ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÉS

Géométrie des courbes. Recherches sur les développantes des courbes tracées sur la surface d'un cône droit

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 349-356

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__349_0>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Recherches sur les développantes des courbes tracées sur la surface d'un cône droit ;

Par M. Vallès, élève à l'Ecole royale des ponts et chaussées.

(*Extrait d'une lettre au Rédacteur des* Annales).

La recherche de la développante de la spirale conique, que vous avez bien voulu, Monsieur, insérer à la page 159 du présent volume, exige d'assez longs calculs, dont on vient heureusement à bout au moyen de quelques artifices qui les abrègent considérablement. J'ai eu occasion de revenir dernièrement sur ce sujet, et je me suis aperçu que les calculs qui se trouvent dans l'endroit cité sont susceptibles des mêmes abréviations, quelle que soit l'espèce de courbe qu'on suppose tracée sur le cône ; en sorte qu'on obtient des formules générales à l'aide desquelles on peut représenter les développantes de toutes les courbes coniques possibles. Ces formules sont en outre très-propres à conduire à la solution du problème inverse, qui consiste à trouver la courbe conique, lorsque la développante est donnée ; elles fournissent ainsi une solution très-simple du dernier des deux problèmes proposés en l'endroit cité. Je profiterai de cette circonstance pour corriger une erreur que j'avais commise à la fin de mon premier calcul, et qui rend fautive l'équation (15).

Soit toujours une courbe quelconque tracée sur la surface d'un cône droit et rapportée à son axe comme axe des z et à un plan perpendiculaire à cet axe comme plan des xy. Soit (t, u, v) un des points de la courbe et soit α l'angle générateur du cône, on aura d'abord

$$t^2+u^2=v^2\text{Tang.}^2\alpha\ . \qquad (1)$$

Si r est le rayon vecteur de la projection du point (t, u, v) sur le plan des xy, et que θ soit l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des x, on aura en outre

$$\theta=\text{f}(r)$$

la fonction f dépendant de la nature arbitraire de la courbe tracée sur le cône. Or, on a

$$\theta=\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{u}{t}\right) \qquad \text{et } r=\sqrt{t^2+u^2}\ ;$$

donc

$$\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{u}{t}\right)=\text{f}(\sqrt{t^2+u^2})=\text{f}(v\text{Tang.}\alpha)\ ; \qquad (2)$$

et les équations (1) et (2) seront celles d'une courbe quelconque, tracées sur la surface conique. On en tirera très-facilement

$$\left.\begin{aligned} t&=v\text{Tang.}\alpha\text{Cos.}[\text{f}(v\text{Tang.}\alpha)]\ , \\ u&=v\text{Tang.}\alpha\text{Sin.}[\text{f}(v\text{Tang.}\alpha)]\ ; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{d}t}{\text{d}v}&=\{\text{Cos.}[\text{f}(v\text{Tang.}\alpha)]-v\text{f}'(v\text{Tang.}\alpha).\text{Sin.}[\text{f}(v\text{Tang.}\alpha)]\}\text{Tang.}\alpha\ , \\ \frac{\text{d}u}{\text{d}v}&=\{\text{Sin.}[\text{f}(v\text{Tang.}\alpha)]+v\text{f}'(v\text{Tang.}\alpha).\text{Cos.}[\text{f}(v\text{Tang.}\alpha)]\}\text{Tang.}\alpha\ . \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Présentement (x, y, z) étant un quelconque des points de la tangente à la courbe conique au point (t, u, v), on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{x-t}{z-v}=\frac{x-v\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)].\mathrm{Tang.}\alpha}{z-v}\;,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{y-u}{z-v}=\frac{y-v\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)].\mathrm{Tang}\,\alpha}{z-v}\;.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

En égalant ces valeurs aux précédentes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}x=\{z\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]-v(z-v)\mathrm{f}'(v\mathrm{Tang}\,\alpha)\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]\}\mathrm{Tang.}\alpha\;,\\ y=\{z\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]+v(z-v)\mathrm{f}'(v\mathrm{Tang.}\alpha)\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang}\,\alpha)]\}\mathrm{Tang.}\alpha\;.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Si l'on fait la somme des quarrés de ces valeurs, on trouvera

$$x^2+y^2=\{z^2+v^2(z-v)^2\mathrm{f}'^2(v\mathrm{Tang.}\alpha)\}\mathrm{Tang.}^2\alpha\;,$$

ou bien

$$v(z-v)\mathrm{f}'(v\mathrm{Tang.}\alpha)\mathrm{Tang.}\alpha=\pm\sqrt{x^2+y^2-z^2\mathrm{Tang.}^2\alpha}\;;\quad(7)$$

et telle est l'équation qui donnera la valeur de v, quand x, y, z seront donnés.

