ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PLUKER

Géométrie de la règle. Théorèmes et problèmes, sur les contacts des sections coniques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 37-59
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__37_0>

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

Théorèmes et problèmes, sur les contacts des sections coniques;

Par M. Pluker, docteur de l'Université de Bonn.

On sait que, pour déterminer une conique sur un plan, il faut cinq conditions distinctes, et déjà M. Brianchon a traité tous les cas où ces conditions sont de passer par des points ou de toucher des droites données (*).

Mais on peut aussi exiger d'une conique cherchée qu'elle ait avec une conique déjà tracée un ou plusieurs contacts d'ordre plus ou moins élevés et compléter ensuite les conditions du problème, en observant qu'un contact simple, en un point donné, équivaut à deux conditions qu'un contact du second ordre, en ce même point, équivaut à trois conditions, et en observant aussi que deux coniques tracées sur un même plan ne peuvent avoir au plus entre elles que deux contacts simples ou un contact unique du troisième ordre.

Ces considérations donnent naissance à une série de problèmes curieux qui ont fait le sujet des recherches de M. Poncelet, dans son *Traité des propriétés projectives des figures*. Ce que nous nous proposons ici est de considérer quelques cas de cette théorie qui

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre* (in-8.°, Paris, *Bachelier*, 1817).

reposent sur des considérations fort simples et conduisent à des constructions qui ne le sont pas moins. Elles ont l'avantage de se déduire toutes de deux lemmes fondamentaux qui en sont comme l'expression générale, et que nous allons d'abord établir.

Le sujet de ce mémoire étant éminemment du nombre de ceux où les propositions se correspondent deux à deux; afin de rendre cette correspondance plus apparente, nous lui donnerons la forme déjà adoptée en divers endroits du présent recueil (*).

Soient A, B, C, F les quatre points communs à deux coniques, tracées sur un même plan. Par les deux derniers C, F soient menées arbitrairement des sécantes aux deux courbes, coupant respectivement la première en D et E, et la seconde en D′ et E′; les hexagones ABCDEF et ABCD′E′F seront respectivement inscrits à ces courbes. Soient donc G le point de concours de DD′ et AF, et soit H celui de EE′ et BC; par le théorème de Pascal (**), le point de concours de AB soit avec DE soit avec D′E′

Soient A, B, C, F les quatre tangentes communes à deux coniques tracées sur un même plan. Sur les deux dernières C, F soient pris arbitrairement des points par lesquels soient menées deux tangentes D et E à la première courbe et deux tangentes D′ et E′ à la seconde; les hexagones ABCDEF et ABCD′E′F seront respectivement circonscrits à ces courbes. Soient donc G la droite qui joint le point DD′ au point AF, et soit H celle qui joint le point EE′ au point BC; par le théorème de M. Brianchon (**), la

(*) Voy. la pag. 157 du tom. XV et les pag. 209 et 385 du tom. XVI. Il faudra se rappeler au surplus qu'une lettre unique exprime un point dans la colonne de gauche et une droite dans celle de droite, tandis que deux lettres expriment la droite qui joint deux points, dans la colonne de gauche, et le point d'intersection de deux droites, dans celle de droite.

(**) Consultez, pour la démonstration de ce théorème, le présent recueil tom. IV, pages 78 et 381, tom. XIV, pag. 29, tom. XV, pag. 387, et tom. XVI, pag. 324.

devra être en ligne droite avec les deux points G et H; ce qui revient à dire que les trois droites AB, DE, D′E′ doivent concourir en un même point K; on a donc le *lemme* que voici :

LEMME I. Deux coniques étant circonscrites à un même quadrilatère ; si, par les deux extrémités d'un même côté de ce quadrilatère on mène aux deux courbes des sécantes arbitraires ; les cordes menées à ces courbes, par les points où elles seront respectivement coupées par ces sécantes, iront concourir toutes deux sur la direction du côté opposé du quadrilatère (*).

