ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Solution du deuxième problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 166-171
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__166_0>

Solution du deuxième Problème.

Par un ABONNÉ.

PROBLÈME. *Suivant quelle courbe un fil parfaitement flexible et inextensible doit-il être roulé sur la surface d'un cône droit, pour qu'en développant ce fil, supposé se terminer au sommet du cône, de manière à le maintenir constamment tangent à la courbe, son extrémité ne sorte pas du plan conduit par ce sommet, perpendiculairement à l'axe du cône? Et quelle courbe décrira alors cette extrémité sur ce plan?*

Solution. Soit un fil d'une longueur déterminée quelconque, fixé, par l'une de ses extrémités, à l'un quelconque des points de la surface d'une cône. On pourra toujours l'amener à être situé dans le plan tangent au point d'attache, et le faire tourner ensuite dans ce plan, autour de ce point, jusqu'à ce que son autre extrémité se trouve sur le plan perpendiculaire à l'axe conduit par le sommet. Rien n'empêchera alors d'enrouler ce fil sur le cône, de manière que cette extrémité ne sorte pas de ce plan, et dès lors il s'appliquera sur ce cône suivant la courbe demandée.

Ces considérations, qui offriraient au besoin un moyen mécanique de tracer les deux courbes cherchées, prouvent que non seulement le problème est toujours possible, mais que de plus on peut toujours assujettir la courbe tracée sur le cône à passer par un point donné de sa surface et à avoir en outre, de ce point au sommet, une longueur donnée; de sorte que son équation doit contenir deux constantes arbitraires.

Lorsque le fil se développe, on peut, durant un instant infiniment petit, supposer qu'il tourne autour de son point de contact avec le cône, supposé fixe; et, puisque son extrémité ne quitte pas, dans ce mouvement, le plan perpendiculaire à l'axe conduit par le sommet, il est dans le même cas que s'il était mu sur la surface d'un autre cône droit ayant sa base sur ce plan et son sommet au point de contact. Son extrémité décrit donc un petit arc de cercle ayant son centre à la projection du point de contact sur le plan dont il s'agit.

Ainsi, dans chaque situation du fil mobile, la projection de son point de contact avec le cône, sur le plan perpendiculaire à son axe conduit par son sommet est le centre de courbure de l'arc de courbe que décrit son extrémité; de sorte que la projection de la courbe tracée sur le cône est la développée de la courbe tracée sur le plan de projection.

Cela posé, soit pris le sommet du cône pour origine des coordonnées rectangulaires et son axe pour axe des z positifs. En représentant par α son angle générateur, si (t, u, v) est le point de contact du fil avec sa surface, on aura

$$t^2+u^2=v^2\mathrm{Tang.}^2\alpha\,. \qquad (1)$$

Si de plus on suppose que (x, y) est l'extrémité du fil ou le point décrivant, sur le plan des xy; ce point devant satisfaire aux équations de la tangente, on aura

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{t-x}{v}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{u-y}{v}\,. \qquad (2)$$

En représentant par s la longueur du fil, depuis le point (t, u, v) jusqu'au point (x, y), on doit avoir

$$s=\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2+v^2}\,, \qquad (3)$$

ou, en vertu des formules (2),

$$s=\frac{v}{\mathrm{d}v}\sqrt{\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}\ , \qquad (4)$$

d'où

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}-\frac{v}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v.\sqrt{\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}\ ; \qquad (5)$$

mais on doit avoir d'ailleurs

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}\ ; \qquad (6)$$

donc

$$\mathrm{d}.\sqrt{\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}=0\ ; \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}=A\mathrm{d}v\ ;$$

v étant la variable indépendante. Cela donne en quarrant et transformant la constante

$$\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2=B\mathrm{d}v^2\ . \qquad (7)$$

mais, en vertu de l'équation (1)

$$v=\frac{\sqrt{t^2+u^2}}{\mathrm{Tang}.\alpha}\ , \qquad (8)$$

d'où

$$\mathrm{d}v=\frac{t\mathrm{d}t+u\mathrm{d}u}{\mathrm{Tang}.\alpha.\sqrt{t^2+u^2}}\ , \quad \text{et} \quad \mathrm{d}v^2=\frac{(t\mathrm{d}t+u\mathrm{d}u)^2}{(t^2+u^2)\mathrm{Tang}.^2\alpha}\ ; \qquad (9)$$

donc, en substituant dans (7) et transformant encore la constante

$$(t^2+u^2)(dt^2+du^2)=C(tdt+udu)^2 \;; \qquad (10)$$

telle est donc l'équation de la projection sur le plan des xy de la courbe tracée sur le cône.

