ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

Géométrie analytique. Mémoire sur les lignes du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 173-198
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__173_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Mémoire sur les lignes du second ordre ;

Par M. Ch. Sturm.

(*Deuxième partie* (*))

§. VI.

Nous avons développé, dans ce qui précède, la théorie purement analytique des pôles et polaires, et nous avons fait voir qu'on pouvait en déduire, avec facilité, les propriétés généralement connues des lignes du second ordre qui nous ont été transmises par les anciens géomètres. Nous allons présentement reprendre les considérations du §. I, concernant le système de trois lignes du second ordre qui, tracées sur un même plan, ont les mêmes points d'intersection ; et, après avoir étudié les propriétés d'un tel système, nous montrerons que, dans leur généralité, elles renferment la presque totalité de celles qui composent aujourd'hui la géométrie de ces sortes de courbes.

Soient sur un plan, trois lignes du second ordre, rapportées aux mêmes axes et ayant les mêmes intersections. Nous avons vu qu'en supposant ces courbes exprimées par les équations

(*) Voy. la pag. 265 du précédent volume.

J. D. G.

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\ , \qquad (c)$$

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F'=0\ , \qquad (c')$$

$$A''x^2+B''y^2+2C''xy+2D''x+2E''y+F''=0\ , \qquad (c'')$$

on devrait avoir les six relations

$$\left.\begin{array}{lll} mA+A'=A''\ , & mB+B'=B''\ , & mC+C'=C''\ , \\ mD+D'=D''\ , & mE+E'=E''\ , & mF+F'=F''\ ; \end{array}\right\} \quad (a)$$

dans lesquelles le nombre m peut être quelconque.

Cela posé, par un point O, pris à volonté sur le plan des trois courbes, et dont nous supposons les coordonnées X et Y, soit menée une droite parallèle à l'axe des x, c'est-à-dire, parallèle à une droite fixe arbitraire, puisque les axes des coordonnées sont quelconques. Ensuite, sans changer la direction des axes, transportons-en l'origine en O; il nous suffira pour cela de changer respectivement x et y en $x+\mathrm{X}$ et $y+\mathrm{Y}$, dans les équations (c), (c'), (c''), qui deviendront ainsi

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2(AX+CY+D)x+2(BY+CX+E)y+(AX^2+BY^2+2CXY+2DX+2EY+F)=0,$$

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2(A'X+C'Y+D')x+2(B'Y+C'X+E')y+(A'X^2+B'Y^2+2C'XY+2D'X+2EY+F)=0\ ,$$

$$A''x^2+B''y^2+2C''xy+2(A''X+C''Y+D'')x+2(B''Y+C''X+E'')y+(A''X^2+B''Y^2+2C''XY+2D''X+2EY+F)=0\ .$$

Si l'on fait, dans la première $y=0$, on en tirera les valeurs des distances du point O aux deux intersections de la courbe (c) avec la transversale menée par ce point O. Ces distances pourront être réelles ou imaginaires, suivant que la transversale coupera ou ne coupera pas la courbe (c); mais, dans tous les cas, leur produit, aussi bien que leur somme algébrique, auront toujours des valeurs réelles. En effet, en désignant ce produit par P et cette somme par S, on a, par la propriété des équations du second degré,

$$P = \frac{AX^2+BY^2+2CXY+2DX+2EY+F}{A}, \quad S = -\frac{2(AX+CY+D)}{A}.$$

On obtiendrait des valeurs de même forme pour les produits P', P'', et pour les sommes S', S'', des distances du point O, aux points d'intersection réels ou imaginaires, de la transversale avec les courbes (c'), (c''); de sorte qu'on a

$$AP = AX^2+BY^2+2CXY+2DX+2EY+F, \qquad AS = -2(AX+CX+D),$$

$$A'P' = A'X^2+B'Y^2+2C'XY+2D'X+2E'Y+F', \quad A'S' = -2(A'X+C'Y+D'),$$

$$A''P'' = A''X^2+B''Y^2+2C''XY+2D''X+2E''Y+F'', \quad A''S'' = -2(A''X+C''Y+D'').$$

De là, en ayant égard aux relations (a), on déduit, sur-le-champ, ces deux équations

$$mAP+A'P' = A''P'', \qquad mAS+A'S' = A''S'',$$

qui donnent, par la substitution de $A''-A'$ à la place de mA

$$(A''-A')P+A'P' = A''P'', \qquad (A''-A')S+A'S' = A''S'';$$

ou bien

$$A'(P'-P) = A''(P''-P), \qquad A'(S'-S) = A''(S''-S);$$

d'où résulte enfin

$$\frac{P'-P}{P''-P} = \frac{A''}{A'}, \qquad \frac{S'-S}{S''-S} = \frac{A''}{A'}.$$

Donc, quelle que soit la transversale, et quel que soit le point O de sa direction, les différences de l'un quelconque des produits désignées par P, P', P'' aux deux autres, ainsi que les différences de chacune des sommes désignées par S, S', S'' aux deux autres, sont dans un rapport donné et invariable, tant que cette transversale se meut parallélement à elle-même.

Les moitiés des sommes S, S', S'' expriment, comme l'on sait, les distances du point O aux milieux des cordes interceptées sur la transversale par les trois courbes; de sorte que les moitiés des différences $S'-S$, $S''-S$, expriment les distances de l'un de ces milieux aux deux autres. En vertu donc de la relation ci-dessus, ces distances sont toujours entre elles dans le même rapport, tant que la transversale se meut parallèlement à elle-même, et conséquemment elles doivent s'évanouir en même temps. La relation entre S, S', S'' nous donne donc ce théorème : *Lorsque trois lignes du second ordre, tracées sur un même plan, ont les mêmes points d'intersections, leurs diamètres dont les conjugués sont parallèles à une même droite fixe, vont tous trois concourir en un même point* (*).