Lorsque deux coniques circonscrites à un même triangle ont à l'un de ses sommets une tangente commune, et ont conséquemment un contact simple en ce point ; rien n'empêche de les considérer comme circonscrites à un même quadrilatère, dont un côté, d'une

droite qui joint le point AB soit avec le point DE, soit avec le point D′E′ devra passer par le point de concours de G et H ; ce qui revient à dire que les trois points AB, DE, D′E′ devront appartenir à une même droite K; on a donc le *lemme* que voici :

LEMME I. Deux coniques étant inscrites à un même quadrilatère ; si, sur les deux côtés d'un même sommet de ce quadrilatère on prend arbitrairement deux points par chacun desquels on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des tangentes respectives à ces deux courbes seront en ligne droite avec le sommet opposé du quadrilatère (*).

Lorsque deux coniques inscrites à un même triangle touchent l'un de ses côtés au même point, et ont conséquemment un contact simple en ce point ; rien n'empêche de les considérer comme inscrites à un même quadrilatère, dont un angle, égal à deux droi-

(*) On doit remarquer qu'il ne s'agit pas seulement ici de quadrilatères convexes, mais encore de quadrilatères dans lesquels deux côtés opposés se couperaient entre les deux autres.

longueur nulle, est dirigé suivant la tangente commune; notre *lemme* est donc encore applicable à ce cas; et, en l'appliquant tour-à-tour aux différens côtés du quadrilatère devenu triangle, on obtient les théorèmes suivans :

THÉORÈME I. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune; si, par ce sommet, on mène deux sécantes arbitraires à ces courbes et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde par les points où elle est coupée par ces deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la direction du côté opposé du triangle.

THÉORÈME II. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune; si, par chaque extrémité du côté opposé, on mène une sécante arbitraire aux deux courbes, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront

tes, à ses deux côtés dirigés suivant la tangente commune; notre *lemme* est donc encore applicable à ce cas; et, en l'appliquant tour-à-tour aux différens côtés du quadrilatère devenu triangle, on obtient les théorèmes suivans :

THÉORÈME I. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur ce côté, on prend arbitrairement deux points, et que par ces points on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec le sommet opposé du triangle.

THÉORÈME II. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur chacun des deux autres côtés, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en *concourir sur la tangente au sommet opposé.*

THÉORÈME III. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune ; si, par chacune des extrémités de l'un des côtés adjacens à ce sommet, on mène une sécante arbitraire aux deux courbes, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes ; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur l'autre côté adjacent à cet angle.

Ces théorèmes donnent la solution du problème suivant :

PROBLÈME I. Une conique étant donnée et trois points étant donnés sur son périmètre, déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première en l'un des points donnés, la coupe aux deux autres et passe en outre par un quatrième point quelconque donné sur son plan.

Solution. Soient A, B, C les

ligne droite avec celui où elles touchent le troisième côté du triangle.

THÉORÈME III. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point ; si, sur chacun des deux côtés de l'un des sommets adjacens, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec l'autre sommet adjacent au même côté du triangle.

Ces théorèmes donnent la solution du problème suivant :

PROBLÈME I. Une conique étant donnée, et trois tangentes à cette courbe étant aussi données, déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec l'une des tangentes donnée, touche les deux autres tangentes données et touche en outre une quatrième droite quelconque donnée sur son plan.

Solution. Soient A, B, C les

trois points donnés sur le périmètre de la première courbe, et soit P un autre point quelconque de son plan; tout se réduit à trouver un quelconque des points d'une autre conique qui touche la première en C, la coupe en A et B, et passe en outre par le point P.

Pour cela soit menée la tangente en C à la courbe donnée. Soient menées à cette courbe, par le point C, deux sécantes, l'une CP et l'autre arbitraire. Soient respectivement D et E les points où cette courbe est coupée de nouveau par ces sécantes. Soit F le point où la tangente en C est coupée par la droite DE, et soit menée FP; cette droite coupera la sécante CE en un point Q qui appartiendra (*théorème I*) à la courbe cherchée.

Autre solution. Par les points A et B, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, la première AP et l'autre arbitraire. Soient respectivement D et E les points où cette courbe est coupée de nouveau par ces sécantes. Soit F le point où la tangente

trois tangentes données à la première courbe, et soit P une autre droite quelconque, donnée sur son plan; tout se réduit à trouver une quelconque des tangentes à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec C, touche les tangentes A et B et touche en outre la droite P.

