ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

Questions résolues. Solution des deux premiers problèmes de géométrie proposés à la pag.124 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 202-215
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__202_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1827-1828, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux premiers problèmes de géométrie proposés à la pag. 124 *du présent volume* ;

Par M. VALLÈS, élève ingénieur des ponts et chaussées.

PROBLÈME I. *Dans l'intérieur d'un triangle, on en a construit un autre, à volonté, dont les côtés sont respectivement pa-*

rallèles aux siens, et qui est tourné dans le même sens. *Les côtés du triangle intérieur, prolongés jusqu'au périmètre de l'autre, partagent celui-ci en sept parties. Quelles sont les relations diverses qui existent entre ces parties ?*

Solution. Les sept parties du triangle divisé sont:

1.° Le triangle intérieur que nous désignerons par Δ;

2.° Trois parallélogrammes que nous désignerons par P, P', P'';

3.° Enfin, trois trapèzes, respectivement opposés, que nous désignerons par T, T', T''.

Par celui des trois sommets de Δ qui lui est commun avec P, concevons une parallèle au côté opposé; cette droite divisera respectivement les deux trapèzes T' et T'', en deux parallélogrammes p' et p'', et en deux triangles δ'' et δ', respectivement opposés; de sorte que l'on aura

$$p'+\delta''=T', \qquad p''+\delta'=T''; \qquad (1)$$

mais alors les six parties

$$\begin{matrix} P, & p', & p'', \\ \Delta, & \delta', & \delta'', \end{matrix}$$

se trouvant dans le cas du *théorème II* (pag. 114), on aura, comme alors,

$$P^2=4\delta'\delta'', \qquad p'^2=4\Delta\delta'', \qquad p''^2=4\Delta\delta'; \qquad (2)$$

et il s'agira d'éliminer p', p'', δ', δ'' entre les cinq équations (1) et (2).

En mettant dans les trois dernières les valeurs de δ' et δ'' tirées des deux premières, il vient

$$P^2=4(T'-p')(T''-p''), \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} p'^2=4\Delta(T'-p'), \\ p''^2=4\Delta(T''-p''). \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Des équations (4) on tire facilement

$$p'=2\sqrt{\Delta(\Delta+T')}-2\Delta\ ,$$

$$p''=2\sqrt{\Delta(\Delta+T'')}-2\Delta\ ;$$

et de là

$$T'-p'=2\Delta+T'-2\sqrt{\Delta(\Delta+T')}=(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})^2\ ,$$

$$T''-p''=2\Delta+T''-2\sqrt{\Delta(\Delta+T'')}=(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})^2\ ;$$

substituant dans l'équation (4) et extrayant la racine quarrée des deux membres, on aura finalement

$$P=2(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})\ .$$

Mais, comme nous aurions pu raisonner sur P' ou P'', comme nous avons raisonné sur P, il s'ensuit que les relations demandées entre les sept parties du triangle sont les trois suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
P&=2(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})\ ,\\
P'&=2(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})\ ;\\
P''&=2(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})\ .
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Ces équations donnent les valeurs de P, P', P'', lorsque les autres parties sont connues.

Il est facile d'en déduire d'autres qui donnent les valeurs de T, T', T'', en fonction de P, P', P'' et Δ. En divisant, en effet, par chacune d'elles le produit des deux autres, il vient, en chassant les dénominateurs,

$$P'P''=2P(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})^2\ ,$$

$$P''P=2P'(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})^2\ ,$$

$$PP'=2P''(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})^2\ ;$$

multipliant respectivement celles-ci par $2P$, $2P'$, $2P''$ et extrayant la racine quarrée des deux membres des équations résultantes, on aura

