ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

A. L. CAUCHY

Analyse transcendante. Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues et celle d'un grand nombre d'autres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 84-127
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__84_0>

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues et celle d'un grand nombre d'autres ;

Par M. A. L. Cauchy, de l'Académie royale des sciences, Professeur à l'école polytechnique, etc.

(*Deuxième Partie* (*).)

On a vu, dans la première partie de ce mémoire, qu'en désignant par $f(x)$ une fonction telle que $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouisse 1.° pour $x=\pm\infty$, quel que soit y ; 2.° pour $y=\infty$, quel que soit x, et que d'ailleurs cette fonction conserve une valeur unique et déterminée, pour toutes les valeurs de x et y renfermées entre les limites $x=-\infty$, $x=+\infty$, $y=0$, $y=+\infty$, qui ne satisfont pas à l'équation

$$\frac{1}{f(x+y\sqrt{-1})}=0\,;$$

si, après avoir cherché les racines réelles ou imaginaires de l'équation

(*) Voy. la page 97 du précédent volume. Consultez aussi l'errata du même volume sur des fautes assez graves qui se sont glissées dans l'impression de la première partie.

J. D. G.

$$(1) \qquad \frac{1}{f(x)}=0,$$

on désigne par x_1, x_2, x_3, ... celles de ces racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, et par f_1, f_2, f_3, ... les valeurs que reçoivent les produits

$$\varepsilon f(x_1+\varepsilon), \quad \varepsilon f(x_2+\varepsilon), \quad \varepsilon f(x_3+\varepsilon), \ldots\ldots,$$

lorsque ε se réduit à zéro; alors, en posant

$$(2) \qquad \Delta=2\varpi(f_1+f_2+f_3+\ldots\ldots)\sqrt{-1},$$

on a

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\Delta.$$

C'est cette formule qu'il s'agit présentement d'appliquer.

Rappelons auparavant que, si l'équation (1) avait plusieurs racines égales à x_1; en désignant par m le nombre de ces racines, et par ε un nombre infiniment petit, il faudrait supposer, dans la formule (2), non plus $f_1=\varepsilon f(x_1+\varepsilon)$, mais

$$f_1=\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \cdot \frac{\mathrm{d}^{m-1}.[\varepsilon^m f(x_1+\varepsilon)]}{\mathrm{d}\varepsilon^{m-1}}.$$

Enfin, si, dans la racine x_1, le coefficient de $\sqrt{-1}$ se réduisait à la limite des quantités positives décroissantes, c'est-à-dire, à zéro; ou, en d'autres termes, si la racine x_1 devenait réelle, le terme f_1 correspondant à cette racine, devrait être réduit à moitié.

Passons maintenant à l'application de ces formules.

La formule (3) peut être, si l'on veut, remplacée par la suivante

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Delta\ ;$$

et l'on voit que les formules (3) et (4) réduisent la détermination des intégrales qu'elles renferment à la recherche des racines de l'équation (1) dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$(5) \qquad f(x)=\varphi(u).\chi(v).\psi(w)\ldots..\mathrm{f}(x)\ ,$$

$\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... désignant des fonctions rationnelles des variables u, v, w, ..., et u, v, w, ...$\mathrm{f}(x)$ représentant des fonctions de x qui restent complètement déterminées, dans le cas même où, après avoir remplacé x par $x+y\sqrt{-1}$, on attribue à x une valeur réelle quelconque, et à y une valeur réelle positive. Concevons d'ailleurs que la fonction $\mathrm{f}(x)$ ne devienne jamais infinie pour aucune valeur finie, réelle ou imaginaire, de la variable x. Pour obtenir les racines de l'équation (1), il faudra d'abord chercher celles des équations

$$(6) \qquad \frac{1}{\varphi(u)}=0\ ,\quad \frac{1}{\chi(v)}=0\ ,\quad \frac{1}{\psi(w)}=0\ , \ldots..;$$

et comme, par hypothèse, les fonctions $\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... sont rationnelles, il est clair que les premiers membres des équations (6) pourront être remplacés par des fonctions entières de u, v, w, ...

Supposons ces mêmes équations résolues, et soit $h+k\sqrt{-1}$ une de leurs racines; on n'aura plus à résoudre que des équations de la forme

$$(7) \qquad u=h+k\sqrt{-1}\ ,\quad v=h+k\sqrt{-1}\ , \ldots..;$$

chacune d'elles fournira une seule racine, dont il sera facile de fixer la valeur, si l'on a pris pour u, v, w, ... quelques-unes des fonctions

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\;,\quad \mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})\;,\quad \mathrm{l}\left(1+\dfrac{s}{x}\sqrt{-1}\right) \\ \mathrm{l}[r\,\mathrm{Sin.}\theta+(r\,\mathrm{Cos.}\theta-x)\sqrt{-1}]\;,\;\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\};\quad (*)$$

r et s étant des quantités positives, et θ un arc compris entre les limites o et ϖ.

En effet, posons, pour abréger,

(*) Pour fixer, d'une manière précise, les valeurs des notations employées dans le calcul, nous adopterons ici les conventions que nous avons admises dans le *Cours d'analyse algébrique* et dans les précédens mémoires. En vertu de ces conventions, la notation

$$\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Tang.}\,\frac{v}{u}\right)$$

est toujours employée pour désigner le plus petit arc, abstraction faite du signe, dont la tangente soit égale à $\frac{v}{u}$; et les notations

$$(u+v\sqrt{-1})^{\mu}\;,\quad \mathrm{l}(u+v\sqrt{-1})\;.$$

(u désignant une quantité positive ou nulle, et μ un exposant réel) pour représenter les expressions imaginaires

$$(u^2+v^2)^{\frac{\mu}{2}}.\left\{\mathrm{Cos.}\left[\mu.\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Tang.}\,\frac{v}{u}\right)\right]+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}\left[\mu.\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Tang.}\,\frac{v}{u}\right)\right]\right\}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{l}(u^2+v^2)+\sqrt{-1}.\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Tang.}\,\frac{v}{u}\right).$$

$$(9) \qquad \rho=(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \omega=\text{Arc.}\left(\text{Tang.}\frac{h}{k}\right);$$

et l'on trouvera

On peut encore considérer la notation

$$(u+v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}},$$

dans laquelle λ et μ désignent des quantités quelconques, comme représentant une fonction unique et complètement déterminée, toutes les fois que u reçoit une valeur positive. En effet, comme dans cette hypothèse, on aura généralement

$$u+v\sqrt{-1}=e^{\mathrm{l}(u+v\sqrt{-1})},$$

on sera conduit naturellement à la formule

$$(u+v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=e^{(\lambda+\mu\sqrt{-1})\mathrm{l}(u+v\sqrt{-1})}$$

qui suffira pour fixer complètement le sens de l'expression imaginaire comprise dans son premier membre. Si l'on suppose, en particulier, $u=0$, on trouvera pour des valeurs positives de v,

$$(v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\left\{\text{Cos.}\left[\frac{\pi}{2}\lambda+\mu\mathrm{l}(v)\right]+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\left[\frac{\pi}{2}\lambda+\mu\mathrm{l}(v)\right]\right\}.e^{\lambda\mathrm{l}(v)-\frac{\pi}{2}\mu};$$

et, pour des valeurs négatives de v,

$$(v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\left\{\text{Cos.}\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu\mathrm{l}(-v)\right]-\sqrt{-1}.\text{Sin.}\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu\mathrm{l}(-v)\right]\right\}.e^{\lambda\mathrm{l}(-v)+\frac{\pi}{2}\mu}.$$

$$
(10)\left\{
\begin{aligned}
&\text{pour } \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}=h+k\sqrt{-1}\ ,\\
&\qquad x=\frac{2\rho\,\mathrm{Cos.}\,\omega+(1-\rho^2)\sqrt{-1}}{1+2\rho\,\mathrm{Sin.}\,\omega+\rho^2}\ ;\\
&\text{pour } \mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})=h+k\sqrt{-1}\ ,\\
&\qquad x=-e^h\,\mathrm{Sin.}\,k+(e^h\,\mathrm{Cos.}\,k-r)\sqrt{-1}\ ;\\
&\text{pour } \mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)=h+k\sqrt{-1}\ ,\\
&\qquad x=\frac{s}{e^h\,\mathrm{Sin.}\,k-(e^h\,\mathrm{Cos.}\,k-1)\sqrt{-1}}\ ;\\
&\text{pour } \mathrm{l}[r\,\mathrm{Sin.}\,\theta+(r\,\mathrm{Cos.}\,\theta-x)\sqrt{-1}]=h+k\sqrt{-1}\ ,\\
&\qquad x=-(e^h\,\mathrm{Sin.}\,k-r\,\mathrm{Cos.}\,\theta)+(e^h\,\mathrm{Cos.}\,k-r\,\mathrm{Sin.}\,\theta)\sqrt{-1}\ ;
\end{aligned}\right.
$$

et ainsi du reste.

Si, au contraire, on prenait pour u, v, w, ... quelques-unes des fonctions

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{Sin.}\,bx\ ,\ \mathrm{Cos.}\,bx\ ,\ e^{bx}\ ,\ e^{bx\sqrt{-1}}\ ,\ e^{(a+b\sqrt{-1})x}\ ,\\
&\mathrm{l}(1+re^{bx\sqrt{-1}}),\ \mathrm{l}(1-re^{bx\sqrt{-1}})\ ,\ \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ ;
$$

a, b désignant des quantités quelconques, et r un nombre inférieur à l'unité ; chacune des équations (7) aurait une infinité de racines. Ainsi, par exemple, en représentant par n un nombre entier quelconque, on trouverait

(12)

pour $\mathrm{Sin}.bx = 0$,

$$x = 0,\quad x = \pm\frac{\varpi}{b},\quad x = \pm\frac{2\varpi}{b},\quad \ldots\ldots\quad x = \pm\frac{n\varpi}{b},\quad \ldots\ldots;$$

pour $\mathrm{Cos}.bx = 0$,

$$x = \pm\frac{\varpi}{2b},\quad x = \pm\frac{3\varpi}{2b},\quad \ldots\ldots,\quad x = \pm\frac{(2n+1)\varpi}{2b},\quad \ldots\ldots;$$

pour $e^{bx} = h + k\sqrt{-1}$,

$$x = \frac{1}{b}\left[\mathrm{l}(\rho) + \left(\frac{\varpi}{2} - \varpi\right)\sqrt{-1} \pm 2n\varpi\sqrt{-1}\right]; \quad (*)$$

pour $e^{bx\sqrt{-1}} = h + k\sqrt{-1}$,

$$x = \frac{1}{b}\left[\frac{\varpi}{2} - \omega - \sqrt{-1}.\mathrm{l}(\rho) \pm 2n\varpi\right];$$

pour $e^{(a+b\sqrt{-1})x} = h + k\sqrt{-1}$,

$$x = \frac{\mathrm{l}(\rho) + \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\sqrt{-1} \pm 2n\varpi\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}};$$

pour $\mathrm{l}(1 + re^{bx\sqrt{-1}}) = 1$,

$$x = \pm\frac{2n\pi}{b} - \frac{\sqrt{-1}}{b}\,\mathrm{l}\,\frac{e-1}{r};$$

et ainsi du reste.

