N. H. ABEL

Algèbre élémentaire. Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 204-213
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__204_1>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données;

Par M. N. H. Abel. (*Norvégien.*)

Lorsqu'une quantité satisfait, à la fois, à deux équations algébriques données, ces deux équations ont un facteur commun du premier degré. En supposant qu'elles n'ont pas d'autre facteur commun que celui-là, on peut toujours, comme l'on sait, exprimer rationnellement l'inconnue en fonction des coefficiens des deux équations. On y parvient d'ordinaire à l'aide de l'élimination; mais je vais faire voir, dans ce qui va suivre, que, dans tous les cas, on peut calculer immédiatement la valeur de l'inconnue, ou, plus généralement encore, la valeur d'une fonction rationnelle quelconque de cette inconnue.

Soient

$$\varphi(y)=p_0+p_1y+p_2y^2+\dots\dots+p_{m-1}y^{m-1}+y^m=0\,, \qquad (1)$$

$$\psi(y)=q_0+q_1y+q_2y^2+\dots\dots+q_{m-1}y^{m-1}+y^n=0\,, \qquad (2)$$

les deux équations proposées, la première du $m.^{ième}$ et l'autre du $n.^{ième}$ degré.

Désignons les n racines de (2) par y, y_1, y_2, ... y_{n-1} en les substituant tour-à-tour dans (1), on aura les n fonctions

$$\varphi(y)\ ,\quad \varphi(y_1)\ ,\quad \varphi(y_2)\ , \ldots.. \varphi(y_{n-1}). \qquad (3)$$

Soient

$$\left.\begin{array}{l}
R=\varphi(y_1).\varphi(y_2).\varphi(y_3) \ldots\ldots \varphi(y_{n-2}).\varphi(y_{n-1})\ ,\\
R_1=\varphi(y).\varphi(y_2).\varphi(y_3) \ldots\ldots \varphi(y_{n-2}).\varphi(y_{n-1})\ ,\\
R_2=\varphi(y).\varphi(y_2).\varphi(y_3) \ldots\ldots \varphi(y_{n-2}).\varphi(y_{n-1})\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\
R_{n-2}=\varphi(y).\varphi(y_1).\varphi(y_2) \ldots.. \varphi(y_{n-3}).\varphi(y_{n-1})\ ,\\
R_{n-1}=\varphi(y)\,\varphi(y_1).\varphi(y_2) \ldots\ldots \varphi(y_{n-3}).\varphi(y_{n-2})\ .
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Cela posé, soit $f(y)$ la fonction rationnelle de y dont on veut déterminer la valeur, et désignons par $\theta(y)$ une autre fonction rationnelle quelconque de y. On aura l'équation identique

$$f(y).\theta(y).R=f(y).\theta(y).R. \qquad (5)$$

Maintenant, ayant $\varphi(y)=0$, on aura

$$R_1=0\ ,\quad R_2=0\ ,\quad R_3=0\ , \ldots\ldots.. R_{n-1}=0\ ,$$

et, par suite,

$$tR+t_1R_1+t_2R_2+t_3R_3+\ldots\ldots+t_{n-2}R_{n-2}+t_{n-1}R_{n-1}=tR\ ;$$

où t, t_1, t_2, ... t_{n-2}, t_{n-1} sont des quantités quelconques.

En faisant donc d'abord

$$t=\theta(y)\ ,\quad t_1=\theta(y_1)\ ,\quad t_2=\theta(y_2)\ ,\ \ldots\ldots\ t_{n-1}=\theta(y_{n-1})\ ,$$

et ensuite

$$t=\mathrm{f}(y).\theta(y)\ ,\ t_1=\mathrm{f}(y_1).\theta(y_1)\ ,\ t_2=\mathrm{f}(y_2).\theta(y_2),\ \ldots\ t_{n-1}=\mathrm{f}(y_{n-1}).\theta(y_{n-1})$$

on obtiendra les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}\theta(y)R=\theta(y)R+\theta(y_1)R_1+\theta(y_2)R_2+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ +\theta(y_{n-1}).R_{u-1}\ ,\\ \mathrm{f}(y).\theta(y).R=\mathrm{f}(y_1).\theta(y_1).R_1+\mathrm{f}(y_2).\theta(y_2).R_2+\ldots\ \mathrm{f}(y_{n-1}).\theta(y_{n-1}).R_{u-1}\ ;\end{array}\right\}(6)$$

par là, l'équation (5) deviendra

$$\mathrm{f}(y)\{\theta(y)R+\theta(y_1)R_1+\theta(y_2)R_2+\ldots\ldots+\theta(y_{n-1})R_{n-1}\}$$

$$=\theta(y).\mathrm{f}(y)R+\theta(y_1).\mathrm{f}(y_1)R_1+\theta(y_2).\mathrm{f}(y_2)R_2+\ldots\ldots+\theta(y_{u-1}).\mathrm{f}(y_{n-1})R_{n-1}\ ;$$

