelopperont deux nouvelles coniques ; et les axes de symptose de ces mêmes coniques avec l'une et l'autre des deux proposées envelopperont encore deux autres coniques.*

36. *Si tant de coniques qu'on voudra sont toutes tangentes à deux coniques données, et ont pour axe de symptose avec elles un des axes de symptose de ces deux courbes, tous les pôles de cet axe, dans cette suite de conique, seront situés sur deux nouvelles coniques ; et les centres d'homologie de ces mêmes coniques avec l'une et l'autre des deux proposées seront encore situés sur deux autres coniques.*

On sait (*Annales*, tom. XVII, pag. 309) que les droites qui joignent le centre radical de trois coniques homothétiques aux pôles de l'un quelconque de leurs axes de similitude, pris tour à tour par rapport à chacune d'elles, les coupent aux points de contact avec elles de deux autres coniques qui leur sont homothétiques. Il n'en faut pas davantage pour résoudre les deux problèmes suivans :

37. *PROBLÈME. Etant données trois coniques qui ont un centre commun d'homologie, décrire une quatrième conique qui, les touchant toutes trois, ait avec elles ce même centre d'homologie commun ?*

Solution. Déterminez (32) la

37. *PROBLÈME. Etant données trois coniques qui ont un axe de symptose commun, décrire une quatrième conique qui, les touchant toutes trois, ait avec elles ce même axe de symptose commun ?*

Solution. Déterminez (32) le

transversale qui contient les conjugués, relatifs aux trois courbes du centre d'homologie commun; déterminez aussi (33) les quatre points de concours des six axes de symptose, conjugués deux à deux, relatifs à ce centre commun; les polaires relatives aux trois courbes de l'un quelconque de ces quatre points de concours couperont la transversale en trois points tels que, si de chacun d'eux on mène deux tangentes à la conique correspondante, les points de contact seront les six points où elles seront touchées par deux des coniques qui résolvent le problème.

En opérant tour à tour sur les quatre points de concours des six axes de symptose, comme nous venons de le prescrire pour l'un d'eux, on obtiendra les huit solutions dont le problème est susceptible.

point de concours des conjugués, relatifs aux trois courbes, de l'axe de symptose commun; déterminez aussi (33) les quatre droites qui contiennent les six centres d'homologie, conjugués deux à deux, relatifs à cet axe commun; en joignant, par trois droites, le point de concours des trois axes de symptose aux polaires de l'une quelconque des quatre droites relatives aux trois courbes; ces trois droites les couperont respectivemement aux six points où elles seront touchées par deux des coniques qui résolvent le problème.

En opérant tour à tour sur les quatre droites qui contiennent les six centres d'homologie, comme nous venons de le prescrire pour l'une d'elles, on obtiendra les huit solutions dont le problème est susceptible.

§. V.

Propriétés des systèmes de coniques qui satisfont à quatre conditions.

38. Occupons-nous présentement de la recherche des principales propriétés d'un système de coniques qui satisfont à quatre condi-

tions données, telles que de passer par des points ou de toucher des droites données. Nous avons ici cinq cas à considérer; mais, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, il nous suffira de nous occuper des deux premiers et de la moitié des considérations relatives au troisième, pour pouvoir immédiatement en déduire tout le reste.

Considérons d'abord le cas où toutes les coniques touchent quatre droites données Remarquons en premier lieu que, si tant de coniques homothétiques qu'on voudra, ont deux points communs, leurs polaires réciproques seront toutes tangentes aux deux mêmes droites, polaires de ces deux points; mais elles ont, d'autre part, pour centre d'homologie commun, le centre de la conique directrice; elles auront donc deux centres d'homologie communs, ou, en d'autres termes, elles seront inscrites à un même quadrilatère.

Or, quand des coniques homothétiques passent toutes par les deux mêmes points,

1.° Leurs centres de figure sont en ligne droite.

2.° Leurs centres de similitude sont sur cette droite.

3.° Si on leur circonscrit des angles ayant le sommet commun, leurs cordes de contact concourront en un même point; en outre, la droite qui joindra ce dernier point au sommet commun sera divisée en deux parties égales par la corde commune à toutes les coniques; enfin, cette droite sera divisée harmoniquement par chacune de ces courbes.

4.° Enfin, si on les coupe par une transversale, les pôles de cette droite, relatifs à toutes ces courbes, appartiendront à une nouvelle conique.