(*) Voy le *Cours d'analyse algébrique*, chap. IX, (12) et (22).

Alors la somme désignée par Δ se composerait, en général, d'une infinité de termes ; et par conséquent l'intégrale (4) se trouverait représentée par la somme d'une série infinie. Mais il arrivera, dans plusieurs cas, ou que la plupart des termes de la série devront être rejetés, parce qu'ils appartiendront à des racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera négatif, ou que la plupart des termes seront, deux à deux, égaux et de signes contraires, ou enfin que la somme de la série pourra être facilement déterminée, par la méthode que nous avons indiquée dans le paragraphe 13 du *Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires*. Il en résultera souvent que les équations (3) et (4) fourniront, en termes finis, les valeurs des intégrales qu'elles renferment. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend

$$f(x)=\varphi(x).\frac{\mathrm{Cos}.ax}{\mathrm{Cos}.bx} \;;$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction rationnelle et paire de la variable x.

En ayant égard aux diverses remarques que l'on vient de faire, on déduira des équations (3) et (4) une multitude de formules générales, propres à la détermination des intégrales définies. Je me contenterai d'en citer ici quelques-unes.

En désignant par r une quantité positive, et par m un nombre entier, on établira sans difficulté les formules générales

$$(13)\qquad \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\pi}{2}\,f(0)\;.$$

$$(14)\qquad \int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}\cdot\frac{r\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\,f(r\sqrt{-1})\;.$$

$$(15)\qquad \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\,f(r\sqrt{-1})\;.$$

$$(16)\quad \int_0^{\infty} \frac{f(x)+f(-x)}{2} \cdot \frac{r\,\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{4}\left[f(r)-f(-r)\right]\sqrt{-1}\ .$$

$$(17)\quad \int_0^{\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{4}\left[f(r)+f(-r)\right]\ .$$

$$(18)\quad \int_0^{\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{r^2\,\mathrm{d}x}{x(x^2+r^2)}\ , = \frac{\varpi}{2}\left[f(0)-f(r\sqrt{-1})\right]\ .$$

$$(19)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{r-x\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

$$(20)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{r+x\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}x = 2\varpi f(r\sqrt{-1})\ .$$

$$(21)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(r-x\sqrt{-1})^m}\,.\mathrm{d}x = 0\ .$$

$$(22)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(r+x\sqrt{-1})^m}\,.\mathrm{d}x = (-1)^{m-1}.\ \frac{2\varpi}{\Gamma(m)}\ .\ \frac{\mathrm{d}^{m-1}.f(r\sqrt{-1})}{\mathrm{d}r^{m-1}}\ \ (*)$$

Si l'on suppose $f(x)=\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}$; on trouvera

$$(23)\ \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}\,.\mathrm{d}x = -2\varpi.\mathrm{f}(1-r\sqrt{-1})\ ,\ \text{pour } r<1\ ; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}\,.\mathrm{d}x = -\varpi\mathrm{f}(0)\ ,\ \text{ponr } r=1\ ; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}\,.\mathrm{d}x = 0\ ,\ \text{pour } r>1\ ; \end{cases}$$

(*) Le Γ est celui de M. Legendre, de sorte que $\Gamma(m)=1.2.3\ldots\ldots(m-n)$. C'est le $(m-1)!$ de M. Kramp.

J. D. G.

Puis, en réduisant la constante r à zéro, on tirera de la première de ces trois formules

$$(24)\quad \int_0^\infty \left\{ \frac{f(x)}{lx - \frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}} + \frac{f(-x)}{lx + \frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}} \right\} dx = -2\varpi f(\sqrt{-1}) .$$

Si, dans l'équation (21), on remplace le nombre entier m par un nombre quelconque a, on trouvera toujours

$$(25)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(r - x\sqrt{-1})^a} .dx = 0 .$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction rationnelle de la variable x, et concevons qu'après avoir calculé les diverses racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, on représente par $h + k\sqrt{-1}$ l'une quelconque de celles dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Soient de plus m le nombre des racines égales à $h + k\sqrt{-1}$, ε une quantité infiniment petite, et H_n, K_n deux quantités réelles, déterminées par la formule

$$(26)\qquad H_n + K_n\sqrt{-1} = \frac{1}{1.2.3....n} \cdot \frac{d^n[\varepsilon^n \varphi(h + k\sqrt{-1} + \varepsilon)]}{d\varepsilon^n} ,$$

qui deviendra simplement

$$(27)\qquad H + K\sqrt{-1} = \varepsilon\varphi(h + k\sqrt{-1} + \varepsilon) ,$$

si une seule racine est égale à $h + k\sqrt{-1}$.

Soit enfin $f(x)$ une fonction telle que l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$ n'admette point de racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif; du moins qui ne produise dans la valeur de Δ que des termes dont la somme se réduise à zéro; on tirera de la formule (3)

$$(28)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x=-2\varpi\left\{\begin{array}{l}(K_{m-1}-H_{m-1}\sqrt{-1})\,\mathrm{f}(h+k\sqrt{-1})+\ldots\\ +(K_{m-2}-H_{m-1}\sqrt{-1})\,\dfrac{\mathrm{f}'(h+k\sqrt{-1})}{1}+\ldots\\ +(K_{m-3}-H_{m-1}\sqrt{-1})\,\dfrac{\mathrm{f}''(h+k\sqrt{-1})}{1.2}+\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\\ +(K_{1}-H_{m-1}\sqrt{-1})\,\dfrac{\mathrm{f}^{(m-1)}(h+k\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)}+\ldots\end{array}\right\};$$

les expressions $K-H\sqrt{-1}$, $K_1-H_1\sqrt{-1}$, ... devant être réduites à moitié, quand la quantité k devient nulle.

Ainsi, par exemple, a, b, r, s désignant toujours des quantités positives, θ un arc compris entre les limites o et ϖ, $h+k\sqrt{-1}$ une des racines inégales de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, et enfin ω, ρ les quantités que renferment les seconds membres des formules (9), on trouvera

$$(29)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}\varphi(x)\mathrm{d}x=-2\varpi[(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1}+\ldots].$$

$$(30)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{bx\sqrt{-1}}\varphi(x)\mathrm{d}x=-2\varpi[(K-H\sqrt{-1})e^{-bx}.(\mathrm{Cos}.bh+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.bh)+..].$$

$$(31)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x=-2\varpi\left[(K-H\sqrt{-1})\,\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{\rho}e^{\omega\sqrt{-1}}\right)+\ldots\right].$$

$$(32)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{l}(1-rx\sqrt{-1})\varphi(x)\mathrm{d}x = -2\varpi[(K-H\sqrt{-1})\mathrm{l}(1+kr-hr\sqrt{-1})+\ldots]\ .$$

$$(33)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{l}[r\mathrm{Sin}.\theta+(r\mathrm{Cos}.\theta-x)\sqrt{-1}]\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\{(K-H\sqrt{-1})\mathrm{l}[k+r\mathrm{Sin}.\theta-(h-r\mathrm{Cos}.\theta)\sqrt{-1}]+\ldots\}\ .$$

$$(34)\ \int_{-\infty}^{+\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} e^{bx\sqrt{-1}}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\omega\{(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1} e^{-bx}(\mathrm{Cos}.bh+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.bh)+\ldots\}\ .$$

$$(35)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{a}}{\mathrm{l}(1-rx\sqrt{-1})}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1})(k+h\sqrt{-1})^{a}\frac{1}{\mathrm{l}(1+kr-hr\sqrt{-1})}+\ldots\right\}\ .$$

$$(36)\ \int_{-\infty}^{+\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1}.\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1}\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{\rho}e^{\omega\sqrt{-1}}\right)+\ldots\right\}.$$

$$(37)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{a}}{\mathrm{l}(1-rx\sqrt{-1})}.e^{bx\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a}\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{\rho}e^{\omega\sqrt{-1}}\right)\frac{1}{\mathrm{l}(1+kr-hr\sqrt{-1})}+\ldots\right\}.$$

$$(38)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ae^{bx\sqrt{-1}}}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\{(K-H\sqrt{-1}).e^{ae^{-bk}.\mathrm{Cos}.bh}[\mathrm{Cos}.(ae^{-bk}\,\mathrm{Sin}.bh)+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.(ae^{-bk}.\mathrm{Sin}.bh)]+\ldots\}.$$

$$(39)\ \int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}.e^{e^{bx\sqrt{-1}}}.\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\{K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1}.e^{e^{-bk}.\mathrm{Cos}.bh}[\mathrm{Cos}.(e^{-bh}\mathrm{Sin}.bh)+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.(e^{-bk}\mathrm{Sin}.bh)]+\ldots.\}.$$

et ainsi du reste

On trouvera encore, en supposant $r<1$,

$$(40)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{l}(1+re^{bx\sqrt{-1}})\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\{(K-H\sqrt{-1})\mathrm{l}[1+re^{-bk}(\mathrm{Cos}.bh+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.bh)]+\ldots\}.$$

$$(41)\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ax\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}(1+re^{bx\sqrt{-1}})\,\varphi(x)\mathrm{d}x=\ldots..;$$

et ainsi des autres.