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2PP'P''}=2P(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})\ ,\\ \sqrt{2PP'P''}=2P'(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})\ ,\\ \sqrt{2PP'P''}=2P''(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})\ ;\end{array}\right\}\quad(5)$$

d'où, en transposant,

$$2P\sqrt{\Delta+T}=2P\sqrt{\Delta}+\sqrt{2PP'P''}\ ,$$

$$2P'\sqrt{\Delta+T'}=2P'\sqrt{\Delta}+\sqrt{2PP'P''}\ ,$$

$$2P''\sqrt{\Delta+T''}=2P''\sqrt{\Delta}+\sqrt{2PP'P''}\ ;$$

puis, en quarrant de nouveau, réduisant et divisant respectivement par $2P$, $2P'$, $2P''$,

$$\left.\begin{array}{l}2PT=P'P''+2\sqrt{2\Delta PP'P''}\ ,\\ 2P'T'=P''P+2\sqrt{2\Delta PP'P''}\ ,\\ 2P''T''=PP'+2\sqrt{2\Delta PP'P''}\ ;\end{array}\right\}\quad(\mathrm{II})$$

équations qui donneront T, T', T'', lorsque tout le reste sera connu.

En prenant la racine quarrée du double du produit des équations (I), on obtient

$$4(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})=\sqrt{2PP'P''}\ .\quad(\mathrm{III})$$

En égalant entre eux les seconds membres des équations (5), on obtient cette double équation

$$P(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})=P'(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})=P''(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta}) \quad . \qquad \text{(IV)}$$

On obtient enfin, en égalant entre elles les valeurs des radicaux, dans les équations (II),

$$2PT-P'P''=2P'T'-P''P=2P''T''-PP' \; ; \qquad \text{(V)}$$

équations délivrées de Δ.

Si, dans ces divers résultats, on suppose $\Delta=0$, on retombe sur les relations obtenues *théorème III* (pag. 114), comme cela doit être.

PROBLÈME II. Dans l'intérieur d'un tétraèdre, on en a construit un autre dont les faces sont respectivement parallèles aux siennes, et qui est tourné dans le même sens *que lui. Les faces du tétraèdre intérieur, prolongées jusqu'à la surface de l'autre, partagent celui-ci en quinze parties. Quelles sont les relations diverses qui existent entre ces parties ?*

Solution. Les quinze parties du tétraèdre divisé sont :

1.° Le tétraèdre intérieur que nous représenterons par Δ ;

2.° Quatre parallélipipèdes, que nous représenterons par P, P', P'', P''' ;

3.° Quatre troncs de tétraèdres, à bases parallèles, respectivement opposés, que nous représenterons par T, T', T'', T''' ;

4.° Enfin, six troncs de parallélipipède, que nous représenterons respectivement par (pp'), (pp''), (pp'''), $(p''p''')$, $(p'''p')$, $(p'p'')$, suivant les parallélipipèdes entre lesquels ils se trouveront situés.

Par celui des quatre sommets du tétraèdre Δ qui lui est commun avec le parallélipipède P, concevons un plan parallèle à celui de la face opposée ; ce plan divisera respectivement, savoir :

1.° Les troncs de parallélipipèdes (pp'), (pp''), (pp''') en trois parallélipipèdes Π', Π'', Π''', et en trois troncs de prismes quadrangulaires, ayant une arête latérale nulle, que nous désignerons par $(p\varpi')$, $(p\varpi'')$, $(p\varpi''')$;

2.° Les trois troncs de tétraèdres T', T'', T''', en trois tétraèdres δ', δ'', δ''', et en trois troncs de prismes quadrangulaires ayant une arête latérale nulle, que nous représenterons par $(\varpi''\varpi''')$, $(\varpi'''\varpi')$, $(\varpi'\varpi'')$.

En conséquence, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}\Pi'+(p\varpi')=(pp')\ ,\\ \Pi''+(p\varpi'')=(pp'')\ ,\\ \Pi'''+(p\varpi''')=(pp''')\ ;\end{array}\right\}(1)\qquad \left.\begin{array}{l}t'+(\varpi''\varpi''')=T'\ ,\\ t''+(\varpi'''\varpi')=T''\ ,\\ t'''+(\varpi'\varpi'')=T'''\ .\end{array}\right\}(2)$$

