ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Statique. Note sur un paradoxe de statique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 75-79
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__75_0>

STATIQUE.

Note sur un paradoxe de statique ;

Par un ABONNÉ.

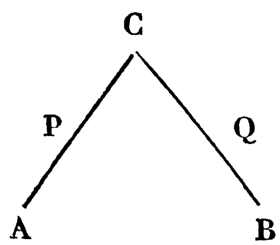
ON sait que, lorsqu'un corps pesant est suspendu librement par un ou deux cordons verticaux, ou même par trois cordons verticaux non compris dans un même plan, les tensions de ces cordons sont complètement déterminées, et même faciles à calculer ; et qu'il en est encore de même des pressions éprouvées par un ou deux points d'un plan fixe horizontal, par lesquels y pose un corps pesant, et même pour trois pareils points, lorsqu'ils ne sont pas en ligne droite.

Mais il est généralement admis en statique que, si un corps pesant est suspendu par plus de trois cordons verticaux, ou même par trois cordons situés dans un même plan, les tensions de ces cordons demeurent indéterminées, et qu'il en est de même aussi des pressions exercées sur un plan fixe horizontal, dans les points par lesquels y pose un corps pesant, lorsque ces points sont au nombre de plus de trois, ou, lorsqu'étant au nombre de trois seulement, ils se trouvent appartenir à une même ligne droite.

Or, ce principe constitue une sorte de paradoxe qui naît de ce qu'on ne conçoit pas mieux qu'une tension ou une pression actuelle et effective puisse être indéterminée, qu'on ne le concevrait de la taille actuelle de tel ou de tel individu, de son âge, de son poids ou de sa fortune. Quelques géomètres ont tenté de répandre un peu de jour sur cette question, en distinguant l'état physique de l'état mathématique, l'état concret de l'état abstrait; mais il est permis de douter qu'ils l'aient fait de manière à satisfaire pleinement les esprits exacts.

Le principe qui donne naissance à ce singulier paradoxe est trop universellement admis pour que nous osions le nier formellement; mais il n'en est pas moins vrai qu'on peut lui opposer une objection assez grave, à ce qu'il nous paraît; et c'est seulement dans la vue de provoquer à cette objection une réponse qui nous semble indispensable, que nous allons la développer ici.

Soient CA, CB deux droites pesantes et inflexibles, assemblées à charnière en C, et formant, en ce point, un angle déterminé quelconque. Soient p, q leurs poids respectifs et P, Q leurs centres de gravité; supposons qu'elles



portent en A, C, B, perpendiculairement à leur plan et d'un même côté de ce plan, des pointes d'une même longueur quelconque, par lesquelles elles soient posées sur un plan fixe horizontal. Comme les trois points A, B, C ne sont pas supposés en ligne droite, ces pointes exerceront sur les trois points du plan où elles appuyeront des pressions déterminées, que l'on calculera comme il suit:

Décomposant tour-à-tour le poids p de CA, appliqué en P, en deux autres appliqués en C et A, puis le poids q de CB, appliqué en Q, en deux autres appliqués en C et B, on trouvera

$$\text{pour les composantes de } p \left\{ \begin{array}{l} \text{en C} \ldots\ldots p.\dfrac{AP}{AC}\,, \\ \text{en A} \ldots\ldots p.\dfrac{CP}{AC}\,; \end{array} \right.$$

$$\text{pour les composantes de } q \left\{ \begin{array}{l} \text{en C} \ldots\ldots q.\dfrac{BQ}{BC}\,; \\ \text{en B} \ldots\ldots q.\dfrac{CQ}{BC}\,; \end{array} \right.$$

réunissant donc les forces appliquées en C, on trouvera pour les pressions exercées respectivement sur le plan horizontal, par les points A, C, B,

$$p.\frac{CP}{AC}\,, \qquad p.\frac{AP}{AC}+q.\frac{BQ}{BC}\,, \qquad q.\frac{CQ}{BC}\,.$$

Or, comme ces pressions sont tout-à-fait indépendantes de l'ouverture de l'angle ACB, elles demeureront encore les mêmes si cet angle s'ouvre jusqu'à différer aussi peu qu'on le voudra de deux angles droits ; et, comme il serait absurde d'admettre qu'un changement qu'on peut toujours supposer d'une petitesse illimitée, dans l'ouverture de cet angle, change tout-à-coup la nature des pressions, il s'ensuit qu'elles demeureront encore déterminées, et telles que nous venons de les calculer, lorsque l'angle ACB sera devenu tout-à-fait égal à deux angles droits, c'est-à-dire, lorsque les trois points A, B, C seront rigoureusement en ligne droite.

On pourrait évidemment appliquer un raisonnement analogue à tous les cas de statique où l'on a supposé jusqu'ici les pressions indéterminées ; et, par cela même que la chose est facile, nous ne nous y arrêterons pas. Nous nous bornerons simplement à remarquer qu'il faut absolument ou bien faire à cette manière de raisonner une réponse décisive, ou bien se résigner à rejeter le principe de statique qui donne lieu au paradoxe dont il s'agit ici. Nous attendrons, sur cette alternative, l'opinion des juges compétens.

P. S. L'objection que nous venons de faire contre la doctrine généralement admise peut encore être présentée de la manière suivante.

Soient trois sphères S, S′, S″, égales en volume, mais pouvant d'ailleurs différer en poids, posées sur un plan horizontal, de telle sorte que leurs centres soient sur une même ligne droite; elles toucheront ce plan en trois points p, p', p'', qui seront aussi en ligne droite, et elles exerceront en ces trois points sur ce plan des pressions absolument déterminées et égales à leurs poids.

Que l'on conçoive ensuite les centres de ces trois sphères liés par une verge inflexible, inextensible et sans pesanteur. Cette verge ne pourra évidemment accroître ni diminuer les pressions exercées aux points p, p', p'' du plan horizontal, qui conséquemment demeureront les mêmes qu'auparavant; mais ces mêmes verges feront des trois sphères un corps pesant unique, posant sur un plan horizontal par trois points en ligne droite; donc il y a au moins des cas où, dans un tel système, les pressions sont absolument déterminées.

En vain montrerait-on, pour se tirer de cette difficulté, des formules de pression qui, dans le cas des points d'appui en ligne droite, se présenteraient sous une forme indéterminée; il ne manque certes pas, en mathématiques, de formules à qui la même chose arrive, dans des cas particuliers; et il doit même en être ainsi toutes les fois que, pour calculer ces formules, on a eu recours à des considérations qui cessent d'être applicables au cas particulier dont on s'occupe.

Pour n'en citer ici qu'un exemple entre mille, la formule algébrique qui donne la plus courte distance entre deux droites dans l'espace devient $\frac{0}{0}$, lorsqu'on suppose parallèles les deux droites dont il s'agit ; et pourtant il n'est jamais venu à l'esprit de personne d'en conclure que la distance entre deux parallèles est indéterminée ; et si l'on objectait que du moins cette distance est alors indéterminée quant à sa situation , nous observerions que ce n'est pas la situation mais bien la longueur de cette distance que la formule dont nous parlons est destinée à faire connaître.