Pour cela soit déterminé le point de contact de C avec la première courbe. Soient pris sur C deux points, l'un à son intersection avec P et l'autre arbitraire. Par ces deux points soient menées respectivement des tangentes D et E à la conique donnée. Soit joint le point DE au point de contact de C par une droite F. Par le point FP et le point CE soit menée une droite Q; cette droite sera (*théorème I*) une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Autre solution. Sur les tangentes A et B, soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Par ces deux points soient menées respectivement à la courbe donnée deux tangentes D et E. Soit F la droite qui joint le point de contact de C avec le point en C est coupée par la droite DE, et soit menée FP ; cette droite coupera la sécante BE en un point Q qui appartiendra (*théorème II*) à la courbe cherchée.

Troisième solution. Par les points A et C, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, la première AP et l'autre arbitraire. Soient D et F les points où cette courbe est coupée de nouveau par ces sécantes. Soit E l'intersection de DF et de BC. En menant PE, cette droite coupera CF (*théorème III*) en un nouveau point R de la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur les deux autres l'avantage qu'elle n'exige pas que l'on mène la tangente par le point C.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème I diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME IV. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune

DE, et soit joint FP au point BE par une droite Q ; cette droite sera (*théorème II*) une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Troisième solution. Sur les tangentes A et C, soient pris deux points, le premier AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées à la courbe donnée les tangentes D et F. Soit E la droite qui joint le point DF au point BC. En joignant le point PE au point CF par une droite R ; cette droite sera (*théorème III*) une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur les deux autres l'avantage qu'elle n'exige pas que l'on détermine le point de contact de la tangente C.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème I diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME IV. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point ; si, sur *si, par ce sommet, on mène une sécante arbitraire à ces courbes, puis des tangentes par les points où cette sécante les coupe; ces deux tangentes iront concourir sur la direction du côté opposé du triangle.*

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME II. Une conique étant donnée, et trois points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première en l'un des points donnés, la coupe aux deux autres et touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan.

Solution. Soient toujours A, B, C les trois points donnés, sur le périmètre de la première courbe; C étant encore celui d'entre eux où elle doit être touchée par la seconde.

Soit F le point où AB est coupée par la droite donnée. Par ce point F, soit menée une tangente à la courbe donnée, et soit T son point de contact avec

ce côté, on prend arbitrairement un point et que de ce point on mène des tangentes aux deux courbes; leurs points de contact seront en ligne droite avec le sommet opposé du triangle.

On poura, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME II. Une conique étant donnée, et trois tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec l'une des tangentes données, touche les deux autres tangentes données et passe en outre par un point quelconque, donné sur le plan de la courbe.

Solution. Soient toujours A, B, C les trois tangentes données à la première courbe; C étant encore celle dont le point de contact doit lui être commun avec la seconde.

Soit F la droite qui joint le point AB au point donné. Par un des points où cette droite F coupe la courbe donnée, soit menée une tangente T à cette courbe.

elle. En menant CT, coupant en P la droite donnée, ce point P sera (*Théorème IV*) son point de contact avec la courbe cherchée ; de sorte que le problème se trouvera ramené au précédent.

Remarque. Comme, par le point F, on peut mener deux tangentes à la courbe donnée, on aura deux points de contact T, et par suite deux droites CT et deux points P. Le problème a donc deux solutions.

En joignant le point CT au point donné par une droite P, cette droite P sera (*Théorème IV*) une tangente à la courbe cherchée par le point donné ; de sorte que le problème se trouvera ramené au précédent.

Remarque. Comme la droite F coupe la courbe donnée en deux points, on aura deux tangentes T, et par suite deux points CT et deux droites P. Le problème a donc deux solutions.