équation qui, en posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l}\theta(y)R+\theta(y_1)R_1+\theta(y_2)R_2+\ldots\ldots+\theta(y_{n-1})R_{n-1}=\Sigma\theta(y)R\ ,\\ \mathrm{f}(y)\theta(y)R+\mathrm{f}(y_1)\theta(y_1)R_1+\mathrm{f}(y_2)\theta(y_2)R_2+\ldots+\mathrm{f}(y_{n-1})\theta(y_{n-1})R_{n-1}=\Sigma\mathrm{f}(y)\theta(y)R,\end{array}\right\}(7)$$

deviendra

$$\mathrm{f}(y).\Sigma\theta(y)R=\Sigma\mathrm{f}(y).\theta(y).R\ ,$$

et de là

$$\mathrm{f}(y)=\frac{\Sigma\mathrm{f}(y)\theta(y)R}{\Sigma\theta(y)R}\ . \qquad (8)$$

Maintenant, il est clair que le numératenr et le dénominateur de cette valeur de $\mathrm{f}(y)$ sont des fonctions rationnelles et symétriques des racines $y, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{n-1}$; on peut donc, en vertu des formules connues, les exprimer rationnellement par les coefficiens des équations (1) et (2). Il en est donc de même de la fonction $f(y)$

La fonction rationnelle $\theta(y)$ étant arbitraire, on peut en disposer pour simplifier l'expression de $f(y)$. Pour cela, soit

$$f(y)=\frac{F(y)}{\chi(y)},$$

où $F(y)$ et $\chi(y)$ sont deux fonctions entières; on aura, en substituant,

$$\frac{F(y)}{\chi(y)}=\frac{\Sigma\frac{F(y)\theta(y)R}{\chi(y)}}{\Sigma\theta(y)R};$$

Si donc on suppose $\theta(y)=\chi(y)$, on aura

$$\frac{F(y)}{\chi(y)}=\frac{\Sigma F(y)R}{\Sigma\chi(y)R}; \qquad (9)$$

et alors le numérateur et le dénominateur de cette fonction seront des fonctions entières des coefficiens des équations proposées.

Si $\chi(y)=1$, on aura, pour une fonction entière quelconque $F(y)$,

$$F(y)=\frac{\Sigma F(y)R}{\Sigma R}; \qquad (10)$$

ou bien

$$F(y)=\frac{F(y)R+F(y_1)R_1+F(y_2)R_2+\ldots\ldots+F(y_{n-1})R_{n-1}}{R+R_1+R_2+\ldots\ldots+R_{n-1}}.$$

Mais on peut encore simplifier beaucoup l'expression de $F(y)$ de la manière suivante :

Désignons par $\psi'(y)$ la dérivée de $\psi(y)$, par rapport à y, et faisons

$$\theta(y)=\frac{1}{\psi'(y)} \ ;$$

l'équation (8) donnera

$$F(y)=\frac{\Sigma\,\frac{F(y)R}{\psi'(y)}}{\Sigma\,\frac{R}{\psi'(y)}} \ . \qquad (11)$$

Cela posé, on peut d'abord exprimer R par une fonction entière de y. En effet, si l'on fait

$$(z-y_1)(z-y_2)\ldots\ldots(z-y_{n-1})=z^{n-1}+v_{n-2}\,z^{n-1}+v_{n-3}\,z^{n-3}+\ldots\ldots+v_0=0 \ ;$$

on peut transformer R, qui est une fonction entière et symétrique de y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1}, en fonction entière des coefficiens v_0, v_1, v_2, ...v_{n-2}.

