ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Géométrie de situation. Recherche sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 253-269
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__253_0>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherche sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

§. I.

Propriétés des lignes courbes.

Dans tout ce qui va suivre, nous adopterons les définitions suivantes :

1. Une courbe sera dite du $m.^{ieme}$ degré, lorsqu'elle pourra couper une même droite en m points.

2. La *courbe polaire d'un point*, par rapport à une directrice du $m.^{ieme}$ degré, sera la courbe du $(m-1)^{ieme}$ degré qui contiendra les points de contact de toutes les tangentes à celle-là issues de ce point (*).

1. Une courbe sera dite de $m.^{ieme}$ classe, lorsqu'on pourra lui mener m tangentes d'un même point.

2. La *courbe polaire d'une droite*, par rapport à une directrice de $m.^{ieme}$ classe, sera la courbe de $(m-1)^{ieme}$ classe que toucheront les tangentes menées à celle-là par tous ses points d'intersection avec cette droite (*).

(*) Voy. *Annales*, tom. XVI, pag. 315 et 319, et tom. XVII, pag. 91 et 93.

3. Les *points polaires d'une droite* seront les $(m-1)^2$ points communs aux courbes polaires de tous les points de cette droite (*).

3. Les *droites polaires d'un point* seront les $(m-1)^2$ tangentes communes aux courbes polaires de toutes les droites qui passent par ce point (*).

Cela posé, considérons deux lignes du $m.^{ieme}$ degré ayant respectivement pour équations

$$M=0\ , \qquad M'=0\ ;$$

en désignant par α une indéterminée, l'équation

$$M+\alpha M'=0 \qquad (1)$$

appartiendra à une troisième courbe, aussi du $m.^{ieme}$ degré, passant par les m^2 points d'intersection des deux premières, quel que soit α.

Différentiant cette dernière, et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par a, l'équation résultante

$$\frac{dM}{dx}+a\frac{dM}{dy}+\alpha\left\{\frac{dM'}{dx}+a\frac{dM'}{dy}\right\}=0\ , \qquad (2)$$

sera celle de la courbe du $(m-1)^{ieme}$ degré qui contiendra les points de contact de toutes les tangentes menées à la courbe (1) parallèlement à la droite fixe ayant pour équation

$$y=ax\ .$$

Or, cette équation est évidemment vérifiée, quelle que soit la valeur attribuée à l'indéterminée α, en posant les deux suivantes :

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

$$\frac{dM}{dx}+a\frac{dM}{dy}=0\,,\qquad \frac{dM'}{dx}+a\frac{dM'}{dy}=0\,,\qquad (3)$$

qui correspondent à deux courbes invariables du $(m-1)^{ieme}$ degré, et dont le système appartient à $(m-1)^2$ points fixes ; d'où il suit que *les courbes polaires d'un point situé à l'infini, relatives à tant de courbes qu'on voudra du* m.^{ieme} *degré, passant par les* m^2 *mêmes points fixes, passent toutes par les* (m$-$1)^2 *mêmes points, également fixes.*

Si l'on fait varier la direction de la droite $y=ax$, ces $(m-1)^2$ points décriront une courbe dont on obtiendra l'équation en éliminant la variable a entre les équations (3) ; ce qui donnera celle-ci :

$$\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dx}=0\,,\qquad (4)$$

laquelle est évidemment du $[2(m-1)]^{ieme}$ dégré. Ainsi, *les* (m$-$1)^2 *points communs aux courbes polaires d'un point situé à l'infini, relatives à tant de courbes qu'on voudra du* m.^{ieme} *degré, passant par les* m^2 *mêmes points fixes, décrivent une courbe du* [2(m$-$1)]^{ieme} *degré, lorsque ce point décrit une droite également située à l'infini.*

En mettant l'équation (2) sous la forme

$$\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}+a\left\{\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}\right\}=0\,,\qquad (5)$$

on voit, sur-le-champ, que les points polaires d'une droite située à l'infini, relatifs à la courbe (1), sont donnés par le système d'équations

$$\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}=0\,,\qquad \frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}=0\,;\qquad (6)$$

on aura donc l'équation de la courbe décrite par les points polaires lorsqu'on fait varier α, en éliminant cette indéterminée entre les deux équations (6) ; ce qui conduira de nouveau à l'équation (4). Ainsi, *les points polaires d'une droite située à l'infini, relatifs à toutes les courbes du* m^{ieme} *degré qui passent par les* m^2 *mêmes points fixes, sont tous situés sur la même courbe du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré dont il vient d'être question.*