En faisant ensuite la somme des produits respectifs des équations (6) par $\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]$ et $\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang}\,\alpha)]$ on trouvera

$$\frac{x}{z\mathrm{Tang.}\alpha}\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]+\frac{y}{z\mathrm{Tang.}\alpha}\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]=1\;.\quad(8)$$

Cette équation, après la substitution de la valeur de v donnée par l'équation (7), sera celle de la surface développable lieu des tangentes à la courbe conique.

Pour connaître l'intersection de cette surface avec le plan des xy, on fera $z=0$ dans les équations (7) et (8), ce qui donnera

$$v^2\mathrm{f}'(v\mathrm{Tang.}\alpha)\mathrm{Tang.}\alpha=\sqrt{x^2+y^2}\;,\qquad x\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]+y\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]=0\;;$$

ou bien, en passant aux coordonnées polaires,

$$r=\nu^2 f'(\nu\,\mathrm{Tang.}\alpha)\,\mathrm{Tang.}\alpha\ , \qquad \theta=f(\nu\,\mathrm{Tang.}\alpha)\ .$$

En différentiant la seconde et y mettant pour $f'(\nu\,\mathrm{Tang.}\alpha)$ sa valeur, donnée par la première, on aura

$$\frac{d\theta}{r}=\frac{d\nu}{\nu^2\,\mathrm{Tang.}\alpha}\ , \quad \text{d'où} \quad \int\frac{d\theta}{r}=-\frac{1}{\nu\,\mathrm{Tang.}\alpha}\ ;$$

de sorte que l'équation polaire cherchée sera

$$\theta=f\left(-\frac{1}{\int\frac{d\theta}{r}}\right)\ .$$

Si, par exemple, on suppose

$$f(\nu\,\mathrm{Tang.}\alpha)=\frac{\nu\,\mathrm{Tang.}\alpha}{a}$$

on aura

$$\theta=-\frac{1}{a\int\frac{d\theta}{r}} \qquad \text{d'où} \qquad a\theta\int\frac{d\theta}{r}+1=0\ ;$$

puis en différentiant, divisant par $d\theta$ et éliminant $\int\frac{d\theta}{r}$

$$r=a\theta^2\ .$$

C'est en effet le résultat (12) trouvé à la page 163, pour ce cas particulier.

Pour avoir la seconde équation de la développante, on prendra la somme des quarrés des équations (4) ce qui donnera

$$\left(\frac{dt}{d\nu}\right)^2+\left(\frac{du}{d\nu}\right)^2=\{1+\nu^2 f'^2(\nu\,\mathrm{Tang.}\alpha)\}\,\mathrm{Tang.}^2\alpha\ ,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}=\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)}\;,$$

et

$$s=\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\int\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)}.\mathrm{d}v\;;$$

arc qu'il faudra toujours prendre positivement, puisqu'il ne s'agit ici que de sa valeur absolue.

On a aussi

$$s=\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2+(z-v)^2}=(z-v)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}=\frac{z-v}{\mathrm{Cos.}\alpha}\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)}\;;$$

et cet arc, comme le précédent, devra aussi être pris positivement. Mais c'est ce qu'on ne ferait pas si, comme dans mon premier calcul, on laissait subsister $+(z-v)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}$. En effet, si s augmente en même temps que v, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}$ sera positif; mais alors z sera moindre que v et $(z-v)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}$ sera négatif; il faudra donc, dans ce cas, pour prendre cette quantité positivement, la faire précéder du signe *moins*. Si, au contraire, v diminue quand s augmente, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}$ sera négatif et $z-v$ positif; il faudra donc encore le signe *moins* dans ce cas; de sorte que notre deuxième équation sera réellement

$$z=v-\frac{\int\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang}\,\alpha)}.\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang}\,\alpha)}}\;, \qquad (9)$$

Les équations (8) et (9) sont donc, après la substitution de la valeur de v tirée de l'équation (7), celles de la développante cherchée.