Enfin, si l'on suppose $a<b$, on trouvera, en prenant pour x une fonction rationnelle et paire de la variable x,

$$(42)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{Cos}.ax}{\text{Cos}.bx}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1}).\frac{(e^{ak}+e^{-ak})\text{Cos}.ah-\sqrt{-1}(e^{ak}-e^{-ak})\text{Sin}\,ah}{(e^{bk}+e^{-bk})\text{Cos}.bh-\sqrt{-1}(e^{bk}-e^{-bk})\text{Sin}.bh}+\ldots\right\}.$$

$$(43)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{Sin}.ax}{\text{Sin}.bx}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1}).\frac{(e^{ak}-e^{-ak})\text{Cos}\,ah-\sqrt{-1}(e^{ak}+e^{-ak})\text{Sin}.ah}{(e^{bk}-e^{-bk})\text{Cos}.bh-\sqrt{-1}(e^{bk}+e^{-bk})\text{Sin}.bh}+\ldots\right\}.$$

et, en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction rationnelle, mais impaire de la variable x,

$$(44)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{Cos}.ax}{\text{Sin}.bx}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1}).\frac{(e^{ak}+e^{-ak})\text{Cos}.ah-\sqrt{-1}(e^{ak}-e^{-ak})\text{Sin}.ah}{(e^{bk}+e^{-bk})\text{Sin}.bh+\sqrt{-1}(e^{bk}-e^{-bk})\text{Cos}.bh}+\ldots\right\}.$$

$$(45)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{Sin}.ax}{\text{Cos}.bx}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1}).\frac{(e^{ak}+e^{-ak})\text{Sin}.ah+\sqrt{-1}(e^{ak}-e^{-ak})\text{Cos}.ah}{(e^{bk}+e^{-bk})\text{Cos}.bh-\sqrt{-1}(e^{bk}-e^{-bk})\text{Sin}.bh}+\ldots\right\}.$$

Comme d'ailleurs ces quatre dernières intégrales s'évanouissent évidemment, savoir : les deux premières lorsque $\varphi(x)$ deviendra une fonction impaire, et les deux dernières lorsque $\varphi(x)$ deviendra une fonction paire ; on peut en conclure que les valeurs de ces quatre intégrales seront connues pour des valeurs quelconques de la fonction rationnelle désignée par $\varphi(x)$.

Chacune des formules que nous venons d'établir se décompose en deux équations réelles, lorsqu'on égale séparément à zéro et les parties réelles des deux membres et les parties multipliées par $\sqrt{-1}$. En opérant ainsi, et prenant pour $\varphi(x)$ une fonction réelle, on obtiendra une multitude de formules, dont quelques-unes sont déjà connues, et parmi lesquelles je citerai seulement les suivantes :

$$(46)\ \int_0^{\infty} x^{a-1}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{2\varpi}{\mathrm{Sin}.a\varpi}\left\{\rho^{a-1}\left[+1\,\mathrm{Cos}.(1-a)\left(\frac{\pi}{2}+\varpi\right) - h\,\mathrm{Sin}.(1-a)\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\right]+\ldots\ldots\right\}.$$

$$(47)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Cos}.bx.\varphi(x)\mathrm{d}x = -2\varpi\{(K\mathrm{Cos}.bh+H\mathrm{Sin}.bh)e^{-bk}+\ldots.\}.$$

$$(48)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sin}.bx\varphi(x)\mathrm{d}x = -2\varpi\{(K\mathrm{Sin}.bh-H\mathrm{Cos}.bh)e^{-bk}+\ldots..\}.$$

$$(49)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{l}(r^2-2rx\mathrm{Cos}\,\theta+x^2)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\left\{K\mathrm{l}[r^2-2\rho r\mathrm{Sin}\,(\omega-\theta)+\rho^2]-2H\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{\rho\mathrm{Sin}.\omega-r\mathrm{Cos}.\theta}{\rho\mathrm{Cos}.\omega+r\mathrm{Sin}.\theta}+\ldots.\right\}.$$

$$(50)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{r\mathrm{Cos}.\theta-x}{r\mathrm{Sin}.\theta}.\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= \varpi\left\{H\mathrm{l}[r^2-2\rho r\mathrm{Sin}\,(\omega-\theta)+\rho^2]+2K\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{\rho\mathrm{Sin}.\omega-r\mathrm{Cos}.\theta}{\rho\mathrm{Cos}.\omega+r\mathrm{Sin}.\theta}+\ldots.\right\};$$

$$(51)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{s}{x}.\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= \varpi\left\{H\mathrm{l}(1+2s\mathrm{Cos}.\omega+s^2)-2K\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{s\mathrm{Sin}.\omega}{\rho+s\mathrm{Cos}.\omega}+\ldots.\right\};$$

$$(52)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x).\mathrm{Arc\ Cot}.x.\mathrm{d}x$$

$$= \varpi\left\{H\mathrm{l}\left(1+\frac{2\mathrm{Cos}.\omega}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\right)-2K\mathrm{Arc.Cot.}=\frac{\rho+\mathrm{Cos}.\omega}{\mathrm{Sin}.\omega}+\ldots\right\}.$$

$$(53)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\text{Cos}.bx}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.bx).\varphi(x)\text{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{e^{ae^{-bk}.\text{Cos}.bh}\left[K\text{Cos}.(ae^{-bk}.\text{Sin}.bh)+H\text{Sin}.(ae^{-bk}.\text{Sin}.bh)\right]+\ldots\right\}.$$

$$(54)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\text{Cos}.bx}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.bx)\varphi(x)\text{d}x$$

$$=2\varpi\left\{e^{ae^{-bk}.\text{Cos}.bh}.\left[H\text{Cos}.(ae^{-bk}.\text{Sin}\ bh)-K\text{Sin}.(ae^{-bk}.\text{Sin}.bh)\right]+\ldots\right\}.$$

$$(55)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{l}(1+2r\text{Cos}.bx+r^2).\varphi(x)\text{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{K\text{l}(1+2re^{-bk}.\text{Cos}.bh+r^2e^{-2bk})+2H\text{Arc.Tang.}=\frac{r\text{Sin}.bh}{e^{bk}+r\text{Cos}.bh}+\ldots\right\}.$$

$$(56)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Arc.Tang.}\ \frac{r\text{Sin}.bx}{1+r\text{Cos}.bx}.\varphi(x)\text{d}x$$

$$=\varpi\left\{H\text{l}(1+2re^{-bk}.\text{Cos}\,bh+r^2e^{-2bk})-2K\text{Arc.Tang.}=\frac{r\text{Sin}.bh}{e^{bk}+r\text{Cos}.bh}+\ldots\right\}.$$

On trouvera encore, en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction paire de la variable x,

$$(57)\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1}\text{Sin.}\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right).\varphi(x)\text{d}x$$

$$=-\varpi\{\rho.^{a-1}e^{-bk}\left[K\text{Cos}\,(\omega-a\omega+bh)+H\text{Sin}.(\omega-a\omega+bh)\right]+\ldots\}.$$

Il est facile de reconnaître les différentiations que doivent subir les diverses formules auxquelles nous sommes parvenus, dans le cas où l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$ a des racines égales. Si l'on différentie ces mêmes formules par rapport aux quantités a, b, r, ... on obtiendra de nouveaux résultats, que l'on pourrait déduire directement de la formule (3). Ainsi, par exemple, si l'on différentie n fois par rapport à la quantité a, l'équation (46), on en déduira la valeur de l'intégrale

$$(58)\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1}(x)[\mathrm{l}(x)]^n \mathrm{d}x\ ,$$

à laquelle on parviendrait aussi, en posant successivement, dans l'équation (3)

$$f(x)=(-x\sqrt{-1})^{a-1}\,\mathrm{l}(-x\sqrt{-1}).\varphi(x)\ ,$$

$$f(x)=(-x\sqrt{-1})^{a-1}\,[\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})]^2.\varphi(x)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

On obtiendrait encore plusieurs résultats dignes de remarque, en intégrant quelques formules par rapport aux constantes a, b, r, ...

Il importe d'observer que les formules (29), (34), (35), (36) et (39) subsistent, dans le cas même où l'on remplace l'exposant réel a par une constante imaginaire $\lambda+\mu\sqrt{-1}$. En opérant ainsi, prenant pour $\varphi(x)$ une fonction réelle et posant successivement

$$a=\lambda+\mu\sqrt{-1}\ ,\qquad a=\lambda-\mu\sqrt{-1}\ ,$$

on établira de nouvelles équations que l'on pourrait combiner entre elles, et l'on reconnaîtra facilement, par ce moyen, que les formules (46), (57), ... s'étendent à des valeurs réelles ou imaginaires quelconques de la constante a. Si l'on décompose ensuite chaque équation imaginaire en deux équations réelles, on obtiendra les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies, parmi lesquelles je citerai celles qui suivent :

$$(59)\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}\text{Cos.}[\mu l(x)]\varphi(x)dx\;,\qquad \int_0^{\infty} x^{\lambda-1}\text{Sin.}[\mu l(x)]\varphi(x)dx\;;$$

$$(60)\int_0^{\infty}\left\{e^{\frac{\mu\pi}{2}}\text{Sin.}\left[\frac{\lambda\pi}{2}-bx-\mu l(x)\right]+e^{-\frac{\mu\varpi}{2}}\text{Sin.}\left[\frac{\lambda\pi}{2}-bx+\mu l(x)\right]\right\}\varphi(x)dx\;;$$

$$(61)\int_0^{\infty}\left\{e^{\frac{\mu\varpi}{2}}\text{Cos}\left[\frac{\lambda\varpi}{2}-bx-\mu l(x)\right]-e^{-\frac{\mu\pi}{2}}\text{Cos.}\left[\frac{\lambda\pi}{2}-bx+\mu l(x)\right]\right\}\varphi(x)dx\;.$$

On déterminera les deux premières, quelle que soit la fraction rationnelle désignée par $\varphi(x)$; et les deux dernières, toutes les fois que cette fraction deviendra une fonction paire de la variable x.

