ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

THOMAS DE ST-LAURENT

Optique. Recherches sur la caustique par réflexion, dans le cercle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__1_0>

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

Recherches sur la caustique par réflexion, dans le cercle;

Par M. THOMAS DE ST-LAURENT, Officier au Corps royal d'état-major, attaché à la 13.me division militaire.

LA marche la plus générale, dans la recherche de la caustique par réflexion, relative au cercle, serait sans doute d'attaquer directement la question, pour le cas d'un point lumineux, situé, d'une manière quelconque, dans le plan du cercle réfléchissant donné. On pourrait supposer ensuite que le point lumineux est sur la circonférence de ce cercle, ou qu'il en est infiniment distant, ou enfin qu'il a toute autre situation déterminée; et on déduirait des résultats généraux auxquels on serait d'abord parvenus, ceux qui conviendraient à chacun de ces cas particuliers. Mais, comme cette marche conduit à des calculs extrêmement prolixes, nous procèderons d'une manière inverse ; c'est-à-dire, qu'avant de passer au problème général, nous nous occuperons d'abord des deux cas particuliers les plus simples. Nous obtiendrons de cette manière des formules moins compliquées et plus élégantes.

I. Occupons-nous d'abord de la recherche de l'équation de la caustique pour le cas où le point lumineux est un de ceux de la circonférence du cercle réfléchissant.

Soit r le rayon de ce cercle. Afin de simplifier nos calculs autant qu'il est possible, prenons son centre pour origine des coordonnées rectangulaires, et faisons passer l'axe des x par le point rayonnant, que nous supposons placé du côté des x négatives. Soit (x',y') un point incident quelconque, et (x,y) le point correspondant de la caustique cherchée, c'est-à-dire, le point où elle est touchée par le rayon réfléchi. On aura d'abord

$$x'^2+y'^2=r^2 \,. \qquad (1)$$

L'angle que fait le rayon incident avec la normale au cercle au point (x',y') a pour tangente tabulaire $\frac{y'}{r+x'}$.

Si nous désignons par p la tangente tabulaire de l'angle que fait le rayon réfléchi avec l'axe des x ; l'angle de ce même rayon avec la normale au point (x',y') aura pour tangente tabulaire

$$\frac{p-\frac{y'}{x'}}{1+p\frac{y'}{x'}}\,, \qquad \text{ou} \qquad \frac{px'-y'}{x'+py'}\,;$$

et, comme, d'après les lois de l'optique, cet angle doit être égal au premier, on aura

$$\frac{px'-y'}{x'+py'}=\frac{y'}{r+x'}\,,$$

d'où on tire, en ayant égard à l'équation (1)

$$p=\frac{y'(r+2x')}{x'(r+2x')-r^2}\ ,$$

l'équation du rayon réfléchi sera donc

$$y-y'=\frac{y'(r+2x')}{x'(r+2x')-r^2}(x-x')\ ,$$

ou encore

$$[r^2-x'(r+2x')]y+y'(r+2x')x=r^2y'\ . \qquad (2)$$

On exprimera que la caustique est l'enveloppe de l'espace parcouru par le rayon réfléchi, en éliminant $\frac{dy'}{dx'}$ entre les dérivées de (1) et (2); ce qui donnera

$$-\frac{x'}{y'}=\frac{(r+4x')y-2y'x}{(r+2x')x-r^2}\ ,$$

ou bien, en ayant encore égard à la relation (1)

$$(r+4x')yy'+[x'(r+4x')-2r^2]x=r^2x'\ . \qquad (3)$$

L'équation de la courbe cherchée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1), (2), (3).

Mais, comme les équations (2) et (3) ne sont guères de nature à se prêter à l'usage de l'équation (1), comme moyen de simplification, attendu que x et y n'entrent pas dans celle-ci; nous allons en déduire deux autres, plus commodes à employer; et pour cela nous éliminerons tour à tour entre elles x et y. En faisant toujours usage de l'équation (1), comme moyen de simplification, elles se trouveront ainsi remplacées par les deux équations

$$3r(r+x')x=2x'y'^2+r^2(r+x')\ ,$$

$$3r(r+x')y=2y'^3\ .$$

En observant que $y'^2=r^2-x'^2=(r+x')(r-x')$, celles-ci pourront encore être simplifiées, et deviendront finalement

$$r(3x-r)=2x'(r-x'), \qquad (4)$$

$$3ry=2y'(r-x'). \qquad (5)$$

Telles sont donc les équations qui, avec l'équation (1), nous serviront à trouver celle de la courbe demandée.

Remarquons, en passant, une propriété de la caustique que l'on déduit de suite de la comparaison des équations (4) et (5). En les divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{3y}{3x-r}=\frac{y'}{x'}; \qquad (6)$$

or $\frac{y'}{x'}$ est la tangente tabulaire de l'angle que fait avec l'axe des x la normale au point d'incidence; et $\frac{3y}{3x-r}$ ou $\frac{y}{x-\frac{r}{3}}$ est celle de l'angle que fait avec le même axe une droite menée du point correspondant de la caustique à un point fixe de l'axe des x, situé à une distance $+\frac{r}{3}$ de l'origine: on a donc ce théorème:

Un point rayonnant étant situé sur la circonférence d'un cercle réflechissant; si par ce point on mène un rayon incident et le rayon réfléchi correspondant, et que, par un point fixe situé aux deux tiers du diamètre qui passe par le point rayonnant, à compter de ce point, on mène une parallèle à la normale au point d'incidence; cette parallèle coupera le rayon réfléchi à son point de contact avec la caustique, et conséquemment en un point de cette caustique.

Ce théorème offre une méthode graphique fort simple pour tracer la caustique par points; on en peut conclure aussi l'art de mener une tangente à cette caustique par un de ses points, lorsqu'elle est déjà tracée. En joignant, en effet, ce point au point fixe par une droite, et menant un rayon parallèle à cette droite, l'extrémité de ce rayon sera un second point de la tangente demandée.

Passons présentement à la recherche de l'équation de la caustique. En quarrant les deux membres de l'équation (6), et ajoutant ensuite l'unité à chaque membre, il vient

$$\frac{9y^2+(3x-r)^2}{(3x-r)^2}=\frac{x'^2+y'^2}{x'^2}=\frac{r^2}{x'^2}\ ;$$

On tire de là

$$x'=\frac{\pm r(3x-r)}{\sqrt{9y^2+(3x-r)^2}}\ ;$$

valeur qui, substituée dans (4), donne, en réduisant,

$$\{9(x^2+y^2)-r^2\}^2=4r^2\{9y^2+(3x-r)^2\}\ ; \qquad (7)$$

équation de la caustique demandée.

