ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

Analyse transcendante. Intégration directe de l'équation linéaire complète du premier ordre à coefficiens variables

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 72-74
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__72_1>

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Intégration directe de l'équation linéaire complète du premier ordre à coefficiens variables ;

Par M. VALLÈS, élève à l'Ecole royale polytechnique.

DANS les traités de calcul intégral, on ramène d'ordinaire l'intégration de l'équation linéaire complète du premier ordre, à coefficiens variables à celle d'une autre équation linéaire du même ordre dans laquelle le dernier terme est nul ; et M. Bouvier est peut-être le premier qui se soit proposé de parvenir directement au but. (Voyez *Annales*, tom. XV, pag. 41).

En réfléchissant sur ce sujet, il nous a paru que l'intégrale d'une telle équation pouvait être directement obtenue par un autre procédé assez simple, et qui a sur celui de M. Bouvier l'avantage d'être parfaitement analogue à celui qu'on emploie dans l'intégration des équations linéaires d'ordres plus élevés. Voici à quoi il se réduit :

Soit la proposée

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q\ .$$

Posons

$$y=e^{\int t dx}\ ;$$

t étant une fonction inconnue de x. Il en résultera

$$\frac{dy}{dx}=t.e^{\int t dx}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans la proposée,

$$e^{\int t dx}(t+P)=Q\ ;$$

et par conséquent

$$t=\frac{Q}{e^{\int t dx}}-P=\frac{Q}{y}-P\ ;$$

puis, en multipliant par dx et intégrant

$$\int t dx=\int\frac{Q dx}{y}-\int P dx\ ,$$

donc

$$e^{\int t\mathrm{d}x} \quad \text{ou} \quad y = \frac{e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}}}{e^{\int P\mathrm{d}x}} = e^{-\int P\mathrm{d}x} . e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}} . \qquad (1)$$

Or, on a

$$\mathrm{d}.e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}} = \frac{Q\mathrm{d}x}{y} . e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}},$$

et, en intégrant

$$e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}} = \int \frac{Q}{y}\, e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}}\, \mathrm{d}x . \qquad (2)$$

Mais, l'équation (1) donne

$$e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}} = y e^{\int P\mathrm{d}x},$$

mettant donc cette valeur dans l'équation (2), elle deviendra

$$y e^{\int P\mathrm{d}x} = \int \frac{Q}{y} . y e^{\int P\mathrm{d}x} . \mathrm{d}x ,$$

ou, en simplifiant et tirant ensuite la valeur de y

$$y = e^{-\int P\mathrm{d}x} . \int e^{\int P\mathrm{d}x} . Q\mathrm{d}x ,$$

formule cherchée.