Aux formules générales ci-dessus établies, on pourrait en joindre un grand nombre d'autres, dans lesquelles entreraient des fonctions $\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... des variables

$$u=\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\;;\quad v=l(r-x\sqrt{-1})\;,\quad w=l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right),\;...;$$

Ainsi, par exemple, $h+k\sqrt{-1}$ désignant toujours une des racines intégrales de $\frac{1}{\varphi(u)}$, et l'expression $H+K\sqrt{-1}$ étant déterminée par la formule (27), on tirera de l'équation (3)

$$(62)\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)\frac{dx}{x^2+1}=\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}+....\right\}.$$

$$(63)\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi[l(-x\sqrt{-1})]\;\frac{rdx}{x^2+r^2}$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \varphi\left[\mathrm{l}(x) - \frac{\pi}{2}\sqrt{-1} \right] + \varphi\left[\mathrm{l}(x) + \frac{\pi}{2}\sqrt{-1} \right] \right\} \frac{r\,\mathrm{d}x}{x^2+r^2}$$

$$= \varpi\varphi[\mathrm{l}(r)] - 2\varpi r \left\{ (H+K\sqrt{-1}) \cdot \frac{\mathrm{Cos}.k+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.k}{r^2-e^{2h}(\mathrm{Cos}.2k+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2k)} e^h + \dots \right\}.$$

Il résulte d'ailleurs des équations (10) qu'après avoir cherché les racines de $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, on devra seulement admettre, dans les formules (62), celles des racines dont le module sera inférieur à l'unité, et, dans la formule (3), celles qui fourniront des valeurs positives ou nulles de Cos.k. Ajoutons que les quantités H et K devront être réduites à moitié, dans la formule (62), quand le module de $h+k\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, $\sqrt{h^2+k^2}$ deviendra égal à l'unité, et dans la formule (63), quand on aura Cos.$k=0$.

On déterminera avec la même facilité les valeurs des intégrales

$$(64)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{bx\sqrt{-1}} \cdot \varphi[\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})] \frac{r\,\mathrm{d}x}{r^2+x^2},$$

$$(65)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} \varphi[\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})] \frac{r\,\mathrm{d}x}{r^2+x^2},$$

$$(66)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\chi[\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})]\mathrm{d}x\ ;$$

et ainsi du reste.

On trouverait, par exemple,

$$(67)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})} = -2\varpi\left\{ \phi(\sqrt{-1}) + \frac{K-H\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})} + \dots \right\}.$$

On trouverait de même

$$(68)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} \varphi(x) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})}$$

$$= -2\varphi(\sqrt{-1}) - 2\varpi\left\{ \frac{K-H\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})} (k-h\sqrt{-1})^{a-1} + \dots \right\}.$$

On aurait, par suite, en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction paire de x

$$(69)\ \int_0^\infty \varphi(x)\frac{\mathrm{l}(x)}{\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\,\mathrm{d}x=-\varpi\left\{\varphi(\sqrt{-1})+\frac{K-H\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})}+\ldots\ldots\right\};$$

$$(70)\ \int_0^\infty x^{a-1}\varphi(x)\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{a\varpi}{2}\,\mathrm{l}(x)-\frac{\pi}{2}\,\text{Cos.}\,\frac{a\varpi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\varpi\varphi(\sqrt{-1})-\varpi\left\{\frac{K-H\sqrt{-1}}{(\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})}\,(k-h\sqrt{-1})^{a-1}+\ldots\right\};$$

et, en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction impaire de x,

$$(71)\ \int_0^\infty \varphi(x)\,\frac{1}{\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left\{\varphi(\sqrt{-1})+\frac{K-H\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})}+\ldots\ldots\right\}\sqrt{-1}.$$

$$(72)\ \int_0^\infty x^{a-1}.\varphi(x)\,\frac{\frac{\pi}{2}\,\text{Sin.}\,\frac{a\varpi}{2}+\text{Cos.}\,\frac{a\varpi}{2}\,.\mathrm{l}(x)}{\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\varpi\sqrt{-1}.\varphi(\sqrt{-1})+\varpi\left\{\frac{H+K\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1}}\,(k-h\sqrt{-1})^{a-1}+\ldots\ldots\right\}.$$

On pourrait multiplier sans mesure les formules générales qui se déduisent des équations (2) et (3) ; on pourrait ensuite transformer les intégrales définies contenues dans ces formules, de manière à obtenir d'autres intégrales, prises entre des limites différentes ; ce qui sera particulièrement utile, toutes les fois que les fonctions sous le signe $\int$ deviendront infiniment grandes, pour certaines valeurs de la variable. Ainsi, par exemple, on tirera de la formule (16)

$$(73)\ \int_0^r \tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}\left(\frac{r^2}{x}\right)+\mathrm{f}(-x)-\mathrm{f}\left(-\frac{r^2}{x}\right)\right\}\frac{r\,\mathrm{d}x}{x^2-r^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}[\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(-r)]\sqrt{-1}\ .$$

Il sera pareillement facile de s'assurer que l'intégrale (58) est équivalente à l'expression

$$(74)\ \int_0^1 \left\{x^a\varphi(x)+(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)^a\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right\}[\mathrm{l}(x)]^n\frac{\mathrm{d}x}{x}\ .$$

Ajoutons que, dans les diverses formules obtenues, les valeurs numériques des constantes a, b, r, s, ... ne seront pas toujours entièrement arbitraires ; et que ces constantes devront être comprises entre certaines limites si, en les étendant au-delà de ces limites, on rend infinies les valeurs des intégrales qui les renferment. Ainsi, en désignant par $\varphi(x)$ une fraction rationnelle dans laquelle le degré du dénominateur surpasse de m unités celui du numérateur, on reconnaîtra sans peine que, dans la formule (58), la constante positive a doit être inférieure au nombre entier m.

Si maintenant on attribue aux fonctions $f(x)$, $\mathrm{f}(x)$, $\varphi(x)$, ..., ou bien aux constantes a, b, r, s, ... des valeurs particulières, on déduira des formules générales que nous avons construites la plupart des intégrales définies connues, et une infinité d'autres nouvelles. Je me contenterai de présenter ici quelques-uns des résultats les plus simples.

$$(75)\ \int_0^\infty x^{a-1}.\mathrm{Sin.}\left(\frac{a\varpi}{2}-bx\right)\frac{r\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}.r^{a-1}e^{-br}\ .$$

$$(76)\ \int_0^\infty x^{a-1}.\mathrm{Sin.}\left(\frac{a\varpi}{2}-bx\right)\frac{r\mathrm{d}x}{r^2-x^2}=\frac{\pi}{2}.r^{a-1}\mathrm{Cos.}\left(\frac{a\varpi}{2}-br\right);$$

$$(77)\ \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\mathrm{d}x}{1+x}=\frac{\varpi}{\mathrm{Sin.}a\varpi}\ ,\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\mathrm{d}x}{1+x}=\varpi\mathrm{Cot.}a\varpi\ .$$

$$(78)\ \int_0^\infty \frac{x^a\mathrm{d}x}{x^2-1}=\int_0^1 \frac{x^a-\frac{1}{x^a}}{x-\frac{1}{x}}\ .\ \frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\varpi}{2}\ .\ \mathrm{Tang.}\frac{a\varpi}{2}\ .$$

$$(79)\int_0^\infty \frac{x^a dx}{x^2+2rx\text{Cos}.\theta+r^2}=\frac{\varpi r^{a-1}}{\text{Sin}.a\varpi}\cdot\frac{\text{Sin}.a\theta}{\text{Sin}.\theta}.$$

$$(80)\int_0^\infty \frac{x^\lambda\text{Cos}.[\mu l(x)]}{x^2+2x\text{Cos}\,\theta+1}dx$$

$$=\frac{\varpi}{\text{Sin}.\theta}\cdot\frac{[e^{\mu(\pi+\theta)}+e^{-\mu(\varpi+\theta)}]\text{Cos}.\lambda(\varpi-\theta)-[e^{\mu(\pi-\theta)}+e^{-\mu(\varpi-\theta)}]\text{Cos}.\lambda(\varpi+\theta)}{e^{2\mu\varpi}-2\text{Cos}.(2\lambda\varpi)+e^{-2\mu\varpi}}.$$

$$(81)\int_0^\infty \frac{x^\lambda\text{Sin}.[\mu l(x)]}{x^2+2x\text{Cos}.\theta+1}dx$$

$$=\frac{\varpi}{\text{Sin}.\theta}\cdot\frac{[e^{\mu(\pi+\theta)}-e^{-\mu(\pi+\theta)}]\text{Sin}.\lambda(\varpi+\theta)-[e^{\mu(\pi-\theta)}-e^{-\mu(\varpi-\theta)}]\text{Sin}.\lambda(\varpi-\theta)}{e^{2\mu\varpi}-2\text{Cos}.(2\lambda\varpi)+e^{-2\mu\varpi}}.$$

$$(82)\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}[l(x)]^n dx=\int_0^1 \frac{x^a+(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^a}{x+\frac{1}{x}}[l(x)]^n\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d^n.\text{Sec}.(\frac{1}{2}a\varpi)}{da^n}.$$

$$(83)\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2-1}[l(x)]^n dx=\int_0^1 \frac{x^a-(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^a}{x=\frac{1}{x}}[l(x)]^n\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d^n.\text{Tang}.(\frac{1}{2}a\varpi)}{da^n}.$$

$$(84)\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l(x)}\cdot\frac{dx}{x^2+1}=+\left(l\,\text{Tang}.\frac{a\varpi}{4}-l.\text{Tang}.\frac{b\pi}{4}\right).$$

$$(85)\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l(x)}\cdot\frac{dx}{x^2-1}=-\left(l.\text{Sin}.\frac{a\pi}{2}-l.\text{Sin}.\frac{b\varpi}{2}\right).$$

$$(86)\int_0^\infty \text{Cos}.bx.\frac{rdx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}.e^{-br},\quad\int_0^\infty \text{Sin}.bx.\frac{xdx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}.e^{-br}.$$

$$(87)\int_0^{\varpi}\text{Cos}.bx\ \frac{r\,dx}{x^2-r^2}=-\frac{\pi}{2}\,\text{Sin}.br\ ,\quad \int_0^{\infty}\text{Sin}.bx.\ \frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}\,\text{Cos}.br\,.$$

$$(88)\int_0^{\varpi}\text{Cos}.bx.\frac{dx}{1-x^2}=2\int_0^{1}\text{Sin}.\,\frac{b}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right).\text{Sin}.\,\frac{b}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dx}{x^2-1}=\frac{\pi}{2}\,\text{Sin}.b\ .$$