En généralisant ces trois propositions, à l'aide de la théorie des projections, et en déduisant en outre de chaque proposition, ainsi généralisée, sa correlative, au moyen de la théorie des polaires réciproques, on obtiendra les théorèmes suivans :

THÉORÈME I. Tant de courbes du m^{ieme} *degré qu'on voudra, passant toutes par les* m^2 *mêmes points fixes ;* 1.° *les courbes polaires d'un point quelconque, relatives à toutes ces courbes, passeront toutes par les* $(m-1)^2$ *mêmes points également fixes ;* 2.° *si ce point parcourt une droite, ces* $(m-1)^2$ *points, décriront une courbe du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré ;* 3.° *enfin, les points polaires de cette droite seront situés sur cette même courbe du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré.*

THÉORÈME I. Tant de courbes de m^{ieme} *classe qu'on voudra, ayant toutes les* m^2 *mêmes tangentes fixes ;* 1.° *les courbes polaires d'une droite quelconque, relatives à toutes ces courbes, auront toutes les* $(m-1)^2$ *mêmes tangentes fixes ;* 2.° *si cette droite tourne autour de l'un de ses points, ces* $(m-1)^2$ *tangentes envelopperont une courbe de* $[2(m-1)]^{ieme}$ *classe ;* 3.° *enfin, les droites polaires de ce point toucheront toutes cette même courbe de* $[2(m-1)]^{ieme}$ *classe.*

Dans la supposition particulière de $m=2$, on déduira de ces théorèmes les corollaires suivans :

Corollaire. Tant de lignes du second ordre qu'on voudra étant circonscrites à un même quadrilatère ; 1.° les polaires d'un point quelconque, relatives à toutes ces

Corollaire. Tant de lignes du second ordre qu'on voudra étant inscrites à un même quadrilatère ; 1.° les pôles d'une droite quelconque, relatifs à toutes ces courbes, apcourbes, se coupent toutes en un même point fixe ; 2.° si le pôle commun à toutes ces courbes parcourt une droite, le point de concours de toutes ses polaires parcourra un ligne du second ordre ; 3.° enfin, cette dernière courbe contiendra les pôles de la droite parcourue par le pôle commun (*).

partiendront à une même droite fixe ; 2.° si la polaire commune à toutes ces courbes tourne autour de l'un de ses points, la droite, lieu des pôles, enveloppera une ligne du second ordre ; 3.° enfin, cette dernière courbe sera touchée par toutes les polaires du point autour duquel la polaire aura tourné (*).

§. II.

Propriétés des surfaces courbes.

Dans tout ce qui va suivre, nous adopterons les définitions suivantes :

1. Une surface sera dite du

1. Une surface sera dite du

(*) Si l'on suppose, dans ces corollaires, que soit le point, soit la droite, passe à l'infini, on en déduira les propositions suivantes :

1.° *Les conjugués des diamètres parallèles dans les lignes du second ordre circonscrites à un même quadrilatère concourent en un même point.* Cette proposition parait due à M. Lamé (*Annales*, tom. VII, pag. 233).

2.° *En faisant varier la direction commune des diamètres parallèles, leur point de concours décrira une nouvelle ligne du second ordre, lieu des centres de toutes les autres* (Voy. la pag 106 du présent volume).

3.° *Les centres de toutes les lignes du second ordre inscrites à un même quadrilatère appartiennent à une même droite.* Cette proposition est de Newton (*Annales*, tom. XII, pag. 109, et tom. XIV, pag. 309).

4.° Les conjugués des diamètres parallèles de ces mêmes lignes, du second ordre, enveloppent une autre ligne du même ordre.

On pourrait, au surplus, généraliser ces dernières propositions et les étendre à des courbes de tous les degrés et de toutes classes, en appelant *points centraux* de ces sortes de lignes, les pôles d'une droite située à l'infini, et *droites diamètrales* les polaires d'un point également situé à l'infini.