(*) Il n'est pas difficile de prouver que cette propriété renferme implicitement les précédentes, bien qu'elle paraisse d'abord moins générale.

Soient, en effet, (A, B), (C, D), (E, F) les points où la transversale indéfinie coupe les trois courbes (c), (c'), (c''); et soient respectivement H, I, K, les milieux des cordes interceptées AB, CD, EF. En supposant que les quatre points C, D, E, F soient sur le prolongement de AB, la double relation

$$\frac{AC.AD}{AE.AF}=\frac{A''}{A'}=\frac{BC.BD}{BE.BF}$$

donnera

$$\frac{AC.AD}{AE.AF}=\frac{A''}{A'}=\frac{(AC-AB)(AD-AB)}{(AE-AB)(AF-AB)}=\frac{AC.AD-AB(AC+AD-AB)}{AE.AF-AB(AE+AF-AB)};$$

d'où l'on déduira

Voyons maintenant ce qui résulte, en particulier, de la relation établie entre les produits P, P', P''. Si l'on prend pour le point O l'un quelconque des points où la transversale coupe la courbe (c), on a $P=0$, et la relation $\frac{P'-P}{P''-P}=\frac{A''}{A'}$, devenant $\frac{P'}{P''}=\frac{A''}{A'}$, se traduit alors dans l'énoncé suivant :

$$\frac{A''}{A'}=\frac{AC+AD-AB}{AE+AF-AB},$$

puis, en observant que AB=2AH, AC+AD=2AI, AE+AF=2AK,

$$\frac{A''}{A'}=\frac{2AI-2AH}{2AK-2AH}=\frac{AI-AH}{AK-AH}=\frac{HI}{HK};$$

c'est la relation contenue dans l'équation $\frac{S'-S}{S''-S}=\frac{A''}{A'}$,

Soit pris ensuite un point quelconque O sur la direction de la transversale. En supposant que tous les points A, B, C, D, E, F se trouvent situés d'un même côté de ce point O, on aura

$$\frac{OC.OD-OA.OB}{OE.OF-OA.OB}=\frac{(OA+AC)(OA+AD)-OA(OA+AB)}{(OA+AE)(OA+AF)-OA(OA+AB)}$$

$$=\frac{OA(AC+AD-AB)+AC.AD}{OA(AE+AF-AB)+AE.AF};$$

ou, ce qui revient au même $\frac{P'-P}{P''=P}=\frac{A''}{A'}$.

La propriété qu'exprime la double équation

$$\frac{AC.AD}{AE.AF}=\frac{A''}{A'}=\frac{BC.BD}{BE.BF};$$

et que nous avons tout-à-l'heure énoncée, doit donc être considérée comme la seule propriété fondamentale du système de trois lignes du second ordre ayant les mêmes points d'intersection.

Lorsque trois lignes du second ordre, tracées sur un même plan, ont les mêmes intersections, soit réelles soit imaginaires, toute droite menée sur leur plan, parallèlement à une droite donnée de position, les coupe de telle sorte que le produit des segmens compris entre l'un des points de section de l'une des courbes, proposée, et les deux points de section de l'une des deux autres est égal au produit des segmens compris entre le même point et les deux points de section de la courbe restante.

De là nous passons aisément à la propriété suivante : *Etant données, sur un plan, trois lignes du second ordre, ayant les mêmes points d'intersection, si par un point* A *pris à volonté sur l'une d'elles* (c), *on mène des parallèles à deux droites données de position, l'une coupant la courbe* (c′) *en deux points* c, d, *et l'autre coupant la courbe* (c″) *en deux points* e, f; *les deux produits de segmens* Ac.Ad, Ae.Af *seront toujours entre eux dans un rapport constant.* En effet, par le point A, pris à volonté sur la courbe (c), soit menée une parallèle à une autre droite fixe quelconque, et soient respectivement C et D, E et F les points où cette parallèle coupe (c') et (c''). En vertu d'un principe connu, le rapport $\frac{\mathrm{AC.AD}}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}d}$ est donné et invariable, aussi bien que le rapport $\frac{\mathrm{AE.AF}}{\mathrm{A}e.\mathrm{A}f}$; mais on a prouvé ci-dessus que le rapport $\frac{\mathrm{AC.AD}}{\mathrm{AE.AF}}$ doit aussi être donné et constant; donc il doit également en être de même du rapport $\frac{\mathrm{A}c.\mathrm{A}d}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}f}$.

Au reste la même proposition peut directement se déduire de notre analyse. En effet, soient rapportées les trois courbes à deux axes de coordonnées, parallèles aux deux droites données de position. Ces courbes étant alors représentées par les équations (c), (c'), (c''), accompagnées des relations (a); si l'on transporte l'origine en un point quelconque (X, Y) de la courbe (c), les deux nouveaux axes étant menés par ce point là, parallèlement aux premiers, on trouvera que le produit des abscisses comprises entre cette nouvelle origine et les points d'intersection de la courbe (c') avec le nouvel axe des x, est au produit des ordonnées comprises entre la même origine et les points d'intersection de la courbe (c'') avec le

Soient donc respectivement (A, B), (C, D), (E, F) les points où les courbes proposées (c), (c'), (c'') sont coupées par la transversale dont il s'agit, cette transversale étant toujours menée parallélement à une droite fixe quelconque, les deux rapports

$$\frac{AC.AD}{AE.AF}, \qquad \frac{BC.BD}{BE.BF}$$

auront une même valeur déterminée et constante, et il en sera de même des rapports

$$\frac{CA.CB}{CE.CF}, \qquad \frac{DA.DB}{DE.DF},$$

comme aussi des deux suivans

$$\frac{EA.EB}{EC.ED}, \qquad \frac{FA.FB}{FC.FD}:$$

de là résulte ce nouveau théorème, qui n'est qu'une conséquence immédiate du précédent.

