GERGONNE

Statique élémentaire. Note sur le centre de gravité du tétraèdre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 262-264
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__262_1>

STATIQUE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur le centre de gravité du tétraèdre ;

Par M. Gergonne.

On démontre d'ordinaire, dans les élémens, que le centre de gravité du volume d'un tétraèdre est sur la droite qui joint un quelconque des sommets au centre de gravité de l'aire de la face opposée ; on démontre ensuite que ce point est aux trois quarts de la longueur de cette droite, à partir de celle de ses deux extrémités qui coïncide avec l'un des sommets. On en conclut aisément que le centre de gravité du volume d'un tétraèdre est le même que le centre commun de gravité de quatre masses égales quelconques, situées à ses sommets (*); d'où il résulte finalement que *le centre de gravité du volume d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques.*

De toutes les manières de signaler la situation de ce point, cette dernière est certes bien la plus simple et la plus symétrique ; et, pour cette raison, on peut désirer d'y parvenir directement, et sans la faire dépendre d'une suite d'autres. C'est une chose extrêmement facile, comme on va le voir,

Soit ABCD (fig. 4) le tétraèdre dont il s'agit, et soit EF la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques AB et CD. Concevons le tétraèdre décomposé en élémens plans, parallèles à la fois à ces deux arêtes ; ces élémens ayant deux côtés opposés parallèles à AB et les deux autres côtés opposés parallèles à CD, seront tous des parallélogrammes. Soit GHKL l'un d'eux, ayant ses deux côtés GL et HK parallèles à AB, et ses deux côtés GH et KL parallèles à CD ; et soit P le point où cet élément est percé par EF.

Le plan conduit par AB et par le point F coupera les côtés opposés GH et KL en leurs milieux M et N ; et le point P sera le milieu de MN, c'est-à-dire, le milieu de la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés du parallélogramme et conséquemment son centre de figure. Ce sera donc aussi le centre de gravité de l'élément. Tous les élémens du tétraèdre ont donc leur centre de gravité sur EF ; cette droite contient donc aussi le centre commun de gravité de tous ces élémens et conséquemment le centre de gravité du volume du tétraèdre.

Ainsi, il demeure déjà établi, par ce qui précède, que *le centre de gravité du volume d'un tétraèdre est sur l'une quelconque des trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposés ;* et on

(*) Cette dernière proposition est due à Roberval.

en pourrait déjà conclure, au besoin, que ces trois droites concourent en un même point, centre de gravité cherché ; il resterait donc seulement à établir que ce point en est le milieu commun.

Mais ces deux dernières propositions deviendront manifestes si l'on considère que deux couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre sont les quatre côtés d'un quadrilatère gauche. On sait, en effet, que le quadrilatère dont les sommets sont les milieux de ses côtés est un parallélogramme, dans lequel les deux diagonales se coupent à leur milieu commun. Or, on voit que ces diagonales ne sont autre chose que les droites qui joignent les milieux de deux systèmes d'arêtes opposées du tétraèdre.

Quant au centre de gravité de la surface d'un tétraèdre; en se rappelant que *le plan qui divise en deux parties égales l'un des angles dièdres d'un tétraèdre partage l'arête opposée en deux segmens proportionnels aux aires des faces correspondantes* (*Annales*, tom. III, pag. 317), on s'assurera aisément que ce centre de gravité est *le centre de la sphère inscrite au tétraèdre dont les sommets sont les centres de gravité des aires des faces du tétraèdre dont il s'agit ;* théorème tout-à-fait analogue à celui que M. Poinsot a donné, dans sa Statique, sur le centre de gravité du périmètre d'un triangle.