$m.^{ieme}$ degré, lorsqu'elle pourra couper une même droite en m points.

$m.^{ieme}$ classe, lorsqu'on pourra par une même droite lui conduire m plans tangens.

2. La *surface polaire d'un point*, par rapport à une surface directrice du $m.^{ieme}$ degré, sera la surface du $(m-1)^{ieme}$ degré qui contiendra les lignes de contact de la surface conique circonscrite à celle-là qui a son sommet en ce point.

2. La *surface polaire d'un plan*, par rapport à une surface directrice de $m.^{ieme}$ classe, sera la surface de $(m-1)^{ieme}$ classe inscrite à la surface développable qui touche celle-là suivant ses lignes d'intersection avec ce plan.

3. Les *points polaires d'un plan* seront les $(m-1)^3$ points communs aux surfaces polaires des différens points de ce plan (*).

3. Les *plans polaires d'un point* seront les $(m-1)^3$ plans tangens communs aux surfaces polaires des différens plans conduits par ce point (*).

4. Enfin, la *courbe polaire d'une droite* sera la courbe à double courbure suivant laquelle se couperont les surfaces polaires des divers points de cette droite (**).

4. Enfin, la *surface développable polaire d'une droite* sera l'enveloppe des surfaces polaires de tous les plans conduits par cette droite (**).

Il résulte de ces définitions:

1.° Que la surface polaire d'un point contient les pôles de tous les plans menés par ce point, ainsi que les courbes polaires de toutes les droites conduites par le même point.

1.° Que la surface polaire d'un plan touche les plans polaires de tous les points de ce plan, ainsi que les surfaces développables polaires de toutes les droites tracées sur ce plan.

2.° Que la courbe polaire d'une droite renferme les pôles de tous

2.° Que la surface développable polaire d'une droite touche

(*) Voy. le *théorème II* de la pag. 153 du présent volume.

(**) Voy. encore le même théorème.

les plans que l'on peut conduire par cette droite.

3.° Que les courbes polaires de plusieurs droites situées dans un même plan passent toutes par les pôles de ce plan.

les plans polaires de tous les points de cette droite.

3.° Que les surfaces développables polaires de plusieurs droites qui concourent en un même point touchent toutes les plans polaires de ce point.

Cela posé, considérons d'abord deux surfaces du $m.^{ieme}$ degré, données par les équations

$$M=0\ , \qquad M'=0\ ;$$

en désignant toujours par α une constante arbitraire, l'équation

$$M+\alpha M'=0 \qquad (1)$$

appartiendra à une nouvelle surface du même degré, contenant, quel que soit α, les intersections des deux premières.

En différentiant celle-ci et remplaçant respectivement par a et b les coefficiens $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$, l'équation résultante

$$a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}+\alpha\left\{a\frac{dM'}{dx}+b\frac{dM'}{dy}+\frac{dM'}{dz}\right\}=0\ , \qquad (2)$$

du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, appartiendra à la surface qui contient les courbes à double courbure, lieu des points où la surface (1) est touchée par toutes ses tangentes parallèles à la droite fixe donnée par les deux équations $x=az$ et $y=bz$; c'est-à-dire, en d'autres termes, que cette surface (2) contiendra les lignes de contact de la surface (1) avec la surface cylindrique dont toutes les arêtes ou élémens rectilignes seraient parallèles à cette droite fixe.

Or, cette surface (1), quelle que soit la constante α, contient les intersections des deux surfaces du $(m-1)^{ieme}$ degré

$$a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}=0\,,\qquad a\frac{dM'}{dx}+b\frac{dM'}{dy}+\frac{dM'}{dz}=0\;;\qquad (3)$$

donc, *les surfaces polaires d'un point situé à l'infini, relatives à tant de surfaces qu'on voudra du* m.^{ieme} *degré, se coupant suivant les mêmes courbes à double courbure, se coupent toutes aussi suivant les mêmes courbes à double courbure, intersections de deux surfaces du* $(m-1)^{ieme}$ *degré.*