---

nouvel axe des y, en raison inverse des coefficiens A' et B'' de x^2 et y^2, dans les équations (c'), (c''), ce rapport étant toujours le même, quel que soit, sur la courbe (c) le point (X, Y) par lequel on mène les parallèles aux deux axes primitifs ; la proposition dont il s'agit se trouve ainsi démontrée.

Voici une autre proposition, déjà connue, qui découle, comme corollaire, de ce qui précède : *Un quadrilatère étant inscrit à une ligne du second ordre, si, d'un point quelconque de la courbe, on abaisse sur les directions des côtés de ce quadrilatère des perpendiculaires, ou des obliques faisant avec eux des angles égaux à un angle donné, le rectangle des perpendiculaires ou des obliques abaissées sur deux côtés opposés sera dans un rapport constant avec le rectangle des perpendiculaires ou des obliques abaissées sur les deux autres.*

Soient trois lignes du second ordre, tracées sur un même plan et ayant les mêmes points d'intersection. Si l'on mène à volonté, sur leur plan, une droite coupant chacune d'elles en deux points, il y aura sur cette droite arbitraire six points de section tels que les deux produits de segmens compris entre un point de section appartenant à l'une quelconque des trois courbes et les points de section de chacune des deux autres, seront entre eux dans le même rapport que les deux produits de segmens compris entre le second point de section de la première courbe et les mêmes points de section des deux autres.

Ainsi, l'on a ces trois équations

$$\frac{AC.AD}{AE.AF}=\frac{BC.BD}{BE.BF}, \quad \frac{CA.CB}{CE.CF}=\frac{DA.DB}{DE.DF}, \quad \frac{EA.EB}{EC.ED}=\frac{FA.FB}{FC.FD}. \qquad (f)$$

En les combinant par voie de multiplication, on en déduit, sur-le-champ, les quatre autres que voici :

$$\left.\begin{array}{ll} AC.BE.DF=AF.BD.CE, & AD.BE.CF=AF.BC.DE, \\ AC.BF.DE=AE.BD.CF, & AD.BF.CE=AE.BC.DF. \end{array}\right\} \quad (f)$$

Lors donc qu'une droite arbitraire coupe trois lignes du second ordre qui ont les mêmes points d'intersection, les divers segmens formés sur cette droite par les trois courbes, sont liés entre eux par le système de sept équations. Il est clair, au surplus, qu'une seule de ces équations doit comporter les six autres, puisqu'elles dérivent toutes d'une seule et même propriété, et que d'ailleurs une seule suffit évidemment pour déterminer l'un quelconque des six points A, B, C, D, E, F ; les cinq autres étant placés arbitrairement sur la transversale indéfinie.

Il pourra souvent arriver que la transversale arbitraire ne rencontre pas à la fois les trois courbes proposées. Supposons, par exemple, qu'elle ne coupe pas la troisième (c'') ; alors, parmi les six points de section A, B, C, D, E, F, que cette droite doit, en général, déterminer sur les courbes proposées, les deux E, F seront devenus imaginaires, et toutefois les produits AE.AF, BE.BF conserveront toujours des valeurs réelles, puisque chacun d'eux n'est autre chose que le produit des racines d'une certaine équation du second degré dont les coefficiens sont toujours réels. Nous conclurons de cette remarque, qui se lie d'ailleurs avec celle que nous avons faite dans la note du §. II, que le système des formules (f) a toujours une signification réelle et indépendante de la réalité des points de section de la transversale, pourvu néanmoins que ces points ne soient pas tous à la fois imaginaires; car alors on serait obligé de remonter à la relation $\frac{P'-P}{P''-P}=\frac{A''}{A''}$, pour leur trouver un sens intelligible.

Desargues, géomètre contemporain de Descartes, le premier qui ait considéré les diverses sections coniques comme des variétés d'une courbe unique, paraît être aussi le premier qui ait examiné les propriétés qui appartiennent à six points rangés sur une même droite et liés entre eux par les relations (f). Cette liaison remarquable était nommée par lui *involution de six points*. Son ouvrage sur les sections coniques, qui ne nous est connu que par quelques citations des contemporains, renfermait, entre autres, le développement de la proposition suivante et de ses corollaires: *Un quadrilatère étant inscrit à une section conique quelconque, toute droite tracée sur son plan détermine, par ses intersections avec la courbe et les côtés du quadrilatère, six points qui sont en involution*, c'est-à-dire, qui satisfont au système des relations (f). Ce principe, sur lequel nous reviendrons bientôt, et qui se déduit, comme corollaire, de notre second théorème, a fourni à M. Brianchon le sujet de son intéressant *Mémoire sur les lignes du second ordre.* Il a encore été rappelé dans la 2.^{me} section du *Traité des propriétés projectives des figures*; mais jusqu'ici on n'avait pas encore considéré l'ensemble des relations (f) comme l'expression de la propriété essentielle et caractéristique du système de trois sections coniques qui ont mêmes points d'intersection. Le principe de Désargues, ainsi généralisé, devient beaucoup plus fécond et plus digne d'intérêt. Le présent mémoire est particulièrement consacré au développement des nombreuses conséquences qui découlent de cette source (*).