$$(89)\int_0^{\infty}\frac{\text{Sin}.bx}{x}\,dx=\frac{\varpi}{2}\,.\int_0^{\infty}\frac{\text{Sin}.bx}{x}\ .\ \frac{r^2dx}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}\left(1-e^{-br}\right)\ .$$

$$(90)\int_{-\infty}^{+\infty}\text{l}(x^2-2rx\text{Cos}.\theta+r^2)\ \frac{dx}{1+x^2}=\varpi\text{l}(1+2r\text{Sin}.\theta+r^2)\ .$$

$$(91)\int_{-\infty}^{+\infty}\text{Arc.Tang.}=\ \frac{r\text{Cos}.\theta-x}{r\text{Sin}.\theta}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\varpi.\text{Arc.Tang.}=\ \frac{r\text{Cos}.\theta}{1+r\text{Sin}.\theta}\,.$$

$$(92)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\infty}\text{l}\left(1+\frac{s^2}{x^2}\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\varpi\text{l}\left(1+\frac{s}{r}\right)\ ;\\[2ex]\displaystyle\int_0^{\infty}\text{Arc.Tang.}\left(\frac{s}{x}\right).\ \frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}\,\text{l}\left(1+\frac{s}{x}\right)\,.\end{array}\right.$$

$$(93)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\infty}\text{l}\left(1+\frac{s^2}{x^2}\right)\frac{r\,dx}{x^2-r^2}=-\varpi\text{Arc.Tang.}=\ \frac{s}{r}\ ;\\[2ex]\displaystyle\int_0^{\infty}\text{Arc.Tang.}\left(\frac{s}{x}\right).\ \frac{x\,dx}{x^2-r^2}=\frac{\varpi}{4}\text{l}\left(1+\frac{s^2}{r^2}\right)\,.\end{array}\right.$$

$$(94)\int_0^{\infty}(\text{Arc.Cot}.x)^2dx=2\int_0^{\infty}\text{Arc.Tang.}\frac{1}{x}\cdot\frac{x\,dx}{x^2+1}=\varpi\text{l}(2)\ .$$

$$(95)\int_0^{1}\frac{x\text{Arc.Tang.}\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x}\,\text{Arc.Tang}.x}{x-\frac{1}{x}}\ .\ \frac{dx}{x}=\frac{\varpi}{4}\,\text{l}(2)\ .$$

$$(96)\int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}\text{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\varpi r^{a-1}\text{l}\left(1+\frac{s}{r}\right).$$

$$(97)\int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}.e^{bx\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{r-x\sqrt{-1}}=0 .$$

$$(98)\int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}.e^{bx\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{r+x\sqrt{-1}}=2\varpi.r^{a-1}e^{-br}.\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{r}\right).$$

$$(99)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax\sqrt{-1}}-e^{bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}=-\frac{2\varpi}{1-r}\left[e^{-b(1-r)}-e^{-a(1-r)}\right],\text{ pour } r<1\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax\sqrt{-1}}-e^{bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})}=-\varpi(a-b)\ ;\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax\sqrt{-1}}-e^{bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}=0,\text{ pour } r>1 .\end{array}\right.$$

$$(100)\int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}.\frac{\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)}{\mathrm{l}\left(1-\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=2\varpi(1-r)^{a-1}e^{-b(1-r)}\mathrm{l}\left(\frac{1-r}{1-r+s}\right);\text{ pour } r<1$$

$$(101)\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}(\mathrm{Cos}.ax-\mathrm{Cos}.bx)+(\mathrm{Sin}.ax-\mathrm{Sin}.bx)\mathrm{l}(x)}{\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\varpi(e^{-a}-e^{-b}) .$$

$$(102)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{(r-x\sqrt{-1})^{a}}\mathrm{d}x=0\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(r-x\sqrt{-1})^{a}(s-x\sqrt{-1})^{b}}=0 .$$

$$(103)\int_{0}^{\infty}e^{a\mathrm{Cos}.bx}(a\mathrm{Sin}.bx)\ \frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\varpi}{2}(e^{a}-1) .$$

$$(104)\quad \int_0^\infty e^{a\mathrm{Cos}.bx}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.bx)\,\frac{r\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}e^{ae^{-br}}.\quad (*)$$

$$(105)\quad \int_0^\infty e^{a\mathrm{Cos}.bx}\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}.bx)\,\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}\left(e^{ae^{-bk}}-1\right).$$

$$(106)\quad \int_0^\infty x^{a-1}e^{\mathrm{Cos}.bx}\mathrm{Sin}.\left(\frac{a\pi}{2}-\mathrm{Sin}.bx\right)\frac{r\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}r^{a-1}.e^{e^{-br}}.$$

$$(107)\quad \int_0^\infty \frac{(r-x\sqrt{-1})^{-n}+(r+x\sqrt{-1})^{-n}}{2}\,\mathrm{l}\left(1+\frac{s^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\varpi}{n-2}\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{r+s}\right)^{n-2}\right\}.$$

$$(108)\quad \int_0^\infty \frac{(r-x\sqrt{-1})^{-n}-(r+x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}\,\mathrm{Arc.Tang.}\left(\frac{s}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\frac{\varpi}{n-1}\left\{\frac{1}{r^n}-\frac{1}{(r+s)^n}\right\};$$

$$(109)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}.ax}{\mathrm{Cos}.bx}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{e^a+e^{-a}}{e^b+e^{-b}};\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.ax}{\mathrm{Sin}.bx}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{e^b-e^{-b}};\\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\mathrm{Cos}.ax}{\mathrm{Sin}.bx}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{e^a+e^{-a}}{e^b-e^{-b}};\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.ax}{x\mathrm{Cos}.dx}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{e^b+e^{-b}}.\end{array}\right.$$

Les quatre dernières formules supposent $a<b$.

Dans le tableau qui précède, on reconnaît facilement plusieurs formules établies à l'aide de méthodes diverses, par Euler et d'autres géomètres, et particulièrement par MM. Laplace, Legendre et Poisson, et par M. Bidone, géomètre italien. C'est à ce dernier que sont dues les équations (37), les formules (75), (76), et plusieurs autres sont entièrement nouvelles, ou extraites de quelques-uns des mémoires que j'ai déjà publiés sur les intégrales définies.

(*) Ces deux dernières formules doivent être déduites, non de la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\varpi\sqrt{-1}(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\mathrm{f}_3+\ldots.);$$

mais de la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\varpi\sqrt{-1}(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\mathrm{f}_3+\ldots.)-\varpi.\mathrm{F}\sqrt{-1};$$

F désignant la valeur que reçoit $(x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})$, pour $y=\infty$. (Voy. *la première partie du mémoire*).

En désignant, avec M. Legendre, par $\Gamma(a)$ l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x ,$$

et, en suivant la méthode que j'ai indiquée dans le *Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires* (Paris, in-4.°, *Debure*, 1825), on établit facilement les deux équations

$$(110) \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bx\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{(r+x\sqrt{-1})^a} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} b^{a-1} . e^{-br} . \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(r+x\sqrt{-1})^a (s-x\sqrt{-1})^b} = 2\varpi (r+s)^{1-a-b} . \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} . \end{aligned} \right.$$

De ces dernières, combinées avec la formule (102), on tire immédiatement

$$(111) \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{(r-x\sqrt{-1})^{-a}+(r+x\sqrt{-1})^{-a}}{2} . \mathrm{Cos}.bx.\mathrm{d}x = \frac{\varpi}{2\Gamma(a)} . b^{a-1} . e^{-br} ; \\ &\int_0^\infty \frac{(r-x\sqrt{-1})^{-a}-(r+x\sqrt{-1})^{-a}}{2\sqrt{-1}} \mathrm{Sin}.bx.\mathrm{d}x = \frac{\varpi}{2\Gamma(a)} . b^{a-1} . e^{-br} ; \end{aligned} \right.$$

et aussi

$$(112) \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{(r-x\sqrt{-1})^{-a}+(r+x\sqrt{-1})^{-a}}{2} . \frac{(s-x\sqrt{-1})^{-b}+(s+x\sqrt{-1})^{-b}}{2} \mathrm{d}x \\ &\qquad = \frac{\varpi}{2} (r+s)^{1-a-b} . \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ &\int_0^\infty \frac{(r-x\sqrt{-1})^{-a}-(r+x\sqrt{-1})^{-a}}{2\sqrt{-1})} . \frac{(s-x\sqrt{-1})^{-b}-(s+x\sqrt{-1})^{-b}}{2\sqrt{-1}} \mathrm{d}x \\ &\qquad = \frac{\varpi}{2} (r+s)^{1-a-b} . \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} . \end{aligned} \right.$$

J'ai donné les formules (111) au commencement de 1815, dans un mémoire où elles étaient appliquées à la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies, et pour lesquelles MM. Laplace, Legendre et Lacroix furent nommés commissaires. On peut, au reste, opérer cette conversion, en s'appuyant sur la première des formules (110), ou sur une autre formule qui s'accorde avec elle, et qui a été donnée par M. Laplace.

Enfin on tire des formules (87), en faisant $r=1$, puis écrivant z au lieu de b,

$$(113)\qquad \text{Cos.}z=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \text{Sin.}zx.\frac{x\,dx}{x^2-1}\ ;\quad \text{Sin.}z=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \text{Cos.}zx.\frac{dx}{1-x^2}\ .$$

Ces dernières fournissent le moyen de remplacer le cosinus d'un arc positif z, par le sinus d'un arc variable, proportionnel à z, et le sinus du premier arc par le cosinus du second. Cette propriété des formules (113) peut être utile dans la solution de quelques problèmes. C'est effectivement à l'aide des formules dont il s'agit que j'étais d'abord parvenu, en 1815, à résoudre la question de la propagation des ondes, ainsi qu'on peut le voir dans la note XVIII, placée à la suite du mémoire déjà cité.