Supposons que, la quantité a restant constante, on fasse varier l'autre b; la courbe à double courbure dont il s'agit engendrera une surface courbe dont on aura l'équation en éliminant b entre les deux équations (3), ce qui donnera

$$a\left\{\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}\right\}+\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM}{dy}=0\,.\quad (4)$$

Ainsi *les courbes à double courbure suivant lesquelles diverses surfaces du* m.^{ieme} *degré, ayant les mêmes intersections, sont coupées par les surfaces polaires des points d'une droite située à l'infini, appartiennent toutes à une surface unique du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré.*

Si, au lieu de faire varier b, on fait varier a, l'équation (4) sera remplacée par celle-ci

$$b\left\{\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dx}-\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM}{dx}\right\}+\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dx}-\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM}{dx}=0\qquad (5)$$

qui conduirait à des conclusions analogues. Or, il est facile de voir que les équations (4) et (5), quels que soient d'ailleurs a et b, sont satisfaites par les trois suivantes, ne comptant que pour deux seulement,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}=0\ ,\\
&\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dz}-\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM}{dz}=0\ ,\\
&\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dx}-\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM}{dx}=0\ ;
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

lesquelles conséquemment appartiennent à une courbe fixe à double courbure, intersection de deux surfaces du $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ degré; donc, *la surface du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré, dont il vient d'être question ci-dessus, passe constamment par une même courbe fixe, à double courbure, lorsqu'on fait mouvoir la droite située à l'infini dans un plan également situé à l'infini.*

En mettant l'équation (2) sous la forme

$$a\left\{\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}\right\}+b\left\{\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}\right\}+\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}=0\ ,\quad(7)$$

on voit de suite que la courbe polaire de la droite située à l'infini, dans le plan $x=az$, a pour ses équations

$$\left.\begin{aligned}
&a\left\{\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}\right\}+\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}=0\ ,\\
&\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}=0\ .
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Si l'on suppose donc que α soit variable, on obtiendra l'équation de la surface engendrée par cette courbe, en éliminant α entre ces deux équations, ce qui conduira de nouveau à l'équation (4). Ainsi, *les courbes polaires de la droite dont il s'agit sont situées* *sur la surface du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré dont il a été question ci-dessus.*

On conçoit également que les pôles d'un plan situé à l'infini, relatifs à la surface (1), sont donnés par les trois équations

$$\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}=0\,,\quad \frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}=0\,,\quad \frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}=0\,; \quad (9)$$

or, par l'élimination de α entre elles, on retombe de nouveau sur les équations (6); donc, *les pôles d'un plan situé à l'infini, relatifs à plusieurs surfaces du* m.$^{\text{ieme}}$ *degré, ayant les mêmes intersections, se trouvent sur la courbe à double courbure, intersection des surfaces du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré dont il a été question ci-dessus.*

En généralisant ces diverses propositions, au moyen de la théorie des projections, et en leur joignant celles que la théorie des polaires réciproques permet ensuite d'en déduire, on obtiendra les théorèmes suivans:

THÉORÈME II. Tant de surfaces du m.$^{\text{ieme}}$ *degré qu'on voudra se coupant toutes suivant les mêmes courbes à double courbure, 1.° les surfaces polaires d'un point quelconque de l'espace, relatives à toutes celles-là, se coupent toutes suivant une même courbe à double courbure; 2.° si ce point parcourt une droite, la courbe à double courbure engendrera, dans son mouvement, une surface du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré; 3.° les courbes polaires de cette droite seront situées sur cette même surface du*

THÉORÈME II. Tant de surfaces de m.$^{\text{ieme}}$ *classe qu'on voudra, étant toutes inscrites à une même surface développable, 1.° les surfaces polaires d'un plan quelconque, relatives à toutes celles-là, sont toutes inscrites à une autre surface développable; 2.° si ce plan tourne autour d'une droite, cette dernière surface développable sera mue de manière à envelopper constamment une surface fixe de* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *classe; 3.° les surfaces développables polaires de cette droite seront toutes circons-*

$[2(m-1)]^{ieme}$ degré; 4.° si cette droite décrit un plan, les surfaces correspondantes du $[2(m-1)]^{ieme}$ degré se couperont toutes suivant une même courbe à double courbure; 5.° enfin, cette courbe à double courbure contiendra les points polaires du plan décrit par cette droite.

crites à cette même surface de $[2(m-1)]^{ieme}$ classe; 4.° si cette droite tourne autour de l'un de ses points, les surfaces correspondantes de $[2(m-1)]^{ieme}$ classe, seront toutes circonscrites à une même surface développable; 5.° enfin, cette surface développable touchera tous les plans polaires du point autour duquel cette droite aura tourné.