(*) A cause de l'importance de cette propriété, on sera sans doute bien aise d'en trouver ici une démonstration analytique directe et simple, et telle nous paraît être la suivante :

Les équations des trois courbes, rapportées à deux axes quelconques, étant toujours supposées

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\ , \\ A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F'=0\ , \\ A''x^2+B''y^2+2C''xy+2D''x+2E''y+F''=0\ ; \end{array}\right\} \quad (1)$$

on a vu dans une note du §. I, que, pour que ces trois courbes se coupassent aux quatre mêmes points, il fallait que, λ, λ', λ'' étant trois multiplicateurs, on eût les six relations suivantes

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda A+\lambda' A'+\lambda'' A''=0\ , & \lambda D+\lambda' D'+\lambda'' D''=0\ , \\ \lambda B+\lambda' B'+\lambda'' B''=0\ , & \lambda E+\lambda' E'+\lambda'' E''=0\ , \\ \lambda C+\lambda' C'+\lambda'' C''=0\ , & \lambda F+\lambda' F'+\lambda'' F''=0\ . \end{array}\right\} \quad (2)$$

Cela posé, puisque les courbes sont situées d'une manière quelconque par rapport aux axes, l'axe des x peut, à l'inverse, être considéré comme une transversale quelconque tracée sur le plan de ces trois courbes. Soient respectivement p et q, p' et q', p'' et q'' les abscisses des points d'intersection de cette transversale avec les trois courbes, c'est-à-dire, les valeurs de x que donnent leurs équations, lorsqu'on y fait $y=0$; nous aurons, par la nature des racines des équations du second degré, Il est bon d'observer, dès à présent, qu'il peut arriver que l'un des six points de section vienne à coïncider avec son conjugué, ce qui arrivera si la transversale est tangente à une des trois courbes. Il est aisé de voir à quoi se réduiront, dans ce cas, les relations (f), qui constitueront alors une *involution de cinq points*, suivant l'expression de Desargues. Si en outre la même chose arrive pour deux autres points également conjugués, on retombera

---

$$\left.\begin{array}{ll} A(p+q)+2D=0\ , & Apq-F=0\ , \\ A'(p'+q')+2D'=0\ . & A'p'q'-F'=0\ , \\ A''(p''+q'')2D''=0\ , & A''p''q''-F''=0\ , \end{array}\right\} \qquad (3)$$

prenant la somme des produits respectifs des équations de chacune de ces deux colonnes par λ, λ', λ'', et ayant égard aux relations (2), il viendra

$$\lambda(p+q)A+\lambda'(p'+q')A'+\lambda''(p''+q'')A''=0\ ,$$

$$\lambda pqA+\lambda'p'q'A'+\lambda''p''q''A''=0\ ,$$

joignant à ces équations l'équation

$$\lambda A+\lambda'A'+\lambda''A''=0\ ,$$

et éliminant entre elles $\dfrac{\lambda'A'}{\lambda A}$ et $\dfrac{\lambda''A''}{\lambda A}$ comme deux inconnues, on obtiendra cette équation

$$(p+q)(p'q'-p''q'')+(p'+q')(p''q''-pq)+(p''+q'')(pq-p'q')=0\ . \quad (4)$$

Or, si dans l'équation

$$\frac{(p-p')(p-q')}{(p-p'')(p-q'')}=\frac{(q-p')(q-q')}{(p-p'')(q-q'')} \qquad (5)$$

on chasse les dénominateurs; en transposant, réduisant et divisant par $p-q$

sur la relation entre quatre points, que nous avons déjà fait connaître sous le nom de *division harmonique.*

Nous devons encore placer ici une conséquence immédiate de notre théorie qui nous sera utile dans la suite. On sait que trois cercles tracés sur un même plan et ayant une corde commune, réelle ou idéale, peuvent être envisagés comme trois lignes du second ordre qui ont les mêmes points d'intersection, dont deux situés à l'infini. On peut donc leur appliquer les résultats précédens; et, en les combinant avec la propriété connue des sécantes menées d'un même point à un même cercle, on aura le théorème suivant qui est d'ailleurs facile à démontrer par les élémens: *Si trois circonférences tracées sur un même plan, ont une corde commune, réelle ou idéale, et que, d'un point quelconque de l'une d'elles, on mène à volonté deux droites qui coupent respectivement les deux*

---

on obtiendra l'équation (4); donc, quand $p-q$ n'est pas nul, l'équation (4) revient à l'équation (5); or, cette dernière exprime que les six points d'intersection sont en *involution*; donc l'autre l'exprime également.

On sait que les conjugués des diamètres qui, dans les trois courbes, sont parallèles à l'axe des x ont pour équations respectives

$$Ax+Cy+D=0\ ,$$

$$A'x+C'y+D'=0\ ,$$

$$A''x+C''y+D''=0\ .$$

Or, trois des équations (2) prouvent que ces trois droites concourent en un même point; puis donc que l'axe des x est une droite arbitraire sur le plan des trois courbes, il en faut conclure que, *lorsque trois coniques sont les mêmes intersections, si on leur mène, sous une direction arbitraire, trois diamètres parallèles, les conjugués de ces diamètres concourent nécessairement en un même point.* C'est ce que M. Sturm avait déjà établi plus haut, d'une manière un peu différente.

J. D. G.

autres, les deux produits de segmens compris sur l'une et sur l'autre de ces sécantes, entre le point commun d'où elles partent et les circonférences qu'elles coupent, sont toujours entre eux dans un rapport constant. En outre, *si l'on mène une transversale arbitraire, les six points de section, soit réels soit imaginaires, qu'elle déterminera sur les trois circonférences, seront en involution.*

§. VII.

Etant donné sur un plan un quadrilatère simple quelconque, on peut envisager ses deux couples de côtés opposés et ses deux diagonales comme trois lignes du second ordre ayant quatre points communs; conséquemment, si l'on mène sur son plan une droite arbitraire, coupant ces mêmes côtés et diagonales en des points A, B, C, D, E, F; ces six points de section seront entre eux en involution. Cette propriété, qu'il serait d'ailleurs facile de démontrer directement, est une extension de celle qui concerne la division harmonique des diagonales du quadrilatère complet; puisqu'il suffit, pour obtenir cette dernière, de supposer, dans les relations ci-dessus, que la transversale arbitraire passe par les points de concours des côtés opposés de notre quadrilatère simple. Il suit de là que, si l'on déforme ce quadrilatère, de manière que cinq des points de section dont il s'agit demeurent fixes, sur la même droite, le sixième ne variera pas. Ainsi, tout quadrilatère simple dont les côtés et l'une des diagonales passeront respectivement, et dans un ordre assigné, par cinq points A, B, C, D, E, pris à volonté sur une même droite, aura son autre diagonale toujours dirigée vers un autre point fixe F de la même droite, et liée aux premiers par l'ensemble des relations (f). Donc, *cinq points étant donnés, sur une même droite, il sera toujours facile, avec la règle pour tout instrument, d'en trouver un sixième qui soit en involution avec eux;* et l'on voit en outre que ce sixième point sera unique.

