
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

**Démonstration de ce théorème et de quelques autres, ainsi
que de leurs analogues relatifs au tétraèdre**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 113-123

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__113_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1827-1828, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Démonstration de ce théorème et de quelques autres, ainsi que de leurs analogues relatifs au tétraèdre ;

Par M. VALLÈS, élève ingénieur des ponts et chaussées.

~~~~~

**THÉORÈME I.** *Les parallèles à deux des côtés d'un triangle, menées par un quelconque des points du troisième, partagent ce triangle en deux autres  $T'$  et  $T''$  et un parallélogramme  $P$ , tels qu'on a*

$$P^2 - 4T'T'' = 0 .$$

*Démonstration.* Soit  $SS'S''$  ( fig. 2 ) le triangle dont il s'agit. Soit  $C$  un point pris arbitrairement sur le côté  $S'S''$  de ce triangle, par lequel on a mené les parallèles  $CA'$ ,  $CA''$  à ses deux autres côtés, se terminant à ces mêmes côtés. Ces parallèles diviseront le triangle en deux autres  $CA'S'$ ,  $CA''S''$ , que nous représenterons respectivement par  $T'$ ,  $T''$  et en un parallélogramme  $CS$  que nous représenterons par  $P$ . Posons en outre  $CS' = a'$ ,  $CS'' = a''$ .

---

En considérant  $CA'$  comme la base commune de  $P$  et  $T'$  leurs hauteurs seront proportionnelles à  $A'S$  et  $A'S'$ , d'où il résulte qu'on aura

$$\frac{P}{T'} = 2 \cdot \frac{A'S}{A'S'} = 2 \frac{CS''}{CS'} = 2 \frac{a''}{a'} .$$

Par une semblable raison, on aura

$$\frac{P}{T''} = 2 \frac{a'}{a} ;$$

d'où en multipliant, simplifiant, chassant le dénominateur et transposant

$$P^2 - 4T'T'' = 0 ;$$

comme nous l'avions annoncé.

*THÉORÈME II.* Les parallèles aux trois côtés d'un triangle, conduites par un même point pris arbitrairement dans son intérieur, partagent le triangle en trois parallélogrammes  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  et en trois triangles respectivement opposés  $T$ ,  $T'$ ,  $T''$ , tels qu'on a

$$P^2 = 4T'T'' , \quad P'^2 = 4T''T , \quad P''^2 = 4TT' .$$

*Démonstration.* C'est une conséquence toute naturelle de ce que les systèmes de surfaces  $T'$ ,  $T''$  et  $P$ ,  $T''$ ,  $T$  et  $P'$ ,  $T$ ,  $T'$  et  $P''$  ( fig. 3 ) se trouvent exactement dans le cas des trois surfaces du *Théorème I*.

Si, entre ces trois équations, on élimine tout à tour deux des trois quantités  $T$ ,  $T'$ ,  $T''$ , il viendra

$${}_2TP = P'P'' , \quad {}_2T'P' = P''P , \quad {}_2T''P'' = PP' .$$

En divisant ces dernières deux à deux, on parvient à cette double équation

$$TP^2 = T'P'^2 = T''P''^2 .$$

Enfin en extrayant la racine quarrée du produit des équations primitives, on parvient à l'équation

$$PP'P'' = 8TT'T'' ,$$

qui est précisément celle qui était proposée à démontrer.

*THÉORÈME III.* Les plans parallèles à deux des faces d'un tétraèdre, conduits par un quelconque des points de l'arête suivant laquelle se coupent ses deux autres faces, partagent le tétraèdre en deux autres  $T'$ ,  $T''$  et en un hexaèdre heptagone  $Q$ , tronc de prisme quadrangulaire, dont une des arêtes latérales est nulle, tels que

$$Q = 3(\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''} .$$

*Démonstration.* Soit  $SS'S''S'''$  (fig. 4) le tétraèdre dont il s'agit. Par un point  $C$ , pris arbitrairement sur l'arête  $S'S''$ , soient conduits les plans  $A'CB'$ ,  $A''CB''$ , respectivement parallèles aux faces  $SS''S'''$ ,  $SS'S'''$ , qui contiennent l'arête  $SS''$ , opposée à  $S'S''$ . Ces plans diviseront le tétraèdre donné en deux autres  $S'A'CB'$ ,  $S''A''CB''$ , que nous représenterons respectivement par  $T'$ ,  $T''$ , et un corps hexaèdre heptagone, terminé par les deux parallélogrammes  $CS$ ,  $CS'''$ , les deux triangles  $A'CB'$ ,  $A''CB''$  et les deux trapèzes  $SA'B'S'''$ ,  $SA''B''S'''$ ; lequel corps que nous représenterons par  $Q$ , n'est autre qu'un tronc de prisme quadrangulaire, dont une des arêtes latérales est nulle.