Maintenant, on a

$$(v_0+v_1z+v_2z^2+\ldots\ldots+v_{n-2}\,z^{n-2}+z^{n-1})(z-y)=q_0+q_1z+q_2z^2+\ldots\ldots+q_{n-1}\,z^{n-1}+z^n$$
$$=z^n+(v_{n-2}-y)z^{n-1}+(v_{n-3}-yv_{n-2}+y^2)z^{n-2}+(v_{n-4}-yv_{n-3}+y^2v_{n-2}-y^3)z^{n-3}+\ldots.$$

donc

$$v_{n-2}=q_{n-1}+y \ ,$$

$$v_{u-3}=q_{n-2}+yv_{n-2}-y^2 \ ,$$

$$v_{n-4}=q_{n-3}+yv_{u-3}-y^2v_{n-2}+y^3 \ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où il suit que v_0, v_1, v_2, ... v_{n-2} sont des fonctions entières de y ; la fonction R l'est donc aussi ; elle est donc de la forme

$$R=\rho_0+\rho_1 y+\rho_2 y^2+\rho_3+\ldots+\rho_\mu y^\mu\;; \qquad (12)$$

où il est évident que ρ_0, ρ_1, ρ_2, ... ρ_μ seront des fonctions *entières* des coefficiens des équations (1) et (2).

La fonction R sera d'un degré supérieur à $n-1$; mais, il est clair qu'on peut, en vertu de l'équation (2), en éliminer toutes les puissances de y supérieures à la $(n-1)^{ième}$, et de cette manière mettre R sous la forme

$$R=\rho_0+\rho_1 y+\rho_2 y^2+\rho_3 y^3+\ldots\ldots+\rho_{n-1} y^{n-1}\;,$$

où ρ_0, ρ_1, ρ_2, ... ρ_{n-1} sont toujours des fonctions entières de p_0, p_1, p_2 .... p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, ... q_{n-1}.

En multipliant R par la fonction entière $F(y)$ on aura la fonction $F(y)R$, qui est de même une fonction entière de y. On peut donc la mettre sous la même forme que R, c'est-à-dire, qu'on peut poser

$$F(y).R=t_0+t_1 y+t_2 y^2+t_3 y^3+\ldots\ldots+t_{n-1} y^{n-1}\;; \qquad (13)$$

t_0, t_1, t_2, ... t_{n-1} étant encore des fonctions entières de p_0, p_1, p_2, ... p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, ... q_{n-1}.

Dès que R sera déterminé par l'équation (12), il est clair qu'on aura

$$R_1=\rho_0+\rho_1 y_1+\rho_2 y_1^2+\rho_3 y_1^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\rho_{n-1} y_1^{n-1}\;,$$

$$R_2=\rho_0+\rho_1 y_2+\rho_2 y_2^2+\rho_3 y_2^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\rho_{n-1} y_2^{n-1}\;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{n-1}=\rho_0+\rho_1 y_{n-1}+\rho_2 y^2_{n-1}+\rho_3 y^3_{n-1}+\ldots+\rho_{n-1} y_{n-1}^{n-1}\;.$$

On aura de même

$$F(y_1)R_1 = t_0 + t_1y_1 + t_2y_1^2 + t_3y_1^3 + \ldots\ldots + t_{n-1}y_1^{n-1} ,$$

$$F(y_2)R_2 = t_0 + t_1y_2 + t_2y_2^2 + t_3y_2^3 + \ldots\ldots + t_{n-1}y^{n-1} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$F(y_{n-1})R_{n-1} = t_0 + t_1y_{n-1} + t_2y_{n-1}^2 + t_3y_{n-1}^3 + \ldots + t_{n-1}y_{n-1}^{n-1} .$$

Maintenant, je dis qu'on aura

$$F(y) = \frac{t_{n-1}}{\rho_{n-1}} ;$$

En effet, on a d'abord

$$\Sigma \frac{R}{\psi'(y)} = \frac{R}{\psi'(y)} + \frac{R_1}{\psi'(y_1)} + \frac{R_2}{\psi'(y_2)} + \ldots\ldots + \frac{R_{n-1}}{\psi'(y_{n-1})} ;$$

donc, en substituant les valeurs de R, R_1, R_2, ... R_{n-1},

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{R}{\psi'(y)} = \rho_0 &\left\{ \frac{1}{\psi'(y)} + \frac{1}{\psi'(y_1)} + \frac{1}{\psi'(y_2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{\psi'(y_{n-1})} \right\} \\ + \rho_1 &\left\{ \frac{y}{\psi'(y)} + \frac{y_1}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2}{\psi'(y_2)} + \ldots\ldots + \frac{y_{n-1}}{\psi'(y_{n-1})} \right\} \\ + \rho_2 &\left\{ \frac{y^2}{\psi'(y)} + \frac{y_1^2}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2^2}{\psi'(y_2)} + \ldots\ldots + \frac{y^2_{n-1}}{\psi'(y_{n-1})} \right\} \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \rho_{n-1} &\left\{ \frac{y^{n-1}}{\psi'(y)} + \frac{y_1^{n-1}}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2^{n-1}}{\psi'(y_2)} + \ldots + \frac{y^{n-1}_{n-1}}{\psi'(y_{n-2})} \right\} . \end{aligned}$$