On conclut de là ces deux théorèmes:

39. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra sont ins-*

39. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra sont cir-*

crites à un même quadrilatère ; 1.° les polaires de chaque centre d'homologie de ces courbes concourront en un même point ; 2.° les axes de symptose de ces courbes, relatifs à ce centre, passeront par ce même point ; 3.° si l'on tire une transversale droite arbitraire, ses pôles, dans toutes les coniques, appartiendront à une même droite ; en outre, cette droite et la transversale diviseront harmoniquement la distance entre deux centres d'homologie conjugués, et formeront un faisceau harmonique avec les tangentes menées à l'une quelconque de ces courbes par leur point d'intersection ; 4.° enfin, si l'on fait d'un point arbitraire le sommet commun d'une suite d'angles circonscrits à ces courbes, les cordes de contact envelopperont toutes une même conique.

On peut ajouter encore que, *si, par le sommet commun des angles circonscrits, on fait passer une transversale droite mobile, la droite, lieu de ses pôles relatifs à toutes ces courbes, enveloppera cette même dernière conique.*

conscrites à un même quadrilatère ; 1.° les pôles de chaque axe de symptose de ces courbes appartiendront à une même droite ; 2.° les centres d'homologie de ces courbes, relatifs à cet axe, seront sur cette même droite ; 3.° si d'un même point arbitraire, comme sommet, on circonscrit des angles à toutes ces coniques, leurs cordes de contact concourront toutes en un même point ; en outre, les droites menées du point de concours de deux axes de symptose conjugués à ce point et au sommet commun formeront, avec ces axes, un faisceau harmonique, et la droite qui joindra ces deux mêmes points sera coupée harmoniquement par toutes les courbes ; 4.° enfin, si l'on mène une transversale arbitraire, ses pôles relatifs à toutes ces courbes appartiendront à une même conique.

On peut ajouter encore que, *si un point se meut sur la transversale, le point de concours des polaires de ce point relatives à toutes ces courbes décrira cette même dernière conique.*

Si, dans le système de coniques homothétiques, on prend pour sommet commun des angles circonscrits, le centre même de la conique directrice, les cordes de contact auront, pour pôles relatifs à cette conique directrice, les centres des coniques inscrites au quadrilatère ; et alors la troisième partie du théorème deviendra cette proposition connue de Newton :

40. *Les centres de toutes les coniques qui ont deux centres d'homologie communs appartiennent à une même droite qui passe par le milieu de celle qui joint ces deux centres d'homologie.*

On parvient encore à cette proposition, en supposant, dans la troisième partie du théorème, que la transversale passe à l'infini.

La troisième partie de l'un et de l'autre théorèmes contient implicitement une propriété assez remarquable du système de quatre droites ou de celui de quatre points, qui paraît n'avoir point encore été signalée ; voici en quoi elle consiste :

41. *Six points étant distribués trois à trois aux intersections de quatre droites, et ceux qui n'appartiennent pas à la même droite étant joints deux à deux par trois droites ; toute transversale coupera ces dernières en trois points tels que leurs quatrièmes harmoniques appartiendront toutes trois à une même droite. En outre cette dernière droite et la transversale formeront un faisceau harmonique avec les droites qui iront de leur point de concours aux deux extrémités de l'une quelconque de nos trois droites.*

41. *Six droites passant trois à trois par quatre points donnés, et celles qui ne passent pas par le même point concourant deux à deux en trois autres points ; si de chacun de ces points on mène trois droites à un même point quelconque de leur plan, les quatrièmes harmoniques de ces droites concourront toutes trois en un même point. En outre, la droite qui joindra ce dernier point au premier sera coupée harmoniquement par les deux droites qui passent par l'un quelconque de nos trois points.*

Si, dans le premier de ces deux théorèmes, on suppose que la transversale passe à l'infini, on obtiendra ce théorème connu :

42. *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet appartiennent tous trois à une même droite.*

Il est facile de voir que, si plusieurs coniques homothétiques passent par les deux mêmes points, et qu'on les coupe toutes par une autre conique qui leur soit homothétique, les cordes d'intersection passeront par un même point et auront leurs pôles respectifs, relatifs à ces coniques, sur une même nouvelle conique. On conclut de là ces deux théorèmes :

43. *Tant de coniques qu'on voudra étant inscrites à un quadrilatère, si on les coupe toutes par une autre conique, tangente à deux des côtés de ce quadrilatère, et qu'on détermine les points de concours des deux autres tangentes communes à cette dernière conique et à chacune des premières ; 1.° tous ces points de concours appartiendront à une même droite ; 2.° leurs polaires respectives, relatives aux coniques proposées, envelopperont toutes une nouvelle conique.*

43. *Tant de coniques qu'on voudra étant circonscrites à un même quadrilatère, si on les coupe toutes par une autre conique, passant par deux des sommets de ce quadrilatère, et qu'on mène des droites par les deux autres points communs à cette dernière conique et à chacune des premières; 1.° toutes ces cordes communes concourront en un même point ; 2.° leurs pôles respectifs, relatifs aux coniques proposées, appartiendront tous à une nouvelle conique.*

On pourrait déduire de nouveau de ces deux derniers théorèmes la quatrième partie de ceux que nous avons énoncé plus haut (39) ; mais cela nous entraînerait dans des détails de peu d'intérêt.