Soit conduit, par  $CB'$  et  $CA''$ , un plan coupant en  $D$  l'arête  $SS''$ ; ce plan divisera le corps  $Q$  en deux prismes triangulaires, l'un que nous représenterons par  $P$ , ayant pour ses deux bases  $A'CB'$

et  $SA''D$  ; et l'autre , que nous représenterons par  $P'''$  , ayant pour ses deux bases  $A''CB''$  et  $DB'S''$  . Posons enfin  $CS' = a'$  ,  $CS'' = a''$  . Nous aurons d'abord

$$P + P''' = Q . \quad (1)$$

En considérant le triangle  $A'CB'$  comme la base commune du prisme triangulaire  $P$  et du tétraèdre  $T'$  , leurs hauteurs seront proportionnelles à  $A'S$  et  $A'S'$  ; de sorte qu'on aura

$$\frac{P}{T'} = 3 \cdot \frac{A'S}{A'S'} = 3 \cdot \frac{CS''}{CS'} = 3 \frac{a''}{a'} . \quad (2)$$

Pour une semblable raison , on aura aussi

$$\frac{P'''}{T''} = 3 \frac{a'}{a''} . \quad (3)$$

En considérant  $A'S'B'$  comme la base du tétraèdre  $T'$  , ce tétraèdre aura même hauteur que le prisme  $P'''$  ; de sorte que  $P'''$  sera à  $T'$  comme le triple de l'aire du triangle  $B'S''D$  est à l'aire du triangle  $S'B'A'$  . Mais , parce que ces triangles sont semblables , leurs aires sont proportionnelles aux quarrés de leurs côtés homologues ; de sorte qu'on aura

$$\frac{P'''}{T'} = 3 \frac{B'S''^2}{S'B'^2} = 3 \frac{CS''^2}{CS'^2} = 3 \frac{a''^2}{a'^2} . \quad (4)$$

Pour une semblable raison , on aura aussi

$$\frac{P}{T''} = 3 \frac{a'^2}{a''^2} . \quad (5)$$

RESOLUES.

117

Prenant, tour à tour, la somme des équations (2) et (4), et celle des équations (3) et (5), en ayant égard à l'équation (1), il viendra

$$\frac{Q}{T'} = 3 \frac{a''}{a'} \left( 1 + \frac{a''}{a'} \right),$$

$$\frac{Q}{T''} = 3 \frac{a'}{a''} \left( 1 + \frac{a'}{a''} \right);$$

ou, en chassant les dénominateurs, transposant et ordonnant

$$Qa'^2 - 3T'a'a'' - 3T'a''^2 = 0,$$

$$3T''a'^2 + 3T''a'a'' - Qa''^2 = 0.$$

Prenant successivement la somme des produits de ces équations, d'abord par  $3T''$  et  $-Q$ , puis par  $Q$  et  $-3T'$ , en divisant le premier résultat par  $a''$  et le second par  $a'$ , il viendra

$$3T''(Q + 3T')a' = (Q^2 - 9T'T'')a'',$$

$$3T'(Q + 3T'')a'' = (Q^2 - 9T'T'')a';$$

d'où, en multipliant membre à membre et divisant par  $a'a''$ ,

$$(Q^2 - 9T'T'')^2 = 9T'T''(Q + 3T')(Q + 3T'');$$

ou bien enfin, en développant, réduisant, transposant et ordonnant

$$Q^3 - 27T'T''Q - 27T'T''(T' + T'') = 0.$$

Or, cette équation a deux racines imaginaires qui ne sauraient convenir à la question qui nous occupe. En ne prenant donc que sa racine réelle, on aura simplement, comme l'annonce le théorème,

$$Q=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''}.$$

*THÉORÈME IV.* Les plans conduits par un même point, pris arbitrairement dans l'intérieur de la base d'un tétraèdre, parallèlement à ses trois autres faces, partagent ce tétraèdre en trois autres tétraèdres  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$ , trois hexaèdres heptagones, respectivement opposés  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q'''$ , lesquels sont des troncs de prismes triangulaires, ayant une arête latérale nulle, et enfin un parallépipède  $P$ , tels qu'on a

$$\begin{array}{l} 1.^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} Q'=3(\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T''''})\sqrt[3]{T''T''''}, \\ Q''=3(\sqrt[3]{T''''}+\sqrt[3]{T'})\sqrt[3]{T''''T'}, \\ Q'''=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''}; \end{array} \right. \\ 2.^{\circ} \quad P^3=216T'T''T''' . \end{array}$$

*Démonstration.* Les trois premières équations résultant tout naturellement de ce que chacun des trois systèmes de corps  $T''$ ,  $T''''$  et  $Q'$ ;  $T''''$ ,  $T'$  et  $Q''$ ,  $T'$ ,  $T''$  et  $Q'''$  se trouve dans le même cas que les trois corps du *théorème III*; la quatrième seule a besoin d'être démontrée.