Dans la supposition particulière de $m=2$, on déduira de ces théorèmes les corollaires suivans :

Corollaire. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra, se coupant suivant les mêmes courbes planes ou à double courbure; 1.° les plans polaires d'un point quelconque de l'espace, relatifs à toutes ces surfaces se couperont tous suivant la même droite; 2.° si ce point parcourt une droite, l'intersection des plans polaires engendrera, dans son mouvement, une surface gauche ou développable du second ordre; 3.° les polaires conjuguées de cette droite seront toutes situées sur cette surface; 4.° si cette droite décrit un plan, les surfaces gauches ou développables du second ordre correspondantes se couperont toutes suivant une même courbe à double

Corollaire. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra, étant inscrites à une même surface développable; 1.° les pôles d'un plan quelconque, relatifs à toutes ces surfaces, sont tous situés sur une même droite; 2.° si ce plan tourne autour d'une droite, la droite, lieu des pôles, engendrera dans son mouvement, une surface gauche ou développable du second ordre; 3.° les polaires conjuguées de cette droite seront toutes situées sur cette surface; 4.° si cette droite tourne autour d'un de ses points, les surfaces gauches ou développables du second ordre correspondantes envelopperont toutes une même surface développable; 5.° enfin, cette surface décourbure; 5.° enfin, cette courbe contiendra les pôles de ce plan (*).

veloppable touchera tous les plans polaires de ce point (*).

Considérons présentement trois surfaces du $m.^{ieme}$ degré, données respectivement par les trois équations

$$M=0\,, \qquad M'=0\,, \qquad M''=0\,.$$

Si l'on désigne par α et β deux constantes indéterminées, l'équation

$$M+\alpha M'+\beta M''=0\,, \qquad (1)$$

appartiendra à une quatrième surface du $m.^{ieme}$ degré, passant par les m^3 points d'intersection des trois premières, quels que soient α et β.

(*) Si l'on suppose, dans ces corollaires, que soit le point, soit la droite soit le plan passent à l'infini, on en déduira les propositions suivantes :

I. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra ayant les mêmes courbes d'intersection ; 1.° les plans diamétraux conjugués à leurs diamètres parallèles se coupent tous suivant une même droite ; 2.° si l'on fait varier la direction commune des diamètres parallèles, de manière à leur faire décrire un système de plans diamétraux parallèles, cette droite décrira une surface du second ordre ; 3.° les diamètres conjugués de ces plans diamétraux parallèles seront situés sur cette surface ; 4.° si l'on fait varier la direction commune de ce système de plans diamétraux parallèles, les surfaces du second ordre, lieux de leurs diamètres conjugués, se couperont toutes suivant une même courbe à double courbure ; 5.° enfin, cette courbe sera le lieu des centres des surfaces initiales.

II. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant inscrites à une même surface développable ; 1.° leurs centres sont tous situés sur une même droite ; 2.° leurs diamètres conjugués à des plans diamétraux parallèles sont situés tous sur une même surface du second ordre ; 3.° leurs plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles enveloppent une surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre.

Différentiant cette équation, en remplaçant respectivement les coefficiens différentiels $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ par a et b, l'équation résultante

$$a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}+\alpha\left\{a\frac{dM'}{dx}+b\frac{dM'}{dy}+\frac{dM'}{dz}\right\}+\beta\left\{a\frac{dM''}{dx}+b\frac{dM''}{dy}+\frac{dM''}{dz}\right\}=0, \quad (2)$$

représentera la surface du $(m-1)^{ième}$ degré, lieu de la ligne de contact de la surface (1) avec la surface cylindrique circonscrite ayant ses élémens rectilignes parallèles à la droite fixe donnée par les deux équations $x=az$ et $y=bz$.

