6529

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 252, à Montpellier [Hérault];

A M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et les ouvrages à annoncer doivent être envoyés, francs de port, à la première de ces adresses.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France et 24 fr. pour l'Étranger.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche unique. Après la page 284.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.
RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME DIX-SEPTIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55.

1826 ET 1827.

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

Recherches sur la caustique par réflexion, dans le cercle;

Par M. THOMAS DE ST-LAURENT, Officier au Corps royal d'état-major, attaché à la 13.me division militaire.

LA marche la plus générale, dans la recherche de la caustique par réflexion, relative au cercle, serait sans doute d'attaquer directement la question, pour le cas d'un point lumineux, situé, d'une manière quelconque, dans le plan du cercle réfléchissant donné. On pourrait supposer ensuite que le point lumineux est sur la circonférence de ce cercle, ou qu'il en est infiniment distant, ou enfin qu'il a toute autre situation déterminée; et on déduirait des résultats généraux auxquels on serait d'abord parvenus, ceux qui conviendraient à chacun de ces cas particuliers. Mais, comme cette marche conduit à des calculs extrêmement prolixes, nous procèderons d'une manière inverse ; c'est-à-dire, qu'avant de passer au problème général, nous nous occuperons d'abord des deux cas particuliers les plus simples. Nous obtiendrons de cette manière des formules moins compliquées et plus élégantes.

I. Occupons-nous d'abord de la recherche de l'équation de la caustique pour le cas où le point lumineux est un de ceux de la circonférence du cercle réfléchissant.

Soit r le rayon de ce cercle. Afin de simplifier nos calculs autant qu'il est possible, prenons son centre pour origine des coordonnées rectangulaires, et faisons passer l'axe des x par le point rayonnant, que nous supposons placé du côté des x négatives. Soit (x',y') un point incident quelconque, et (x,y) le point correspondant de la caustique cherchée, c'est-à-dire, le point où elle est touchée par le rayon réfléchi. On aura d'abord

$$x'^2+y'^2=r^2 . \qquad (1)$$

L'angle que fait le rayon incident avec la normale au cercle au point (x',y') a pour tangente tabulaire $\frac{y'}{r+x'}$.

Si nous désignons par p la tangente tabulaire de l'angle que fait le rayon réfléchi avec l'axe des x ; l'angle de ce même rayon avec la normale au point (x',y') aura pour tangente tabulaire

$$\frac{p-\frac{y'}{x'}}{1+p\frac{y'}{x'}} , \qquad \text{ou} \qquad \frac{px'-y'}{x'+py'} ;$$

et, comme, d'après les lois de l'optique, cet angle doit être égal au premier, on aura

$$\frac{px'-y'}{x'+py'}=\frac{y'}{r+x'} ,$$

d'où on tire, en ayant égard à l'équation (1)

$$p=\frac{y'(r+2x')}{x'(r+2x')-r^2}\ ,$$

l'équation du rayon réfléchi sera donc

$$y-y'=\frac{y'(r+2x')}{x'(r+2x')-r^2}(x-x')\ ,$$

ou encore

$$[r^2-x'(r+2x')]y+y'(r+2x')x=r^2y'\ . \qquad (2)$$

On exprimera que la caustique est l'enveloppe de l'espace parcouru par le rayon réfléchi, en éliminant $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}$ entre les dérivées de (1) et (2); ce qui donnera

$$-\frac{x'}{y'}=\frac{(r+4x')y-2y'x}{(r+2x')x-r^2}\ ,$$

ou bien, en ayant encore égard à la relation (1)

$$(r+4x')yy'+[x'(r+4x')-2r^2]x=r^2x'\ . \qquad (3)$$

L'équation de la courbe cherchée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1), (2), (3).

Mais, comme les équations (2) et (3) ne sont guères de nature à se prêter à l'usage de l'équation (1), comme moyen de simplification, attendu que x et y n'entrent pas dans celle-ci; nous allons en déduire deux autres, plus commodes à employer; et pour cela nous éliminerons tour à tour entre elles x et y. En faisant toujours usage de l'équation (1), comme moyen de simplification, elles se trouveront ainsi remplacées par les deux équations

$$3r(r+x')x=2x'y'^2+r^2(r+x')\ ,$$

$$3r(r+x')y=2y'^3\ .$$

En observant que $y'^2=r^2-x'^2=(r+x')(r-x')$, celles-ci pourront encore être simplifiées, et deviendront finalement

$$r(3x-r)=2x'(r-x') , \qquad (4)$$

$$3ry=2y'(r-x') . \qquad (5)$$

Telles sont donc les équations qui, avec l'équation (1), nous serviront à trouver celle de la courbe demandée.

Remarquons, en passant, une propriété de la caustique que l'on déduit de suite de la comparaison des équations (4) et (5). En les divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{3y}{3x-r}=\frac{y'}{x'} ; \qquad (6)$$

or $\frac{y'}{x'}$ est la tangente tabulaire de l'angle que fait avec l'axe des x la normale au point d'incidence; et $\frac{3y}{3x-r}$ ou $\frac{y}{x-\frac{r}{3}}$ est celle de l'angle que fait avec le même axe une droite menée du point correspondant de la caustique à un point fixe de l'axe des x, situé à une distance $+\frac{r}{3}$ de l'origine: on a donc ce théorème:

Un point rayonnant étant situé sur la circonférence d'un cercle réflechissant; si par ce point on mène un rayon incident et le rayon réfléchi correspondant, et que, par un point fixe situé aux deux tiers du diamètre qui passe par le point rayonnant, à compter de ce point, on mène une parallèle à la normale au point d'incidence; cette parallèle coupera le rayon réfléchi à son point de contact avec la caustique, et conséquemment en un point de cette caustique.

Ce théorème offre une méthode graphique fort simple pour tracer la caustique par points; on en peut conclure aussi l'art de mener une tangente à cette caustique par un de ses points, lorsqu'elle est déjà tracée. En joignant, en effet, ce point au point fixe par une droite, et menant un rayon parallèle à cette droite, l'extrémité de ce rayon sera un second point de la tangente demandée.

Passons présentement à la recherche de l'équation de la caustique. En quarrant les deux membres de l'équation (6), et ajoutant ensuite l'unité à chaque membre, il vient

$$\frac{9y^2+(3x-r)^2}{(3x-r)^2}=\frac{x'^2+y'^2}{x'^2}=\frac{r^2}{x'^2} \;;$$

On tire de là

$$x'=\frac{\pm r(3x-r)}{\sqrt{9y^2+(3x-r)^2}} \;;$$

valeur qui, substituée dans (4), donne, en réduisant,

$$\{9(x^2+y^2)-r^2\}^2=4r^2\{9y^2+(3x-r)^2\} \;; \qquad (7)$$

équation de la caustique demandée.

On voit que cette courbe est une ligne du quatrième ordre symétrique par rapport à l'axe des x; et, en discutant son équation, on s'assurera qu'elle a un point de rebroussement, lequel n'est autre chose que le point fixe dont il a été question ci-dessus; que de ce point partent deux branches, intérieures au cercle réfléchissant, qui vont se réunir au point rayonnant, où la caustique a un contact du second ordre avec ce cercle.

Cherchons le rapport métrique entre la longueur du rayon incident terminé au cercle réfléchissant et le rayon réfléchi terminé à la caustique. En désignant respectivement par P et P' ces deux rayons, nous aurons

$$P=\sqrt{(x'+r)^2+y'^2} \;, \qquad P'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

en mettant dans ces formules pour $x'^2+y'^2$ sa valeur r^2, et mettant en outre dans la dernière pour x et y les valeurs données par les équations (4) et (5), elles deviendront

$$P=\sqrt{2r(r+x')}\ , \qquad P'=\tfrac{1}{3}\sqrt{2r(+x')}\ ;$$

d'où on conclura cette relation remarquable

$$P=3P'\ .$$

Ainsi dans la caustique que nous considérons ici, *le rayon réfléchi est constamment le tiers du rayon incident.*

Cette propriété fournit un nouveau moyen bien simple de décrire la courbe par points. On pourra même, en la combinant avec celle qui résulte de l'équation (6), obtenir les points de la courbe sans tracer les rayons réfléchis.

Occupons-nous présentement de la rectification de la caustique. Pour y parvenir, on pourrait, suivant la méthode générale, rendre le radical de la formule

$$s=\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

fonction de la seule variable x, en substituant pour y, dans $\frac{dy}{dx}$, sa valeur tirée de l'équation de la courbe. Mais, en suivant cette marche, on aurait à intégrer une formule assez compliquée. Attachons-nous donc à éluder cette difficulté.

L'équation de la courbe est comprise implicitement dans les équations (1), (4), (5); puisqu'elle résulte de l'élimination de x' et y' entre ces trois équations. En conséquence, on peut fort bien chercher l'expression de s en x' et y' qu'on est toujours maître ensuite d'éliminer au moyen des équations qui lient ces deux variables à x et y.

En différentiant les équations (1), (4), (5) par rapport à x, y, x', y', on obtient

$$x'\mathrm{d}x'+y'\mathrm{d}y'=0\ ,$$

$$3r\mathrm{d}x=2(r-2x')\mathrm{d}x'\ ,$$

$$3r\mathrm{d}y=2(r-x')\mathrm{d}y'-2y'\mathrm{d}x'\ .$$

En divisant la troisième par la seconde, il vient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(r-x')\mathrm{d}y'-y'\mathrm{d}x'}{(r-2x')\mathrm{d}x'}=\frac{(r-x')\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}-y'}{r-2x'}\ ;$$

ou en mettant pour $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}$ sa valeur tirée de la première

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{(r-x')x'+y'^2}{(r-2x')y'}=-\frac{(r-x)x'+(r^2-x'^2)}{(r-2x')y'}=-\frac{(r-x')(r+2x')}{(r-2x')y'}$$

donc

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{(r-x')^2(r+2x')^2}{(r-2x')^2y'^2}=\frac{(r-x')^2(r+2x')^2}{(r-2x')^2(r^2-x'^2)}=\frac{(r-x')(r+2x')^2}{(r+x')(r-2x')^2}\ ;$$

et par suite

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{(r+x')(r-2x')^2+(r-x')(r+2x')^2}{(r+x')(r-2x')^2}=\frac{2r^3}{(r+x')(r-2x')^2}\ .$$

D'un autre côté nous venons de trouver

$$\mathrm{d}x=\frac{2(r-2x')}{3r}\mathrm{d}x'\ ;$$

donc

$$s=\int \mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\int\frac{2(r-2x')}{3r}\sqrt{\frac{2r^3}{(r+x')(r-2x')}}\,\mathrm{d}x'=\tfrac{2}{3}\int\mathrm{d}x'\sqrt{\frac{2r}{r+x'}}\ ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$s=\tfrac{4}{3}\sqrt{2r(r+x')}+A\ .$$

Si l'on veut compter les arcs du point rayonnant, pour lequel on a $y'=0$ et $x'=-r$, la constante sera nulle, et l'on aura simplement

$$s=\tfrac{4}{3}\sqrt{2r(r+x')}\ ;$$

ou, en se rappelant les résultats ci-dessus,

$$s=\tfrac{4}{3}P=P+\tfrac{1}{3}P=P+P'\ .$$

Ainsi, notre caustique est rectifiable, et *l'arc, compris depuis le point rayonnant jusqu'à un autre point quelconque, est constamment égal à la somme des longueurs des rayons incident et réfléchi qui répondent à ce dernier point.*

Lorsque $P=2r$, on a $P'=\frac{2}{3}r$; d'où résulte $s=\frac{8}{3}r$; et telle est la longueur de la demi-caustique ; mais la corde de cette demi-caustique est $\frac{4}{3}r$; donc *la longueur de la demi-caustique est précisément double de sa corde ;* ou, en d'autres termes, *la longueur de la caustique entière est quadruple de celle de la droite qui joint son point de rebroussement à son point de contact avec le cercle réfléchissant.*

Appliquons encore les considérations précédentes à la recherche de la développée de la caustique.