Lorsque deux coniques n'ont qu'une seule corde commune et se touchent aux deux extrémités de cette corde, la corde commune peut être considérée comme deux côtés opposés et égaux d'un quadrilatère inscrit, dont les deux autres côtés opposés, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant les tangentes aux deux extrémités de cette corde ; notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai et applicable aux divers côtés du quadrilatère ; et il en résulte alors les théorèmes suivans :

THÉORÈME V. deux coniques ayant une corde commune

Lorsque deux coniques n'ont qu'un seul angle qui puisse leur être circonscrit et touche l'un et l'autre côtés de cet angle au même point, l'angle circonscrit peut être considéré comme un quadrilatère circonscrit, dont deux sommets opposés se confondent ; et dont les deux autres sommets sont situés aux points où les deux courbes touchent les deux côtés de cet angle ; notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai et applicable aux divers sommets du quadrilatère ; et il en résulte alors les théorèmes suivans :

THÉORÈME V. Deux coniques étant inscrites à un même *unique et se touchant aux deux extrémités de cette corde ; si, par l'une des extrémités de la corde commune, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on mène ensuite une corde à chacune de courbes, par les points où elle est coupée par ces deux sécantes ; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente à l'autre extrémité de la corde commune.*

THÉORÈME VI. Deux coniques ayant une corde commune unique et se touchant aux deux extrémités de cette corde ; si, par chacune des extrémités de la corde commune, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes ; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la corde commune elle-même.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME III. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points

angle et touchant en un même point chacun des deux côtés de cet angle ; si, sur l'un des côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement deux points, et que, par chacun d'eux, on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des deux couples de tangentes seront en ligne droite avec le point où les courbes touchent l'autre côté de l'angle circonscrit.

THÉORÈME VI. Deux coniques étant inscrites à un même angle et touchant en un même point chacun des deux côtés de cet angle ; si, sur chacun des côtés de l'angle circonscrit on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des deux couples de tangentes seront en ligne droite avec le sommet même de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME III Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tan–

qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première aux deux points donnés et passe en outre par un troisième point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soient A, B les deux points donnés sur le périmètre de la première courbe, et soit P un autre point quelconque de son plan. Tout se réduit à trouver un quelconque des points d'une autre conique qui touche la première aux points A et B, et qui passe en outre par le point P.

Pour cela, soit menée la tangente en B à la courbe donnée. Soient menées à cette courbe, par le point A, deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire, coupant de nouveau la courbe en D et E. Soit C le point où la corde DE coupe la tangente en B; en menant CP, cette droite coupera la sécante AE en un point Q qui appartiendra (*Théorème V*) à la courbe cherchée.

Autre solution. Par les points A et B, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire, coupant de nouveau cette courbe en D et E.

gentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première en ses points de contact avec les deux tangentes données, et touche en outre une troisième droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soient A, B les deux tangentes données à la première courbe, et soit P une autre droite quelconque, donnée sur son plan. Tout se réduit à trouver une quelconque des tangentes à une autre conique touchant la première aux points A et B et touchant en outre la droite P.

Pour cela, soit déterminé le point de contact de B avec la courbe donnée. Soient pris, sur la tangente A, deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées à cette courbe deux tangentes, D et E. Soit C la droite qui joint le point DE au point de contact de B; en joignant les points CP et AE par une droite Q, cette droite sera (*Théorème V*) une tangente à la courbe cherchée.

Autre solution. Sur les droites A et B, soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées des tangentes D et E à la courbe don-

Soit C le point de concours de DE et AB, la droite CP coupera la sécante BE en un point Q qui appartiendra (*Théorème IV*) à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on mène la tangente par le point B.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème V diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME VII. Deux coniques ayant une corde commune unique, et se touchant aux deux extrémités de cette corde ; si, par l'une des extrémités de la corde commune, on leur mène une sécante arbitraire ; et qu'on mène ensuite à chacune de ces courbes une tangente, par le point où elle est coupée par cette sécante ; les deux tangentes ainsi menées iront concourir sur la tangente à l'autre extrémité de la corde commune.

née. Soit C la droite qui joint le point DE au point AB ; si l'on joint le point CP au point BE par une droite Q ; cette droite sera (*Théorème VI*) une tangente à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on détermine le point de contact de la tangente B.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème V diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME VII. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et touchant en un même point les deux côtés de cet angle ; si, sur l'un des côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement un point duquel on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de contact de ces tangentes seront en ligne droite avec le point où ces courbes touchent l'autre côté de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME IV. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première aux deux points donnés, et touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan ?