Or, quelles que soient les valeurs assignées aux deux constantes indéterminées α et β, cette surface contient évidemment les $(m-1)^3$ points d'intersection des surfaces données par les trois équations

$$\left.\begin{aligned} a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}&=0, \\ a\frac{dM'}{dx}+b\frac{dM'}{dy}+\frac{dM'}{dz}&=0, \\ a\frac{dM''}{dx}+b\frac{dM''}{dy}+\frac{dM''}{dz}&=0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Donc, *les surfaces polaires d'un point situé à l'infini, relatives à tant de surfaces qu'on voudra du* m.^{ième} *degré, passant toutes les* m^3 *mêmes points fixes, passent elles-mêmes par les* $(m-1)^3$ *mêmes points fixes.*

Si l'on imagine que a reste constante et que b varie, ces $(m-1)^3$ points décriront une courbe dont on obtiendra les équations en éliminant b entre les équations (3), ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} a\left\{\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}\right\}+\left\{\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM}{dy}\right\}&=0; \\ a\left\{\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM''}{dy}-\frac{dM''}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}\right\}+\left\{\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM''}{dy}-\frac{dM''}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}\right\}&=0, \\ a\left\{\frac{dM''}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}-\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM''}{dy}\right\}+\left\{\frac{dM''}{dz}\cdot\frac{dM}{dy}-\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM''}{dy}\right\}&=0; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

équations du $[2(m-1)]^{ieme}$ degré qui ne doivent compter que pour deux seulement. Ainsi, *lorsqu'un point situé à l'infini décrit une droite également située à l'infini, les* $(m-1)^3$ *points communs aux surfaces polaires de ce point relatives à toutes les surfaces de* m.^{ieme} *degré, qui passent toutes par les* m^3 *mêmes points fixes, engendrent, dans leur mouvement, une courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré.*

Imaginons que a soit aussi variable, et éliminons cette quantité entre deux des équations (4); ce qui revient, au surplus, à éliminer a et b entre les équations (3), nous aurons ainsi

$$\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM''}{dz}-\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM''}{dy}+\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM''}{dy}$$
$$-\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM''}{dz}+\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM''}{dx}-\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM''}{dx}=0\;;\quad(5)$$

équation du $[3(m-1)]^{ieme}$ degré. Ainsi, *lorsqu'une droite située à l'infini décrit un plan également situé à l'infini, la courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré, lieu des points communs aux surfaces polaires des divers points de cette droite, relatives à toutes les surfaces du* m.^{ieme} *degré qui passent par les* m^3 *mêmes points fixes, engendre, dans son mouvement, une surface du* $[3(m-1)]^{ieme}$ *degré.*

En écrivant l'équation (2) sous la forme

$$a\left\{\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}+\beta\frac{dM''}{dx}\right\}+b\left\{\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}+\beta\frac{dM''}{dy}\right\}+\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}+\beta\frac{dM''}{dz}=0\;;\quad(6)$$

on voit de suite que la courbe polaire de la droite située à l'infini, dans le plan $x=az$, par rapport à la surface (1) a pour ses équations

$$\left.\begin{array}{c} a\left\{\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}+\beta\frac{dM''}{dx}\right\}+\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}+\beta\frac{dM''}{dz}=0\,, \\ \frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}+\beta\frac{dM''}{dy}=0\;; \end{array}\right\}\;(7)$$

chassant la variable α, l'équation résultante

$$\alpha\left[\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x}\right]+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z}-\beta$$

$$\left\{\alpha\left[\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}x}\right]+\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}z}\right\}=0\ ,$$

représentera une surface qui contiendra cette courbe polaire ; mais il est visible que cette surface contiendra aussi la courbe à double courbure (4). Donc, cette courbe polaire et la courbe (4) se coupent en $2(m-1)^3$ points. Ainsi, *les courbes polaires de la droite située à l'infini dont il a été question ci-dessus coupent individuellement en* $2(m-1)^3$ *points la courbe à double courbure dont il est question à l'endroit cité.*

Enfin, l'équation (2) fait voir que les points polaires d'un plan situé à l'infini, relatifs à la directrice (1), sont déterminés par les trois équations