Soit (X,Y) un quelconque des points de cette développée ; l'équation de la normale à la caustique sera

$$(X-x)+(Y-y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\ ,$$

dans laquelle il faudrait mettre pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur tirée de l'équation de la courbe. Mais, au lieu d'avoir recours à cette équation, nous pourrons employer la valeur de $\frac{dy}{dx}$ déjà obtenue, en x' et y'. Mettant en outre pour x et y les valeurs données par les équations (4) et (5), et ayant égard à l'équation (1), on trouvera

$$\{r^2-x'(2x'-r)\}.3Y+(2x'-r)y'.3X=r^2y' \,. \qquad (2')$$

On exprimera que la développée est l'enveloppe de l'espace parcouru par la normale, en éliminant $\frac{dy'}{dx'}$ entre les dérivées des équations (1) et (2'), ce qui donnera

$$\{x'(4x'-r)-2r^2\}.3X+(4x'-r)y'.3Y=r^2x' \,. \qquad (3')$$

L'équation de la développée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y', entre les équations (1), (2'), (3').

Mais les équations (2') et (3') ne sont que les équations (2) et (3), dans lesquelles on aurait changé respectivement x et y en $3X$ et $3Y$, et changé en outre le signe de r. Le résultat de l'élimination ne sera donc autre chose que l'équation (7), résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1), (2), (3), dans laquelle on aurait opéré les mêmes changemens; c'est-à-dire, que l'équation de la développée de notre caustique sera

$$\{9(9X^2+9Y^2)-r^2\}^2=4r^2\{9.9Y^2+(3.3X+r)^2\} \;;$$

ou bien, en posant, pour plus de simplicité; $r=3R$.

$$\{9(X^2+Y^2)-R^2\}^2=4R^2\{9Y^2+(3X+R)^2\} \,. \qquad (7')$$

En comparant cette équation à l'équation (7), on voit qu'elle est composée en X, Y et $-R$ comme celle-là l'était en x, y et $+r$; ce qui conduit à ce résultat remarquable :

Lorsque le point rayonnant est à la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la développée de la caustique est une autre caustique semblable à la première*, *relative à un cercle réfléchissant concentrique au premier*, *mais d'un rayon trois fois moindre*, et dont la circonférence passe conséquemment par le point de rebroussement de cette première caustique. La seconde caustique est d'ailleurs tournée en sens inverse de la première, de sorte que le point lumineux qui lui répond se confond avec le point de rebroussement ou foyer de celle-là.

Il suit encore de là que, lorsque le point rayonnant est à la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la caustique est la développée d'une autre caustique semblable*, *tournée en sens inverse et relative à un cercle réfléchissant concentrique au premier*, *mais d'un rayon trois fois plus grand.*

On aura donc l'équation de l'une des développantes de la caustique dont il s'agit en changeant simplement, dans l'équation (7) x, y et $+r$ en $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{3}y$ et $-r$; ce qui donnera l'équation fort simple

$$(x^2+y^2-r^2)^2=4r^2\{y^2+(x+r)^2\} \qquad (*).$$

(*) Ce résultat peut être confirmé par un autre déjà obtenu. On a vu, en effet, à la page 78 du précédent volume, que l'équation de l'une des développantes de la caustique par réfraction relative à un cercle qui a son centre à l'origine, et pour des rayons émanés de l'un quelconque (a,b) des points de son plan, est

$$\{\lambda'^2(x^2+y^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+r^2)\}^2=4r^2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2\} .$$

Pour passer de là au cas de la réflexion, il suffira, comme l'on sait, de poser $\lambda'=-\lambda$, ce qui donnera

$$\{(x^2+y^2)-(a^2+b^2)\}^2=4r^2\{(x^2+y^2)-2(ax+by)+(a^2+b^2)\} .$$

Le point de rebroussement de la caustique dont nous étudions les propriétés étant un point très-remarquable de cette courbe, nous nous trouvons naturellement invités à y transporter l'origine, et à chercher ensuite l'équation polaire de cette même caustique. Pour transporter l'origine à ce point de rebroussement, il suffit simplement de changer, dans l'équation (7), $3x$ en $3x+r$, ce qui, en changeant ensuite r en $3a$, donnera

$$x^2+y^2+2ax=\pm 2a\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (8)$$

Pour passer de là aux coordonnées polaires, il faudra faire

$$x=\rho\text{Cos}\,\varphi\,,\quad y=\rho\text{Sin.}\varphi\,,\quad \text{d'où}\quad \sqrt{x^2+y^2}=\rho\,;$$

il viendra ainsi, en substituant et divisant par ρ,

$$\rho+2a\text{Cos.}\varphi=\pm 2a\,. \qquad (9)$$

Cette équation manifeste une des plus belles propriétés de notre caustique. Considérons, en effet, un cercle concentrique avec le cercle réfléchissant, et ayant pour rayon $a=\frac{1}{3}r$, son équation relative à la nouvelle origine sera

---

Si l'on suppose ensuite que le point rayonnant (a,b) est un de ceux de la circonférence, on aura $a^2+b^2=r^2$, et conséquemment

$$(x^2+y^2-r^2)^2=4r^2\{(x^2+y^2+r^2)-2(ax+by)\}\,.$$

Si enfin on suppose que ce point est sur l'axe des x, à gauche de l'origine, on aura $a=-r$, $b=0$, et cette équation deviendra

$$(x^2+y^2-r^2)^2=4r^2\{y^2+(x+r)^2\}\;;$$

c'est-à-dire, la même que celle du texte.

J. D. G.

$$x^2+y^2+2ax=0\ ,$$

d'où on conclura pour son équation polaire

$$\rho'+2a\mathrm{Cos}.\varphi=0 \qquad (10)$$

et par suite

$$\rho-\rho'=\pm 2a\ , \qquad \text{ou} \qquad \rho=\rho'\pm 2a$$

de sorte que le rayon vecteur de la caustique n'est autre que celui du cercle augmenté ou diminué du diamètre de ce cercle.

Voilà donc un troisième moyen bien simple de décrire la caustique par point. Après avoir déterminé son point de rebroussement, on décrira un cercle concentrique au cercle réfléchissant, dont la circonférence passe par ce point; on menera par ce même point à ce cercle une série de cordes sur la direction desquelles on portera, de part et d'autre du point où elles se termineront, des longueurs égales au diamètre du cercle intérieur, et l'on aura ainsi, pour chacune, deux des points de la caustique.

Ainsi, dans le cas d'un point rayonnant situé sur la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la caustique est une conchoïde*, *qui a pour directrice un cercle concentrique au cercle réflecteur et un rayon égal au tiers de celui de ce cercle. Le pôle de cette conchoïde*, *situé sur la circonférence de ce dernier cercle*, *est en même temps le point de rebroussement de la caustique.*

Il suit encore de là que *toutes les cordes*, *menées à la caustique par son point de rebroussement*, *sont d'une longueur constante et égale au deux tiers du diamètre du cercle réflecteur* (*).

(*) Cette courbe est donc (*Annales*, tom. I, pag. 124) un cas particulier de toutes celles qu'exprime l'équation générale.

Replaçons l'origine au centre du cercle réfléchissant, et proposons-nous de déterminer l'équation de l'épicycloïde engendrée par un cercle d'un rayon égal à a et roulant sur un autre cercle de même rayon.

Supposons que le cercle générateur, d'abord tangent au cercle base, au point $(x=+a, y=o)$, que nous supposons le point décrivant, s'élève au-dessus de l'axe des x, pour décrire la courbe.

Soient, à un instant quelconque, (x, y) le point décrivant et (x'', y'') le centre du cercle générateur; on aura d'abord

$$x''^2+y''^2=4a^2, \qquad (14)$$

$$(x-x'')^2+(y-y'')^2=a^2. \qquad (15)$$

La droite menée du centre du cercle mobile au point décrivant, fait avec l'axe des x un angle, dont la tangente tabulaire est $\frac{y-y''}{x-x''}$. Cet angle est l'angle extérieur d'un triangle dont le troisième côté est la droite menée de l'origine au point (x'', y''); et, par la nature du mouvement, les angles adjacens à ce troisième côté doivent être égaux; donc l'angle extérieur dont il s'agit, doit être égal au double de l'un d'eux, dont la tangente est $\frac{y''}{x''}$; la tangente tabulaire de cet angle extérieur sera donc

$$\frac{2\frac{y''}{x''}}{1-\left(\frac{y''}{x''}\right)^2}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \frac{2x''y''}{x''^2-y''^2};$$

d'où il suit qu'on devra avoir

$$\left\{x-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2+\left\{y-\frac{y}{x}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2=a^2;$$

et dont la propriété commune est que toutes celles de leurs cordes qui passent par l'origine ont une même longueur $2a$.

J. D. G.

$$\frac{2x''y''}{x''^2-y''^2}=\frac{y-y''}{x-x''} \quad ,$$

ou bien

$$2x''y''(x-x'')=(y-y'')(x''^2-y''^2) \; ; \qquad (16)$$

de sorte que l'élimination de x'' et y'', entre les équations (14), (15), (16), conduira à l'équation de l'épicycloïde cherchée.

Des équations (15) et (16) on tire facilement, en ayant égard à l'équation (14)

$$x''-x=\frac{x''^2-y''^2}{4a} \quad , \qquad y''-y=\frac{2x''y''}{4a}$$

ou encore, en employant toujours l'équation (14)

$$2a(x-a)=x''(2a-x'') \quad , \qquad (17)$$

$$2ay=y''(2a-x'') \; . \qquad (18)$$

d'où on conclura, par division,

$$\frac{y}{x-a}=\frac{y''}{x''} \; ; \qquad (19)$$

ce qui veut dire que la droite menée du point ($x=+a$, $y=0$) au point décrivant est constamment parallèle à celle qui va de l'origine au centre du cercle mobile. Cette propriété, analogue à celle qu'exprimait l'équation (6), peut déjà nous faire pressentir à quel résultat nous allons être conduits.

En éliminant y'' entre les équations (14) et (19), on trouve

$$x''=\frac{2a(x-a)}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}} \quad ,$$

valeur qui, substituée dans l'équation (17), donne pour l'équation de l'épicycloïde demandée

$$(x^2+y^2-a^2)^2=4a^2\{y^2+(x-a)^2\} .$$

En changeant, dans cette équation, a en $\frac{r}{3}$, elle devient précisément celle de notre caustique.

Ainsi, pour un point lumineux situé à la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la caustique est l'épicycloïde engendrée par un des points de la circonférence d'un cercle mobile, d'un rayon trois fois moindre que celui du cercle réflecteur, roulant sur un cercle fixe, concentrique à ce cercle réflecteur, et ayant également un rayon trois fois moindre que le sien.* Le point de rebroussement est celui de la circonférence du cercle base qui coïncide avec le point décrivant (*).

II. Occupons-nous maintenant de la recherche de la caustique par réflexion relative au cercle, dans le cas des rayons de lumières parallèles.