Ceci fournit une nouvelle solution du problème connu : *Par un point donné, mener avec la règle une droite qui passe par le point de concours, supposé inaccessible de deux droites données de position ?* Et conséquemment de celui-ci : *Deux parallèles étant tracées sur un plan, mener par un point donné sur ce plan, et en n'employant que la règle, une parallèle à ces droites ?* Ce problème, dont Lambert a déduit la solution des principes de la perspective, a été rappelé à la page 108 du *Traité des propriétés projectives des figures.*

Ayant, sur un plan, un quadrilatère simple avec ses deux diagonales ; si l'on fait varier deux côtés adjacens de ce quadrilatère, en les assujettissant à tourner sur deux points fixes pris à volonté sur son plan, et qu'on laisse immobiles les deux autres côtés et la diagonale qui part de leur point de concours ; il arrivera que l'autre diagonale, en variant de direction, coupera toujours au même point la droite que déterminent les deux points fixes vers lesquels les deux côtés mobiles sont dirigés sans cesse. Par conséquent, en considérant, dans deux positions quelconques, le triangle variable formé par cette diagonale et ses côtés mobiles, on aura ce théorème : *Si deux triangles ont l'un et l'autre leurs sommets situés sur trois lignes droites qui concourent en un même point, les trois points de concours de leurs côtés placés entre ces mêmes droites, prises deux à deux se trouveront en ligne droite.* Et réciproquement, *si deux triangles sont tellement disposés sur un plan que leurs côtés concourent deux à deux en trois points situés en ligne droite, les trois droites qui joindront leurs sommets correspondans iront concourir en un même point* (*).

(*) On peut consulter, sur diverses autres démonstrations de ces théorèmes le *Traité des propriétés projectives des figures* (pag. 87 — 94), et les mémoires de M. Brianchon.

(*Note de l'auteur.*)

Cette proposition, fort importante dans la géométrie de la règle, a été donnée pour la première fois par Desargues, et reproduite par MM. Servois et Brianchon. Quoique nous ne fassions pas usage ici de la méthode des projections, nous ne pouvons nous refuser à observer que la proposition dont il s'agit devient évidente, par simple intuïtion, quand on met en projection ou en perspective sur un plan un tronc de pyramide triangulaire à bases non parallèles (*). On en déduit ce corollaire qui peut être souvent utile, savoir, que *si deux triangles sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre de telle sorte que les droites qui joignent leurs sommets opposés concourent en un même point, les points de concours des directions de leurs côtés opposés appartiendront à une même droite ; et réciproquement.*

Au moyen du même théorème, *étant donné sur un plan un quadrilatère simple on pourra construire, avec la règle seulement, la droite dont la direction passe par les deux points de concours de ses côtés opposés, en supposant ces deux points inaccessibles, et déterminer en même temps le point où cette droite est coupée par une autre droite donnée à volonté sur le même plan* (**).

On peut encore, en n'employant que la règle, *construire le point de concours de deux droites, déterminées chacune par deux points et que des obstacles quelconques, situés entre ces points ou au-delà, empêcheraient de tracer* (***).

(*) C'est ainsi que nous l'avons nous-même démontrée dans notre XVI.e volume (pag. 219) où l'on peut voir les applications que nous en avons déduites.

J. D. G.

(**) Nous avons indiqué cette application à l'endroit cité.

J. D. G.

(***) C'est un des deux problèmes résolus par M. Vallès (tom. XVI, pag. 385).

J. D. G.

§. VIII.

Lorsqu'un quadrilatère est inscrit à une ligne du second ordre quelconque, on peut envisager ses deux couples de côtés opposés comme deux lignes du second ordre ayant avec la proposée quatre points communs. On peut donc appliquer ici la théorie du §. VI; c'est-à-dire que *si, sur le plan d'un quadrilatère inscrit à une ligne du second ordre, on mène une droite arbitraire, ses points d'intersection avec deux côtés opposés du quadrilatère, ses points d'intersection avec les deux autres et enfin ses points d'intersection avec la courbe seront six points en involution.* C'est en cela que consiste le théorème de Desargues mentionné au §. VI. M. Brianchon en a déduit un grand nombre de conséquences particulières, sur lesquelles il serait superflu de revenir.

Supposons que l'on rende fixes les points où la transversale est coupée par trois des côtés du quadrilatère inscrit, et qu'on fasse ensuite varier ce quadrilatère de telle sorte que, sans cesser d'être inscrit, il ait toujours trois de ses côtés dirigés vers les mêmes points, le quatrième côté variera aussi; mais comme, des six points en involution, cinq demeureront invariables, savoir, les trois points dont il s'agit et les deux points d'intersection de la transversale avec la courbe, le sixième aussi devra être invariable. Donc, *si l'on inscrit à une ligne du second ordre une suite de quadrilatères tels que trois de leurs côtés passent constamment, et dans un ordre assigné, par trois points fixes, pris à volonté sur une droite arbitraire, leurs quatrièmes côtés concourront constamment en un quatrième point fixe de la même droite.*

Soit ABCDEF un hexagone quelconque inscrit à une ligne du second ordre; désignons par G, H, K, respectivement, les points de concours des côtés opposés AB et DE, BC et EF, CD et FA; menons par les deux sommets opposés A et D une diagonale coupant GH en L; les deux quadrilatères ABCD et DEFA auront trois de leurs côtés qui passeront par les trois mêmes points G, H, L d'une droite; donc le point *k* de concours des côtés restans devra aussi se trouver sur cette droite; c'est-à-dire, que, *dans tout hexagone inscrit à une ligne du second ordre, les points de concours des côtés respectivement opposés sont situés sur une même ligne droite* (*).

