ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC

Géométrie des courbes. Sur la recherche des asymptotes des courbes algébriques, et, en particulier, de celles de l'hyperbole

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 79-83
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__79_1>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Sur la recherche des asymptotes des courbes algébriques, et, en particulier, de celles de l'hyperbole ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Montpellier.

Il y a quelques années que la plupart des auteurs de traités de géométrie analytique, pour prouver l'existence des asymptotes de l'hyperbole et en fixer la position, employaient le raisonnement que voici : soit, disaient-ils,

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\ ,$$

l'équation de la courbe ; on en tire

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\ ;$$

or, on peut toujours prendre x assez grand pour que la fraction $\frac{a}{x}$ devienne moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'on voudra la supposer ; le facteur radical tend donc sans cesse à devenir l'unité ; et par suite la courbe tend sans cesse à se confondre avec le système des deux droites données par l'équation

$$y=\pm\frac{b}{a}x\ .$$

Il n'est pas difficile de montrer combien ce raisonnement est fautif. Concevons, en effet, que l'on transporte l'origine à l'un des sommets, l'équation de la courbe deviendra

$$b^2x^2-a^2y^2+2ab^2x=0\ ;$$

d'où on tirera

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2+2ax}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1+2\frac{a}{x}}\ .$$

Or, on peut toujours prendre x assez grand pour rendre $\frac{a}{x}$ si petit qu'on le voudra, et par suite le facteur radical si voisin qu'on voudra de l'unité ; donc, en raisonnant comme ci-dessus, on se trouverait conduit à conclure que les asymptotes de la courbe ont pour équation commune

$$y=\pm\frac{b}{a}x\ ;$$

de sorte qu'alors ces asymptotes se trouveraient se couper à l'un des sommets.

On est aujourd'hui plus rigoureux, et l'on emploie généralement, pour la recherche des asymptotes le développement en série de la valeur de l'ordonnée en fonction de l'abscisse. Cette méthode, outre la rigueur, offre encore l'avantage de s'appliquer indistinctement à toutes les courbes ; mais il faut convenir qu'elle est bien peu élémentaire et qu'elle ne convient guère en particulier à un enseignement duquel est formellement exclu le développement de la formule du binome dans le cas de l'exposant fractionnaire. Il ne faut pas d'ailleurs s'appuyer trop sur les séries dans un enseignement où il est impossible de traiter de ce qui les concerne avec tout le développement convenable.

On peut heureusement parvenir aux équations des asymptotes de l'hyperbole et même d'un grand nombre d'autres courbes algébriques, à l'aide d'un principe facile à établir, qui peut être d'une utile application en d'autres rencontres, et qu'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÉME. Lorsqu'un radical de degré quelconque affecte la somme de deux quantités, l'une constante et l'autre variable, on peut toujours prendre la quantité variable assez grande pour que l'altération qu'éprouvera la quantité radicale, par la suppression du terme constant, tombe au-dessous d'une quantité donnée, si petite qu'on voudra la supposer.

Démonstration. Soient z le terme variable, k le terme constant, n le degré du radical et δ une quantité donnée si petite qu'on voudra. Il faut prouver qu'on peut toujours prendre z assez grand pour satisfaire à l'inégalité

$$\sqrt[n]{z+k}-\sqrt[n]{z}<\delta\ .$$

On tire de là, en effet,

$$\sqrt[n]{z+k}<\sqrt[n]{z}+\delta\ .$$

ou, en élevant les deux membres à la $n.^{ième}$ puissance, et effaçant z de part et d'autre

$$k<n\delta\sqrt[n]{z^{n-1}}+\frac{n(m-1)}{2}\delta^2\sqrt[n]{z^{n-2}}+\ldots\ ;$$

or, cette inégalité sera évidemment satisfaite, pourvu que l'on prenne seulement z de manière à avoir

$$k<m\delta\sqrt[m]{z^{m-1}}\ ;$$

ce qui donne

$$z>\frac{k}{m\delta}\sqrt[m-1]{\frac{k}{m\delta}}\ ;$$

valeur qui ne sera jamais infinie tant que δ ne sera pas tout-à-fait nul.

Il suit de là que, toutes les fois que la valeur de l'ordonnée d'une courbe en fonction de l'abscisse pourra être mise sous la forme

$$y=mx+g+\sqrt[n]{(m'x+g')^n+k}\ , \qquad (1)$$

cette courbe aura une asymptote, donnée par l'équation

$$y=mx+g+(m'x+g')=(m+m')x+(g+g')\ . \qquad (2)$$

En effet, en désignant, pour une même abscisse donnée, par y l'ordonnée de la courbe et par y' celle de la droite, cette dernière pourra être écrite ainsi

$$y'=mx+g+\sqrt[n]{(m'x+g')^n}\ ;$$

d'où

$$y-y'=\sqrt[n]{(m'x+g')^n+k}-\sqrt[n]{(m'x+g')^n}\ ;$$

or, il résulte de notre théorème qu'on pourra toujours prendre la quantité variable $(m'x+g')^n$ et conséquemment l'abscisse x assez grande pour rendre le second membre de cette équation, et par suite $y-y'$, plus petit qu'une longueur donnée, quelque petite qu'on la suppose ; donc on peut toujours assigner une abscisse de la courbe (1) dont l'ordonnée ne diffère de l'ordonnée correspondante de la droite (2) que d'une longueur moindre qu'une longueur donnée, si petite qu'on veuille la prendre; donc, en effet, la droite (2) est asymptote de la courbe (1).

L'application de ceci au cas particulier des lignes du second ordre est trop facile pour que nous croyions nécessaire de nous y arrêter.