On voit que cette courbe est une ligne du quatrième ordre symétrique par rapport à l'axe des x ; et, en discutant son équation, on s'assurera qu'elle a un point de rebroussement, lequel n'est autre chose que le point fixe dont il a été question ci-dessus ; que de ce point partent deux branches, intérieures au cercle réfléchissant, qui vont se réunir au point rayonnant, où la caustique a un contact du second ordre avec ce cercle.

Cherchons le rapport métrique entre la longueur du rayon incident terminé au cercle réfléchissant et le rayon réfléchi terminé à la caustique. En désignant respectivement par P et P' ces deux rayons, nous aurons

$$P=\sqrt{(x'+r)^2+y'^2}\ , \qquad P'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

en mettant dans ces formules pour $x'^2+y'^2$ sa valeur r^2, et mettant en outre dans la dernière pour x et y les valeurs données par les équations (4) et (5), elles deviendront

$$P=\sqrt{2r(r+x')}\ , \qquad P'=\tfrac{1}{3}\sqrt{2r(+x')}\ ;$$

d'où on conclura cette relation remarquable

$$P=3P'\ .$$

Ainsi dans la caustique que nous considérons ici, *le rayon réfléchi est constamment le tiers du rayon incident.*

Cette propriété fournit un nouveau moyen bien simple de décrire la courbe par points. On pourra même, en la combinant avec celle qui résulte de l'équation (6), obtenir les points de la courbe sans tracer les rayons réfléchis.

Occupons-nous présentement de la rectification de la caustique. Pour y parvenir, on pourrait, suivant la méthode générale, rendre le radical de la formule

$$s=\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

fonction de la seule variable x, en substituant pour y, dans $\frac{dy}{dx}$, sa valeur tirée de l'équation de la courbe. Mais, en suivant cette marche, on aurait à intégrer une formule assez compliquée. Attachons-nous donc à éluder cette difficulté.

L'équation de la courbe est comprise implicitement dans les équations (1), (4), (5); puisqu'elle résulte de l'élimination de x' et y' entre ces trois équations. En conséquence, on peut fort bien chercher l'expression de s en x' et y' qu'on est toujours maître ensuite d'éliminer au moyen des équations qui lient ces deux variables à x et y.

En différentiant les équations (1), (4), (5) par rapport à x, y, x', y', on obtient

$$x'\mathrm{d}x'+y'\mathrm{d}y'=0\ ,$$

$$3r\mathrm{d}x=2(r-2x')\mathrm{d}x'\ ,$$

$$3r\mathrm{d}y=2(r-x')\mathrm{d}y'-2y'\mathrm{d}x'\ .$$

En divisant la troisième par la seconde, il vient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(r-x')\mathrm{d}y'-y'\mathrm{d}x'}{(r-2x')\mathrm{d}x'}=\frac{(r-x')\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}-y'}{r-2x'}\ ;$$

ou en mettant pour $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}$ sa valeur tirée de la première

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{(r-x')x'+y'^2}{(r-2x')y'}=-\frac{(r-x)x'+(r^2-x'^2)}{(r-2x')y'}=-\frac{(r-x')(r+2x')}{(r-2x')y'}$$

donc

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{(r-x')^2(r+2x')^2}{(r-2x')^2y'^2}=\frac{(r-x')^2(r+2x')^2}{(r-2x')^2(r^2-x'^2)}=\frac{(r-x')(r+2x')^2}{(r+x')(r-2x')^2}\ ;$$

et par suite

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{(r+x')(r-2x')^2+(r-x')(r+2x')^2}{(r+x')(r-2x')^2}=\frac{2r^3}{(r+x')(r-2x')^2}\ .$$

D'un autre côté nous venons de trouver

$$\mathrm{d}x=\frac{2(r-2x')}{3r}\mathrm{d}x'\ ;$$

donc

$$s=\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\int\frac{2(r-2x')}{3r}\sqrt{\frac{2r^3}{(r+x')(r-2x')}}dx'=\tfrac{2}{3}\int dx'\sqrt{\frac{2r}{r+x'}}\ ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$s=\tfrac{4}{3}\sqrt{2r(r+x')}+A\ .$$

Si l'on veut compter les arcs du point rayonnant, pour lequel on a $y'=0$ et $x'=-r$, la constante sera nulle, et l'on aura simplement

$$s=\tfrac{4}{3}\sqrt{2r(r+x')}\ ;$$

ou, en se rappelant les résultats ci-dessus,

$$s=\tfrac{4}{3}P=P+\tfrac{1}{3}P=P+P'\ .$$

Ainsi, notre caustique est rectifiable, et *l'arc, compris depuis le point rayonnant jusqu'à un autre point quelconque, est constamment égal à la somme des longueurs des rayons incident et réfléchi qui répondent à ce dernier point.*

Lorsque $P=2r$, on a $P'=\frac{2}{3}r$; d'où résulte $s=\frac{8}{3}r$; et telle est la longueur de la demi-caustique; mais la corde de cette demi-caustique est $\frac{4}{3}r$; donc *la longueur de la demi-caustique est précisément double de sa corde;* ou, en d'autres termes, *la longueur de la caustique entière est quadruple de celle de la droite qui joint son point de rebroussement à son point de contact avec le cercle réfléchissant.*

Appliquons encore les considérations précédentes à la recherche de la développée de la caustique.

Soit (X,Y) un quelconque des points de cette développée; l'équation de la normale à la caustique sera

$$(X-x)+(Y-y)\frac{dy}{dx}=0\ ,$$

dans laquelle il faudrait mettre pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur tirée de l'équation de la courbe. Mais, au lieu d'avoir recours à cette équation, nous pourrons employer la valeur de $\frac{dy}{dx}$ déjà obtenue, en x' et y'. Mettant en outre pour x et y les valeurs données par les équations (4) et (5), et ayant égard à l'équation (1), on trouvera

$$\{r^2-x'(2x'-r)\}.3Y+(2x'-r)y'.3X=r^2y' \,. \qquad (2')$$

On exprimera que la développée est l'enveloppe de l'espace parcouru par la normale, en éliminant $\frac{dy'}{dx'}$ entre les dérivées des équations (1) et (2'), ce qui donnera

$$\{x'(4x'-r)-2r^2\}.3X+(4x'-r)y'.3Y=r^2x' \,. \qquad (3')$$

L'équation de la développée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y', entre les équations (1), (2'), (3').