Cette belle et importante propriété de l'hexagone inscrit a été énoncée pour la première fois par Pascal, qui la désignait sous

---

(*) La démonstration que je viens de donner de ce beau théorème, démonstration que je crois nouvelle, me paraît se recommander par sa simplicité. La théorie ordinaire des transversales en fournit une autre qui peut trouver ici sa place.

Soit formé un triangle par les prolongemens des côtés AB, CD, EF de l'hexagone, et soient respectivement L, M, N les sommets de ce triangle opposés à ces côtés. En lui appliquant un théorème connu, on aura d'abord

$$MA.MB.NC.ND.LE.LF=ME.MF.NA.NB.LC.LD.$$

Considérant ensuite tour à tour BC, DE, FA, comme des transversales coupant le triangle LMN, nous aurons

$$LC.MH.NB=LH.MB.NC\,,$$

$$ME.NG.LD=MG.ND.LE\,,$$

$$NA.LK.MF=NK.LF.MA\,;$$

multipliant ces quatre équations membre à membre, et réduisant, il viendra

$$MH.NG.LK=LH.MG.NK\,;$$

ce qui prouve que les trois points G, H, K appartiennent à une même droite.

le nom d'*hexagrame mystique*, et en avait fait la base d'un traité de sections coniques qui n'a pas été publié. Quoiqu'elle paraisse n'avoir pas été ignorée de Desargues, la découverte en est généralement attribuée à Pascal. Depuis lors, plusieurs géomètres l'ont reproduite sous différentes formes, et en ont tiré beaucoup de conséquences utiles ou curieuses. M. Brianchon a établi sur le même principe, d'une manière purement géométrique, toute la théorie des pôles et polaires des lignes et surfaces du second ordre (*Journal de l'école polytechnique* XIII.e cahier). Il a fait connaître, en même temps, un théorème non moins intéressant que celui de Pascal; théorème que nous allons démontrer d'après lui, à l'aide de la théorie des pôles et polaires.

Etant donné un hexagone circonscrit à une ligne du second ordre, si nous joignons les points de contact de ses côtés consécutifs par des droites, nous formerons un hexagone inscrit, dont chaque côté aura pour pôle un sommet de l'hexagone circonscrit; et, comme (§. II) la droite qui joint les pôles de deux autres a son pôle au point de concours de celles-ci, il s'ensuit que les diagonales qui, dans l'hexagone circonscrit, joindront deux sommets opposés, auront pour pôles les points de concours des directions des côtés opposés de l'inscrit; puis donc que ces trois points appartiennent à une même ligne droite, les trois diagonales dont il s'agit devront concourir en un même point, pôle de cette droite; c'est-à dire que, *dans tout hexagone circonscrit à une ligne du second ordre, les diagonales qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point* (*).

(*) On trouve dans le présent recueil, tom. IV, pag. 78 et 381, tom. XIV, pag. 29, tom. XV, pag. 387 et tom. XVI, pag. 322, diverses démonstrations de ces deux théorèmes.

J. D. G.

Les propositions inverses des deux précédentes s'en déduisent si facilement qu'il nous suffira de les énoncer, 1.° *lorsque cinq des sommets d'un hexagone appartiennent à une ligne du second ordre, et que d'ailleurs les points de concours des côtés opposés de cet hexagone appartiennent tous trois à une même droite, son sixième sommet est aussi sur la courbe;* 2.° *lorsque cinq des côtés d'un hexagone sont tangens à une ligne du second ordre, et que d'ailleurs les diagonales qui joignent les sommets opposés de cet hexagone se coupent au même point, son sixième côté est aussi tangent à la courbe.*

Il suit de là qu'*il n'existe qu'une seule conique qui puisse passer par cinq points ou toucher cinq droites données sur un plan.* Les mêmes propriétés fournissent le moyen, bien connu, de *construire, avec la règle seulement, une conique dont on a cinq points ou cinq tangentes.* Elles s'étendent au cas où l'on suppose qu'un côté, ou plusieurs côtés non consécutifs, de l'hexagone inscrit deviennent nuls et tangens à la courbe, et à celui où un angle, ou plusieurs angles non consécutifs, de l'hexagone circonscrit deviennent égaux à deux angles droits et ont leur sommet sur la courbe. On retrouve ainsi les propriétés des quadrilatères inscrits et circonscrits démontrés précédemment (§. V).

En particulier, si l'on suppose que, dans l'hexagone inscrit, trois côtés non consécutifs soient d'une longueur nulle, ou que, dans l'hexagone circonscrit, trois angles non consécutifs soient égaux à deux angles droits, on obtient ce théorème : *Si deux triangles sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même ligne du second ordre; de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit;* 1.° *les points de concours des côtés respectivement opposés, dans ces deux triangles appartiendront tous trois à une même droite;* 2.° *les droites qui joindront leurs sommets opposés concourront toutes trois en un même point.*

Il y aurait beaucoup d'autres choses à dire sur le sujet qui nous occupe ; mais ces détails intéressans se trouvent pour la plupart dans le *Traité des propriétés projectives des figures* (pag. 109 — 120 et 290 — 304), auquel nous renvoyons. Nous nous bornerons à extraire les énoncés suivans de deux théorèmes qui dérivent des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits :

1.° *Si tous les côtés d'un polygone variable, tracé sur un plan, sont assujettis à tourner sur autant de points fixes, tandis que ses sommets, un seul excepté, parcourent respectivement des droites données de position ; le sommet libre décrira, dans son mouvement, une ligne du second ordre passant par les points fixes sur lesquels tournent ses deux côtés.*

2.° *Si tous les sommets d'un polygone variable, tracé sur un plan, sont assujettis à se mouvoir sur autant de droites fixes, tandis que ses côtés, un seul excepté, tournent sur des points fixes ; le côté libre sera constamment, dans son mouvement, tangent à une ligne du second ordre touchant les deux droites fixes parcourues par ses extrémités.*

§. IX.