Mais alors les quatorze corps

$$P\,,\ \Pi'\,,\ \Pi''\,,\ \Pi''',\quad (p\varpi')\,,\ (p\varpi'')\,,\ (p\varpi''')\ ,$$

$$\Delta,\ \delta',\ \delta'',\ \delta''',\quad (\varpi''\varpi''')\,,(\varpi'''\varpi')\,,(\varpi'\varpi'')\ ,$$

se trouvant dans le cas du *théorème V* (pag. 121), on aura, comme alors,

$$\left.\begin{array}{l}(p\varpi')=3(\sqrt[3]{\delta''}+\sqrt[3]{\delta'''})\sqrt[3]{\delta''\delta'''}\ ,\\ (p\varpi'')=3(\sqrt[3]{\delta'''}+\sqrt[3]{\delta'})\sqrt[3]{\delta'''\delta'}\ ,\\ (p\varpi''')=3(\sqrt[3]{\delta'}+\sqrt[3]{\delta''})\sqrt[3]{\delta'\delta''}\ ;\end{array}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\varpi''\varpi''')=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'})\sqrt[3]{\Delta\delta'}\ ,\\ (\varpi'''\varpi')=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta''})\sqrt[3]{\Delta\delta''}\ ,\\ (\varpi'\varpi'')=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'''})\sqrt[3]{\Delta\delta'''}\ ;\end{array}\right\}\quad(4)$$

$$P^3=216\delta'\delta''\delta'''\ ;\qquad(5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Pi'^3=216\Delta\delta''\delta''' \,, \\ \Pi''^3=216\Delta\delta'''\delta' \,, \\ \Pi'''^3=216\Delta\delta'\delta'' \,.\end{array}\right\}\quad(6)$$

Il s'agira donc d'éliminer, entre ces seize équations, les douze quantités

$$\begin{array}{llll}\delta' \,, & \Pi' \,, & (p\varpi') \,, & (\varpi''\varpi''') \,, \\ \delta'' \,, & \Pi'' \,, & (p\varpi'') \,, & (\varpi'''\varpi') \,, \\ \delta''' \,, & \Pi''' \,, & (p\varpi''') \,, & (\varpi'\varpi'') \,.\end{array}$$

En tirant d'abord les valeurs des six dernières des équations (1) et (2), pour les substituer dans les équations (3) et (4), celles-ci deviennent

$$\left.\begin{array}{l}(pp')-\Pi'=3(\sqrt[3]{\delta''}+\sqrt[3]{\delta'''})\sqrt[3]{\delta''\delta'''} \,, \\ (pp'')-\Pi''=3(\sqrt[3]{\delta'''}+\sqrt[3]{\delta'})\sqrt[3]{\delta'''\delta'} \,, \\ (pp''')-\Pi'''=3(\sqrt[3]{\delta'}+\sqrt[3]{\delta''})\sqrt[3]{\delta'\delta''} \,;\end{array}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{array}{l}T'-\delta'=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'})\sqrt[3]{\Delta\delta'} \,, \\ T''-\delta''=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta''})\sqrt[3]{\Delta\delta''} \,, \\ T'''-\delta'''=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'''})\sqrt[3]{\Delta\delta'''} \,.\end{array}\right\}\quad(8)$$

Les équations (8) peuvent, ensuite, être mises sous cette forme

$$\Delta+T'=(\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta'}) \,,$$

$$\Delta+T''=(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta''})^3,$$

$$\Delta+T'''=(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'''})^3;$$

puis sous celle-ci

$$\sqrt[3]{\Delta+T'}=\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\Delta\delta'},$$

$$\sqrt[3]{\Delta+T''}=\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\Delta\delta''},$$

$$\sqrt[3]{\Delta+T'''}=\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\Delta\delta'''};$$

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}\delta'&=(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})^3,\\ \delta''&=(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})^3,\\ \delta'''&=(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})^3.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

En subtituant ces valeurs dans les équations (7), on en tire

$$\left.\begin{aligned}&\Pi'=(pp')\\ &-3\{(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})+(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\}(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta}),\\ &\Pi''=(pp'')\\ &-3\{(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})+(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})\}(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta}),\\ &\Pi'''=(pp''')\\ &-3\{(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})+(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})\}(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta}),\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Ces dernières valeurs et les valeurs (9), substituées dans les équations (5) et (6), donnent finalement

$$P=6(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,$$

$$(pp')=3(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}+\sqrt[3]{\Delta+T'''})\ ,$$

$$(pp'')=3(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}+\sqrt[3]{\Delta+T'})\ ,$$

$$(pp''')=3(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}+\sqrt[3]{\Delta+T''})\ .$$