Mais les équations (2') et (3') ne sont que les équations (2) et (3), dans lesquelles on aurait changé respectivement x et y en $3X$ et $3Y$, et changé en outre le signe de r. Le résultat de l'élimination ne sera donc autre chose que l'équation (7), résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1), (2), (3), dans laquelle on aurait opéré les mêmes changemens; c'est-à-dire, que l'équation de la développée de notre caustique sera

$$\{9(9X^2+9Y^2)-r^2\}^2=4r^2\{9.9Y^2+(3.3X+r)^2\} \,;$$

ou bien, en posant, pour plus de simplicité; $r=3R$.

$$\{9(X^2+Y^2)-R^2\}^2=4R^2\{9Y^2+(3X+R)^2\} \,. \qquad (7')$$

En comparant cette équation à l'équation (7), on voit qu'elle est composée en X, Y et $-R$ comme celle-là l'était en x, y et $+r$; ce qui conduit à ce résultat remarquable :

Lorsque le point rayonnant est à la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la développée de la caustique est une autre caustique semblable à la première*, *relative à un cercle réfléchissant concentrique au premier*, *mais d'un rayon trois fois moindre*, et dont la circonférence passe conséquemment par le point de rebroussement de cette première caustique. La seconde caustique est d'ailleurs tournée en sens inverse de la première, de sorte que le point lumineux qui lui répond se confond avec le point de rebroussement ou foyer de celle-là.

Il suit encore de là que, lorsque le point rayonnant est à la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la caustique est la développée d'une autre caustique semblable*, *tournée en sens inverse et relative à un cercle réfléchissant concentrique au premier*, *mais d'un rayon trois fois plus grand.*

On aura donc l'équation de l'une des développantes de la caustique dont il s'agit en changeant simplement, dans l'équation (7) x, y et $+r$ en $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{3}y$ et $-r$; ce qui donnera l'équation fort simple

$$(x^2+y^2-r^2)^2=4r^2\{y^2+(x+r)^2\} \qquad (*).$$

(*) Ce résultat peut être confirmé par un autre déjà obtenu. On a vu, en effet, à la page 78 du précédent volume, que l'équation de l'une des développantes de la caustique par réfraction relative à un cercle qui a son centre à l'origine, et pour des rayons émanés de l'un quelconque (a,b) des points de son plan, est

$$\{\lambda'^2(x^2+y^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+r^2)\}^2=4r^2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2\} .$$

Pour passer de là au cas de la réflexion, il suffira, comme l'on sait, de poser $\lambda'=-\lambda$, ce qui donnera

$$\{(x^2+y^2)-(a^2+b^2)\}^2=4r^2\{(x^2+y^2)-2(ax+by)+(a^2+b^2)\} .$$

Le point de rebroussement de la caustique dont nous étudions les propriétés étant un point très-remarquable de cette courbe, nous nous trouvons naturellement invités à y transporter l'origine, et à chercher ensuite l'équation polaire de cette même caustique. Pour transporter l'origine à ce point de rebroussement, il suffit simplement de changer, dans l'équation (7), $3x$ en $3x+r$, ce qui, en changeant ensuite r en $3a$, donnera

$$x^2+y^2+2ax=\pm 2a\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (8)$$

Pour passer de là aux coordonnées polaires, il faudra faire

$$x=\rho\,\text{Cos}\,\varphi\,, \quad y=\rho\,\text{Sin.}\varphi\,, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{x^2+y^2}=\rho\,;$$

il viendra ainsi, en substituant et divisant par ρ,

$$\rho+2a\text{Cos.}\varphi=\pm 2a\,. \qquad (9)$$

Cette équation manifeste une des plus belles propriétés de notre caustique. Considérons, en effet, un cercle concentrique avec le cercle réfléchissant, et ayant pour rayon $a=\frac{1}{3}r$, son équation relative à la nouvelle origine sera

---

Si l'on suppose ensuite que le point rayonnant (a,b) est un de ceux de la circonférence, on aura $a^2+b^2=r^2$, et conséquemment

$$(x^2+y^2-r^2)^2=4r^2\{(x^2+y^2+r^2)-2(ax+by)\}\,;$$

Si enfin on suppose que ce point est sur l'axe des x, à gauche de l'origine, on aura $a=-r$, $b=0$, et cette équation deviendra

$$(x^2+y^2-r^2)^2=4r^2\{y^2+(x+r)^2\}\,;$$

c'est-à-dire, la même que celle du texte.

J. D. G.

$$x^2+y^2+2ax=0\ ,$$

d'où on conclura pour son équation polaire

$$\rho'+2a\text{Cos.}\varphi=0 \qquad (10)$$

et par suite

$$\rho-\rho'=\pm 2a\ , \qquad \text{ou} \qquad \rho=\rho'\pm 2a$$

de sorte que le rayon vecteur de la caustique n'est autre que celui du cercle augmenté ou diminué du diamètre de ce cercle.

Voilà donc un troisième moyen bien simple de décrire la caustique par point. Après avoir déterminé son point de rebroussement, on décrira un cercle concentrique au cercle réfléchissant, dont la circonférence passe par ce point; on menera par ce même point à ce cercle une série de cordes sur la direction desquelles on portera, de part et d'autre du point où elles se termineront, des longueurs égales au diamètre du cercle intérieur, et l'on aura ainsi, pour chacune, deux des points de la caustique.

Ainsi, dans le cas d'un point rayonnant situé sur la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la caustique est une conchoïde*, *qui a pour directrice un cercle concentrique au cercle réflecteur et un rayon égal au tiers de celui de ce cercle. Le pôle de cette conchoïde*, *situé sur la circonférence de ce dernier cercle*, *est en même temps le point de rebroussement de la caustique.*

Il suit encore de là que *toutes les cordes*, *menées à la caustique par son point de rebroussement*, *sont d'une longueur constante et égale au deux tiers du diamètre du cercle réflecteur* (*).

(*) Cette courbe est donc (*Annales*, tom. I, pag. 124) un cas particulier de toutes celles qu'exprime l'équation générale.

Replaçons l'origine au centre du cercle réfléchissant, et proposons-nous de déterminer l'équation de l'épicycloïde engendrée par un cercle d'un rayon égal à a et roulant sur un autre cercle de même rayon.

Supposons que le cercle générateur, d'abord tangent au cercle base, au point $(x=+a, y=0)$, que nous supposons le point décrivant, s'élève au-dessus de l'axe des x, pour décrire la courbe.