Solution. Soient toujours A et B les deux points donnés, sur le périmètre de la première courbe, et soit C le point où la tangente en B est coupée par la droite donnée. Par ce point, soit mené à la courbe donnée une tangente dont D soit le point de contact. Soit menée AD, coupant en P la droite donnée; ce point P sera (*Théorème VII*) le point de contact de la courbe cherchée avec cette droite; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème III.

Lorsque deux coniques qui n'ont qu'une seule corde commune ont, à l'une des extrémités de cette corde, un contact du

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME IV. Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à ses points de contact avec les tangentes données, et passe en outre par un point quelconque donné sur son plan ?

Solution. Soient toujours A et B les deux tangentes données, à la première courbe, et soit C la droite qui joint le point donné au point de contact de B. Par le point où cette droite coupe la courbe donnée, soit menée une tangente D à cette courbe. Soit joint le point AD au point donné, par une droite P; cette droite P sera (*Théorème VII*) une tangente à la courbe cherchée en ce point, de sorte que le problème se trouvera ramené au problème III.

Lorsque deux coniques qui ne peuvent être inscrites qu'à un même angle ont, en un même point de l'un des côtés de cet second ordre, elles doivent inévitablement se couper à son autre extrémité. Elles peuvent alors être considérées comme circonscrites à un même quadrilatère dont deux côtés consécutifs, d'une égale longueur, se confondent dans la corde commune, tandis que les deux autres, d'une longueur nulle et formant entre eux un angle égal à deux droites, se confondent avec le point de contact, et ont pour direction commune la tangente aux deux courbes en ce point. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et indistinctement applicable aux divers côtés du quadrilatère ; et il en résulte alors les théorèmes suivans :

THÉORÈME VIII. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémité ; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on mène ensuite une corde à chacune des courbes, par les points où elle est coupée par ces deux sécantes ; les deux cordes ainsi me-

angle, un contact du second ordre, elles doivent inévitablement toucher l'autre côté de cet angle en deux points distincts. Elles peuvent alors être considérées comme inscrites à un même quadrilatère dont deux angles consécutifs, de même grandeur, se confondent dans l'angle circonscrit, tandis que les deux autres d'une grandeur nulle, ont leurs sommets au point de contact des deux courbes. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et indistinctement applicable aux divers sommets du quadrilatère, et il en résulte les théorèmes suivans :

THÉORÈME VIII. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de l'angle en deux points distincts ; si, par deux points pris arbitrairement sur le premier de ces côtés, on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en *nées concourront sur la corde commune.*

THÉORÈME IX. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémité. Si, par chacune des extrémités de cette corde commune, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes, les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente commune aux deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME V. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique, qui ait avec la première, en l'un des points donnés, un contact du second ordre, qui la coupe à l'autre point donné, et passe en outre par un troisième

ligne droite avec le sommet de l'angle circonscrit.

THÉORÈME IX. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de l'angle en deux points distincts. Si, sur chacun des deux côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes, les deux points de concours des couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec le point de contact de ces mêmes courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME V. Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique, qui ait un contact du second ordre avec la première au point où elle est touchée par une des tangentes données, qui touche aussi l'autre tan-

point quelconque, donné sur son plan ?

Solution. Soient A le point où les deux courbes doivent avoir entre elles un contact du second ordre, et soit B le point où elles doivent se couper ; soit de plus P un point du plan de la courbe donnée, par lequel doit passer la courbe cherchée.

Par le point A soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les points où ces deux sécantes rencontrent de nouveau cette courbe. Soit C le point où DE coupe AB; en menant PC, cette droite rencontrera AE en un point Q appartenant à la courbe cherchée (*).

Autre solution. Soit toujours A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B le point où ces deux courbes doivent se couper. Soit enfin P

gente donnée, et touche en outre une troisième droite quelconque, donnée sur son plan ?

Solution. Soit A la tangente au point de contact de laquelle les deux courbes doivent avoir entre elles un contact du second ordre, et B la droite qu'elles doivent toucher en deux points distincts. Soit de plus P une droite donnée, à laquelle la courbe cherchée doit être tangente.