Soient toujours r le rayon du cercle réfléchissant (x,y) un quelconque des points de la caustique (x',y') le point incident qui lui correspond. Afin de simplifier nos calculs, nous prendrons le centre du cercle pour origine des coordonnées rectangulaires, et nous supposerons l'axe des x parallèle à la direction commune des rayons incidens. Nous aurons d'abord

$$x'^2+y'^2=r^2 . \qquad (1)$$

Soit p la tangente tabulaire de l'angle que fait le rayon réflé-

---

(*) Enfin, pour ne rien laisser à dire sur ce sujet, il faut encore ajouter que, pour un point rayonnant situé à la circonférence d'un cercle réfléchissant, *la caustique est l'enveloppe de l'espace parcouru par un cercle mobile et variable de rayon qui, ayant constamment son centre sur la circonférence d'un cercle concentrique au cercle réflecteur, passe constamment par un point fixe de cette circonférence.* Ce point fixe est alors le point de rebroussement de la caustique.

J. D. G.

chi avec l'axe des x, et, par suite, avec le rayon incident; ce rayon réfléchi fera avec la normale, au point d'incidence, un angle dont la tangente tabulaire sera

$$\frac{p-\frac{y'}{x'}}{1+p\frac{y'}{x'}}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \frac{px'-y'}{x'+py'};$$

puis donc que l'angle d'incidence est $\frac{x'}{y'}$, on aura

$$\frac{px'-y'}{x'+py'}=\frac{y'}{x'},$$

ce qui donne

$$p=\frac{2x'y'}{x'^2-y'^2}.$$

L'équation du rayon réfléchi sera donc

$$y-'y=\frac{2x'y'}{x'^2-y'^2}(x-x');$$

ou bien, en ayant égard à l'équation (1)

$$2x'y'x-(x'^2-y'^2)y=r^2y'. \qquad (2)$$

On exprimera que la caustique est l'enveloppe de l'espace parcouru par le rayon réfléchi, en éliminant $\frac{dy'}{dx'}$ des dérivées de (1) et (2), prises en regardant x et y comme constans. Or, ces dérivées donnent

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{x'}{y'}, \quad \frac{dy'}{dx'}=-\frac{2(y'x-x'y)}{2(x'x+y'y)-r^2};$$

on aura donc pour troisième condition, en égalant ces deux valeurs,

$$x'\{2(x'x+y'y)-r^2\}=2y'(y'x-x'y)$$

ou, en réduisant

$$2(x'^2-y'^2)x+4x'y'y=r^2x' . \qquad (3)$$

L'équation de la caustique cherchée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1), (2), (3).

Pour effectuer cette élimination, éliminons tour-à-tour, comme nous l'avons déjà fait ci-dessus, x et y entre les équations (2) et (3); en ayant toujours égard à l'équation (4), il viendra

$$3r^2x=x'(r^2+2y'^2) , \qquad (4)$$

$$r^2y=y'^3 . \qquad (5)$$

La première de ces équations peut encore s'écrire ainsi

$$r^2(2x-x')=2x'y'^2 ;$$

et, en divisant l'équation (5) par cette dernière, il vient

$$\frac{2y}{2x-x'}=\frac{y'}{x'} , \qquad \text{ou} \qquad \frac{y}{x-\frac{1}{2}x'}=\frac{y'}{x'} ; \qquad (6)$$

ce qui signifie que la droite menée par le milieu de l'abscisse du point d'incidence, parallèlement à la normale en ce point, rencontre le rayon réfléchi en son point de contact avec la caustique ; voilà donc un premier moyen graphique de décrire cette courbe par points.

En ajoutant au quarré de l'équation (4) le quadruple du quarré de l'équation (5), on trouvera, en ayant toujours égard à l'équation (1)

$$4(x^2+y^2)-r^2=3y'^2 ;$$

d'où

$$\{4(x^2+y^2)-r^2\}^3=27(y'^3)^2\ ;$$

mettant donc dans cette dernière, pour y'^3, sa valeur donnée par l'équation (5), on obtiendra pour l'équation cherchée de la caustique

$$\{4(x^2+y^2)-r^2\}^3=27r^4y^2\ . \qquad (7)$$

On voit que cette courbe est une ligne du sixième ordre, symétrique par rapport aux deux axes. En la discutant on lui trouvera, sur l'axe des x, deux points de rebroussement, situés de part et d'autre du centre du cercle, à une distance de ce centre égale à la moitié de son rayon. On trouvera de plus que cette courbe touche le cercle aux deux extrémités du diamètre perpendiculaire à celui qui joint les deux points de rebroussement.

Si l'on cherche la longueur du rayon réfléchi, mesuré depuis le point d'incidence jusqu'à son point de contact avec la caustique; en représentant cette longueur par P', on aura

$$P'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=\sqrt{x^2+y^2-2(x'x+y'y)+r^2}\ ;$$

ou, en mettant pour x et y les valeurs données par les équations (4) et (5) et ayant égard à l'équation (1),

$$P'=\tfrac{1}{2}\sqrt{r^2-y'^2}=\frac{x'}{2}\ . \qquad (8)$$

Ainsi, dans la caustique par réflexion formée par des rayons parallèles tombant sur la circonférence d'un cercle, *la longueur du rayon réfléchi est moitié de celle de la projection, sur la direction commune des rayons incidens, de la normale au point d'incidence;* ce qui offre un nouveau moyen fort simple de décrire la caustique par points.

Au moyen de l'équation (8), l'équation (6) devient

$$\frac{y}{x-P'}=\frac{y'}{x'} ;$$

ce qui signifie que *la parallèle menée par un quelconque des points de la caustique à la normale au point d'incidence correspondant rencontre le diamètre parallèle aux rayons incidens à une distance du centre du cercle réflecteur égale à la longueur du rayon réfléchi.*

Occupons-nous présentement de la rectification de la caustique. La formule générale est

$$s=\int \mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} . \qquad (9)$$

Or, on tire des équations (4) et (5)

$$2r^2\mathrm{d}x=(r^2+2y'^2)\mathrm{d}x'+4x'y'\mathrm{d}y' ,$$

$$r^2\mathrm{d}y=3y'^2\mathrm{d}y' ;$$

ce qui donne, en mettant pour $y'\mathrm{d}y'$ sa valeur $-x'\mathrm{d}x'$, donnée par l'équation (1)

$$2r^2\mathrm{d}x=\{(r^2+2y'^2)-4x'^2\}\mathrm{d}x'=3(y'^2-x'^2)\mathrm{d}x' ,$$

$$r^2\mathrm{d}y=-3x'y'\mathrm{d}x' .$$

On tire de là

$$\mathrm{d}x=\frac{3(y'^2-x'^2)\mathrm{d}x'}{2r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x'y'}{y'^2-x'^2}$$

d'où

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{(y'^2-x'^2)^2+4x'^2y'^2}{(y'^2-x'^2)^2}=\frac{(x'^2+y'^2)^2}{(y'^2-x'^2)^2}=\frac{r^4}{(y'^2-x'^2)^2} ;$$

substituant toutes ces valeurs dans la formule (9), elle deviendra

$$s=\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\int \tfrac{1}{2}dx'=\tfrac{1}{2}x' ,$$

En comptant les arcs de l'axe des y, il devient inutile d'ajouter une constante à cette intégrale. Si on la compare à la formule (8), on pourra écrire

$$s=x'+P' ;$$

c'est-à-dire que *la longueur de la caustique comprise entre le diamètre du cercle réfléchissant perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens et un quelconque des points de cette courbe, est égale à la distance de ce point à ce diamètre, augmentée de la longueur du rayon réfléchi qui répond à ce même point.* On voit aussi que *la longueur totale de la caustique est triple de la longueur du diamètre du cercle réfléchissant.*

Cherchons l'équation de la développée de notre caustique. Soit (X,Y) un quelconque des points de cette développée ; l'équation de la normale à la caustique au point (x,y) sera

$$(X-x)+(Y-y)\frac{dy}{dx}=0 ;$$

ou bien, d'après la valeur trouvée ci-dessus pour $\frac{dy}{dx}$

$$(y'^2-x'^2)(X-x)-2x'y'(Y-y)=0 ;$$

ou enfin, en mettant pour x et y leurs valeurs tirées des équations (4) et (5) et faisant usage de l'équation (1)

$$4x'y'Y+2(x'^2-y'^2)X=r^2x^2 ; \qquad (10)$$

c'est l'équation (3), dans laquelle on aurait mis respectivement X et Y pour x et y.

Pour exprimer que la développée est l'enveloppe de l'espace parcouru par la normale, il faudra éliminer $\frac{dy'}{dx'}$ entre les dérivées des équations (1) et (10) prises par rapport à x' et y' seulement, ce qui donnera

$$8x'y'X-4(x'^2-y'^2)=r^2y' \,. \qquad (11)$$

L'équation de la courbe cherchée sera le résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1), (10), (11).

En résolvant les deux dernières par rapport à X et Y, et faisant usage de l'équation (1), il vient

$$2r^2X=x'^3 \,,$$

$$4r^2Y=y'(r^2+2x'^2) \,.$$

En ajoutant au quarré de la seconde le quadruple du quarré de la première et en faisant toujours usage de l'équation (1), il viendra

$$16r^4(X^2+Y^2)=4x'^6+y'^2(r^2+2x'^2)^2=4x'^4(x'^2+y'^2)+4r^2x'^2y'^2+r^4y'^2=r^4(r^2+3x'^2) \,;$$

ou bien

$$16(X^2+Y^2)-r^2=3x'^2 \,;$$

d'où en cubant

$$\{16(X^2+Y^2)-r^2\}^3=27(x'^3)^2 \,;$$

ou encore en mettant pour x'^3 sa valeur $2r^2X$ trouvée ci-dessus, et posant pour abréger, $r=2R$

$$\{4(X^2+Y^2)-R^2\}^3=27R^4X^2 \,. \qquad (12)$$

Equation qui n'est autre que l'équation (7), dans laquelle on aurait changé y en X, x en Y et r en R.

Ainsi, *la développée de la caustique par réflexion relative au cercle, dans le cas des rayons incidens parallèles, est une courbe exactement semblable à cette caustique, mais relative à un cercle réfléchissant concentrique au premier et d'un rayon moitié moindre, laquelle est située perpendiculairement à cette caustique ;* c'est-à-dire, de telle sorte que la droite qui joint ses deux points d'inflexion est perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens, ou que ses deux sommets coïncident avec les points de rebroussement de la première.

Il résulte de là que *la caustique par réflexion relative au cercle, dans le cas des rayons incidens parallèles, est la développée d'une courbe toute semblable, mais relative à un cercle concentrique à celui-là et d'un rayon double du sien, laquelle a une situation perpendiculaire à la sienne ;* c'est-à-dire, telle que la droite qui joint ses deux points de rebroussement est perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens, ou encore telle que ses points de rebroussement coïncident avec les deux sommets de la caustique.

Proposons-nous de trouver l'équation de l'épicycloïde engendrée par l'un des points de la circonférence d'un cercle d'un rayon c, roulant sur un autre cercle d'un rayon $2c$.

Prenons le centre du cercle fixe pour origine des coordonnées rectangulaires. Supposons qu'à l'origine du mouvement le point de contact des deux cercles soit sur l'axe des x, du côté des x positifs, que ce point est le point décrivant, et que le cercle mobile tourne en s'élèvant dans la région des y positives.