Il est clair présentement que, ce que nous avons dit du parallélipipède P, nous aurions pu le dire également des parallélipipèdes P', P'', P''', de sorte que les relations demandées entre les quinze parties du tétraèdre proposé sont les dix suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
P=6(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,\\
P'=6(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,\\
P''=6(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,\\
P'''=6(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})\ ;
\end{array}\right\}\quad (\text{I})$$

$$\left.\begin{aligned}
(pp') &= 3(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta}\;(\sqrt[3]{\Delta+T''}+\sqrt[3]{\Delta+T'''})\,,\\
(pp'') &= 3(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}+\sqrt[3]{\Delta+T'}\,,\\
(pp''') &= 3(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}+\sqrt[3]{\Delta+T''})\,,\\
(p''p''') &= 3(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}+\sqrt[3]{\Delta+T'})\,,\\
(p'''p') &= 3(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}+\sqrt[3]{\Delta+T''})\,,\\
(p'p'') &= 3(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}+\sqrt[3]{\Delta+T'''})\,.
\end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

Les équations (1) donnent P, P', P'', P''', en fonction des cinq quantités Δ, T, T', T'', T'''. Il est très-facile d'en déduire d'autres qui donnent T, T', T'', T''', en fonction des cinq quantités Δ, P, P', P'', P'''.

En divisant, en effet, tour à tour, par le quarré de chacune d'elles le produit des trois autres, il vient

$$P'P''P'''=6P^2(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})^3\,,$$

$$P''P'''P=6P'^2(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})^3\,,$$

$$P'''PP'=6P''^2)\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta}^3\,,$$

$$PP'P''=6P'''^3(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})^3 \;;$$

multipliant respectivement celles-ci par $36P$, $36P'$, $36P''$, $36P'''$, et, extrayant ensuite la racine quarrée des deux membres des équations résultantes, on aura

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt[3]{36PP'P''P'''}&=6P(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})\;,\\
\sqrt[3]{36PP'P''P'''}&=6P'(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta}),\\
\sqrt[3]{36PP'P''P'''}&=6P''(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})\;,\\
\sqrt[3]{36PP'P''P'''}&=6P'''(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\;,
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

d'où, en transposant,

$$\left.\begin{aligned}
6P\sqrt[3]{\Delta+T}&=6P\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\;,\\
6P'\sqrt[3]{\Delta+T'}&=6P'\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\;,\\
6P''\sqrt[3]{\Delta+T''}&=6P''\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\;,\\
6P'''\sqrt[3]{\Delta+T'''}&=6P'''\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\;;
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

d'où encore en cubant, réduisant et divisant respectivement par $18P$, $18P'$, $18P''$, $18P'''$

$$\left.\begin{aligned}
12P^2T&=2P'P''P'''+\sqrt[3]{36\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}+6P\sqrt[3]{36\Delta^2PP'P''P'''}\,,\\
12P'^2T'&=2P''P'''P+\sqrt[3]{36\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}+6P'\sqrt[3]{36\Delta^2PP'P''P'''}\,,\\
12P''^2T''&=2P'''PP'+\sqrt[3]{36\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}+6P''\sqrt[3]{36\Delta^2PP'P''P'''}\,,\\
12P'''^2T'''&=2PP'P''+\sqrt[3]{36\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}+6P'''\sqrt[3]{36\Delta^2PP'P''P'''}\,;
\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

équations qui donneront les valeurs de T, T', T'', T'''.

Au moyen des équations (11) et (12), les équations (II) deviennent facilement

$$\left.\begin{aligned}
2P''P'''(pp')&=PP'(P''+P''')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\,,\\
2P'''P'(pp'')&=PP''(P'''+P')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\,,\\
2P'P''(pp''')&=PP'''(P'+P'')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\,,\\
2PP'(p''p''')&=P''P'''(P+P')+2(\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\,,\\
2PP''(p'''p')&=P'''P'(P+P'')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\,,\\
2PP'''(p'p'')&=P'P''(P+P''')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\,;
\end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

équations délivrées de T, T', T'', T'''.