Soient ABC, DEF, deux triangles inscrits arbitrairement à une même ligne du second ordre ; soient respectivement H, I, K les points de concours de AB et DE, AC et DF, BC et EF ; en menant les cordes BF et CE, concourant en G, on formera un hexagone inscrit BACEDF, dans lequel les points de concours G, H, I des côtés opposés seront en ligne droite ; de sorte que les trois droites BF, EC, HI concourent en un même point ; or, on peut considérer ces droites comme joignant les sommets opposés de l'hexagone BCIFEH, dont les côtés sont ceux des deux triangles proposés ; donc cet hexagone est circonscriptible à une ligne du second ordre ; ainsi *deux triangles inscrits à une même ligne du second ordre sont par là même circonscriptibles à la fois à une autre ligne du même ordre.*

Réciproquement, *deux triangles circonscrits à une même ligne du second ordre sont par là même inscriptibles à une autre ligne du même ordre*. En effet, si deux triangles ABC, DEF, sont circonscrits à une même ligne du second ordre; en désignant respectivement par H et I les points de concours de AB et DE, AC et DF, l'hexagone BCIFEH sera circonscrit à la courbe; d'où il suit que les droites BF, CE et HI concourront en un même point G; les trois points G, H, I seront donc en ligne droite; d'où il suit que l'hexagone BACEDF, dont les sommets sont précisément ceux de nos deux triangles sera inscriptible à une ligne du second ordre.

De ces théorèmes, dus à M. Brianchon, il résulte que, *si un seul triangle est inscrit à une ligne du second ordre et circonscrit à un autre, une infinité d'autres triangles pourront être, à la fois comme celui-là, inscrits à la première courbe et circonscrits à la seconde.*

En considérant toujours les mêmes triangles inscrits ABC, DEF, joignons leurs sommets correspondans par des droites, et soient L, M, N, respectivement, les intersections de AD et BE, CF et AD, BE et CF. On voit d'abord que ces trois points seront situés sur les polaires respectives de H, I, K. Ensuite si l'on mène KN, cette droite sera la polaire du point G de la droite HI; d'où il suit que KN contiendra le pôle de HI, et que, par conséquent le point N est sur la droite qui joint le point K au pôle de HI. Pareillement, les points L, M, sont situés sur les droites qui joignent les points H, I, avec les pôles des droites IK et HK, respectivement, d'où résulte ce théorème: *Lorsque deux triangles sont inscrits à une même ligne du second ordre, le triangle formé par les trois droites qui joignent les sommets correspondans de ces deux là est tel que chacun de ses sommets se trouve à l'intersection de la polaire du point de concours de deux côtés correspondans des deux premiers avec la droite menée de ce point de concours au pôle de la droite qui joint les deux autres.*

Deux triangles inscrits à une même ligne du second ordre ordre pouvant prendre une infinité de formes et de situations différentes, il s'ensuit que les points de concours de leurs côtés correspondans pourront aussi prendre toutes les situations qu'on voudra. On pourra donc supposer ces trois points donnés à volonté sur le plan de la courbe; et, pour chaque situation qu'on leur assignera, il existera, en général, deux triangles inscrits dont les côtés correspondans se couperont en ces points; triangles qu'il sera facile de construire d'après ce qui précède. On obtiendra donc ainsi une construction très-simple et purement linéaire du problème suivant: *Inscrire à une ligne donnée du second ordre un triangle dont les côtés passent par trois points donnés*? La solution qui résulte de ce qui précède, et à laquelle M. Gergonne a été conduit par l'analyse (*Annales*, tom. VII, pag. 325), peut être énoncée comme il suit :

Formez un triangle dont les sommets soient les pôles des droites qui joignent les points donnés, pris deux à deux; joignez chacun des sommets de ce triangle à celui des trois points donnés qui n'a pas concouru à sa détermination par une droite; les droites ainsi menées de trois sommets détermineront trois points sur les côtés respectivement opposés. Formant alors un triangle dont ces trois nouveaux points soient les sommets, les côtés de ce triangle, par leurs intersections avec la courbe, détermineront les six sommets des deux triangles cherchés.

Si l'on circonscrit à la même courbe deux triangles dont les points de contact soient les sommets des deux triangles inscrits, il est aisé de voir que ces triangles seront inscrits au triangle dont les sommets sont les pôles des trois points donnés, pris deux à deux; et de là résulte le moyen de ramener, au problème qui vient d'être résolu, cet autre problème : *A une ligne donnée du second ordre circonscrire un triangle dont les sommets soient sur trois droites données*? On peut aussi attaquer directement ce problème, à l'aide de ce que nous avons dit ci-dessus sur les propriétés du système de deux triangles circonscrits à une même ligne du second ordre. De l'une ou de l'autre manière on parvient à la construction linéaire que voici, et qui a aussi été indiquée par M. Gergonne, en l'endroit cité :

Formez un triangle dont les côtés soient les polaires des intersections deux à deux des trois droites données ; marquez le point de concours de chaque côté de ce triangle avec celle des droites données qui n'aura pas concouru à sa détermination, joignez les points ainsi déterminés avec les sommets respectivement opposés du triangle des polaires par trois droites, ces trois droites formeront un nouveau triangle tel que les six tangentes menées à la courbe par ses trois sommets seront les côtés des deux triangles cherchés.