Soient, à un instant quelconque, (x,y) le point décrivant et (x'',y'') le centre du cercle générateur; on aura d'abord

$$x''^2+y''^2=4a^2\,, \qquad (14)$$

$$(x-x'')^2+(y-y'')^2=a^2\,. \qquad (15)$$

La droite menée du centre du cercle mobile au point décrivant, fait avec l'axe des x un angle, dont la tangente tabulaire est $\frac{y-y''}{x-x''}$. Cet angle est l'angle extérieur d'un triangle dont le troisième côté est la droite menée de l'origine au point (x'',y''); et, par la nature du mouvement, les angles adjacens à ce troisième côté doivent être égaux; donc l'angle extérieur dont il s'agit, doit être égal au double de l'un d'eux, dont la tangente est $\frac{y''}{x''}$; la tangente tabulaire de cet angle extérieur sera donc

$$\frac{2\frac{y''}{x''}}{1-\left(\frac{y''}{x''}\right)^2}\,, \qquad \text{c'est-à-dire}, \qquad \frac{2x''y''}{x''^2-y''^2}\,;$$

d'où il suit qu'on devra avoir

$$\left\{x-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2+\left\{y-\frac{y}{x}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2=a^2\,;$$

et dont la propriété commune est que toutes celles de leurs cordes qui passent par l'origine ont une même longueur $2a$.

J. D. G.

$$\frac{2x''y''}{x''^2-y''^2}=\frac{y-y''}{x-x''},$$

ou bien

$$2x''y''(x-x'')=(y-y'')(x''^2-y''^2)\;; \qquad (16)$$

de sorte que l'élimination de x'' et y'', entre les équations (14), (15), (16), conduira à l'équation de l'épicycloïde cherchée.

Des équations (15) et (16) on tire facilement, en ayant égard à l'équation (14)

$$x''-x=\frac{x''^2-y''^2}{4a}, \qquad y''-y=\frac{2x''y''}{4a}$$

ou encore, en employant toujours l'équation (14)

$$2a(x-a)=x''(2a-x''), \qquad (17)$$

$$2ay=y''(2a-x''). \qquad (18)$$

d'où on conclura, par division,

$$\frac{y}{x-a}=\frac{y''}{x''}\;; \qquad (19)$$

ce qui veut dire que la droite menée du point $(x=+a, y=0)$ au point décrivant est constamment parallèle à celle qui va de l'origine au centre du cercle mobile. Cette propriété, analogue à celle qu'exprimait l'équation (6), peut déjà nous faire pressentir à quel résultat nous allons être conduits.

En éliminant y'' entre les équations (14) et (19), on trouve

$$x''=\frac{2a(x-a)}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}},$$

valeur qui, substituée dans l'équation (17), donne pour l'équation de l'épicycloïde demandée

$$(x^2+y^2-a^2)^2=4a^2\{y^2+(x-a)^2\} .$$

En changeant, dans cette équation, a en $\frac{r}{3}$, elle devient précisément celle de notre caustique.

Ainsi, pour un point lumineux situé à la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la caustique est l'épicycloïde engendrée par un des points de la circonférence d'un cercle mobile, d'un rayon trois fois moindre que celui du cercle réflecteur, roulant sur un cercle fixe, concentrique à ce cercle réflecteur, et ayant également un rayon trois fois moindre que le sien.* Le point de rebroussement est celui de la circonférence du cercle base qui coïncide avec le point décrivant (*).

II. Occupons-nous maintenant de la recherche de la caustique par réflexion relative au cercle, dans le cas des rayons de lumières parallèles.

Soient toujours r le rayon du cercle réfléchissant (x,y) un quelconque des points de la caustique (x',y') le point incident qui lui correspond. Afin de simplifier nos calculs, nous prendrons le centre du cercle pour origine des coordonnées rectangulaires, et nous supposerons l'axe des x parallèle à la direction commune des rayons incidens. Nous aurons d'abord

$$x'^2+y'^2=r^2 . \qquad (1)$$

Soit p la tangente tabulaire de l'angle que fait le rayon réflé-

---

(*) Enfin, pour ne rien laisser à dire sur ce sujet, il faut encore ajouter que, pour un point rayonnant situé à la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la caustique est l'enveloppe de l'espace parcouru par un cercle mobile et variable de rayon qui, ayant constamment son centre sur la circonférence d'un cercle concentrique au cercle réflecteur, passe constamment par un point fixe de cette circonférence.* Ce point fixe est alors le point de rebroussement de la caustique.

J. D. G.

chi avec l'axe des x, et, par suite, avec le rayon incident; ce rayon réfléchi fera avec la normale, au point d'incidence, un angle dont la tangente tabulaire sera

$$\frac{p-\frac{y'}{x'}}{1+p\frac{y'}{x'}}\,,\qquad \text{c'est-à-dire,}\qquad \frac{px'-y'}{x'+py'}\,;$$

puis donc que l'angle d'incidence est $\frac{x'}{y'}$, on aura

$$\frac{px'-y'}{x'+py'}=\frac{y'}{x'}\,,$$

ce qui donne

$$p=\frac{2x'y'}{x'^2-y'^2}\,.$$

L'équation du rayon réfléchi sera donc

$$y-'y=\frac{2x'y'}{x'^2-y'^2}(x-x')\,;$$

ou bien, en ayant égard à l'équation (1)

$$2x'y'x-(x'^2-y'^2)y=r^2y'\,. \qquad (2)$$

On exprimera que la caustique est l'enveloppe de l'espace parcouru par le rayon réfléchi, en éliminant $\frac{dy'}{dx'}$ des dérivées de (1) et (2), prises en regardant x et y comme constans. Or, ces dérivées donnent

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{x'}{y'}\,,\qquad \frac{dy'}{dx'}=-\frac{2(y'x-x'y)}{2(x'x+y'y)-r^2}\,;$$

on aura donc pour troisième condition, en égalant ces deux valeurs,

$$x'\{2(x'x+y'y)-r^2\}=2y'(y'x-x'y)$$

ou, en réduisant

$$2(x'^2-y'^2)x+4x'y'y=r^2x'. \qquad (3)$$

L'équation de la caustique cherchée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1), (2), (3).