Enfin, si plusieurs coniques homothétiques passent par les deux mêmes points, et qu'on les coupe par deux autres coniques qui leur soient homothétiques, les cordes communes à ces deux dernières coniques et à chacune des autres se couperont en un point qui sera sur la corde d'intersection de ces deux dernières, et les polaires des points ainsi déterminés, respectivement relatifs à ces coniques, envelopperont une même nouvelle conique. De là résultent ces deux théorèmes :

44. *Tant de coniques qu'on voudra étant inscrites à un même quadrilatère, si l'on trace deux autres coniques qui soient tangentes à deux des côtés de ce quadrilatère, et qu'on détermine le point de concours des deux autres tangentes communes à chacune de ces deux dernières et à toutes les autres, en joignant ensuite deux à deux par des droites les points de concours correspondans ;* 1.° *ces droites concourront toutes en un même point fixe, point de concours des tangentes communes aux deux dernières coniques ;* 2.° *leurs pôles respectifs, dans les premières coniques, appartiendront tous à une même conique.*

45. *Tant de coniques qu'on voudra étant circonscrites à un même quadrilatère, si l'on trace deux autres coniques qui passent par deux des sommets de ce quadrilatère et qu'on joigne par des droites les deux autres points communs à chacune de ces deux dernières et à toutes les autres, en prolongeant ensuite deux à deux jusqu'à leurs points de concours les droites correspondantes ;* 1.° *ces points appartiendront tous à une même droite fixe, corde commune aux deux dernières coniques ;* 2.° *leurs polaires respectives, dans les premières coniques, envelopperont toutes une même conique.*

Passons maintenant à la considération des coniques tangentes à trois droites et passant par un point donné. Pour cela, considérons des coniques homothétiques toutes tangentes à une même droite et passant par un même point. On verra facilement ;

1.° Que le lieu de leurs centres est une conique.

2.° Que les pôles d'une même droite quelconque relatifs à ces courbes appartiennent à une autre conique.

3.° Que les polaires d'un même point quelconque relatives à ces courbes enveloppent une troisième conique.

De là résulteront ces deux théorèmes :

45. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra sont tangentes aux trois mêmes droites et passent par un même point ;* 1.° *les droites qui joignent deux à deux les points de contact de ces courbes avec deux quelconques des trois tangentes communes enveloppent une conique ;* 2.° *les pôles d'une transversale quelconque, relatifs à toutes ces coniques, appartiennent tous à une autre conique ;* 3.° *enfin, les polaires d'un point quelconque, relatives à ces mêmes coniques, enveloppent une troisième conique.*

45. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra passent par les trois mêmes points et touchent une même droite ;* 1.° *les points de concours deux à deux des tangentes à ces courbes par deux quelconques des trois points communs appartiennent tous à une conique ;* 2.° *les polaires d'un même point quelconque, relatives à toutes ces coniques, enveloppent une autre conique ;* 3.° *enfin, les pôles d'une transversale quelconque, relatifs à ces mêmes coniques, enveloppent une troisième conique.*

Considérons enfin une série de coniques touchant deux droites données et passant par deux points donnés. Il nous suffira, pour cela, de rechercher les propriétés d'une série de coniques homothétiques toutes inscrites à un même angle. Or, il est facile de voir qu'alors :

1.° Les cordes de contact de ces courbes avec les côtés de l'angle sont toutes parallèles.

2.° Les cordes d'intersection de ces coniques deux à deux sont aussi parallèles entre elles et aux cordes de contact.

3.° Enfin les polaires d'un même point, relatives à ces courbes, enveloppent une conique.

De là résulte ce double théorème :

46. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra touchent toutes les deux mêmes droites et passent toutes par les deux mêmes points* ;

1.° *Les sommets des angles circonscrits dont la corde de contact sera la corde commune, appartiendront à une même droite;*

2.° *Les tangentes communes à ces courbes, deux à deux, iront concourir sur cette droite ;*

3.° *Enfin, les pôles d'une même droite quelconque, relatifs à ces courbes, appartiendront à une même conique.*

1.° *Les cordes de contact de l'angle circonscrit commun concourront toutes en un même point ;*

2.° *Les cordes communes à ces courbes, deux à deux, passeront toutes par ce point ;*

3.° *Enfin, les polaires d'un point quelconque, relatives à ces courbes, envelopperont une même conique.*

Dans un prochain article, nous examinerons ce que deviennent ces divers théorèmes, lorsque quelques-unes des coniques qu'on y considère se réduisent à des droites ou à des points.