Si, dans l'intégrale (74), on pose $x=e^{-p}$, elle prendra la forme

$$(114)\quad \int_0^\infty [e^{ap}.\varphi(e^p)+(-1)^n e^{-ap}.\varphi(e^{-p})]p^n dp\ .$$

Par conséquent, les méthodes ci-dessus exposées fourniront la valeur de l'intégrale (114), qui ne diffère pas de la suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p^n e^{ap}\varphi(e^p)dp\ .$$

Si l'on applique la même transformation aux intégrales (78), (80), (81), (82), (83), (88), (95), ... ; puis que l'on écrive x au lieu de p, on trouvera

$$(115)\ \int_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\varpi}{2}\mathrm{Tang.}\ \frac{a\varpi}{2}.$$

$$(116)\ \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{e^x+2\mathrm{Cos.}\theta+e^{-x}}\,\mathrm{Cos.}(\mu x).\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\varpi}{\mathrm{Sin.}\theta}\cdot\frac{[e^{\mu(\pi+\theta)}+e^{-\mu(\varpi+\theta)}]\mathrm{Cos.}\lambda(\varpi-\theta)-[e^{\mu(\pi-\theta)}+e^{-\mu(\varpi-\theta)}]\mathrm{Cos.}\lambda(\varpi+\theta)}{e^{2\mu\varpi}-2\mathrm{Cos}\,(2\lambda\varpi)+e^{-2\mu\varpi}}.$$

$$(117)\ \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{e^x+2\mathrm{Cos.}\theta+e^{-x}}\,\mathrm{Sin.}(\mu x).\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\varpi}{\mathrm{Sin.}\theta}\cdot\frac{[e^{\mu(\pi+\theta)}-e^{-\mu(\pi+\theta)}]\mathrm{Sin.}\lambda(\varpi+\theta)-[e^{\mu(\pi-\theta)}-e^{-\mu(\varpi-\theta)}]\mathrm{Sin.}\lambda(\varpi+\theta)}{e^{2\mu\varpi}-2\mathrm{Cos.}(2\lambda\varpi)+e^{-2\mu\varpi}}.$$

$$(118)\ \int_0^\infty \frac{e^{ax}+(-1)^n e^{-ax}}{e^x+e^{-x}}.x^n\mathrm{d}x=(-1)^n.\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^n\,\mathrm{Sec.}\ \frac{a\varpi}{2}}{\mathrm{d}a^n}.$$

$$(119)\ \int_0^\infty \frac{e^{ax}-(-1)^n e^{-ax}}{e^x-e^{-x}}.x^n\mathrm{d}x=(-1)^n.\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^n.\mathrm{Tang.}\ \frac{a\varpi}{2}}{\mathrm{d}a^n}.$$

$$(120)\ \int_0^\infty \mathrm{Sin.}\ \frac{b}{2}(e^x+e^{-x}).\mathrm{Sin.}\ \frac{b}{2}(e^x-e^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{e^x-e^{-x}}=+\frac{\varpi}{4}\mathrm{Sin.}b\ .$$

$$(121)\ \int_0^\infty \frac{e^x\mathrm{Arc}(\mathrm{Tang.}e^{-x})-e^{-x}\mathrm{Arc}(\mathrm{Tang.}e^x)}{e^x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\,\mathrm{l}(2)\ ;$$

et ainsi du reste

On pourrait, au surplus, déduire directement la plupart des équations précédentes de la formule (4), combinée avec celles qui résultent de la méthode indiquée dans le 13.^{e} paragraphe du *Mé-*

moire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires.

Si l'on pose, dans la formule (62), $x=\text{Tang.}\frac{1}{2}p$, on trouvera

$$(122)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(e^{p\sqrt{-1}})dp=2\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}+\dots\right\};$$

ou, ce qui revient au même,

$$(123)\quad \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\varpi}[\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})]dp=\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}+\dots\right\}.$$

L'équation (122) coïncide avec l'une des formules générales que j'ai données dans le XIX.[e] cahier du *Journal de l'école polytechnique.* De plus, si, dans l'équation (123), on fait successivement

$$\varphi(u)=\frac{f(u)}{1-ru}\quad;\qquad \varphi(u)=\frac{f(u)}{1-\frac{r}{u}}\;;$$

r désignant une constante positive, et $f(u)$ une fonction qui conserve une valeur finie pour toutes les valeurs de u, réelles ou imaginaires, dont le module est inférieur à l'unité; on trouvera, pour $r<1$,

$$(124)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{0}^{\varpi}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-re^{p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-re^{-p\sqrt{-1}}}\right\}dp=\varpi f(0)\,,\\ &\int_{0}^{\varpi}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-re^{-p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-re^{p\sqrt{-1}}}\right\}dp=\varpi f(r)\,;\end{aligned}\right.$$

pour $r=1$

$$(125)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-e^{p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-e^{-p\sqrt{-1}}}\right\}dp=\varpi[f(o)-\tfrac{1}{2}f(1)]\;.\\&\int_0^{\varpi}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-e^{-p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-e^{p\sqrt{-1}}}\right\}dp=\tfrac{1}{2}\varpi f(1)\;;\end{aligned}\right.$$

et enfin, pour $r>1$

$$(126)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-re^{p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-re^{-p\sqrt{-1}}}\right\}dp=\varpi\left[f(o)-f\left(\frac{1}{r}\right)\right],\\&\int_0^{\varpi}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-re^{-p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-re^{p\sqrt{-1}}}\right\}dp=o\;.\end{aligned}\right.$$

Lorsque, dans les équations (124), on suppose $r=o$, elles se réduisent à

$$(127)\quad\int_0^{\varpi}\tfrac{1}{2}\,[f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})]dp=\varpi f(o)\;.$$

Si, dans celle-ci, on remplace $f(x)$ par $f(b+x)$, et les limites o, ϖ par $-\varpi$, $+\varpi$, on conclura

$$(128)\quad\int_{-\varpi}^{+\varpi}\tfrac{1}{2}\,f(b+e^{p\sqrt{-1}})dp=\varpi f(b)\;;$$

De même, si après avoir différentié n fois, par rapport à la quantité r, la seconde des équations (124), on y remplace $f(x)$ par $f(b+x)$, on en tirera, en posant $r=o$,

$$(129)\quad\int_{-\varpi}^{+\varpi}e^{-np\sqrt{-1}}.f(b+e^{p\sqrt{-1}})dp=\frac{2\pi}{1.2.3....n}\cdot\frac{d^n.f(b)}{db^n}\;.$$

Ces diverses formules, que j'ai données dans le *Bulletin de la société philomatique*, s'accordent avec d'autres formules du même genre, obtenues par MM. Perseval, Libri et Poisson. Il est facile de les étendre à des valeurs négatives, ou même à des valeurs imaginaires des constantes r et b. Ainsi, par exemple, on reconnaîtra sans peine que les équations (124) subsistent pour toutes les valeurs de r, réelles ou imaginaires, dont le module est inférieur à l'unité. La seconde de ces équations, présentée sous la forme

$$(130) \qquad \mathrm{f}(r) = \frac{1}{2\varpi} \int_{-\varpi}^{+\varpi} \frac{\mathrm{f}(e^{p\sqrt{-1}})}{1 - re^{-p\sqrt{-1}}} \mathrm{d}p \ ,$$

offre évidemment le moyen de convertir une fonction donnée de r, considérée comme variable, en une intégrale définie, dans laquelle la fonction sous le signe se réduise à une fraction dont le numérateur soit indépendant de r, et le dénominateur une fonction linéaire de cette variable.

Si, dans l'équation (122), on pose successivement

$$\varphi(u) = \frac{\mathrm{f}(u)}{r - \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)} \ , \qquad \varphi(u) = \frac{\mathrm{f}(u)}{r + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)} \ ;$$

r désignant une constante positive, et $\mathrm{f}(u)$ une fonction qui conserve une valeur fixe, pour toutes les valeurs de u, réelles ou imaginaires, dont le module est inférieur à l'unité; on trouvera

$$(131) \quad \int_{0}^{\varpi} \frac{\mathrm{f}(e^{p\sqrt{-1}}) + \mathrm{f}(e^{-p\sqrt{-1}})}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{r - \mathrm{Cos}.p}$$

$$= \frac{\mathrm{f}[r - (1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}] - \mathrm{f}[r + (1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}]}{2(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}} \varpi \ ;$$

$$(132)\int_0^{\varpi}\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{dp}{r+\text{Cos.}p}$$

$$=\frac{f[-r+(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}]-f[-r-(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}]}{2(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}\varpi\ ;$$

et pour $r>1$,

$$(133)\int_0^{\varpi}\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{dp}{r-\text{Cos.}p}=\frac{f[r-(r^2-1)^{\frac{1}{2}}]}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}\varpi\ .$$

$$(134)\int_0^{\varpi}\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{dp}{r+\text{Cos.}p}=\frac{f[-r+(r^2-1)^{\frac{1}{2}}]}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}\varpi\ .$$

Si, dans l'équation (122), on remplace la fonction

$$\varphi(u)=\varphi\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)=\varphi(e^{p\sqrt{-1}})$$

par l'un des produits

$$(-x\sqrt{-1})^a\varphi(u)\ ,\qquad (1-x\sqrt{-1})^a\varphi(u)\ ,\qquad \left(1+\frac{1}{x}\sqrt{-1}\right)^a\varphi(u)\ ,$$

$$l(-x\sqrt{-1})\varphi(u)\ ,\qquad l(1-x\sqrt{-1})\varphi(u)\ ,\qquad l\left(1+\frac{1}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(u)\ ,$$

$$\frac{\varphi(u)}{l(1-x\sqrt{-1})}\ ,\qquad \frac{(-x\sqrt{-1})^a}{l(1-x\sqrt{-1})}\varphi(u)\ ;$$

on trouvera successivement

$$(135)\int_{-\varpi}^{+\varpi}\left(-\sqrt{-1}\,\text{Tang.}\frac{p}{2}\right)^a\varphi(e^{p\sqrt{-1}})dp$$

$$=2\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)^a+\ldots\right\}.$$

$$(136)\quad\int_{-\varpi}^{+\varpi}\frac{\text{Cos.}\,\frac{ap}{2}-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\varphi(e^{p\sqrt{-1}})dp$$

$$=2^{a+1}.\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1+h+k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\}.$$

$$(137)\quad\int_{-\pi}^{+\pi}\left(1-\sqrt{-1}\,\text{Cot.}\,\frac{p}{2}\right)^a.\varphi(e^{p\sqrt{-1}})dp$$