Pour effectuer cette élimination, éliminons tour-à-tour, comme nous l'avons déjà fait ci-dessus, x et y entre les équations (2) et (3); en ayant toujours égard à l'équation (4), il viendra

$$3r^2x=x'(r^2+2y'^2), \qquad (4)$$

$$r^2y=y'^3. \qquad (5)$$

La première de ces équations peut encore s'écrire ainsi

$$r^2(2x-x')=2x'y'^2;$$

et, en divisant l'équation (5) par cette dernière, il vient

$$\frac{2y}{2x-x'}=\frac{y'}{x'}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x-\frac{1}{2}x'}=\frac{y'}{x'}; \qquad (6)$$

ce qui signifie que la droite menée par le milieu de l'abscisse du point d'incidence, parallèlement à la normale en ce point, rencontre le rayon réfléchi en son point de contact avec la caustique; voilà donc un premier moyen graphique de décrire cette courbe par points.

En ajoutant au quarré de l'équation (4) le quadruple du quarré de l'équation (5), on trouvera, en ayant toujours égard à l'équation (1)

$$4(x^2+y^2)-r^2=3y'^2;$$

d'où

$$\{4(x^2+y^2)-r^2\}^3=27(y'^3)^2\ ;$$

mettant donc dans cette dernière, pour y'^3, sa valeur donnée par l'équation (5), on obtiendra pour l'équation cherchée de la caustique

$$\{4(x^2+y^2)-r^2\}^3=27r^4y^2\ . \qquad (7)$$

On voit que cette courbe est une ligne du sixième ordre, symétrique par rapport aux deux axes. En la discutant on lui trouvera, sur l'axe des x, deux points de rebroussement, situés de part et d'autre du centre du cercle, à une distance de ce centre égale à la moitié de son rayon. On trouvera de plus que cette courbe touche le cercle aux deux extrémités du diamètre perpendiculaire à celui qui joint les deux points de rebroussement.

Si l'on cherche la longueur du rayon réfléchi, mesuré depuis le point d'incidence jusqu'à son point de contact avec la caustique; en représentant cette longueur par P', on aura

$$P'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=\sqrt{x^2+y^2-2(x'x+y'y)+r^2}\ ;$$

ou, en mettant pour x et y les valeurs données par les équations (4) et (5) et ayant égard à l'équation (1),

$$P'=\tfrac{1}{2}\sqrt{r^2-y'^2}=\frac{x'}{2}\ . \qquad (8)$$

Ainsi, dans la caustique par réflexion formée par des rayons parallèles tombant sur la circonférence d'un cercle, *la longueur du rayon réfléchi est moitié de celle de la projection, sur la direction commune des rayons incidens, de la normale au point d'incidence;* ce qui offre un nouveau moyen fort simple de décrire la caustique par points.

Au moyen de l'équation (8), l'équation (6) devient

$$\frac{y}{x-P'}=\frac{y'}{x'}\ ;$$

ce qui signifie que *la parallèle menée par un quelconque des points de la caustique à la normale au point d'incidence correspondant rencontre le diamètre parallèle aux rayons incidens à une distance du centre du cercle réflecteur égale à la longueur du rayon réfléchi.*

Occupons-nous présentement de la rectification de la caustique. La formule générale est

$$s=\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ . \qquad (9)$$

Or, on tire des équations (4) et (5)

$$2r^2dx=(r^2+2y'^2)dx'+4x'y'dy'\ ,$$

$$r^2dy=3y'^2dy'\ ;$$

ce qui donne, en mettant pour $y'dy'$ sa valeur $-x'dx'$, donnée par l'équation (1)

$$2r^2dx=\{(r^2+2y'^2)-4x'^2\}dx'=3(y'^2-x'^2)dx'\ ,$$

$$r^2dy=-3x'y'dx'\ .$$

On tire de là

$$dx=\frac{3(y'^2-x'^2)dx'}{2r^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x'y'}{y'^2-x'^2}$$

d'où

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{(y'^2-x'^2)^2+4x'^2y'^2}{(y'^2-x'^2)^2}=\frac{(x'^2+y'^2)^2}{(y'^2-x'^2)^2}=\frac{r^4}{(y'^2-x'^2)^2}\ ;$$

substituant toutes ces valeurs dans la formule (9), elle deviendra

$$s=\int\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\int\tfrac{1}{2}\mathrm{d}x'=\tfrac{1}{2}x'\ ,$$

En comptant les arcs de l'axe des y, il devient inutile d'ajouter une constante à cette intégrale. Si on la compare à la formule (8), on pourra écrire

$$s=x'+P'\ ;$$

c'est-à-dire que *la longueur de la caustique comprise entre le diamètre du cercle réfléchissant perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens et un quelconque des points de cette courbe, est égale à la distance de ce point à ce diamètre, augmentée de la longueur du rayon réfléchi qui répond à ce même point.* On voit aussi que *la longueur totale de la caustique est triple de la longueur du diamètre du cercle réfléchissant.*

Cherchons l'équation de la développée de notre caustique. Soit (X,Y) un quelconque des points de cette développée; l'équation de la normale à la caustique au point (x,y) sera

$$(X-x)+(Y-y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\ ;$$

ou bien, d'après la valeur trouvée ci-dessus pour $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$(y'^2-x'^2)(X-x)-2x'y'(Y-y)=0\ ;$$

ou enfin, en mettant pour x et y leurs valeurs tirées des équations (4) et (5) et faisant usage de l'équation (1)

$$4x'y'Y+2(x'^2-y'^2)X=r^2x^2\ ; \qquad (10)$$

c'est l'équation (3), dans laquelle on aurait mis respectivement X et Y pour x et y.

Pour exprimer que la développée est l'enveloppe de l'espace parcouru par la normale, il faudra éliminer $\frac{dy'}{dx'}$ entre les dérivées des équations (1) et (10) prises par rapport à x' et y' seulement, ce qui donnera

$$8x'y'X-4(x'^2-y'^2)=r^2y' . \qquad (11)$$

L'équation de la courbe cherchée sera le résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1), (10), (11).

En résolvant les deux dernières par rapport à X et Y, et faisant usage de l'équation (1), il vient

$$2r^2X=x'^3 ,$$

$$4r^2Y=y'(r^2+2x'^2) ;$$

En ajoutant au quarré de la seconde le quadruple du quarré de la première et en faisant toujours usage de l'équation (1), il viendra

$$16r^4(X^2+Y^2)=4x'^6+y'^2(r^2+2x'^2)^2=4x'^4(x'^2+y'^2)+4r^2x'^2y'^2+r^4y'^2=r^4(r^2+3x'^2) ;$$

ou bien

$$16(X^2+Y^2)-r^2=3x'^2 ;$$

d'où en cubant

$$\{16(X^2+Y^2)-r^2\}^3=27(x'^3)^2 ;$$

ou encore en mettant pour x'^3 sa valeur $2r^2X$ trouvée ci-dessus, et posant pour abréger, $r=2R$

$$\{4(X^2+Y^2)-R^2\}^3=27R^4X^2 . \qquad (12)$$

Equation qui n'est autre que l'équation (7), dans laquelle on aurait changé y en X, x en Y et r en R.