Sur la droite A soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les tangentes menées à la courbe par ces deux points. Soit enfin C la droite qui joint entre eux les points DE et AB; en menant du point PC au point AE une droite Q, cette droite sera une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Autre solution. Soit toujours A la tangente à la courbe donnée au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B celle que les deux courbes doivent toucher en des

(*) Cette construction a été indiquée, sans démonstration, par M. Poncelet (*Annales*, tom. VIII, pag. 253).

un point par lequel doit passer la courbe cherchée.

Par les points A et B, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire, coupant de nouveau la courbe donnée en D et E. Soit menée DE coupant en C la tangente en A. Soit enfin menée CP coupant en Q la sécante BE ; alors le point Q sera (*Théorème IX*) un nouveau point de la courbe demandée.

Remarque. La première de ces deux solutions a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on trace la tangente en A.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème VIII diminue jusqu'à devenir núl, les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME X. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémite ; si,

points distincts. Soit enfin P l'autre droite que doit toucher aussi la courbe cherchée.

Sur les droites A et B, soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées les tangentes D et E à la courbe donnée. Soit joint le point DE au point de contact de A par une droite C. Soit enfin joint le point CP au point BE par une droite Q ; cette droite Q sera (*Théorème IX*) une nouvelle tangente à la courbe demandée.

Remarque. La première de ces deux solutions a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on détermine le point de contact de la tangente A.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème VIII diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME X. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de *par le point de contact des deux courbes, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite une tangente à chacune des deux courbes, par le point où elle est coupée par cette sécante; les deux tangentes ainsi menées iront concourir sur la corde commune.*

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VI. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique, qui ait avec la première, en l'un des points donnés, un contact du second ordre, qui la coupe à l'autre point donné, et qui touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soit toujours A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B le point où ces deux courbes doivent se couper; soit enfin C le point où la droite donnée coupe la corde

l'angle en deux points distincts; si, d'un point pris arbitrairement sur le premier de ces côtés, on mène des tangentes aux deux courbes, les points de contact de ces tangentes seront en ligne droite avec le sommet de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VI. Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique, qui ait avec la première, au point où elle est touchée par une des tangentes données, un contact du second ordre, qui touche aussi l'autre tangente donnée, et passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soit toujours A la tangente à la courbe donnée au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B celle que les deux courbes doivent toucher en deux points distincts; soit enfin C la droite qui commune AB. Soit menée, par ce point C, une tangente à la courbe donnée, et soit D son point de contact; en menant AD, cette droite coupera la droite donnée en un point P, qui sera (*Théorème X*) son point de contact avec la courbe cherchée; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème V.

joint le sommet de l'angle circonscrit au point donné. Par le point où cette droite coupe la courbe donnée, soit menée une tangente D à cette courbe; en joignant le point AD au point donné, par une droite P, cette droite sera (*Théorème X*) une tangente menée par ce point à la courbe cherchée; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème V.

Remarque. Comme, par le point C, on peut mener deux tangentes à la courbe donnée, on pourra avoir deux points de contact D, et par suite deux droites AD et deux points P; de manière que le problème a deux solutions.

Remarque. Comme la droite C coupe la courbe donnée en deux points, on pourra avoir deux tangentes D, et par suite deux poiuts AD et deux droites P; de manière que le problème a deux solutions.

Lorsque deux coniques ont en un point commun un contact du troisième ordre, elles ne sauraient avoir alors aucun autre point commun, ni conséquemment aucune corde inscrite commune. On peut, dans ce cas, les considérer comme étant toutes deux circonscrites à un même quadrilatère dont les côtés, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant la tangente commune, et

Lorsque deux coniques touchent une même droite en un même point, et ont en ce point un contact du troisième ordre, elles ne sauraient alors avoir aucune autre tangente commune, ni conséquemment aucun angle circonscrit commun. On peut, dans ce cas, les considérer comme étant toutes deux inscrites à un même quadrilatère, dont les angles, d'une grandeur nulle, ont tous leurs somdont les sommets se confondeut tous quatre avec le point de contact. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XI. Deux coniques n'ayant qu'un seul point commun, et ayant conséquemment, en ce point, un contact du troisième ordre ; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on joigne ensuite par des cordes les points où ces sécantes coupent les deux courbes ; les cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente commune.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VII. Une conique étant donnée, et un point étant donné sur son périmètre ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui, ayant avec la première au point donné, un contact du troisième ordre, passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan ?