Si présentement on donne les deux équations de la développante, la seule chose à chercher sera la forme de la fonction f, et on y parviendra en éliminant x, y, z entre les deux équations données et les équations (8) et (9). Il restera une équation en ν et $\mathrm{f}(\nu \mathrm{Tang}.\alpha)$ de laquelle on tirera la valeur de cette dernière quantité.

Si l'on donne seulement l'équation d'une surface sur laquelle la développante doit être située; il faudra alors, comme précédemment, trouver la forme de la fonction f et ensuite la seconde équation de la courbe. C'est ce à quoi on parviendra en éliminant x, y, z entre les équations (7), (8), (9) et celle de la surface donnée. Il restera une équation de laquelle on tirera la valeur de $\mathrm{f}(\nu \mathrm{Tang}.\alpha)$. Cette valeur étant connue, on la substituera dans l'équation (7) qu'on résoudra alors par rapport à ν; et, en mettant pour ν sa valeur ainsi obtenue dans l'équation (8), on aura l'équation de la courbe cherchée.

Faisons l'application de ceci au cas où l'on demande que la développante se trouve sur un plan conduit par le sommet du cône perpendiculairement à son axe. L'équation de cette surface étant $z=0$, l'élimination de x, y, z se réduit à celle de z entre $z=0$ et l'équation (9); en sorte que l'équation finale sera

$$\nu - \frac{\int\sqrt{1+\nu^2 \mathrm{Sin.}^2\alpha \mathrm{f}'^2(\nu \mathrm{Tang}.\alpha)}\, d\nu}{\sqrt{1+\nu^2 \mathrm{Sin.}^2\alpha \mathrm{f}'^2(\nu \mathrm{Tang}.\alpha)}} = 0 .$$

Or, en général, quand on a

$$\nu - \frac{\int\psi(\nu).d\nu}{\psi(\nu)} = 0 ,$$

on en tire $\psi'(\nu)=0$, d'où $\psi(\nu)=\mathrm{Const.}$ On aura donc, dans le cas présent

$$\nu \mathrm{f}'(\nu \mathrm{Tang}.\alpha) = \frac{1}{D} \quad \text{et} \quad \mathrm{f}(\nu \mathrm{Tang}.\alpha) = \frac{1}{D} \mathrm{Log}. \frac{\nu}{a} ;$$

la projection de la courbe tracée sur le cône aura donc pour équation polaire

$$D\theta = \text{Log.}\,\frac{r}{a}\ ;$$

et c'est en effet le résultat trouvé à la page 169.

L'équation de la courbe décrite par l'extrémité du fil est, dans ce cas, celle de la courbe suivant laquelle la surface développable engendrée par ce fil rencontre le plan des xy; on aura donc, pour l'équation polaire de cette courbe,

$$\theta = \frac{1}{D}\,\text{Log.}\left(-\frac{1}{a\,\text{Tang.}\,\alpha \int \frac{d\theta}{r}}\right)\ ;$$

d'où on conclut, en différentiant

$$D\,d\theta = -a\,\text{Tang.}\,\alpha \int \frac{d\theta}{r}\cdot\frac{1}{a\,\text{Tang.}\,\alpha}\cdot\frac{\frac{d\theta}{r}}{\left(\int\frac{d\theta}{r}\right)^2} = \frac{\frac{d\theta}{r}}{\int\frac{d\theta}{r}}\ ,$$

ou bien

$$-D = \frac{1}{r\int\frac{d\theta}{r}}\ , \qquad \text{et} \qquad -\int\frac{d\theta}{r} = \frac{1}{Dr}\ ;$$

puis, en différentiant de nouveau,

$$d\theta = \frac{1}{D}\ \frac{dr}{r}\ ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$D\theta = \text{Log.}\,\frac{r}{b}\ ;$$

équation d'une autre spirale logarithmique, comme on l'avait déjà trouvé à la page 171.

Je pense, Monsieur, que ce moyen de parvenir au but vous semblera assez curieux à connaître. Il a d'ailleurs cet avantage qu'il permet de résoudre, par des formules construites une fois pour toutes, toutes les questions de ce genre, et qu'il peut ainsi éviter de longs calculs, lorsqu'on s'occupe de ce genre de recherches.

Agréez, etc.