Ainsi, *la développée de la caustique par réflexion relative au cercle, dans le cas des rayons incidens parallèles, est une courbe exactement semblable à cette caustique, mais relative à un cercle réfléchissant concentrique au premier et d'un rayon moitié moindre, laquelle est située perpendiculairement à cette caustique;* c'est-à-dire, de telle sorte que la droite qui joint ses deux points d'inflexion est perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens, ou que ses deux sommets coïncident avec les points de rebroussement de la première.

Il résulte de là que *la caustique par réflexion relative au cercle, dans le cas des rayons incidens parallèles, est la développée d'une courbe toute semblable, mais relative à un cercle concentrique à celui-là et d'un rayon double du sien, laquelle a une situation perpendiculaire à la sienne;* c'est-à-dire, telle que la droite qui joint ses deux points de rebroussement est perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens, ou encore telle que ses points de rebroussement coïncident avec les deux sommets de la caustique.

Proposons-nous de trouver l'équation de l'épicycloïde engendrée par l'un des points de la circonférence d'un cercle d'un rayon c, roulant sur un autre cercle d'un rayon $2c$.

Prenons le centre du cercle fixe pour origine des coördonnées rectangulaires. Supposons qu'à l'origine du mouvement le point de contact des deux cercles soit sur l'axe des x, du côté des x positifs, que ce point est le point décrivant, et que le cercle mobile tourne en s'élèvant dans la région des y positives.

Soient, pour un instant quelconque, (x,y) le point décrivant, et (x'',y'') le centre du cercle mobile; nous aurons d'abord

$$x''^2+y''^2=9c^2, \qquad (13)$$

$$(x''-x)^2+(y''-y)^2=c^2. \qquad (14)$$

La droite qui joint le centre du cercle mobile fera avec le point décrivant avec l'axe des x, un angle qui aura pour tangente tabulaire $\dfrac{y''-y}{x''-x}$. Cet angle sera l'angle extérieur d'un triangle dans lequel le côté opposé sera la droite qui joint les centres des deux cercles ; et les deux angles adjacens à ce côté devront, par la nature du problème, être double l'un de l'autre ; d'où il suit que l'angle extérieur dont il s'agit devra être triple du plus petit des angles intérieurs opposés. Or, la tangente tabulaire de ce dernier étant $\dfrac{y''}{x''}$, la tangente tabulaire de son triple devra être $\dfrac{y''(3x''^2-y''^2)}{x''(x''^2-3y''^2)}$, la troisième équation du problème sera donc

$$\frac{y''-y}{x''-x}=\frac{y''(3x''^2-y''^2)}{x''(x''^2-3y''^2)} . \qquad (15)$$

L'équation de l'épicycloïde demandée sera donc le résultat de l'élimination de x'' et y'' entre les équations (13), (14), (15).

On tire des deux dernières

$$x''-x=\frac{cx''(x''^2-3y''^2)}{\sqrt{y''^2(3x''^2-y''^2)^2+x''^2(x''^2-3y''^2)^2}} .$$

$$y''-y=\frac{cx''(3x''^2-y''^2)}{\sqrt{y''^2(3x''^2-y'')^2+y''^2(x''-3y''^2)^2}} ;$$

mais, au moyen de l'équation (13), le dénominateur commun de ces valeurs se réduit à $27c^3$, de manière qu'on a simplement

$$27c^2(x''-x)=x''(x''^2-3y''^2) ,$$

$$27c^2(y''-y)=y''(3x''^2-y''^2) ;$$

ou, en faisant encore usage de l'équation (13)

$$9c^2(3x-2x'')=4x''y''^2\ , \qquad (16)$$

$$27c^2y=4y''^3\ . \qquad (17)$$

En divisant la seconde par la première, il vient

$$\frac{3y}{3x-2x''}=\frac{y''}{x''}\ , \qquad \text{ou} \qquad \frac{y}{x-\frac{2}{3}x''}=\frac{y''}{x''}\ ;$$

ce qui nous apprend que la droite menée par un quelconque (x,y) des points de l'épicycloïde, parallèlement à celle qui joint les centres des deux cercles rencontre l'axe des x à une distance de l'origine égale aux deux tiers de l'abscisse du centre du cercle mobile, ou égale à l'abscisse de son point de contact avec le cercle fixe.

En mettant l'équation (16) sous cette forme

$$27c^2x=2x''(9c^2+2y''^2)\ ,$$

et ajoutant ensuite son quarré à celui de l'équation (17), il viendra, en faisant usage de l'équation (13),

$$3(x^2+y^2-4c^2)=4y''^2\ ;$$

d'où, en élevant les deux membres au cube,

$$27(x^2+y^2-4c^2)^3=64y''^6=4.(4y''^3)^2\ .$$

mettant dans cette dernière pour $4y''^3$ sa valeur donnée par l'équation (17) il viendra finalement

$$(x^2+y^2-4c^2)^3=108c^4y^2\ :$$

équation qui coïncide exactement avec l'éqnation (7) de la caustique, si l'on y change c en $\frac{r}{4}$.

Ainsi, *dans le cas des rayons incidens parallèles, la caustique par réflexion relative au cercle est une épicycloïde engendrée par l'un des points de la circonférence d'un cercle d'un rayon égal au quart de celui du cercle réfléchissant, roulant sur un cercle concentrique à ce dernier, et d'un rayon moitié moindre que le sien.* Les points de la circonférence du cercle-base où vient s'appliquer le point décrivant, sont les deux points de rebroussement de la caustique (*).

III. Il va nous devenir facile, d'après ce qui précède, d'attaquer le cas général du problème qui nous occupe.

Soit toujours r le rayon du cercle réfléchissant. Pour simplifier nos calculs, autant que la question peut le comporter, nous placerons encore l'origine au centre de ce cercle, et nous ferons passer l'axe des x par le point rayonnant que nous supposerons d'ailleurs quelconque sur cet axe.