$$=2^{a+1}.\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1-h-k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\};$$

$$(138)\quad\int_{-\varpi}^{+\varpi}\mathrm{l}\left(-\sqrt{-1}.\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)\varphi(e^{p\sqrt{-1}})dp$$

$$=2\varpi\left\{\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)+\ldots\ldots\right\}.$$

$$(139)\quad\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\mathrm{l}\text{Cos.}\,\frac{p}{2}+\tfrac{1}{2}p\sqrt{-1}\right]\varphi(e^{p\sqrt{-1}})dp$$

$$=2\varpi\left\{\varphi(0).\mathrm{l}(\tfrac{1}{2})+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(\frac{1+h+k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\right\}.$$

$$(140)\quad\int_{-\varpi}^{+\varpi}\mathrm{l}\left(1+\sqrt{-1}.\text{Cot.}\,\frac{p}{2}\right).\varphi(e^{p\sqrt{-1}})dp$$

$$=-2\varpi\left\{\varphi(0)\mathrm{l}(\tfrac{1}{2})+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+h\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\ldots\right\}.$$

$$(141)\quad \int_{-\varpi}^{+\varpi} \frac{\mathrm{l}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\sqrt{-1}}{\left(\mathrm{l}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$= -2\varpi\left\{\frac{\phi(0)}{\mathrm{l}(2)} - \varphi(1) + \frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+h+k\sqrt{-1})} + \ldots\right\}.$$

$$(142)\quad \int_{-\varpi}^{+\varpi} \left(-\sqrt{-1}.\mathrm{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a \frac{\mathrm{l}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\sqrt{-1}}{\left(\mathrm{l}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$= -2\varpi\left\{\frac{\phi(0)}{\mathrm{l}(2)} + \frac{H+K\sqrt{-1}}{h+h\sqrt{-1}}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)^a \frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+h+k\sqrt{-1})} + \ldots\right\};$$

et ainsi du reste.

Par suite, si l'on prend pour $\varphi(u)$ une fonction réelle de u qui vérifie la condition

$$(143)\qquad \varphi(u) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right),$$

on trouvera

$$(144)\quad \int_0^{\varpi} \frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}}) + \phi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}.\left(\mathrm{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a \mathrm{d}p$$

$$= \frac{\pi}{\mathrm{Cos.}\,\frac{a\pi}{2}}\left\{\varphi(0) + \frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)^a + \ldots\right\}.$$

$$(145)\quad \int_0^{\varpi} \frac{\phi(e^{p\sqrt{-1}}) + \phi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}.\frac{\mathrm{Cos.}\,\frac{ap}{2}}{\left(\mathrm{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\mathrm{d}p$$

$$=2^a\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1+h+k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\}.$$

(146) $$\int_0^{\pi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{\text{Cos.}\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\frac{p}{2}\right)^a}\mathrm{d}p$$

$$=2^a\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1-h-k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\}.$$

(147) $$\int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\text{l.Tang.}\left(\frac{p}{2}\right)\mathrm{d}p$$

$$=\varpi\left\{\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\,\text{l}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)+\ldots\ldots\right\}.$$

(148) $$\int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\text{l.Cos.}\frac{p}{2}\,\mathrm{d}p$$

$$=\varpi\left\{\varphi(0).\text{l}(\tfrac{1}{2})+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\,\text{l}\left(\frac{1+h+k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\right\}.$$

(149) $$\int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\text{l.Sin.}\frac{p}{2}\,\mathrm{d}p$$

$$=\varpi\left\{\varphi(0)\text{l}(\tfrac{1}{2})+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\,\text{l}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\ldots\right\}.$$

(150) $$\int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{\text{l.Cos.}\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{lCos.}\frac{p}{2}\right)^2}\mathrm{d}p$$

$$=\varpi\varphi(1)-\varpi\left\{\frac{\varphi(0)}{l(2)}+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{l(2)-l(1+h+k\sqrt{-1})}+\ldots\right\};$$

et ainsi du reste.

Si, au contraire, on prend pour $\varphi(u)$ une fonction rationnelle qui vérifie la condition

$$(151)\qquad \varphi(u)=-\varphi\left(\frac{1}{u}\right),$$

on trouvera

$$(152)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}.\left(\text{Tang.}\frac{p}{2}\right)^a dp$$

$$=\frac{\pi}{\text{Sin.}\frac{a\pi}{2}}\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)^a+\ldots\right\}.$$

$$(153)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{\text{Sin.}\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos.}\frac{p}{2}\right)^a}.dp$$

$$=2^a\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1+h+k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\}.$$

$$(154)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{\text{Sin.}\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\frac{p}{2}\right)^a}dp$$

$$=2^a\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1-h-k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\}.$$

$$(155)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}.p\,dp$$

$$=-2\varpi\left\{\varphi(0)\mathrm{l}(\tfrac{1}{2})+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+h+k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\right\}.$$

$$(156)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\phi(e^{p\sqrt{-1}})-\phi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{\frac{1}{2}p\,dp}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\mathrm{l.Cos.}\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$=\varpi\left\{\varphi(1)-\frac{\phi(0)}{\mathrm{l}(2)}-\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+h+k\sqrt{-1})}-\ldots\right\};$$

et ainsi du reste.

Il serait facile d'apercevoir les modifications que doivent présenter, dans les seconds membres de ces diverses équations, les termes correspondant à des racines égales de $\frac{1}{\phi(u)}=0$.

Lorsque la fonction $\varphi(u)$ est rationnelle, les valeurs de l'expression imaginaire $h+k\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, les racines de l'équation $\frac{1}{\phi(u)}=0$, sont en nombre fini; et par conséquent les valeurs des intégrales que contiennent les diverses formules ci-dessus établies, se composent d'un nombre limité de termes. On ne doit pas oublier que, dans ces formules comme dans l'équation (122), on doit seulement tenir compte des racines de l'équation $\frac{1}{\phi(u)}=0$ dont le module est inférieur à l'unité, et réduire à moitié tous les termes correspondant aux racines dont le module est précisément égal à 1.

Il est encore essentiel d'observer 1.° que les formules trouvées cessent d'être applicables, toutes les fois que les intégrales qu'elles renferment deviennent infinies; 2.° que de ces formules on en peut déduire un grand nombre d'autres, par des différentiations ou des intégrations relatives à la quantité a; 3.° enfin, que cette constante a, dans les équations qui la renferment, peut recevoir des valeurs réelles ou des valeurs imaginaires.

Si maintenant on attribue aux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, ou bien aux constantes r, a,..... des valeurs particulières, on déduira immédiatement des formules ci-dessus établies les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies, dont plusieurs étaient déjà connues. Je me contenterai de citer ici quelques-uns des résultats les plus simples.

$$(157)\qquad \int_{-\varpi}^{+\varpi} e^{-np\sqrt{-1}+be^{p\sqrt{-1}}}\,dp = 2\varpi\,\frac{b^n}{1.2.3....n}\;.$$

$$(158)\qquad \int_0^{\varpi}\left(\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a dp = \frac{\varpi}{\text{Cos.}\,\frac{a\varpi}{2}}$$

$$(159)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\text{Cos.}\,\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\,dp = \int_0^{\varpi}\frac{\text{Cos.}\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\,dp = 2^a\varpi\,.$$

$$(160)\qquad \int_0^{\varpi}\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\,dp = \int_0^{\varpi}\text{l.Sin.}\,\frac{p}{2}\,dp = \varpi\,\text{l}\left(\tfrac{1}{2}\right)\;.$$

$$(161)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{p\,\text{Sin.}p}{1-\text{Cos.}p}\,dp = \int_0^{\varpi}\frac{1+\text{Cos.}p}{\text{Sin.}p}\,p\,dp = 2\varpi.\text{l}(2)\,.$$

$$(162)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^2}\,dp = \varpi\left[1-\frac{1}{\text{l}(2)}\right].$$

$$(163)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\frac{p}{2}\,\text{Tang.}\,\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^2}.dp = \frac{\pi}{\text{l}(2)}\;:$$

On trouvera de même, pour $r<1$,

$$(164)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin}.p}{r-\text{Cos}\,p}p\,\text{d}p=+\varpi\,\text{l}(2+2r)\,,\\&\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin}.p}{r+\text{Cos}.p}p\,\text{d}p=-\varpi\,\text{l}(2-2r)\,;\end{aligned}\right.$$

et pour $r<4$,

$$(165)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin}.p}{r-\text{Cos}.p}p\,\text{d}p=+\varpi\,\text{l}(2r+2)-\varpi\,\text{l}(r+\sqrt{r^2-1})\,,\\&\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin}.p}{r+\text{Cos}.p}p\,\text{d}p=-\varpi\,\text{l}(2r-2)+\varpi\,\text{l}(r+\sqrt{r^2-1})\,.\end{aligned}\right.$$

On trouvera encore, pour $r^2<1$,

$$(166)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\frac{1-r\text{Cos}.p}{1-2r\text{Cos}.p+r^2}\left(\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)^a\text{d}p=\frac{\pi}{2\text{Cos}.\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right],\\&\int_0^{\varpi}\frac{r\text{Sin}.p}{1-2r\text{Cos}.p+r^2}\left(\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)^a\text{d}p=\frac{\pi}{2\text{Sin}.\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right].\end{aligned}\right.$$

$$(167)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\frac{1-r\text{Cos}.p}{1-2r\text{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\text{Cos}.\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos}.\frac{p}{2}\right)^a}.\text{d}p=2^{a-1}.\varpi[1+(1+r)^{-a}]\,,\\&\int_0^{\varpi}\frac{r\text{Sin}.p}{1-2r\text{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\text{Sin}.\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos}.\frac{p}{2}\right)^a}.\text{d}p=2^{a-1}.\varpi[1-(1+r)^{-a}]\,.\end{aligned}\right.$$

$$(168)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}\,p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\mathrm{Sin}.\frac{p}{2}\right)^a}\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi[1+(1-r)^{-a}]\ ,\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\,\mathrm{Sin}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{Sin}.\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\mathrm{Sin}.\frac{p}{2}\right)^a}\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi[1-(1-r)^{-a}]\ .\end{cases}$$

$$(169)\quad\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}.\mathrm{l.Tang.}\frac{p}{2}\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1-r}{1+r}\right).$$

$$(170)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}.\mathrm{lCos}.\frac{p}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+r}{4}\right),\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\,\mathrm{Sin}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\,p\,\mathrm{d}p=\varpi\mathrm{l}(1+r)\ .\end{cases}$$

$$(171)\quad\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,p+r^2}.\mathrm{l.Sin.}\frac{p}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1-r}{4}\right).$$

$$(172)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{l.Cos.}\frac{1}{2}p}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\mathrm{l.Cos.}\frac{p}{2}\right)^2}.\mathrm{d}p=\frac{\pi}{1-r}-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{l}(2)}+\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+r)}\right],\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\,\mathrm{Sin}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}p}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\mathrm{l.Cos.}\frac{p}{2}\right)^2}.\mathrm{d}p=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{l}(2)}-\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+r)}\right];\end{cases}$$

et ainsi du reste.