Soient, pour un instant quelconque, (x,y) le point décrivant, et (x'',y'') le centre du cercle mobile; nous aurons d'abord

$$x''^2+y''^2=9c^2\,, \qquad (13)$$

$$(x''-x)^2+(y''=y)^2=c^2\,. \qquad (14)$$

La droite qui joint le centre du cercle mobile fera avec le point décrivant avec l'axe des x, un angle qui aura pour tangente tabulaire $\frac{y''-y}{x''-x}$. Cet angle sera l'angle extérieur d'un triangle dans lequel le côté opposé sera la droite qui joint les centres des deux cercles ; et les deux angles adjacens à ce côté devront, par la nature du problème, être double l'un de l'autre ; d'où il suit que l'angle extérieur dont il s'agit devra être triple du plus petit des angles intérieurs opposés. Or, la tangente tabulaire de ce dernier étant $\frac{y''}{x''}$, la tangente tabulaire de son triple devra être $\frac{y''(3x''^2-y''^2)}{x''(x''^2-3y''^2)}$, la troisième équation du problème sera donc

$$\frac{y''-y}{x''-x}=\frac{y''(3x''^2-y''^2)}{x''(x''^2-3y''^2)} . \qquad (15)$$

L'équation de l'épicycloïde demandée sera donc le résultat de l'élimination de x'' et y'' entre les équations (13), (14), (15).

On tire des deux dernières

$$x''-x=\frac{cx''(x''^2-3y''^2)}{\sqrt{y''^2(3x''^2-y''^2)^2+x''^2(x''^2-3y''^2)^2}} .$$

$$y''-y=\frac{cx''(3x''^2-y''^2)}{\sqrt{y''^2(3x''^2-y'')^2+y''^2(x''-3y''^2)^2}} ;$$

mais, au moyen de l'équation (13), le dénominateur commun de ces valeurs se réduit à $27c^3$, de manière qu'on a simplement

$$27c^2(x''-x)=x''(x''^2-3y''^2) ,$$

$$27c^2(y''-y)=y''(3x''^2-y''^2) ;$$

ou, en faisant encore usage de l'équation (13)

$$9c^2(3x-2x'')=4x''y''^2\ , \qquad (16)$$

$$27c^2y=4y''^3\ . \qquad (17)$$

En divisant la seconde par la première, il vient

$$\frac{3y}{3x-2x''}=\frac{y''}{x''}\ , \qquad \text{ou} \qquad \frac{y}{x-\frac{2}{3}x''}=\frac{y''}{x''}\ ;$$

ce qui nous apprend que la droite menée par un quelconque (x,y) des points de l'épicycloïde, parallèlement à celle qui joint les centres des deux cercles rencontre l'axe des x à une distance de l'origine égale aux deux tiers de l'abscisse du centre du cercle mobile, ou égale à l'abscisse de son point de contact avec le cercle fixe.

En mettant l'équation (16) sous cette forme

$$27c^2x=2x''(9c^2+2y''^2)\ ,$$

et ajoutant ensuite son quarré à celui de l'équation (17), il viendra, en faisant usage de l'équation (13),

$$3(x^2+y^2-4c^2)=4y''^2\ ;$$

d'où, en élevant les deux membres au cube,

$$27(x^2+y^2-4c^2)^3=64y''^6=4.(4y''^3)^2\ .$$

mettant dans cette dernière pour $4y''^3$ sa valeur donnée par l'équation (17) il viendra finalement

$$(x^2+y^2-4c^2)^3=108c^4y^2\ :$$

équation qui coïncide exactement avec l'éqnation (7) de la caustique, si l'on y change c en $\frac{r}{4}$.

Ainsi, *dans le cas des rayons incidens parallèles, la caustique par réflexion relative au cercle est une épicycloïde engendrée par l'un des points de la circonférence d'un cercle d'un rayon égal au quart de celui du cercle réfléchissant, roulant sur un cercle concentrique à ce dernier, et d'un rayon moitié moindre que le sien.* Les points de la circonférence du cercle-base où vient s'appliquer le point décrivant, sont les deux points de rebroussement de la caustique (*).

III. Il va nous devenir facile, d'après ce qui précède, d'attaquer le cas général du problème qui nous occupe.

Soit toujours r le rayon du cercle réfléchissant. Pour simplifier nos calculs, autant que la question peut le comporter, nous placerons encore l'origine au centre de ce cercle, et nous ferons passer l'axe des x par le point rayonnant que nous supposerons d'ailleurs quelconque sur cet axe.

Cela posé, soient (x,y) un quelconque des points de la caustique (x',y') le point incident qui lui correspond, et enfin a l'abscisse du point lumineux; on aura d'abord

$$x'^2+y'^2=r^2 \ . \qquad (1)$$

L'équation du rayon réfléchi sera

$$y-y'=p(x-x') \ ,$$

(*) Pour ne rien laisser à dire sur ce sujet, il faut encore ajouter que *la caustique par réflexion relative au cercle, dans le cas des rayons incidens parallèles, est l'enveloppe de l'espace parcouru par un cercle mobile, variable de grandeur et de situation, qui, ayant constamment son centre sur la circonférence d'un cercle fixe, concentrique au cercle réfléchissant, mais d'un rayon moitié moindre, serait constamment tangent au diamètre de ce cercle fixe de même direction que les rayons incidens.*

J. D. G.

dans laquelle il faudra déterminer p de telle sorte que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence.

Or, la tangente de l'angle d'incidence est

$$\frac{\frac{y'}{x'-a}-\frac{y'}{x'}}{1+\frac{y'^2}{x'(x'-a)}}\text{, ou } \frac{ay'}{x'^2+y'^2-ax'}\text{, ou enfin } \frac{ay'}{r^2-ax'};$$

et celle de l'angle de réflexion est

$$\frac{\frac{y'}{x'}-p}{1+p\frac{y'}{x'}}\text{, ou } \frac{y'-px'}{x'+py'};$$

on doit donc avoir

$$\frac{ay'}{r^2-ax'}=\frac{y'-px'}{x'+py'};$$

d'où

$$p=\frac{y'(r^2-2ax')}{a(y'^2-x'^2)+r^2x'}=\frac{y'(r^2-2ax')}{x'(r^2-2ax')+ar^2}.$$

L'équation du rayon réfléchi sera donc

$$y-y'=\frac{y'(r^2-2ax')}{x'(r^2-2ax')+ar^2}(x-x'),$$

ou bien, en chassant le dénominateur, développant et réduisant,

$$[x'(r^2-2ax')+ar^2]y-y'(r^2-2ax')x=ar^2y'; \qquad (2)$$

Les dérivées de (1) et (2) sont

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{x'}{y'}, \qquad \frac{dy'}{dx'}=\frac{(r^2-4ax')y+2ay'x}{(r^2-2ax')x+ar^2};$$

on exprimera donc que la caustique est l'enveloppe de l'espace parcouru par le rayon réfléchi, en écrivant

$$-\frac{x'}{y'}=\frac{(r^2-4ax')y+2ay'x}{(r^2-2ax')x+ar^2}\ ;$$

ou bien, en chassant les dénominateurs et ayant égard à l'équation (1),

$$\{x'(r^2-4ax')+2ar^2\}x+(r^2-4ax')y'y+ar^2x'=0\ . \qquad (3)$$

L'équation de la caustique cherchée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y', entre les équations (1), (2), (3).

S'il ne s'agissait que d'obtenir les points de cette caustique qui correspondent aux divers points d'incidence, sans qu'il fût nécessaire de parvenir à l'équation de la courbe, on remarquerait que x' et y' étant dès lors donnés et les équations (2) et (3) n'étant que du premier degré seulement en x et y, ces équations sont conséquemment celles de deux droites qui, par leur intersection, doivent donner un des points de la caustique.

L'équation (2) est celle d'une tangente à la caustique, et par suite celle du rayon réfléchi qui répond au point d'incidence (x',y'). On peut donc considérer comme déjà construite la droite exprimée par cette équation.

Pour construire la droite exprimée par l'équation (3) on pourrait tout simplement déterminer ses intersections avec les axes des coordonnées, et on serait même d'autant mieux fondé à en agir ainsi, qu'ici ces axes ne sont point des lignes tout-à-fait étrangères au problème qui nous occupe; mais il sera peut-être préférable de faire usage d'une méthode employée d'une manière si heureuse par M. Gergonne, en plusieurs endroits de son recueil.

L'équation (3) peut être écrite ainsi

$$\frac{x'x+y'y}{r^2}=\frac{a(2x-x')}{r^2-4ax'}\ ; \qquad (4)$$

d'où il suit qu'on aura deux points de la droite qu'elle exprime en construisant les denx systèmes de deux droites

$$\left.\begin{array}{r} x'x+y'y=0\ , \\ 2x-x'=0\ ; \end{array}\right\}\ (5) \qquad \left.\begin{array}{r} x'x+y'y=r^2\ . \\ a(2x-x')=r^2-4ax'\ . \end{array}\right\}\ (6)$$

qu'on déduit de (4), en y supposant tour-à-tour ses deux membres égaux à zéro et à l'unité.

La première des équations (5) est celle d'une perpendiculaire menée par l'origine au rayon qui va au point d'incidence ; l'autre est celle d'une droite perpendiculaire à l'axe des x, dont l'abscisse est moitié de celle de ce point d'incidence ; ainsi le point (5) de la droite (4), intersection de ces deux droites, sera toujours facile à construire.

La première des équations (6) est celle de la tangente au cercle au point d'incidence ; la seconde qui revient à

$$x=\tfrac{1}{2}.\frac{r^2}{a}-\tfrac{3}{2}x'\ ,$$

est celle d'une perpendiculaire à l'axe des x facile à construire, puisque $\frac{r^2}{a}$ est la distance de l'origine à la polaire du point rayonnant, et que x' est l'abscisse du point d'incidence. Ainsi le point (6) de la droite (4), intersection de ces deux droites, et par suite la droite (4) elle-même sera facile à construire. Elle coupera le rayon réfléchi à son point de contact avec la caustique. Voilà donc un procédé assez simple, pour construire tant de points qu'on voudra de cette courbe.

Occupons-nous présentement de la laborieuse recherche de son équation. En résolvant les équations (2) et (3), par rapport à x et y ; et se servant de l'équation (1) pour simplifier les résultats, il vient

$$r^2(r^2-3ax'+2a^2)y=2a^2y'^3\ , \qquad (7)$$

$$r^2(r^2-3ax'+2a^2)x=a\{2ax'y'^2-r^2(r^2-ax')\}\ . \qquad (8)$$

L'équation (8) peut encore s'écrire ainsi

$$r^2\{(r^2-3ax'+2a^2)x+a(r^2-ax')\}=2a^2x'y'^2 \; ; \qquad (9)$$

d'où, en divisant (7) par cette dernière

$$\frac{y}{x+\dfrac{a(r^2-ax')}{r^2-3ax'+2a^2}}=\frac{y'}{x'} \; . \qquad (10)$$

Ce résultat nous apprend que si, par l'un quelconque (x,y) des points de la caustique, on mène une parallèle au rayon qui va au point d'incidence (x',y') qui lui correspond, cette parallèle coupera l'axe des x en un point dont l'abscisse sera

$$-\frac{a(r^2-ax')}{r^2-3ax'+2a^2} \; .$$

Nous verrons tout-à-l'heure ce que c'est que cette dernière quantité.

Pour faciliter la solution du problème, il faut en combiner les équations de manière à les rabaisser autant qu'il est possible par rapport à x' et y'. D'abord, au moyen des valeurs de x et de y données par les équations (7) et (8), et en faisant usage de l'équation (1), on trouve

$$(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-2ar^2x-a^2r^2=\frac{12a^4(a-x')^2y'^2}{(r^2-3ax'+2a^2)^2} \; ;$$

mais, l'équation (7) donne, en quarrant et renversant.

$$4a^4y'^6=r^4(r^2-3ax'+2a^2)^2y^2$$

multipliant ces deux équations membre à membre et réduisant, il viendra

$$\frac{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-2ar^2x-a^2r^2}{3r^4y^2}=\frac{(a-x')^2}{y'^4} \; ;$$

et par suite

$$\frac{a-x'}{y'^2}=\sqrt{\frac{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-2ar^2x-a^2r^2}{3r^4y^2}}\ .$$

Le second membre de cette dernière équation ne renferme plus que les seules cordonnées de la caustique ; en le représentant par $\frac{1}{M}$, et en mettant pour y'^2 sa valeur $r^2-x'^2$, on aura

$$M(a-x')=r^2-x^{2\prime}.$$

De cette dernière équation, combinée avec l'équation (1), on tirera les valeurs de x' et y' qui, substituées dans l'une ou l'autre des équations (7) et (8), donneront l'équation cherchée en x et y. Nous n'achevons pas le calcul, qui n'offre plus présentement que des difficultés pratiques, parce que le résultat en serait trop compliqué pour pouvoir être employé utilement.