Cela posé, soient (x,y) un quelconque des points de la caustique (x',y') le point incident qui lui correspond, et enfin a l'abscisse du point lumineux; on aura d'abord

$$x'^2+y'^2=r^2 \, . \qquad (1)$$

L'équation du rayon réfléchi sera

$$y-y'=p(x-x') \, ,$$

(*) Pour ne rien laisser à dire sur ce sujet, il faut encore ajouter que *la caustique par réflexion relative au cercle, dans le cas des rayons incidens parallèles, est l'enveloppe de l'espace parcouru par un cercle mobile, variable de grandeur et de situation, qui, ayant constamment son centre sur la circonférence d'un cercle fixe, concentrique au cercle réfléchissant, mais d'un rayon moitié moindre, serait constamment tangent au diamètre de ce cercle fixe de même direction que les rayons incidens.*

J. D. G.

dans laquelle il faudra déterminer p de telle sorte que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence.

Or, la tangente de l'angle d'incidence est

$$\frac{\dfrac{y'}{x'-a}-\dfrac{y'}{x'}}{1+\dfrac{y'^2}{x'(x'-a)}}\,, \quad \text{ou} \quad \frac{ay'}{x'^2+y'^2-ax'}\,, \quad \text{ou enfin} \quad \frac{ay'}{r^2-ax'}\,;$$

et celle de l'angle de réflexion est

$$\frac{\dfrac{y'}{x'}-p}{1+p\dfrac{y'}{x'}}\,, \qquad \text{ou} \qquad \frac{y'-px'}{x'+py'}\,;$$

on doit donc avoir

$$\frac{ay'}{r^2-ax'}=\frac{y'-px'}{x'+py'}\,;$$

d'où

$$p=\frac{y'(r^2-2ax')}{a(y'^2-x'^2)+r^2x'}=\frac{y'(r^2-2ax')}{x'(r^2-2ax')+ar^2}\,.$$

L'équation du rayon réfléchi sera donc

$$y-y'=\frac{y'(r^2-2ax')}{x'(r^2-2ax')+ar^2}(x-x')\,,$$

ou bien, en chassant le dénominateur, développant et réduisant,

$$[x'(r^2-2ax')+ar^2]y-y'(r^2-2ax')x=ar^2y'\,. \qquad (2)$$

Les dérivées de (1) et (2) sont

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{x'}{y'}\,, \qquad \frac{dy'}{dx'}=\frac{(r^2-4ax')y+2ay'x}{(r^2-2ax')x+ar^2}\,;$$

on exprimera donc que la caustique est l'enveloppe de l'espace parcouru par le rayon réfléchi, en écrivant

$$-\frac{x'}{y'}=\frac{(r^2-4ax')y+2ay'x}{(r^2-2ax')x+ar^2}\ ;$$

ou bien, en chassant les dénominateurs et ayant égard à l'équation (1),

$$\{x'(r^2-4ax')+2ar^2\}x+(r^2-4ax')y'y+ar^2x'=0\ . \qquad (3)$$

L'équation de la caustique cherchée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y', entre les équations (1), (2), (3).

S'il ne s'agissait que d'obtenir les points de cette caustique qui correspondent aux divers points d'incidence, sans qu'il fût nécessaire de parvenir à l'équation de la courbe, on remarquerait que x' et y' étant dès lors donnés et les équations (2) et (3) n'étant que du premier degré seulement en x et y, ces équations sont conséquemment celles de deux droites qui, par leur intersection, doivent donner un des points de la caustique.

L'équation (2) est celle d'une tangente à la caustique, et par suite celle du rayon réfléchi qui répond au point d'incidence (x',y'). On peut donc considérer comme déjà construite la droite exprimée par cette équation.

Pour construire la droite exprimée par l'équation (3) on pourrait tout simplement déterminer ses intersections avec les axes des coordonnées, et on serait même d'autant mieux fondé à en agir ainsi, qu'ici ces axes ne sont point des lignes tout-à-fait étrangères au problème qui nous occupe; mais il sera peut-être préférable de faire usage d'une méthode employée d'une manière si heureuse par M. Gergonne, en plusieurs endroits de son recueil.

L'équation (3) peut être écrite ainsi

$$\frac{x'x+y'y}{r^2}=\frac{a(2x-x')}{r^2-4ax'}\ ; \qquad (4)$$

d'où il suit qu'on aura deux points de la droite qu'elle exprime en construisant les denx systèmes de deux droites

$$\left.\begin{aligned} x'x+y'y=0\,, \\ 2x-x'=0\,; \end{aligned}\right\}\ (5) \qquad \left.\begin{aligned} x'x+y'y=r^2\ . \\ a(2x-x')=r^2-4ax'\ . \end{aligned}\right\}\ (6)$$

qu'on déduit de (4), en y supposant tour-à-tour ses deux membres égaux à zéro et à l'unité.

La première des équations (5) est celle d'une perpendiculaire menée par l'origine au rayon qui va au point d'incidence; l'autre est celle d'une droite perpendiculaire à l'axe des x, dont l'abscisse est moitié de celle de ce point d'incidence; ainsi le point (5) de la droite (4), intersection de ces deux droites, sera toujours facile à construire.

La première des équations (6) est celle de la tangente au cercle au point d'incidence; la seconde qui revient à

$$x=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{a}-\tfrac{1}{2}x'\ ,$$

est celle d'une perpendiculaire à l'axe des x facile à construire, puisque $\frac{r^2}{a}$ est la distance de l'origine à la polaire du point rayonnant, et que x' est l'abscisse du point d'incidence. Ainsi le point (6) de la droite (4), intersection de ces deux droites, et par suite la droite (4) elle-même sera facile à construire. Elle coupera le rayon réfléchi à son point de contact avec la caustique. Voilà donc un procédé assez simple, pour construire tant de points qu'on voudra de cette courbe.

Occupons-nous présentement de la laborieuse recherche de son équation. En résolvant les équations (2) et (3), par rapport à x et y; et se servant de l'équation (1) pour simplifier les résultats, il vient

$$r^2(r^2-3ax'+2a^2)y=2a^2y'^3\ , \qquad (7)$$

$$r^2(r^2-3ax'+2a^2)x=a\{2ax'y'^2-r^2(r^2-ax')\}\ . \qquad (8)$$

L'équation (8) peut encore s'écrire ainsi

$$r^2\{(r^2-3ax'+2a^2)x+a(r^2-ax')\}=2a^2x'y'^2\ ; \qquad (9)$$

d'où, en divisant (7) par cette dernière

$$\frac{y}{x+\dfrac{a(r^2-ax')}{r^2-3ax'+2a^2}}=\frac{y'}{x'}\ . \qquad (10)$$

Ce résultat nous apprend que si, par l'un quelconque (x,y) des points de la caustique, on mène une parallèle au rayon qui va au point d'incidence (x',y') qui lui correspond, cette parallèle coupera l'axe des x en un point dont l'abscisse sera

$$-\frac{a(r^2-ax')}{r^2-3ax'+2a^2}\ .$$

Nous verrons tout-à-l'heure ce que c'est que cette dernière quantité.