Pour y parvenir, soit  $S'S''S'''$  (fig. 5) la base du tétraèdre donné, et soit  $O$  le point pris arbitrairement dans son intérieur par lequel on a conduit des plans respectivement parallèles à ses trois autres faces; ces plans coupant le plan de la base suivant les droites

$A'B''$ , parallèle à  $S''S'$ , se terminant à  $S''S''$  et  $S''S'$  ;

$A''B'''$ , parallèle à  $S'''S''$ , se terminant à  $S'S''$  et  $S'S'$  ;

$A'''B'$ , parallèle à  $S'S''$ , se terminant à  $S''S'$  et  $S'S''$  .

Les triangles  $A'OB'$ ,  $A''OB''$ ,  $A'''OB'''$  seront les bases de nos trois tétraèdres dont nous supposons les sommets respectifs en  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$ , et que nous représenterons respectivement par  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$ . Alors  $OC'$ ,  $OC''$ ,  $OC'''$  seront les trois arêtes d'un même angle du parallépipède  $P$  ; et cet angle sera évidemment égal à chacun des angles  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$  des tétraèdres  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$ .

Mais, lorsqu'un parallépipède et un tétraèdre ont un angle trièdre égal, le volume du parallépipède est au volume du tétraèdre, comme six fois le produit des trois arêtes du parallépipède qui comprennent l'angle dont il s'agit, est au produit des trois arêtes qui comprennent son égal dans le tétraèdre. En observant donc que le parallépipède  $P$  a une arête commune avec chacun des tétraèdres  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$ , et que ces trois tétraèdres sont semblables, on aura

$$\frac{P}{T'} = 6. \frac{OC''.OC'''}{C'A'.C'B'} = 6. \frac{OB''.OA'''}{OA'.OB'} ,$$

$$\frac{P}{T''} = 6. \frac{OC'''.OC'}{C''A''.C''B''} = 6. \frac{OB'''.OA'}{OA''.OB''} ,$$

$$\frac{P}{T'''} = 6. \frac{OC'.OC''}{C'''A'''.C'''B'''} = 6. \frac{OB'.OA''}{OA'''.OB'''} .$$

Mais, si l'on représente par  $t'$ ,  $t''$ ,  $t'''$  les bases respectives des

tétraèdres  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$ , et par  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$  les parallélogrammes opposés  $OS'$ ,  $OS''$ ,  $OS'''$ , qui avec eux composent la base du tétraèdre proposé, on aura

$$\frac{p'}{t'} = 2 \cdot \frac{OB'' \cdot OA''}{OA' \cdot OB'}$$

$$\frac{p''}{t''} = 2 \cdot \frac{OB''' \cdot OA'}{OA'' \cdot OB''}$$

$$\frac{p'''}{t'''} = 2 \cdot \frac{OB' \cdot OA''}{OA''' \cdot OB''}$$

équations qui, comparées aux précédentes, les changent en celles-ci

$$\frac{P}{T'} = 3 \frac{p'}{t'} \quad , \quad \frac{P}{T''} = 3 \frac{p''}{t''} \quad , \quad \frac{P}{T'''} = 3 \frac{p'''}{t'''} \quad ,$$

dont le produit est

$$\frac{P^3}{T'T''T'''} = 27 \frac{p'p''p'''}{t't't''}$$

Mais, par le *théorème II*, on a

$$\frac{p'p''p'''}{t't't''} = 8 \quad ;$$

donc, en substituant et chassant le dénominateur,

$$P^3 = 216 T'T''T''' \quad ;$$

comme l'annonce le *théorème*.