Puisque l'équation générale de la caustique rapportée à deux axes choisis même de la manière la plus favorable, se présente sous une forme si peu traitable, il convient de remplacer cette équation par une autre entre d'autres variables ; car un problème ne peut être réputé résolu que lorsqu'on est parvenu à un résultat susceptible d'interprétation. Cherchons, par exemple, la relation constante qui doit exister entre la longueur du rayon incident et celle du rayon réfléchi ; le premier étant compté depuis le point rayonnant jusqu'au point d'incidence, et l'autre depuis ce dernier point jusqu'au point de contact du rayon réfléchi avec la caustique.

Soient P et P' ces deux rayons, on aura d'abord

$$P=\sqrt{y'^2+(a-x')^2}=\sqrt{r^2+a^2-2ax'}\ ; \qquad (12)$$

et ensuite

$$P'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=\sqrt{r^2-2(x'x+y'y)+(x^2+y^2)}\ .$$

En éliminant x,y,y' de cette dernière formule, au moyen des équations (1), (7), (8), elle deviendra

$$P'=\frac{r^2-ax'}{r^2-3ax'+2a^2}\sqrt{r^2+a^2-2ax}\ ,$$

c'est-à-dire (11),

$$P'=\frac{r^2-ax'}{r^2-3ax'+2a^2}P\ . \qquad (13)$$

Au moyen de cette équation (13), l'équation (10) devient

$$\frac{y}{x+a\dfrac{P'}{P}}=\frac{y'}{x'}\ ,$$

c'est-à-dire que la parallèle menée de l'un quelconque des points de la caustique au rayon qui va au point d'incidence correspondant, coupe la droite qui va du centre au point rayonnant à une distance de ce centre quatrième proportionnelle au rayon incident, au rayon réfléchi et à la longueur de cette droite.

Si l'on élimine x' entre les équations (12) et (13), on trouvera

$$P'=\frac{P[P^2+(r^2-a^2)]}{3P^2-(r^2-a)}\ ; \qquad (14)$$

formule qui donnera la longueur du rayon réfléchi, quand on connaîtra celle du rayon incident.

Mais cette formule est susceptible d'une simplification notable. Supposons, en effet, que le point rayonnant soit intérieur au cercle, et soit $4c$ la longueur de la corde interceptée dans le cercle par le rayon incident considéré comme droite indéfinie, longueur qui est censée connue, dès qu'on connaît la direction de ce rayon. Par la propriété des cordes qui se coupent on aura

$$P(4c-P)=(r+a)(r-a)=r^2-a^2\ .$$

Mettant cette valeur de r^2-a^2 dans la formule (14), elle deviendra

$$P'=\frac{cP}{P-c}\ ; \qquad (15)$$

ou encore

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{P'}=\frac{1}{c}\ . \quad (*) \qquad (16)$$

Si le point rayonnant était extérieur au cercle, on aurait, par la propriété des sécantes qui partent d'un même point,

$$P(P-4c) \quad \text{ou} \quad P(P+4c)=a^2-r^2=-(r^2-a^2)$$

suivant que le rayon parviendrait à la partie concave ou à la partie convexe de la circonférence. Dans le premier cas, la formule serait évidemment la même que ci-dessus ; dans le second, P aurait simplement changé de signe et on trouverait

$$P'=\frac{cP}{P+c}\ , \qquad (17)$$

ou bien

$$\frac{1}{P'}-\frac{1}{P}=\frac{1}{c}\ .$$

Pour le rayon lumineux qui passe par le centre, on a $c=\frac{1}{2}r$ et $P=a+r$ ou $a-r$ suivant que le rayon incident atteint la concavité ou la convexité du cercle ; substituant dans les formule (15) et (17) il vient

$$P'=\frac{r(a+r)}{2a+r}\ , \qquad P'=\frac{r(a-r)}{2a-r}\ ;$$

ce qui donne la position des points de rebroussement, dont les distances au centre sont

$$x=-\frac{ar}{2a+r}\ , \qquad x=+\frac{ar}{2a-r}\ .$$

Une plus ample discussion prouvera d'ailleurs que, pour le cas général, la caustique est à peu près de même forme que pour ce-

(*) C'est précisément la formule de Petit. Voyez la correspondance sur l'Ecole polytechnique (tom. II, pag. 355).

J. D. G.

lui des rayons parallèles, si ce n'est qu'elle cesse alors d'être symétrique par rapport à l'axe des x. Lorsque le point rayonnant est extérieur au cercle, la caustique touche ce cercle à ses intersections avec la polaire de ce point.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème d'optique proposé à la page 32 du précédent volume;

Par M. Thomas de St-Laurent, Officier au Corps royal d'état-major.

Pour généraliser un peu le problème dont il s'agit, nous l'énoncerons ainsi qu'il suit :

PROBLÈME. Lorsque des rayons de lumières émanés d'un même point quelconque pénètrent obliquement dans l'intérieur d'une tasse cylindrique de porcelaine blanche; il se forme au fond de la tasse une caustique bien prononcée. On propose de trouver l'équation de cette courbe?

Solution. Les rayons qui pénètrent dans l'intérieur de la tasse, après s'être réfléchis à la rencontre de sa surface latérale, forment, par leur rencontre consécutive, une surface caustique dont l'intersection avec le fond de la tasse est évidemment la courbe demandée.

Pour fixer les idées supposons l'axe de cette tasse vertical, et conséquemment son fond horizontal.

Pour avoir la direction du rayon réfléchi qui répond à un point d'incidence quelçonque, on sait qu'il ne s'agit que de mener une droite par ce point et par un autre point symétrique avec le point rayonnant par rapport au plan tangent au cylindre au point d'incidence dont il s'agit.

Mais ce plan tangent touche le cylindre suivant tous les points d'une même droite verticale ; donc tous les rayons incidens qui ont leurs points d'incidence dans une même droite verticale ont leurs rayons réfléchis compris dans un même plan vertical passant par cette droite et par un point situé symétriquement avec le point rayonnant, par rapport au plan qui touche le cylindre suivant cette droite.

Si l'on considère sur le cylindre une autre droite infiniment voisine de celle-là, comme le lieu d'une nouvelle série de points d'incidence ; les rayons réfléchis correspondans seront dans un second plan vertical qui coupera le premier suivant une droite verticale dont tous les points appartiendront évidemment à la surface caustique à laquelle les rayons réfléchis donnent naissance.

Cette surface est donc formée d'une suite d'élémens rectilignes verticaux ; c'est donc une surface cylindrique verticale ; et conséquemment, pour en compléter la définition, il suffira d'en connaître une section par un plan horizontal.

Or si, par le point rayonnant, on conçoit un plan horizontal, et qu'on ne considère que les rayons incidens compris dans ce plan, il est clair que la caustique à laquelle ils donneront naissance sera l'intersection de leur plan avec la surface caustique cylindrique dont il vient d'être question ; mais, d'un autre côté, cette caustique sera évidemment celle qui aurait lieu dans le cercle résultant de la section du cylindre par le plan horizontal ; donc telles seront aussi les sections horizontales de la surface caustique, et, en particulier, sa section par le plan de la base du cylindre.

Ainsi *la caustique formée au fond d'une tasse cylindrique, par des rayons de lumière émanés d'un même point quelconque de l'espace, n'est autre que la caustique à laquelle la circonférence de ce fond donnerait naissance, si l'on substituait au point lumineux sa projection orthogonale sur le plan de cette circonférence*, c'est-à-dire, que cette courbe est précisément celle qui a fait le sujet du mémoire qu'on vient de lire.

On voit d'ailleurs que, si l'on fait mouvoir le point lumineux sur une droite parallèle à l'axe de la tasse, la caustique ne changera ni de figure ni de situation ; d'où il suit qu'à l'inverse, le point lumineux étant supposé le centre d'une sphère idéale d'un rayon quelconque, si l'on fait mouvoir la tasse de manière que son axe soit constamment tangent à cette sphère, la figure de la caustique demeurera invariable.

Lorsqu'il s'agit des rayons solaires, on peut, sans erreur sensible, les supposer parallèles ; et alors la caustique est telle que l'exigent ces sortes de rayons. Quelle que soit d'ailleurs l'élévation du soleil sur l'horizon, et de quelque manière et dans quelque sens qu'on incline la tasse, la figure de la caustique demeurera invariable ; de sorte que son point de rebroussement se trouvera constamment à une distance du centre du fond de la tasse égale à la moitié du rayon de ce fond.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie.

I. Si deux lignes du $m.^{\text{ième}}$ ordre ont $m-1$ sécantes communes, réelles ou idéales (*), elles en auront une $m.^{\text{ième}}$, qui pourra être aussi réelle ou idéale ; de sorte que leurs m^2 points d'intersection seront distribués m à m sur m droites.

Si les deux courbes ont $m-2$ sécantes communes, comprenant conséquemment m^2-2m de leurs points d'intersection ; les $2m$ points d'intersection restans appartiendront à une ligne du second ordre.

Si les deux courbes ont seulement $m-3$ sécantes communes, comprenant conséquemment m^2-3m de leurs points d'intersection ; les $3m$ points d'intersection restans appartiendront à une ligne du troisième ordre.

(*) On entend uniquement ici par *sécante commune* à deux lignes du $m.^{\text{ième}}$ ordre une droite qui renferme m de leurs intersections, réelles ou imaginaires.

Généralement, si les deux courbes ont seulement $m-n$ sécantes communes comprenant conséquemment m^2-mn de leurs points d'intersection ; les mn points d'intersection restans appartiendront à une ligne du $n.^{ième}$ ordre.

II. Si plusieurs lignes du $m.^{ième}$ ordre, ayant m sécantes communes, réelles ou idéales, sont coupées par une transversale curviligne du même ordre, et ayant avec elles $m-n$ sécantes communes ; il y aura, sur chaque courbe, mn points d'intersection, situés sur une ligne du $n.^{ième}$ ordre, et toutes les lignes du $n.^{ième}$ ordre auront pour sécantes communes les n autres sécantes communes, qui n'appartiennent pas à la transversale.

Dans le cas particulier de $n=1$, ce théorème devient :

Si plusieurs lignes du $m.^{ième}$ ordre, ayant m sécantes communes, sont coupées par une transversale curviligne de même ordre, ayant avec elles $m-1$ sécantes communes ; cette transversale déterminera, sur chaque courbe, une nouvelle sécante, et toutes ces sécantes iront se croiser en un point unique, situé sur la $m.^{ième}$ sécante qui n'appartient pas à la transversale.

III. Si deux lignes de $m.^{ième}$ ordre ont respectivement, avec une troisième ligne de cet ordre, m sécantes communes, réelles ou idéales, et d'ailleurs quelconques ; les m^2 points, réels ou imaginaires, communs aux deux premières courbes et les m^2 points communs aux deux systèmes de sécantes se trouveront sur une même ligne du $n.^{ième}$ ordre.