mets au point de contact, et dont les côtés sont tous quatre dirigés suivant la tangente commune. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XI. Deux coniques n'ayant qu'une seule tangente commune, et ayant conséquemment entre elles, sur cette tangente, un contact du troisième ordre ; si, sur la tangente commune aux deux courbes, on prend arbitrairement deux points par lesquels on leur mène des tangentes ; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec leur point de contact.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VII. Une conique étant donnée, et une tangente à cette courbe étant aussi donnée ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangente qu'on voudra à une autre conique qui, ayant avec la première, en son point de contact avec la tangente donnée, un contact du troisième ordre, touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan ?

Solution. Soit A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre, et soit P le point donné, sur le plan de cette courbe.

Par le point A soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les points où ces deux sécantes coupent cette courbe, et soit menée DE, coupant en C la tangente en A. Soit enfin menée CP, coupant en Q la sécante arbitraire AE; le point Q sera (*Théorème XI*) un nouveau point de la courbe cherchée.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème XI diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes; et il en résultera le théorème suivant:

THÉORÈME XII. Deux coniques n'ayant qu'un seul point commun, et ayant conséquemment, en ce point, un contact du troisième ordre; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène une sécante

Solution. Soit A la tangente donnée à la première courbe et au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec celle-là un contact du troisième ordre, et soit P la droite donnée, sur le plan de cette courbe.

Soient pris sur la droite A deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les tangentes menées à la courbe donnée, par ces deux points. Soit C la droite qui joint le point A au point DE. Soit joint enfin le point CP au point AE, par une droite Q; cette droite Q sera (*Théorème XI*) une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème XI diminue jusqu'à devenir nul, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant:

THÉORÈME XII. Deux coniques n'ayant qu'une seule tangente commune, et ayant conséquemment entre elles, sur cette tangente, un contact du troisième ordre; si, par un point pris arbitrairement sur la tangente com-

arbitraire et ensuite des tangentes, par les deux points où cette sécante les coupe; ces deux tangentes iront concourir sur la tangente commune aux deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VIII. Une conique étant donnée, et un point étant donné sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui, ayant avec la première, au point donné, un contact du troisième ordre, touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soit A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre. Soit en outre C le point où la tangente en A est coupée par la droite donnée. Par ce point C, soit menée à la courbe donnée une tangente dont D soit le point de contact, alors le point P, où la droite donnée sera coupée par AD, sera (*Théorème XII*) le point de contact de cette droite donnée avec la courbe cherchée;

mune, on leur mène des tangentes; les points de contact de ces deux tangentes se trouveront en ligne droite avec le point de contact des deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VIII. Une conique étant donnée, et une tangente à cette courbe étant aussi donnée; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui, ayant avec la première, en son point de contact avec la tangente donnée, un contact du troisième ordre, passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soit A la tangente donnée à la courbe donnée, au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre. Soit en outre C la droite qui joint le point de contact de A au point donné. Par le point où cette droite C coupe la courbe donnée, soit menée à cette courbe une tangente D; joignant alors, par une droite P, le point donné au point AD, cette droite sera (*Théorème XII*) la tangente, ce qui ramenera le problème au problème VII.

en ce point donné, à la courbe cherchée ; ce qui ramenera le problème au problème VII.

Rien n'empêcherait, dans tout ce qui précède, de supposer que l'une des deux coniques dont il s'agit est le système de deux droites, du moins lorsqu'il n'est question que d'intersections et de contacts simples ; mais on ne ferait que retomber ainsi sur les propriétés connues des hexagones inscrits et circonscrits, et sur les conséquences également connues qui en dérivent.

On doit remarquer aussi que tous nos théorèmes et problèmes peuvent être, sans restriction, transportés à la sphère, pourvu qu'on y remplace les droites par des arcs de grands cercles, et les coniques planes par ce que M. Magnus a appelé *coniques sphériques*, dans le mémoire de la page 33 du précédent volume.