Pour faciliter la solution du problème, il faut en combiner les équations de manière à les rabaisser autant qu'il est possible par rapport à x' et y'. D'abord, au moyen des valeurs de x et de y données par les équations (7) et (8), et en faisant usage de l'équation (1), on trouve

$$(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-2ar^2x-a^2r^2=\frac{12a^4(a-x')^2y'^2}{(r^2-3ax'+2a^2)^2}\ ;$$

mais, l'équation (7) donne, en quarrant et renversant.

$$4a^4y'^6=r^4(r^2-3ax'+2a^2)^2y^2$$

multipliant ces deux équations membre à membre et réduisant, il viendra

$$\frac{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-2ar^2x-a^2r^2}{3r^4y^2}=\frac{(a-x')^2}{y'^4}\ ;$$

et par suite

$$\frac{a-x'}{y'^2}=\sqrt{\frac{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-2ar^2x-a^2r^2}{3r^4y^2}}.$$

Le second membre de cette dernière équation ne renferme plus que les seules cordonnées de la caustique ; en le représentant par $\frac{1}{M}$, et en mettant pour y'^2 sa valeur $r^2-x'^2$, on aura

$$M(a-x')=r^2-x^{2\prime}.$$

De cette dernière équation, combinée avec l'équation (1), on tirera les valeurs de x' et y' qui, substituées dans l'une ou l'autre des équations (7) et (8), donneront l'équation cherchée en x et y. Nous n'achevons pas le calcul, qui n'offre plus présentement que des difficultés pratiques, parce que le résultat en serait trop compliqué pour pouvoir être employé utilement.

Puisque l'équation générale de la caustique rapportée à deux axes choisis même de la manière la plus favorable, se présente sous une forme si peu traitable, il convient de remplacer cette équation par une autre entre d'autres variables ; car un problème ne peut être réputé résolu que lorsqu'on est parvenu à un résultat susceptible d'interprétation. Cherchons, par exemple, la relation constante qui doit exister entre la longueur du rayon incident et celle du rayon réfléchi ; le premier étant compté depuis le point rayonnant jusqu'au point d'incidence, et l'autre depuis ce dernier point jusqu'au point de contact du rayon réfléchi avec la caustique.

Soient P et P' ces deux rayons, on aura d'abord

$$P=\sqrt{y'^2+(a-x')^2}=\sqrt{r^2+a^2-2ax'}\ ; \qquad (12)$$

et ensuite

$$P'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=\sqrt{r^2-2(x'x+y'y)+(x^2+y^2)}\ .$$

En éliminant x,y,y' de cette dernière formule, au moyen des équations (1), (7), (8), elle deviendra

$$P'=\frac{r^2-ax'}{r^2-3ax'+2a^2}\sqrt{r^2+a^2-2ax}\ ,$$

c'est-à-dire (11),

$$P'=\frac{r^2-ax'}{r^2-3ax'+2a^2}P\ . \qquad (13)$$

Au moyen de cette équation (13), l'équation (10) devient

$$\frac{y}{x+a\,\dfrac{P'}{P}}=\frac{y'}{x'}\ ,$$

c'est-à-dire que la parallèle menée de l'un quelconque des points de la caustique au rayon qui va au point d'incidence correspondant, coupe la droite qui va du centre au point rayonnant à une distance de ce centre quatrième proportionnelle au rayon incident, au rayon réfléchi et à la longueur de cette droite.

Si l'on élimine x' entre les équations (12) et (13), on trouvera

$$P'=\frac{P[P^2+(r^2-a^2)]}{3P^2-(r^2-a)}\ ; \qquad (14)$$

formule qui donnera la longueur du rayon réfléchi, quand on connaîtra celle du rayon incident.

Mais cette formule est susceptible d'une simplification notable. Supposons, en effet, que le point rayonnant soit intérieur au cercle, et soit $4c$ la longueur de la corde interceptée dans le cercle par le rayon incident considéré comme droite indéfinie, longueur qui est censée connue, dès qu'on connaît la direction de ce rayon. Par la propriété des cordes qui se coupent on aura

$$P(4c-P)=(r+a)(r-a)=r^2-a^2\ .$$

Mettant cette valeur de r^2-a^2 dans la formule (14), elle deviendra

$$P'=\frac{cP}{P-c}\ ; \qquad (15)$$

ou encore

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{P'}=\frac{1}{c} \;. \quad (*) \qquad (16)$$

Si le point rayonnant était extérieur au cercle, on aurait, par la propriété des sécantes qui partent d'un même point,

$$P(P-4c) \quad \text{ou} \quad P(P+4c)=a^2-r^2=-(r^2-a^2)$$

suivant que le rayon parviendrait à la partie concave ou à la partie convexe de la circonférence. Dans le premier cas, la formule serait évidemment la même que ci-dessus; dans le second, P aurait simplement changé de signe et on trouverait

$$P'=\frac{cP}{P+c}\,, \qquad (17)$$

ou bien

$$\frac{1}{P'}-\frac{1}{P}=\frac{1}{c}\;.$$

Pour le rayon lumineux qui passe par le centre, on a $c=\frac{1}{2}r$ et $P=a+r$ ou $a-r$ suivant que le rayon incident atteint la concavité ou la convexité du cercle; substituant dans les formule (15) et (17) il vient

$$P'=\frac{r(a+r)}{2a+r}\,, \qquad P'=\frac{r(a-r)}{2a-r}\;;$$

ce qui donne la position des points de rebroussement, dont les distances au centre sont

$$x=-\frac{ar}{2a+r}\,, \qquad x=+\frac{ar}{2a-r}\;.$$

Une plus ample discussion prouvera d'ailleurs que, pour le cas général, la caustique est à peu près de même forme que pour ce-

---

(*) C'est précisément la formule de Petit. Voyez la correspondance sur l'Ecole polytechnique (tom. II, pag. 355).

J. D. G.

lui des rayons parallèles, si ce n'est qu'elle cesse alors d'être symétrique par rapport à l'axe des x. Lorsque le point rayonnant est extérieur au cercle, la caustique touche ce cercle à ses intersections avec la polaire de ce point.