On trouvera, au contraire, pour $r^2>1$,

$$(173)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}\,p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\left(\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2\,\mathrm{Cos}.\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^a\right],\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\,\mathrm{Sin}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\left(\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2\,\mathrm{Sin}.\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^a\right].\end{cases}$$

$$(174)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\mathrm{Sin}.\,\frac{p}{2}\right)^a}\,\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi\left[1-\left(\frac{r+1}{r}\right)^{-a}\right],\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\,\mathrm{Sin}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\mathrm{Sin}.\,\frac{p}{2}\right)^a}\,\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi\left[1-\left(\frac{r+1}{r}\right)^{-a}\right].\end{cases}$$

$$(175)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\mathrm{Sin}.\,\frac{p}{2}\right)^a}\,\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi\left[1-\left(\frac{r-1}{r}\right)^{-a}\right],\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\,\mathrm{Sin}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{Sin}.\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\mathrm{Sin}.\,\frac{p}{2}\right)^a}\,\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi\left[1-\left(\frac{r-1}{r}\right)^{-a}\right].\end{cases}$$

$$(176)\quad\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r}.\mathrm{l.Tang}.\,\frac{p}{2}.\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{r+1}{r-1}\right);$$

$$(177)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}.p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}.\mathrm{l.Cos}.\,\frac{p}{2}.\mathrm{d}p=-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{r+1}{r}\right),\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r^2\,\mathrm{Sin}\,p}{1-2r\,\mathrm{Cos}.p+r^2}\,p\,\mathrm{d}p=\varpi\mathrm{l}\left(\frac{r+1}{r}\right).\end{cases}$$

$$(178)\quad\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}\,p}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,p+r^2}\,\mathrm{l\,Sin}.\,\frac{p}{2}\cdot\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{r}{r-1}\right).$$

$$(179)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\text{Cos}\,p}{1-2\text{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\text{lCos}.p.}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{l.Cos}.\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{1-r}-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\text{l}(2)}-\frac{1}{\text{l}(2)-\text{l}\left(1+\frac{1}{r}\right)}\right],\\ \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\text{Sin}.p}{1-2r\text{Cos}\,p+r^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}p}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{l.Cos}.\frac{p}{2}\right)^2}=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\text{l}\left(\frac{1+r}{2r}\right)}+\frac{1}{\text{l}(2)}\right];\end{cases}$$

et ainsi du reste.

Si l'on développe, suivant les puissances ascendantes de r, les deux membres de chacune des équations (166), (167)....(172), on obtiendra de nouvelles formules, que l'on pourrait déduire directement de l'équation (122), étendue au cas où l'équation $\frac{1}{\phi(u)}=0$ a des racines égales. On trouvera de cette manière, n désignant un nombre entier quelconque,

$$(180)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\text{Cos}.np\left(\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)^a\text{d}p\\ \displaystyle=(-1)^n.\frac{\varpi}{2\text{Cos}.\frac{a\varpi}{2}}.\frac{a(a-1)....(a-n+1)}{1.2.3...n}\left[1+\frac{n}{1}\cdot\frac{a}{a-n+1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a(a+1)}{(a-n+1)(a-n+2)}+...\right],\\ \displaystyle\int_0^{\varpi}\text{Sin}.np\left(\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)^a\text{d}p\\ \displaystyle=(-1)^{n+1}\frac{\varpi}{2\text{Sin}.\frac{a\varpi}{2}}.\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{1.2.3....n}\left[1+\frac{n}{1}\cdot\frac{a}{a-n+1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a(a+1)}{(a-n-1)(a-n+2)}+...\right].\end{cases}$$

$$(181)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\text{Cos}.np.\text{Cos}.\frac{ap}{2}\left(\text{Cos}.\frac{p}{2}\right)^{-a}\text{d}p=(-1)^n.2^{a-1}.\varpi.\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{1.2.3....n},\\ \displaystyle\int_0^{\varpi}\text{Sin}.np.\text{Sin}.\frac{ap}{2}\left(\text{Cos}.\frac{p}{2}\right)^{-a}\text{d}p=(-1)^{n+1}.2^{a-1}.\varpi.\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{1.2.3....n}.\end{cases}$$

La formule (157) et les formules (181), quand on y remplace a par $-a$, peuvent s'écrire comme il suit :

$$(182)\qquad \int_{-\varpi}^{+\varpi} e^{-np\sqrt{-1}+be^{p\sqrt{-1}}}\,\mathrm{d}p = \frac{2\varpi}{\Gamma(n+1)}.b^n.$$

$$(183)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\varpi} \mathrm{Cos}\,np.\mathrm{Cos}.\frac{ap}{2}\left(\mathrm{Cos}.\frac{p}{2}\right)^a \mathrm{d}p = \frac{\varpi}{2^{a+1}}.\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+1).\Gamma(a-n+1)}, \\ &\int_0^{\varpi} \mathrm{Sin}.np\mathrm{Sin}.\frac{ap}{2}\left(\mathrm{Cos}.\frac{p}{2}\right)^a \mathrm{d}p = \frac{\varpi}{2^{a+1}}.\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+1).\Gamma(a-n+1)}. \end{aligned} \right.$$

Si, dans les équations (111) et (112), on pose $r=0$, ou $r=1$, $s=1$ et $x=\mathrm{Tang}.\frac{1}{2}p$; on en tirera successivement

$$(184)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\varpi} \left(\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)^{-a} \mathrm{Cos}\left(b\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{Cos}.^2\frac{p}{2}} = \frac{\varpi}{\Gamma(a).\mathrm{Cos}.\frac{a\pi}{2}}.b^{a-1}, \\ &\int_0^{\varpi} \left(\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)^{-a} \mathrm{Sin}.\left(b\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{Cos}.^2\frac{p}{2}} = \frac{\varpi}{\Gamma(a).\mathrm{Sin}.\frac{a\varpi}{2}}.b^{a-1}. \end{aligned} \right.$$

$$(185)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\varpi} \mathrm{Cos}.\frac{ap}{2}\left(\mathrm{Cos}\,\frac{p}{2}\right)^{a-2} \mathrm{Cos}.\left(b\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)\mathrm{d}p = \frac{\pi}{\Gamma(a)}.b^{a-1}.e^{a-1}, \\ &\int_0^{\varpi} \mathrm{Sin}.\frac{ap}{2}\left(\mathrm{Cos}\,\frac{p}{2}\right)^{a-2} \mathrm{Sin}.\left(b\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)\mathrm{d}p = \frac{\pi}{\Gamma(a)}.b^{a-1}.e^{-b}. \end{aligned} \right.$$

$$(186)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\varpi} \left(\mathrm{Sin}.\frac{p}{2}\right)^{-a}\left(\mathrm{Cos}.\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\mathrm{Cos}.\frac{bp}{2}\,\mathrm{d}p = \frac{\varpi}{\mathrm{Cos}.\frac{a\varpi}{2}}\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a).\Gamma(b)}, \\ &\int_0^{\pi} \left(\mathrm{Sin}.\frac{p}{2}\right)^{-a}\left(\mathrm{Sin}.\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\mathrm{Sin}.\frac{bp}{2}\,\mathrm{d}p = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}.\frac{a\pi}{2}}.\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a).\Gamma(b)}. \end{aligned} \right.$$

$$(187)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\left(\text{Cos.}\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\text{Cos.}\frac{ap}{2}.\text{Cos.}\frac{bp}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2^{a+b-1}}\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a).\Gamma(b)}\,,\\&\int_0^{\varpi}\left(\text{Cos.}\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\text{Sin.}\frac{ap}{2}.\text{Sin.}\frac{bp}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2^{a+b-1}}\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,.\end{aligned}\right.$$

$$(188)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\left(\text{Cos.}\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\text{Cos.}\left(\frac{b-a}{2}\right)p\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2^{a+b-1}}\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,,\\&\int_0^{\varpi}\left(\text{Cos.}\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\text{Cos.}\left(\frac{a+b}{2}\right)p\,\mathrm{d}p=0\,.\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières formules peuvent être remplacées par la suivante

$$(189)\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\text{Cos.}p)^a\text{Cos.}bp.\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2^{a+1}}\cdot\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right).\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}\,;$$

que l'on déduit également des équations (183), dans le cas particulier où la demi-somme $\frac{a+b}{2}$ équivaut à un nombre entier.

La formule (189), dans laquelle les constantes a et b peuvent recevoir des valeurs réelles ou des valeurs imaginaires, cesse d'exister, toutes les fois que l'intégrale contenue dans le premier membre devient infinie; par exemple, quand la constante a, ayant une valeur réelle, devient inférieure à -1.

Si, dans la même formule, on remplace b par $b\sqrt{-1}$, on trouvera

$$(190)\qquad\int_0^{\frac{\varpi}{2}}(\text{Cos.}p)^a.\frac{e^{bp}+e^{-bp}}{2}\,\mathrm{d}p$$

$$=\frac{\varpi}{2^{a+1}}\cdot\frac{\Gamma(a+1)}{\left[\int_0^{\infty}x^{\frac{a}{2}}.\text{Cos.}\frac{b\,\mathrm{l}x}{2}\,e^{-x}\mathrm{d}x\right]^2+\left[\int_0^{\infty}x^{\frac{a}{2}}.\text{Sec.}\frac{b\,\mathrm{l}x}{2}\,e^{-x}\mathrm{d}x\right]^2}$$