IV. Si deux lignes du $m.^{ième}$ ordre ont respectivement, avec une troisième du même ordre, m sécantes communes, toutes issues d'un même point, elles auront aussi entre elles m sécantes communes issues de ce point (*).

(*) Le géomètre qui indique ces théorèmes ajoute qu'ils ont leurs analogues pour les surfaces courbes, en appelant *plan sécant commun* à deux surfaces du $m.^{ième}$ ordre le plan d'une courbe de même ordre, suivant laquelle se coupent ces surfaces.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

Théorèmes et problèmes, sur les contacts des sections coniques;

Par M. Pluker, docteur de l'Université de Bonn.

On sait que, pour déterminer une conique sur un plan, il faut cinq conditions distinctes, et déjà M. Brianchon a traité tous les cas où ces conditions sont de passer par des points ou de toucher des droites données (*).

Mais on peut aussi exiger d'une conique cherchée qu'elle ait avec une conique déjà tracée un ou plusieurs contacts d'ordre plus ou moins élevés et compléter ensuite les conditions du problème, en observant qu'un contact simple, en un point donné, équivaut à deux conditions qu'un contact du second ordre, en ce même point, équivaut à trois conditions, et en observant aussi que deux coniques tracées sur un même plan ne peuvent avoir au plus entre elles que deux contacts simples ou un contact unique du troisième ordre.

Ces considérations donnent naissance à une série de problèmes curieux qui ont fait le sujet des recherches de M. Poncelet, dans son *Traité des propriétés projectives des figures*. Ce que nous nous proposons ici est de considérer quelques cas de cette théorie qui

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre* (in-8.°, Paris, *Bachelier*, 1817).

reposent sur des considérations fort simples et conduisent à des constructions qui ne le sont pas moins. Elles ont l'avantage de se déduire toutes de deux lemmes fondamentaux qui en sont comme l'expression générale, et que nous allons d'abord établir.

Le sujet de ce mémoire étant éminemment du nombre de ceux où les propositions se correspondent deux à deux; afin de rendre cette correspondance plus apparente, nous lui donnerons la forme déjà adoptée en divers endroits du présent recueil (*).

Soient A, B, C, F les quatre points communs à deux coniques, tracées sur un même plan. Par les deux derniers C, F soient menées arbitrairement des sécantes aux deux courbes, coupant respectivement la première en D et E, et la seconde en D′ et E′; les hexagones ABCDEF et ABCD′E′F seront respectivement inscrits à ces courbes. Soient donc G le point de concours de DD′ et AF, et soit H celui de EE′ et BC; par le théorème de Pascal (**), le point de concours de AB soit avec DE soit avec D′E′

Soient A, B, C, F les quatre tangentes communes à deux coniques tracées sur un même plan. Sur les deux dernières C, F soient pris arbitrairement des points par lesquels soient menées deux tangentes D et E à la première courbe et deux tangentes D′ et E′ à la seconde; les hexagones ABCDEF et ABCD′E′F seront respectivement circonscrits à ces courbes. Soient donc G la droite qui joint le point DD′ au point AF, et soit H celle qui joint le point EE′ au point BC; par le théorème de M. Brianchon (**), la

(*) Voy. la pag. 157 du tom. XV et les pag. 209 et 385 du tom. XVI. Il faudra se rappeler au surplus qu'une lettre unique exprime un point dans la colonne de gauche et une droite dans celle de droite, tandis que deux lettres expriment la droite qui joint deux points, dans la colonne de gauche, et le point d'intersection de deux droites, dans celle de droite.

(**) Consultez, pour la démonstration de ce théorème, le présent recueil tom. IV, pages 78 et 381, tom. XIV, pag. 29, tom. XV, pag. 387, et tom. XVI, pag. 324.

devra être en ligne droite avec les deux points G et H ; ce qui revient à dire que les trois droites AB, DE, D′E′ doivent concourir en un même point K ; on a donc le *lemme* que voici :

LEMME I. Deux coniques étant circonscrites à un même quadrilatère ; si, par les deux extrémités d'un même côté de ce quadrilatère on mène aux deux courbes des sécantes arbitraires ; les cordes menées à ces courbes, par les points où elles seront respectivement coupées par ces sécantes, iront concourir toutes deux sur la direction du côté opposé du quadrilatère (*).

Lorsque deux coniques circonscrites à un même triangle ont à l'un de ses sommets une tangente commune, et ont conséquemment un contact simple en ce point ; rien n'empêche de les considérer comme circonscrites à un même quadrilatère, dont un côté, d'une

droite qui joint le point AB soit avec le point DE, soit avec le point D′E′ devra passer par le point de concours de G et H ; ce qui revient à dire que les trois points AB, DE, D′E′ devront appartenir à une même droite K ; on a donc le *lemme* que voici :

LEMME I. Deux coniques étant inscrites à un même quadrilatère ; si, sur les deux côtés d'un même sommet de ce quadrilatère on prend arbitrairement deux points par chacun desquels on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des tangentes respectives à ces deux courbes seront en ligne droite avec le sommet opposé du quadrilatère (*).

Lorsque deux coniques inscrites à un même triangle touchent l'un de ses côtés au même point, et ont conséquemment un contact simple en ce point ; rien n'empêche de les considérer comme inscrites à un même quadrilatère, dont un angle, égal à deux droi-

(*) On doit remarquer qu'il ne s'agit pas seulement ici de quadrilatères convexes, mais encore de quadrilatères dans lesquels deux côtés opposés se couperaient entre les deux autres.

longueur nulle, est dirigé suivant la tangente commune; notre *lemme* est donc encore applicable à ce cas; et, en l'appliquant tour-à-tour aux différens côtés du quadrilatère devenu triangle, on obtient les théorèmes suivans :

THÉORÈME I. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune; si, par ce sommet, on mène deux sécantes arbitraires à ces courbes et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde par les points où elle est coupée par ces deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la direction du côté opposé du triangle.

THÉORÈME II. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune; si, par chaque extrémité du côté opposé, on mène une sécante arbitraire aux deux courbes, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront

tes, à ses deux côtés dirigés suivant la tangente commune; notre *lemme* est donc encore applicable à ce cas; et, en l'appliquant tour-à-tour aux différens côtés du quadrilatère devenu triangle, on obtient les théorèmes suivans :

THÉORÈME I. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur ce côté, on prend arbitrairement deux points, et que par ces points on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec le sommet opposé du triangle.

THÉORÈME II. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur chacun des deux autres côtés, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en *concourir sur la tangente au sommet opposé.*

THÉORÈME III. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune; si, par chacune des extrémités de l'un des côtés adjacens à ce sommet, on mène une sécante arbitraire aux deux courbes, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur l'autre côté adjacent à cet angle.

Ces théorèmes donnent la solution du problème suivant :

PROBLÈME I. Une conique étant donnée et trois points étant donnés sur son périmètre, déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première en l'un des points donnés, la coupe aux deux autres et passe en outre par un quatrième point quelconque donné sur son plan.

Solution. Soient A, B, C les

ligne droite avec celui où elles touchent le troisième côté du triangle.

THÉORÈME III. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur chacun des deux côtés de l'un des sommets adjacens, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec l'autre sommet adjacent au même côté du triangle.

Ces théorèmes donnent la solution du problème suivant :

PROBLÈME I. Une conique étant donnée, et trois tangentes à cette courbe étant aussi données, déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec l'une des tangentes donnée, touche les deux autres tangentes données et touche en outre une quatrième droite quelconque donnée sur son plan.

Solution. Soient A, B, C les

trois points donnés sur le périmètre de la première courbe, et soit P un autre point quelconque de son plan; tout se réduit à trouver un quelconque des points d'une autre conique qui touche la première en C, la coupe en A et B, et passe en outre par le point P.

Pour cela soit menée la tangente en C à la courbe donnée. Soient menées à cette courbe, par le point C, deux sécantes, l'une CP et l'autre arbitraire. Soient respectivement D et E les points où cette courbe est coupée de nouveau par ces sécantes. Soit F le point où la tangente en C est coupée par la droite DE, et soit menée FP; cette droite coupera la sécante CE en un point Q qui appartiendra (*théorème I*) à la courbe cherchée.

Autre solution. Par les points A et B, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, la première AP et l'autre arbitraire. Soient respectivement D et E les points où cette courbe est coupée de nouveau par ces sécantes. Soit F le point où la tangente

trois tangentes données à la première courbe, et soit P une autre droite quelconque, donnée sur son plan; tout se réduit à trouver une quelconque des tangentes à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec C, touche les tangentes A et B et touche en outre la droite P.

Pour cela soit déterminé le point de contact de C avec la première courbe. Soient pris sur C deux points, l'un à son intersection avec P et l'autre arbitraire. Par ces deux points soient menées respectivement des tangentes D et E à la conique donnée. Soit joint le point DE au point de contact de C par une droite F. Par le point FP et le point CE soit menée une droite Q; cette droite sera (*théorème I*) une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Autre solution. Sur les tangentes A et B, soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Par ces deux points soient menées respectivement à la courbe donnée deux tangentes D et E. Soit F la droite qui joint le point de contact de C avec le point en C est coupée par la droite DE, et soit menée FP; cette droite coupera la sécante BE en un point Q qui appartiendra (*théorème II*) à la courbe cherchée.

Troisième solution. Par les points A et C, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, la première AP et l'autre arbitraire. Soient D et F les points où cette courbe est coupée de nouveau par ces sécantes. Soit E l'intersection de DF et de BC. En menant PE, cette droite coupera CF (*théorème III*) en un nouveau point R de la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur les deux autres l'avantage qu'elle n'exige pas que l'on mène la tangente par le point C.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème I diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant:

THÉORÈME IV. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune

DE, et soit joint FP au point BE par une droite Q; cette droite sera (*théorème II*) une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Troisième solution. Sur les tangentes A et C, soient pris deux points, le premier AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées à la courbe donnée les tangentes D et F. Soit E la droite qui joint le point DF au point BC. En joignant le point PE au point CF par une droite R; cette droite sera (*théorème III*) une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur les deux autres l'avantage qu'elle n'exige pas que l'on détermine le point de contact de la tangente C.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème I diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant:

THÉORÈME IV. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur *si, par ce sommet, on mène une sécante arbitraire à ces courbes, puis des tangentes par les points où cette sécante les coupe; ces deux tangentes iront concourir sur la direction du côté opposé du triangle.*

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

PROBLÈME II. Une conique étant donnée, et trois points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première en l'un des points donnés, la coupe aux deux autres et touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan.

Solution. Soient toujours A, B, C les trois points donnés, sur le périmètre de la première courbe; C étant encore celui d'entre eux où elle doit être touchée par la seconde.

Soit F le point où AB est coupée par la droite donnée. Par ce point F, soit menée une tangente à la courbe donnée, et soit T son point de contact avec

ce côté, on prend arbitrairement un point et que de ce point on mène des tangentes aux deux courbes; leurs points de contact seront en ligne droite avec le sommet opposé du triangle.

On poura, d'après cela, résoudre le problème suivant:

PROBLÈME II. Une conique étant donnée, et trois tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec l'une des tangentes données, touche les deux autres tangentes données et passe en outre par un point quelconque, donné sur le plan de la courbe.

Solution. Soient toujours A, B, C les trois tangentes données à la première courbe; C étant encore celle dont le point de contact doit lui être commun avec la seconde.

Soit F la droite qui joint le point AB au point donné. Par un des points où cette droite F coupe la courbe donnée, soit menée une tangente T à cette courbe.

elle. En menant CT, coupant en P la droite donnée, ce point P sera (*Théorème IV*) son point de contact avec la courbe cherchée ; de sorte que le problème se trouvera ramené au précédent.