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+\alpha\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x}+\beta\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}x}=0\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}+\alpha\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y}+\beta\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}y}=0\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}+\alpha\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z}+\beta\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}z}=0\ ;$$

mais, en éliminant α et β entre elles, on retombe de nouveau sur l'équation (5) ; donc, *les points polaires d'un plan situé à l'infini sont tous situés sur la surface du* $[3(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré dont il a été question ci-dessus.*

En généralisant ces résultats, par la théorie des projections, et en les doublant par la théorie des polaires réciproques, on obtiendra les théorèmes suivans :

THÉORÈME III. Tant de surfaces du m.$^{\text{ieme}}$ *degré qu'on voudra passant toutes par les* m^3 *mêmes points fixes* ; 1.° *les surfaces polaires de l'un quelcon-*

THÉORÈME III. Tant de surfaces de m.$^{\text{ieme}}$ *classe qu'on voudra ayant toutes les* m^3 *mêmes plans tangens fixes ;* 1.° *les surfaces polaires d'un plan quel-*

que des points de l'espace, relatives à toutes celles-là, passeront toutes par les $(m-1)^3$ *mêmes points également fixes ; 2.° si ce point parcourt une droite, les* $(m-1)^3$ *points, devenus mobiles, décriront dans l'espace une courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré ; 3.° les courbes polaires de cette droite coupent individuellement cette courbe à double courbure en* $2(m-1)^3$ *points ; 4.° si cette droite décrit un plan, la courbe à double courbure décrira dans l'espace une surface du* $[3(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré ; 5.° enfin, les points polaires de ce plan seront tous situés sur cette dernière surface.*

conque, relatives à toutes celles-là, toucheront toutes les $(m-1)^3$ *mêmes plans également fixes ; 2.° si ce plan tourne autour d'une droite, les* $(m-1)^3$ *plans, devenus mobiles, envelopperont une surface développable, circonscrite à deux surfaces de* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *classe ; 3.° les surfaces développables polaires de cette droite ont individuellement* $2(m-1)^3$ *plans tangens communs avec cette surface ; 4.° si cette droite tourne autour d'un de ses points, la surface développable enveloppera dans l'espace une surface de* $[3(m-1)]^{\text{ieme}}$ *classe ; 5.° enfin, les plans polaires de ce point toucheront tous cette dernière surface.*

Dans la supposition particulière de $m=2$, on déduira de ces théorèmes les corollaires suivans :

Corollaire. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant circonscrites à un même corps octogone ; 1.° les plans polaires de l'un quelconque des points de l'espace, relatifs à toutes ces surfaces, passeront tous par le même point fixe ; 2.° si ce point parcourt une droite, le point fixe devenu mobile décrira, dans l'espace, une courbe à double courbure,

Corollaire. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant inscrites à un même corps octaèdre ; 1.° les pôles d'un plan quelconque, relatifs à toutes ces surfaces, seront tous situés sur une même droite fixe ; 2.° si ce plan tourne autour d'une droite, la droite fixe devenue mobile décrira, dans l'espace, une surface développable, circonscrite à deux intersection de deux surfaces du second ordre ; 3.° les polaires conjuguées de cette droite couperont individuellement cette courbe à double courbure en deux points; 4.° si cette droite décrit un plan, la courbe à double courbure décrira dans l'espace une surface du troisième degré ; 5.° enfin , les pôles de ce plan seront tous situés sur cette dernière surface (*).

surfaces du second ordre; 3.° les polaires conjuguées de cette droite seront telles que, par chacune d'elles, on pourra conduire deux plans tangens à cette surface développable ; 4.° si cette droite tourne autour de l'un de ses points , la surface développable enveloppera une surface de troisième classe ; 5.° enfin , les plans polaires de ce point seront tous tangens à cette dernière surface (*).

(*) Si l'on suppose, dans ces corollaires, que soit le point, soit la droite, soit le point passe à l'infini, on en déduira les propositions suivantes :

I. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant circonscrites à un même corps octogone, 1.° leurs plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles concourront en un même point ; 2.° si l'on fait varier la direction commune des diamètres parallèles, de telle sorte qu'ils décrivent un système de plans diamétraux parallèles, ce point décrira une courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du second ordre; 3.° cette courbe sera rencontrée en deux points par tous les diamètres dont ces plans