Or, y, y_1, y_2, ... y_{n-1}, étant les racines de l'équation (2) on a

$$\psi'(y)=(y-y_1)(y-{}_2y)(y-y_3)\ldots\ldots(y-y_{n-1})\ ,$$

$$\psi'(y_1)=(y_1-y)(y_1-y_2)(y_1-y_3)\ldots\ldots(y_1-y_{n-1})\ ;$$

$$\psi'(y_2)=(y_2-y)(y_2-y_1)(y_2-y_3)\ldots\ldots(y_2-y_{n-1})\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$\psi'(y_{n-1})=(y_{n-1}-y)(y_{n-1}-y_1)(y_{n-1}-y_2)\ldots\ldots(y_{n-1}-y_{n-2})\ ;$$

donc, d'après une formule connue, les coefficiens de ρ_0, ρ_1, ρ_2, ... ρ_{n-1}, dans l'expression de $\Sigma\,\frac{R}{\psi'(y)}$, s'évanouiront tous, excepté celui de μ_{n-1}, qui se réduira à l'unité ; on aura donc

$$\Sigma\,\frac{R}{\psi'(y)}=\rho_{n-1}\ ;$$

On prouvera exactement de la même manière que

$$\Sigma\,\frac{R.F(y)}{\psi'(y)}=t_{n-1}\ ;$$

donc, en vertu de l'équation (11),

$$F(y)=\frac{t_{n-1}}{\rho_{n-1}}\ ;$$

ou bien, en écrivant t et ρ, au lieu de t_{n-1} et ρ_{n-1},

$$F(y)=\frac{t}{\rho}\ . \qquad (14)$$

Soit maintenant $F'(y)$ une autre fonction entière de y ; en supposant

$$F'(y)R = t'y^{n-1} + t'_{n-2}y^{n-2} + t'_{n-3}y^{n-3} + \ldots\ldots + t'_1 y + t'_0 \,, \qquad (15)$$

t', t'_{n-1}, t'_{n-2}, ... t'_0 étant des fonctions entières des quantités p_0, p_1, p_2, ... p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, ... q_{n-1}, on aura

$$F'(y) = \frac{t'}{\rho} \;; \qquad (16)$$

d'où, en comparant (14) à (16)

$$\frac{F(y)}{F'(y)} = \frac{t}{t'} \,. \qquad (17)$$

Ainsi, on aura la valeur d'une fonction rationnelle quelconque $\frac{F(y)}{F'(y)}$, par le développement des deux fonctions

$$F(y)R \qquad \text{et} \qquad F'(y)R \,.$$

La formule (17) peut facilement être traduite en théorème.

Le cas le plus simple est celui où l'on cherche uniquement la valeur de y. Alors on a

$$y = \frac{t}{\rho}$$

où

$$R = \rho y^{n-1} + \rho' y_{n-2} + \ldots \qquad \text{et} \qquad Ry = t y^{n-1} + t' y^{n-2} + \ldots$$

On peut exprimer t en ρ et ρ'. En effet, en substituant la valeur de R, il viendra

$$Ry = \rho y^n + \rho' y^{n-1} + \ldots\ldots \;;$$

or, en vertu de l'équation (2), on a

$$y^n = -q_{n-1}y^{n-1} - q_{n-2}y^{n-2} - \ldots\ldots ;$$

donc, en substituant

$$Ry = (\rho' - \rho q_{n-1})y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$$

Dans le développement de Ry, le coefficient de y^{n-1} est donc

$$\rho' - \rho q_{n-1} = t ;$$

donc

$$y = \frac{\rho' - \rho q_{n-1}}{\rho}$$

ou bien

$$y = -q_{n-1} + \frac{\rho'}{\rho} . \qquad (18)$$

De cette manière, on n'a besoin de connaître que les coefficiens de y^{n-1} et y^{n-2} dans le développement de

$$R = \rho y^{n-1} + \rho' y^{n-2} + \ldots = \varphi(y_1)\,\varphi(y_2)\cdot\varphi(y_3)\ldots\varphi(y_{n-1}) .$$

Paris, le 2 novembre 1826.