Remarque. Comme, par le point F, on peut mener deux tangentes à la courbe donnée, on aura deux points de contact T, et par suite deux droites CT et deux points P. Le problème a donc deux solutions.

En joignant le point CT au point donné par une droite P, cette droite P sera (*Théorème IV*) une tangente à la courbe cherchée par le point donné ; de sorte que le problème se trouvera ramené au précédent.

Remarque. Comme la droite F coupe la courbe donnée en deux points, on aura deux tangentes T, et par suite deux points CT et deux droites P. Le problème a donc deux solutions.

Lorsque deux coniques n'ont qu'une seule corde commune et se touchent aux deux extrémités de cette corde, la corde commune peut être considérée comme deux côtés opposés et égaux d'un quadrilatère inscrit, dont les deux autres côtés opposés, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant les tangentes aux deux extrémités de cette corde ; notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai et applicable aux divers côtés du quadrilatère ; et il en résulte alors les théorèmes suivans :

THÉORÈME V. deux coniques ayant une corde commune

Lorsque deux coniques n'ont qu'un seul angle qui puisse leur être circonscrit et touche l'un et l'autre côtés de cet angle au même point, l'angle circonscrit peut être considéré comme un quadrilatère circonscrit, dont deux sommets opposés se confondent ; et dont les deux autres sommets sont situés aux points où les deux courbes touchent les deux côtés de cet angle ; notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai et applicable aux divers sommets du quadrilatère ; et il en résulte alors les théorèmes suivans :

THÉORÈME V. Deux coniques étant inscrites à un même *unique et se touchant aux deux extrémités de cette corde ; si, par l'une des extrémités de la corde commune, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on mène ensuite une corde à chacune de courbes, par les points où elle est coupée par ces deux sécantes ; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente à l'autre extrémité de la corde commune.*

THÉORÈME VI. Deux coniques ayant une corde commune unique et se touchant aux deux extrémités de cette corde ; si, par chacune des extrémités de la corde commune, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes ; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la corde commune elle-même.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME III. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points

angle et touchant en un même point chacun des deux côtés de cet angle ; si, sur l'un des côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement deux points, et que, par chacun d'eux, on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des deux couples de tangentes seront en ligne droite avec le point où les courbes touchent l'autre côté de l'angle circonscrit.

THÉORÈME VI. Deux coniques étant inscrites à un même angle et touchant en un même point chacun des deux côtés de cet angle ; si, sur chacun des côtés de l'angle circonscrit on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des deux couples de tangentes seront en ligne droite avec le sommet même de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME III Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tan–

qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première aux deux points donnés et passe en outre par un troisième point quelconque, donné sur son plan ?

Solution. Soient A, B les deux points donnés sur le périmètre de la première courbe, et soit P un autre point quelconque de son plan. Tout se réduit à trouver un quelconque des points d'une autre conique qui touche la première aux points A et B, et qui passe en outre par le point P.

Pour cela, soit menée la tangente en B à la courbe donnée. Soient menées à cette courbe, par le point A, deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire, coupant de nouveau la courbe en D et E. Soit C le point où la corde DE coupe la tangente en B; en menant CP, cette droite coupera la sécante AE en un point Q qui appartiendra (*Théorème V*) à la courbe cherchée.

Autre solution. Par les points A et B, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire, coupant de nouveau cette courbe en D et E.

gentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première en ses points de contact avec les deux tangentes données, et touche en outre une troisième droite quelconque, donnée sur son plan ?

Solution. Soient A, B les deux tangentes données à la première courbe, et soit P une autre droite quelconque, donnée sur son plan. Tout se réduit à trouver une quelconque des tangentes à une autre conique touchant la première aux points A et B et touchant en outre la droite P.

Pour cela, soit déterminé le point de contact de B avec la courbe donnée. Soient pris, sur la tangente A, deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées à cette courbe deux tangentes, D et E. Soit C la droite qui joint le point DE au point de contact de B; en joignant les points CP et AE par une droite Q, cette droite sera (*Théorème V*) une tangente à la courbe cherchée.

Autre solution. Sur les droites A et B, soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées des tangentes D et E à la courbe don-

Soit C le point de concours de DE et AB, la droite CP coupera la sécante BE en un point Q qui appartiendra (*Théorème IV*) à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on mène la tangente par le point B.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème V diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME VII. Deux coniques ayant une corde commune unique, et se touchant aux deux extrémités de cette corde ; si, par l'une des extrémités de la corde commune, on leur mène une sécante arbitraire ; et qu'on mène ensuite à chacune de ces courbes une tangente, par le point où elle est coupée par cette sécante ; les deux tangentes ainsi menées iront concourir sur la tangente à l'autre extrémité de la corde commune.

née. Soit C la droite qui joint le point DE au point AB ; si l'on joint le point CP au point BE par une droite Q ; cette droite sera (*Théorème VI*) une tangente à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on détermine le point de contact de la tangente B.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème V diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME VII. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et touchant en un même point les deux côtés de cet angle ; si, sur l'un des côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement un point duquel on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de contact de ces tangentes seront en ligne droite avec le point où ces courbes touchent l'autre côté de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME IV. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première aux deux points donnés, et touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan ?

Solution. Soient toujours A et B les deux points donnés, sur le périmètre de la première courbe, et soit C le point où la tangente en B est coupée par la droite donnée. Par ce point, soit mené à la courbe donnée une tangente dont D soit le point de contact. Soit menée AD, coupant en P la droite donnée; ce point P sera (*Théorème VII*) le point de contact de la courbe cherchée avec cette droite; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème III.

Lorsque deux coniques qui n'ont qu'une seule corde commune ont, à l'une des extrémités de cette corde, un contact du

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME IV. Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à ses points de contact avec les tangentes données, et passe en outre par un point quelconque donné sur son plan ?

Solution. Soient toujours A et B les deux tangentes données, à la première courbe, et soit C la droite qui joint le point donné au point de contact de B. Par le point où cette droite coupe la courbe donnée, soit menée une tangente D à cette courbe. Soit joint le point AD au point donné, par une droite P; cette droite P sera (*Théorème VII*) une tangente à la courbe cherchée en ce point, de sorte que le problème se trouvera ramené au problème III.

Lorsque deux coniques qui ne peuvent être inscrites qu'à un même angle ont, en un même point de l'un des côtés de cet second ordre, elles doivent inévitablement se couper à son autre extrémité. Elles peuvent alors être considérées comme circonscrites à un même quadrilatère dont deux côtés consécutifs, d'une égale longueur, se confondent dans la corde commune, tandis que les deux autres, d'une longueur nulle et formant entre eux un angle égal à deux droites, se confondent avec le point de contact, et ont pour direction commune la tangente aux deux courbes en ce point. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et indistinctement applicable aux divers côtés du quadrilatère ; et il en résulte alors les théorèmes suivans :

THÉORÈME VIII. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémité ; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on mène ensuite une corde à chacune des courbes, par les points où elle est coupée par ces deux sécantes ; les deux cordes ainsi me-

angle, un contact du second ordre, elles doivent inévitablement toucher l'autre côté de cet angle en deux points distincts. Elles peuvent alors être considérées comme inscrites à un même quadrilatère dont deux angles consécutifs, de même grandeur, se confondent dans l'angle circonscrit, tandis que les deux autres d'une grandeur nulle, ont leurs sommets au point de contact des deux courbes. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et indistinctement applicable aux divers sommets du quadrilatère, et il en résulte les théorèmes suivans :

THÉORÈME VIII. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de l'angle en deux points distincts ; si, par deux points pris arbitrairement sur le premier de ces côtés, on mène des tangentes aux deux courbes ; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en *nées concourront sur la corde commune.*

THÉORÈME IX. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémité. Si, par chacune des extrémités de cette corde commune, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes, les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente commune aux deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME V. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique, qui ait avec la première, en l'un des points donnés, un contact du second ordre, qui la coupe à l'autre point donné, et passe en outre par un troisième

ligne droite avec le sommet de l'angle circonscrit.

THÉORÈME IX. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de l'angle en deux points distincts. Si, sur chacun des deux côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes, les deux points de concours des couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec le point de contact de ces mêmes courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME V. Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données ; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique, qui ait un contact du second ordre avec la première au point où elle est touchée par une des tangentes données, qui touche aussi l'autre tan-

point quelconque, donné sur son plan ?

Solution. Soient A le point où les deux courbes doivent avoir entre elles un contact du second ordre, et soit B le point où elles doivent se couper; soit de plus P un point du plan de la courbe donnée, par lequel doit passer la courbe cherchée.

Par le point A soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les points où ces deux sécantes rencontrent de nouveau cette courbe. Soit C le point où DE coupe AB; en menant PC, cette droite rencontrera AE en un point Q appartenant à la courbe cherchée (*).

Autre solution. Soit toujours A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B le point où ces deux courbes doivent se couper. Soit enfin P

gente donnée, et touche en outre une troisième droite quelconque, donnée sur son plan ?

Solution. Soit A la tangente au point de contact de laquelle les deux courbes doivent avoir entre elles un contact du second ordre, et B la droite qu'elles doivent toucher en deux points distincts. Soit de plus P une droite donnée, à laquelle la courbe cherchée doit être tangente.

Sur la droite A soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les tangentes menées à la courbe par ces deux points. Soit enfin C la droite qui joint entre eux les points DE et AB; en menant du point PC au point AE une droite Q, cette droite sera une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Autre solution. Soit toujours A la tangente à la courbe donnée au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B celle que les deux courbes doivent toucher en des

(*) Cette construction a été indiquée, sans démonstration, par M. Poncelet (*Annales*, tom. VIII, pag. 253).

un point par lequel doit passer la courbe cherchée.

Par les points A et B, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire, coupant de nouveau la courbe donnée en D et E. Soit menée DE coupant en C la tangente en A. Soit enfin menée CP coupant en Q la sécante BE; alors le point Q sera (*Théorème IX*) un nouveau point de la courbe demandée.

Remarque. La première de ces deux solutions a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on trace la tangente en A.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème VIII diminue jusqu'à devenir núl, les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME X. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémite; si,

points distincts. Soit enfin P l'autre droite que doit toucher aussi la courbe cherchée.

Sur les droites A et B, soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées les tangentes D et E à la courbe donnée. Soit joint le point DE au point de contact de A par une droite C. Soit enfin joint le point CP au point BE par une droite Q; cette droite Q sera (*Théorème IX*) une nouvelle tangente à la courbe demandée.

Remarque. La première de ces deux solutions a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on détermine le point de contact de la tangente A.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème VIII diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant :

THÉORÈME X. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de *par le point de contact des deux courbes, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite une tangente à chacune des deux courbes, par le point où elle est coupée par cette sécante; les deux tangentes ainsi menées iront concourir sur la corde commune.*

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VI. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique, qui ait avec la première, en l'un des points donnés, un contact du second ordre, qui la coupe à l'autre point donné, et qui touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soit toujours A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B le point où ces deux courbes doivent se couper; soit enfin C le point où la droite donnée coupe la corde

l'angle en deux points distincts; si, d'un point pris arbitrairement sur le premier de ces côtés, on mène des tangentes aux deux courbes, les points de contact de ces tangentes seront en ligne droite avec le sommet de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VI. Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique, qui ait avec la première, au point où elle est touchée par une des tangentes données, un contact du second ordre, qui touche aussi l'autre tangente donnée, et passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soit toujours A la tangente à la courbe donnée au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B celle que les deux courbes doivent toucher en deux points distincts; soit enfin C la droite qui commune AB. Soit menée, par ce point C, une tangente à la courbe donnée, et soit D son point de contact; en menant AD, cette droite coupera la droite donnée en un point P, qui sera (*Théorème X*) son point de contact avec la courbe cherchée; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème V.

joint le sommet de l'angle circonscrit au point donné. Par le point où cette droite coupe la courbe donnée, soit menée une tangente D à cette courbe; en joignant le point AD au point donné, par une droite P, cette droite sera (*Théorème X*) une tangente menée par ce point à la courbe cherchée; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème V.