Cette projection étant une spirale, nous poserons

$$t=r\text{Cos.}\theta \,, \quad u=r\text{Sin.}\theta \,, \qquad (11)$$

d'où

$$dt=dr\text{Cos.}\theta-rd\theta\text{Sin.}\theta \;; \qquad du=dr\text{Sin.}\theta+rd\theta\text{Cos.}\theta \;;$$

il en résultera

$$t^2+u^2=r^2 \,,$$

$$dt^2+du^2=dr^2+r^2d\theta^2 \;;$$

$$tdt+udu=rdr \;;$$

substituant dans (10) divisant par r^2, tranformant de nouveau la constante et extrayant la racine quarrée, il viendra

$$Dd\theta=\frac{dr}{r} \,, \qquad \text{d'où} \qquad D\theta=\text{Log.}\frac{r}{a} \;; \qquad (12)$$

a étant une nouvelle constante. Ainsi la projection sur le plan des xy de la courbe tracée sur le cône est une *spirale logarithmique*.

Les formules (2) et (7) donnent en différentiant

$$\rho\frac{d^2t}{d\rho^2}=-\frac{dx}{d\rho} \;; \qquad \rho\frac{d^2u}{d\rho^2}=-\frac{dy}{d\rho} \,,$$

$$\frac{dt}{d\nu}\cdot\frac{d^2t}{d\nu^2}+\frac{du}{d\nu}\cdot\frac{d^2u}{d\nu^2}=0\,.$$

En éliminant $\frac{d^2t}{d\nu^2}$ et $\frac{d^2u}{d\nu^2}$ entre ces trois équations et mettant pour $\frac{dt}{d\nu}$ et $\frac{du}{d\nu}$, dans l'équation résultante leurs valeurs données par les formules (2), on aura

$$(t-x)dx+(u-y)dy=0\,. \qquad (13)$$

Si l'on met les mêmes valeurs dans l'équation différentielle de (1) qui est

$$t\,\frac{dt}{d\nu}+u\,\frac{du}{d\nu}=\nu\,\text{Tang.}^2\alpha\,,$$

elle deviendra

$$t(t-x)+u(u-y)=\nu^2\text{Tang.}^2\alpha\;;$$

ou simplement, en ayant égard à l'équation (1)

$$tx+uy=0\,. \qquad (14)$$

Les mêmes valeurs mises dans l'équation (7) donneront

$$(t-x)^2+(u-y)^2=B\nu^2\,.$$

ou, en développant et ayant égard aux équations (1) et (14)

$$x^2+y^2=(B-\text{Tang.}^2\alpha)\nu^2=E^2\nu^2\;; \qquad (15)$$

les équations (13) et (14) donnent d'ailleurs

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)t=+y(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\ ,$$

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)u=-x(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\ ;$$

d'où, en prenant la somme des quarrés et ayant égard à l'équation (1),

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2v^2\mathrm{Tang.}^2\alpha=(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2\ ,$$

ou en mettant pour x^2+y^2 sa valeur (15), divisant par v et extrayant la racine quarrée des deux membres

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\mathrm{Tang.}\alpha=E(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\ ;$$

équation d'une spirale logarithmique, comme on pouvait bien s'y attendre ; et dont la développée sera l'autre spirale logarithmique projection de la courbe tracée sur la surface du cône.

Voilà donc un moyen mécanique fort simple pour tracer une spirale logarithmique d'un mouvement continu, et qui présente en même temps une définition purement géométrique de cette courbe.