En prenant la racine cubique de 36 fois le produit des équations (1) on obtient

$$36(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{T'})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})=\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\;. \quad \text{(V)}$$

En égalant entre eux les seconds membres des équations (11), on obtient la triple équation

$$P(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})=P'(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})=P''(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})=P'''(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta}). \quad \text{(VI)}$$

On tire enfin facilement des équations (IV) la triple équation

$$PP'(p''p''')+P''P'''(pp')=PP''(p'''p')+P'''P'(pp'')=PP'''(p'p'')+P'P''(pp''') . \quad \text{(VII)}$$

Toutes ces diverses relations, en y supposant Δ nul, deviennent celles du *théorème V* (pag. 121) ainsi que cela doit être.

Dans tout ce qui précède, nous avons *formellement* supposé que le triangle ou le tétraèdre intérieur étaient tournés dans le *même sens* que le triangle ou le tétraèdre à partager ; et c'est qu'en effet, lorsqu'ils sont tournés en *sens inverse*, les formules sont fort compliquées et peu maniables. Bornons-nous donc à une indication sommaire de ce qui arrive dans ce cas.

I. Pour le triangle, les sept parties sont :

1.° Le triangle intérieur Δ ;

2.° Trois autres triangles T, T', T'' ;

3.° Enfin trois pentagones ou troncs de parallélogrammes P, P', P'', respectivement opposés.

Par des considérations analogues à celles que nous avons employées ci-dessus, on trouve, entre ces sept parties, trois équations de la forme

$$\Delta+P=2(\sqrt{T+T''+P'}-\sqrt{T})(\sqrt{T+T'+P''}-\sqrt{T}) \;.$$

II. Pour le tétraèdre, les quinze parties sont :

1.° Le tétraèdre intérieur Δ ;

2.° Quatre autres tétraèdres T, T', T'', T''' ;

3.° Quatre troncs de parallélipipèdes, respectivement opposés P, P', P'', P''', à chacun desquels il manque le tétraèdre Δ, pour être un parallélipipède complet ;

4.° Enfin six tétraèdres doublement tronqués, à chacun desquels il manque, pour être un tétraèdre complet, deux des quatre tétraèdres T, T', T'', T''', et qu'en conséquence nous représenterons par (tt'), (tt''), (tt'''), $(t''t''')$, $(t'''t')$, $(t't'')$, suivant les deux tétraèdres qui leur manqueront.

Par des considérations analogues à celles que nous avons employées ci-dessus, on trouve, entre ces quinze parties, d'abord quatre équations de la forme

$$\Delta+P=6\{\sqrt[3]{T+T'+(tt')}-\sqrt[3]{T}\}\{\sqrt[3]{T+T''+(tt'')}-\sqrt[3]{T}\}\{\sqrt[3]{T+T'''+(tt''')}-\sqrt[3]{T}\},$$

puis quatre groupes d'équations de la forme

$$P+(t''t''')=3\{\sqrt[3]{T'+T''+(t't'')}-\sqrt[3]{T'}\}\{\sqrt[3]{T'+T'''+(t't''')}-\sqrt[3]{T'}\}\{\sqrt[3]{T'+T''+(t't'')}+\sqrt[3]{T'+T'''+(t't''')}\},$$

$$P+(t'''t')=3\{\sqrt[3]{T''+T'''+(t''t''')}-\sqrt[3]{T''}\}\{\sqrt[3]{T''+T'+(t''t')}-\sqrt[3]{T''}\}\{\sqrt[3]{T''+T'''(t''t''')}+\sqrt[3]{T''+T'+(t''t')}\},$$

$$P+(t't'')=3\{\sqrt[3]{T'''+T'(t'''t')}-\sqrt[3]{T'''}\}\{\sqrt[3]{T'''+T''+(t'''t'')}-\sqrt[3]{T'''}\}\{\sqrt[3]{T'''+T'+(t'''t')}+\sqrt[3]{T'''+T''+(t'''t'')}\};$$

mais il est clair que ces douze dernières doivent être réductibles à six seulement (*).

(*) Au moment où ceci s'imprimait, nous avons reçu de M. Noël, professeur à Luxembourg, une solution qui rentre exactement dans celle-là.

J. D. G.