De ces quatre équations on en peut déduire plusieurs autres ; et d'abord cette dernière donne

$$\sqrt[3]{T''T'''} = \frac{P}{6\sqrt[3]{T'}} , \quad \sqrt[3]{T''T'} = \frac{P}{6\sqrt[3]{T''}} , \quad \sqrt[3]{T'T''} = \frac{P}{6\sqrt[3]{T'''}} .$$

Substituant ces valeurs dans les trois premières, et chassant les dénominateurs, il viendra

$$2Q'\sqrt[3]{T'} = P(\sqrt[3]{T''} + \sqrt[3]{T'''}) ,$$

$$2Q''\sqrt[3]{T''} = P(\sqrt[3]{T'''} + \sqrt[3]{T'}) ,$$

$$2Q'''\sqrt[3]{T'''} = P(\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''}) .$$

En éliminant entre ces équations deux quelconques des quantités  $\sqrt[3]{T'}$ ,  $\sqrt[3]{T''}$ ,  $\sqrt[3]{T'''}$ , la troisième disparaîtra d'elle-même et on aura

$$P^3 + (Q' + Q'' + Q''')P^2 - Q'Q''Q''' = 0 .$$

**THÉORÈME V.** *Les plans conduits parallèlement aux faces d'un tétraèdre, par un même point pris arbitrairement dans son intérieur, partagent ce tétraèdre en quatorze parties dont quatre P, P', P'', P''' sont des parallélépipèdes ayant chacun un angle trièdre commun avec lui ; quatre autres T, T', T'', T''' sont des tétraèdres qui lui sont semblables, et qui sont respectivement opposés à ces parallélépipèdes ; enfin les six dernières que nous désignerons par (pp'), (pp''), (p'p''), (pp'''), (p'p'''), (p''p'''), suivant les parallélépipèdes entre lesquels elles se trouveront situées, sont des troncs de prismes quadrangulaires, ayant une arête la-*

tériale nulle ; et on a , entre ces quatorze parties , les dix relations suivantes :

$$1.^{\circ} \left\{ \begin{array}{ll} (pp') = 3(\sqrt[3]{T''} + \sqrt[3]{T'''})^3 \sqrt[3]{T''T'''} , & (p''p''') = 3(\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''})^3 \sqrt[3]{T'T''} , \\ (pp'') = 3(\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''})^3 \sqrt[3]{T'T'''} , & (p'p''') = 3(\sqrt[3]{T} + \sqrt[3]{T''})^3 \sqrt[3]{TT''} , \\ (p'p'') = 3(\sqrt[3]{T} + \sqrt[3]{T'''})^3 \sqrt[3]{T'T'''} , & (pp''') = 3(\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''})^3 \sqrt[3]{T'T''} , \end{array} \right.$$

$$2.^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} P^3 = 216T'T''T''' , \\ P'^3 = 216T''T'''T , \\ P''^3 = 216T'''T'T' ; \\ P'''^3 = 216TT'T'' . \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Ces relations résultent tout naturellement de ce que les quatre systèmes de sept corps

$$P, T', T'', T''', (p'p''), (p'p'''), (p''p''') ,$$

$$P', T'', T''', T, (pp'), (pp'''), (p''p''') ,$$

$$P'', T''', T, T', (pp''), (pp'''), (p'p''') ,$$

$$P''', T, T', T'', (pp'), (pp''), (p'p'') ,$$

se trouvent , les uns par rapport aux autres , dans le cas du *théorème IV.*

De ces relations on peut en déduire une multitude d'autres, parmi lesquelles nous nous contenterons de signaler les plus remarquables.

En extrayant la racine cubique du produit des quatre dernières, on obtient, sur-le-champ,

$$PP'P''P''' = \sqrt[3]{6TT'T''T'''} .$$

Si, entre ces mêmes quatre dernières équations, on élimine tour à tour trois des quatre quantités  $T, T', T'', T'''$ , on aura

$$6P^2T = P'P''P''' ,$$

$$6P'^2T' = P''P'''P ,$$

$$6P''^2T'' = P'''PP' ,$$

$$6P'''^2T''' = PP'P'' .$$

On tire encore de ces équations, en les multipliant par  $T, T', T'', T'''$ , et remarquant qu'alors leurs seconds membres deviennent égaux,

$$P^3T = P'^3T' = P''^3T'' = P'''^3T''' .$$


---