§. X.

En exposant (§. II) la théorie des pôles et polaires, nous avons remarqué que la droite qui joint les pôles de deux autres droites, tracées sur le plan d'une ligne du second ordre, a pour pôle le point de concours de celle-ci. Il s'ensuit immédiatement que, *si deux polygones d'un même nombre de côtés, tracés sur le plan d'une ligne du second ordre, sont tels que les sommets de l'un soient les pôles des côtés de l'autre, réciproquement les sommets de ce dernier seront les pôles des côtés du premier ; et de plus le point de concours de deux quelconques des côtés de chacun sera le pôle de la droite qui joindra les sommets pôles de ce deux côtés dans l'autre.* A raison de ces propriétés corrélatives, les deux polygones peuvent être dits *polaires réciproques* l'un de l'autre par rapport à la courbe, qui en sera dit elle-même la *directrice.*

Supposons que les polygones proposés soient deux hexagones et que le premier se trouve inscrit à une ligne quelconque du second ordre, autre que la directrice ; les trois points de concours de ses côtés opposés seront alors situés en ligne droite ; mais ces points sont les pôles des diagonales qui, dans l'autre hexagone, joignent les sommets opposés; donc ces trois diagonales doivent concourir en un même point; donc ce second hexagone est inscriptible à une ligne du second ordre; donc *quand deux hexagones sont polaires réciproques l'un de l'autre, si l'un d'eux est inscriptible à une ligne du second ordre, l'autre est nécessairement circonscriptible à une ligne du même ordre; et réciproquement.*

De là, en faisant varier simultanément le sixième sommet du premier hexagone sur la courbe à laquelle il est inscrit et le sixième côté du second, de telle sorte que ce sommet en reste toujours le pôle, on conclut généralement que, *si un polygone quelconque tracé sur le plan d'une ligne du second ordre, prise pour directrice, est inscriptible à une autre ligne du même ordre, son polaire réciproque sera circonscriptible à une troisième ligne de cet ordre et réciproquement.* Il en résulte encore ce théorème : *Si un point, pris arbitrairement sur le plan d'une ligne du second ordre, se meut en parcourant une deuxième ligne du même ordre, sa polaire enveloppera, dans son mouvement, une troisième ligne de cet ordre ;* et réciproquement, *si une droite, tracée arbitrairement sur le plan d'une ligne du second ordre, se meut en enveloppant une deuxième ligne du même ordre, son pôle parcourra, dans son mouvement, une troisième ligne de cet ordre.*

Il est à remarquer que la relation qui a lieu entre la courbe parcourue par le pôle et celle qu'enveloppe sa polaire est réciproque entre ces deux courbes; c'est-à-dire que, *si en un point quelconque de la ligne du second ordre parcourue par le pôle, on lui mène une tangente, la polaire de ce point touchera la courbe enveloppée par les polaires en un point qui sera le pôle de cette tangente*; de sorte que chacune des deux courbes dont il s'agit peut être considérée, à la fois, comme le lieu des pôles des tangentes de l'autre et comme l'enveloppe des polaires de tous les points de cette même courbe; ce qui justifie complètement la dénomination de *polaires réciproques* qu'elles ont reçue. En effet, soient P, P', deux points pris sur la première courbe, et dont les polaires touchent la seconde en des points T, T′, respectivement. La corde PP′ aura elle-même pour son pôle le point d'intersection des deux polaires. Or ce point approche d'autant plus de se confondre avec les points de contact T, T′, que ceux-ci seront plus rapprochés, et en même temps les pôles P, P′, sur la première courbe, deviennent d'autant plus voisins l'un de l'autre. En faisant donc coïncider T′ avec T, la corde PP′ se changera en une tangente à la première courbe, ayant pour son pôle le point T de la seconde; ce qui démontre la proposition annoncée. On prouverait avec la même facilité qu'*étant donnés un point et sa polaire, par rapport à la première courbe, si l'on construit, relativement à la directrice, la polaire de ce point et le pôle de cette droite, on aura par là même un point et sa polaire, par rapport à l'autre courbe.*

Ce qui précède renferme les principes de la théorie des pôles et polaires réciproques, dont nous ferons souvent usage dans la suite de ces recherches. M. Poncelet, à qui est due cette extension importante de la théorie des pôles, a montré dans son grand traité, et dans un article du tome VIII des *Annales de mathématiques* (pag. 201), comment on peut y parvenir directement, sans recourir aux propriétés des hexagones inscrit et circonscrit. Il a fait voir, par des applications très-variées, toute l'utilité de cette nouvelle théorie, dont il a enrichi la géométrie. En général, il résulte de cette théorie qu'il n'existe aucune relation descriptive d'une figure donnée sur un plan qui n'ait sa correspondante dans une autre figure; en sorte que toute propriété appartenant à une figure composée de points et de lignes, soit droites soit courbes, et tracée sur le plan d'une ligne arbitraire du second ordre, prise pour directrice, entraîne nécessairement l'existence d'une certaine propriété corrélative de la figure qu'on peut concevoir comme polaire réciproque de la proposée. Par exemple, à chaque propriété des polygones inscrits aux lignes du second ordre doit correspondre une propriété analogue des polygones circonscrits de même espèce, et réciproquement. C'est ce qu'on peut vérifier au sujet des quadrilatères et hexagones inscrits et circonscrits, dont il a été question précédemment.

Pour le présent, nous nous proposons, à l'aide de cette théorie, et en partant du théorème général que nous avons établi sur les lignes du second ordre qui ont quatre points communs, lequel est exprimé par les formules (f) du §. VI, de démontrer un théorème analogue à celui-là, relatif à des lignes du même ordre qui ont quatre tangentes communes. Cette application fera le sujet du §. suivant.