GERGONNE

Mécanique appliquée. Note sur la mesure de l'intensité de la pesanteur

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 155-158
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__155_1>

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Note sur la mesure de l'intensité de la pesanteur ;

Par M. GERGONNE.

ON s'occupe beaucoup aujourd'hui de la recherche de l'intensité de la pesanteur en différens points de la surface de la terre, au moyen des expériences du pendule, et l'on peut voir, dans le III.me volume du *Traité élémentaire d'astronomie physique* de M. Biot (pag. 148 des additions), combien d'attentions et de réductions minutieuses ces expériences exigent. Voici une manière de parvenir au but que nous n'avons vu indiquer nulle part, et qui serait peut-être d'un usage plus sûr et plus commode ; elle est du moins curieuse, sous le point de vue purement théorique.

Soit un pendule de figure et de matière quelconque, traversé par trois axes de suspension, dont les tranchans, parallèles entre eux, soient situés dans un même plan, contenant le centre de gravité de tout l'appareil, de telle sorte qu'en le suspendant par l'un quelconque de ces trois axes, les deux autres soient constamment avec lui dans un même plan vertical.

Soient M la masse du pendule Mk^2, son moment d'inertie par rapport à un axe idéal, conduit par son centre de gravité, parallèlement à ses axes effectifs, r, r', r'' les distances de cet axe idéal aux trois autres; les longueurs des pendules simples isochrones avec celui-là, pour ses trois points de suspension, seront respectivement (*Traité de mécanique* de M. Poisson, tom. II, pag. 116).

$$\frac{k^2+r^2}{r}, \quad \frac{k^2+r'^2}{r'}, \quad \frac{k^2+r''^2}{r''},$$

de sorte que, si t, t', t'' sont les durées respectives des oscillations du pendule, pour ses trois points de suspension, en représentant par g la gravité et par ϖ la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, on aura (*Ibid.*, pag. 117).

$$t=\varpi\sqrt{\frac{k^2+r^2}{gr}}, \quad t'=\varpi\sqrt{\frac{k^2+r'^2}{gr'}}, \quad t''=\varpi\sqrt{\frac{k^2+r''^2}{gr''}};$$

c'est-à-dire,

$$gt^2r=\varpi^2(k^2+r^2),$$

$$gt'^2r'=\varpi^2(k^2+r'^2),$$

$$gt''^2r''=\varpi^2(k^2+r''^2).$$

Si l'on pose

$$r'-r''=a, \quad r''-r=a', \quad r-r'=a'',$$

d'où

$$a+a'+a''=0,$$

en prenant les différences de ces équations deux à deux, il viendra

$$g(t'^2r'-t''^2r'')=\varpi^2a(r'+r''),$$

$$g(t''^2r''-t^2r)=\varpi^2a'(r''+r)\ ,$$

$$g(t^2r-t'^2r')=\varpi^2a''(r+r')\ ,$$

ou encore

$$(gt'^2-\varpi^2a)r'=(gt''^2+\varpi^2a)r''\ ,$$

$$(gt''^2-\varpi^2a')r''=(gt^2+\varpi^2a')r\ ,$$

$$(gt^2-\varpi^2a'')r=(gt'^2+\varpi^2a'')r'\ ,$$

d'où en multipliant membre à membre et supprimant le facteur $rr'r''$, commun aux deux termes de l'équation produit,

$$(gt'^2-\varpi^2a)(gt''^2-\varpi^2a')(gt^2-\varpi^2a'')=(gt''^2+\varpi^2a)(gt^2+\varpi^2a')(gt'^2+\varpi^2a'')\ ;$$

ce qui donne, en développant, supprimant les termes communs aux deux membres, divisant ensuite par ϖ^2 et ordonnant enfin par rapport à g,

$$\{t'^2t''^2(a'+a'')+t''^2t^2(a^2+a)+t^2t'^2(a+a')\}g^2$$

$$-\varpi^2\{t^2a(a^2-a'')+t'^2a'(a''-a)+t''^2a''(a-a')\}g+2\varpi^4aa'a''=0\ ,$$

ou plus simplement, parce que $a+a'+a''=0$,

$$(t'^2t''^2a+t''^2t^2a'+t^2t'^2a'')g^2+\varpi^2\{t^2a(a'-a'')+t'^2a'(a''-a)+t''^2a''(a-a')\}g-2\varpi^4aa'a''=0\ .$$

Soient respectivement n, n', n'' les nombres d'oscillations t, t', t'' exécutées dans un même intervalle de temps quelconque T, on aura

$$t=\frac{\mathrm{T}}{n}\ ,\qquad t'=\frac{\mathrm{T}}{n'}\ ,\qquad t''=\frac{\mathrm{T}}{n''}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant et chassant ensuite les dénominateurs,

$$T^4(n^2a+n'^2a'+n''^2a'')g^2+\varpi^2T^2\{n'^2n''^2a(a'-a'')+n''^2n^2a'(a''-a)$$
$$+n^2n'^2a''(a-a')\}g-2\varpi^4n^2n'^2n''^2aa'a''=0\,.$$

Cette équation donne deux valeurs pour g ; mais, quand bien même elles seraient toutes deux positives, comme cette quantité est toujours à très-peu près connue, il n'en résulterait jamais d'équivoque.

Au surplus, s'il n'était question que de connaître la très-petite quantité γ à ajouter à une valeur déjà très-approchée de g pour avoir la véritable, cette valeur de γ pourrait se calculer, à très-peu près, par la formule du premier degré que l'on emploie dans la méthode de Newton pour l'approximation des racines des équations numériques.

Au point où les arts sont parvenus aujourd'hui, il ne sera pas difficile de rendre les tranchans des trois axes parallèles et de les comprendre dans un même plan ; et il ne sera pas plus difficile d'en mesurer exactement les distances a, a', a'', dont les deux plus petites devront être prises avec un même signe quelconque, et la plus grande avec un signe contraire. La seule difficulté sérieuse consistera à amener le plan de ces trois axes à contenir le centre de gravité de l'appareil. On pourra, pour la surmonter, placer latéralement de part et d'autre de la partie inférieure de cet appareil, deux poids additionnels qui, portés par des vis horizontales, pourront être avancés et reculés de manière à amener le plan des trois tranchans à être rigoureusement vertical.

Si, au lieu de trois axes, on en établissait un plus grand nombre, on obtiendrait, pour déterminer g, autant d'équations différentes qu'il y aurait de manières de prendre ces axes trois à trois, ce qui offrirait des moyens de vérification et garantirait ainsi l'exactitude des résultats.