Remarque. Comme, par le point C, on peut mener deux tangentes à la courbe donnée, on pourra avoir deux points de contact D, et par suite deux droites AD et deux points P; de manière que le problème a deux solutions.

Remarque. Comme la droite C coupe la courbe donnée en deux points, on pourra avoir deux tangentes D, et par suite deux poiuts AD et deux droites P; de manière que le problème a deux solutions.

Lorsque deux coniques ont en un point commun un contact du troisième ordre, elles ne sauraient avoir alors aucun autre point commun, ni conséquemment aucune corde inscrite commune. On peut, dans ce cas, les considérer comme étant toutes deux circonscrites à un même quadrilatère dont les côtés, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant la tangente commune, et

Lorsque deux coniques touchent une même droite en un même point, et ont en ce point un contact du troisième ordre, elles ne sauraient alors avoir aucune autre tangente commune, ni conséquemment aucun angle circonscrit commun. On peut, dans ce cas, les considérer comme étant toutes deux inscrites à un même quadrilatère, dont les angles, d'une grandeur nulle, ont tous leurs somdont les sommets se confondeut tous quatre avec le point de contact. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XI. Deux coniques n'ayant qu'un seul point commun, et ayant conséquemment, en ce point, un contact du troisième ordre; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on joigne ensuite par des cordes les points où ces sécantes coupent les deux courbes; les cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente commune.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VII. Une conique étant donnée, et un point étant donné sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui, ayant avec la première au point donné, un contact du troisième ordre, passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan?

mets au point de contact, et dont les côtés sont tous quatre dirigés suivant la tangente commune. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XI. Deux coniques n'ayant qu'une seule tangente commune, et ayant conséquemment entre elles, sur cette tangente, un contact du troisième ordre; si, sur la tangente commune aux deux courbes, on prend arbitrairement deux points par lesquels on leur mène des tangentes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec leur point de contact.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VII. Une conique étant donnée, et une tangente à cette courbe étant aussi donnée; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangente qu'on voudra à une autre conique qui, ayant avec la première, en son point de contact avec la tangente donnée, un contact du troisième ordre, touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soit A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre, et soit P le point donné, sur le plan de cette courbe.

Par le point A soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les points où ces deux sécantes coupent cette courbe, et soit menée DE, coupant en C la tangente en A. Soit enfin menée CP, coupant en Q la sécante arbitraire AE; le point Q sera (*Théorème XI*) un nouveau point de la courbe cherchée.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème XI diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes; et il en résultera le théorème suivant:

THÉORÈME XII. *Deux coniques n'ayant qu'un seul point commun, et ayant conséquemment, en ce point, un contact du troisième ordre; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène une sécante*

Solution. Soit A la tangente donnée à la première courbe et au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec celle-là un contact du troisième ordre, et soit P la droite donnée, sur le plan de cette courbe.

Soient pris sur la droite A deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les tangentes menées à la courbe donnée, par ces deux points. Soit C la droite qui joint le point A au point DE. Soit joint enfin le point CP au point AE, par une droite Q; cette droite Q sera (*Théorème XI*) une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème XI diminue jusqu'à devenir nul, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant:

THÉORÈME XII. *Deux coniques n'ayant qu'une seule tangente commune, et ayant conséquemment entre elles, sur cette tangente, un contact du troisième ordre; si, par un point pris arbitrairement sur la tangente com-*

arbitraire et ensuite des tangentes, par les deux points où cette sécante les coupe; ces deux tangentes iront concourir sur la tangente commune aux deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VIII. Une conique étant donnée, et un point étant donné sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui, ayant avec la première, au point donné, un contact du troisième ordre, touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan ?

Solution. Soit A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre. Soit en outre C le point où la tangente en A est coupée par la droite donnée. Par ce point C, soit menée à la courbe donnée une tangente dont D soit le point de contact, alors le point P, où la droite donnée sera coupée par AD, sera (*Théorème XII*) le point de contact de cette droite donnée avec la courbe cherchée;

mune, on leur mène des tangentes; les points de contact de ces deux tangentes se trouveront en ligne droite avec le point de contact des deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant :

PROBLÈME VIII. Une conique étant donnée, et une tangente à cette courbe étant aussi donnée; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui, ayant avec la première, en son point de contact avec la tangente donnée, un contact du troisième ordre, passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan ?

Solution. Soit A la tangente donnée à la courbe donnée, au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre. Soit en outre C la droite qui joint le point de contact de A au point donné. Par le point où cette droite C coupe la courbe donnée, soit menée à cette courbe une tangente D; joignant alors, par une droite P, le point donné au point AD, cette droite sera (*Théorème XII*) la tangente, ce qui ramenera le problème au problème VII.

en ce point donné, à la courbe cherchée ; ce qui ramenera le problème au problème VII.

Rien n'empêcherait, dans tout ce qui précède, de supposer que l'une des deux coniques dont il s'agit est le système de deux droites, du moins lorsqu'il n'est question que d'intersections et de contacts simples ; mais on ne ferait que retomber ainsi sur les propriétés connues des hexagones inscrits et circonscrits, et sur les conséquences également connues qui en dérivent.

On doit remarquer aussi que tous nos théorèmes et problèmes peuvent être, sans restriction, transportés à la sphère, pourvu qu'on y remplace les droites par des arcs de grands cercles, et les coniques planes par ce que M. Magnus a appelé *coniques sphériques*, dans le mémoire de la page 33 du précédent volume.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de statique proposés à la page 296 du précédent volume ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne,

Et M. Finck, Répétiteur de Mathématiques à l'Ecole régimentaire d'artillerie de Strasbourg.

Tous deux anciens élèves de l'Ecole polytechnique (*).

I. Considérons une chaînette quelconque dont les élémens de même longueur varient de poids suivant une loi quelconque. Soit

(*) Ces deux solutions ne différant l'une de l'autre que par les notations rapportée cette courbe à une horizontale et à une verticale menées dans son plan, par son point le plus bas, prises respectivement pour axes des x et pour axe des y ; la première de ces droites sera tangente et l'autre normale à la courbe.

Cette courbe éprouvera à l'origine une tension inconnue que nous pourrons désigner par a.

Considérons un autre point quelconque (x,y) de la courbe, et soit z ce que peserait une unité de longueur de cette courbe si, pour toute la longueur de cette unité, sa densité était la même qu'en ce point.

Si nous désignons par s la longueur de l'arc de la courbe depuis l'origine jusqu'au point (x,y), le poids de cet arc sera $\int z\mathrm{d}s$. Soit t la tension au même point; et représentons, à l'ordinaire, par p le rapport $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, où la tangente tabulaire de l'angle que fait la courbe en (x,y) avec l'axe des x.

On démontre en statique que, lorsqu'une corde pesante est supendue librement, en désignant par P le poids d'une portion quelconque de cette corde, par T et T' les tensions aux extrémités de cette portion, et enfin par α et α' les angles que font respectivement les directions de ces tensions avec l'horizon, on doit avoir la double équation

$$\frac{P}{\mathrm{Sin.}(\alpha+\alpha')}=\frac{T}{\mathrm{Cos.}\alpha'}=\frac{T'}{\mathrm{Cos.}\alpha},$$

appliquant ce principe général à l'arc s, nous aurons ici

$$P=\int z\mathrm{d}s\,,\quad T=a\,,\quad T'=t\,,\quad \alpha=0\,,\quad \mathrm{Tang.}\alpha'=p\,,$$

d'où

---

et par quelques nuances très-légères, nous avons cru devoir les fondre dans une rédaction unique.

J. D. G.

$$\mathrm{Cos.}\alpha=1\ ,\quad \mathrm{Cos}\,\alpha'=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tang.}^2\alpha'}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\ ,\quad \mathrm{Sin.}(\alpha+\alpha')=\mathrm{Sin.}\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{\sqrt{1+p^2}\int z\mathrm{d}s}{p}=a\sqrt{1+p^2}=t\ ,$$

d'où on tirera les deux équations.

$$a\sqrt{1+p^2}=t\ , \qquad (1)$$

$$ap=\int z\mathrm{d}s\ .$$

Différentiant la seconde et mettant pour $\mathrm{d}s$ sa valeur $\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}$, il viendra, en divisant ensuite par $\mathrm{d}x$,

$$a\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=z\sqrt{1+p^2}\ . \qquad (2)$$

Telles sont les deux équations qui doivent généralement avoir lieu, dans tout problème relatif aux chaînettes sollicitées uniquement par la pesanteur. Il ne s'agit plus, dans chaque cas particulier, que d'exprimer suivant quelle loi on suppose que varie le poids des élémens de la courbe.

II. Pour première application, supposons qu'on exige que, dans tout son cours, la chaînette présente une égale résistance à la rupture; il faudra évidemment pour cela, si du moins on la suppose d'une matière homogène, que, dans tous ses points, sa masse et conséquemment son poids soit proportionnel à la tension qu'elle éprouve. On aura donc ainsi à résoudre le premier des deux problèmes proposés à la page 296 du précédent volume; et, pour y parvenir, il faudra joindre aux équations générales (1) et (2) l'équation

$$t=bz\,, \qquad (3)$$

où b est une constante.

En mettant pour t, dans cette équation, sa valeur tirée de l'équation (1), on aura

$$z=\frac{a}{b}\sqrt{1+p^2}\,; \qquad (4)$$

mettant ensuite cette valeur de z dans l'équation (2), on aura

$$b\frac{dp}{dx}=1+p^2\,, \qquad (5)$$

c'est-à-dire,

$$dx=b\frac{dp}{1+p^2}\,,$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$x=b\text{Arc.}(\text{Tang.}=p)$$

ou, ce qui revient au même,

$$p=\text{Tang.}\frac{x}{b}\,. \qquad (6)$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce que x et p doivent être zéro en même temps.

En remettant pour p sa valeur $\frac{dy}{dx}$, cette équation donnera

$$dy=dx\text{Tang.}\frac{x}{b}=b.\frac{d.\frac{x}{b}\text{Sin.}\frac{x}{b}}{\text{Cos.}\frac{x}{b}}=-b.\frac{d.\text{Cos.}\frac{x}{b}}{\text{Cos.}\frac{x}{b}}\,;$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{y}{b}+\text{Log.Cos.}\,\frac{x}{b}=0\,.$$

Ici encore nous n'ajoutons point de constante, pour les mêmes raisons que ci-dessus.

On peut ensuite écrire

$$e^{\frac{y}{b}}\,\text{Cos.}\,\frac{x}{b}=1\,; \qquad (7)$$

et telle est finalement l'équation de la courbe cherchée.

Géométriquement parlant, cette courbe est composée d'une infinité de parties, alternativement situées au-dessus et au-dessous de l'axe des x, auquel elles sont toutes tangentes, et toutes comprises entre des asymptotes équidistantes, perpendiculaires à cet axe. Mais il est clair que, pour la question qui nous occupe, on ne doit considérer que celle de ces parties qui est symétriquement partagée par l'axe des y, et comprise entre deux asymptotes données par l'équation $x=\pm\frac{\varpi b}{2}$.

En mettant la valeur (6) de p dans la formule (4) on a

$$z=\frac{a}{b}\,\text{Sec.}\,\frac{x}{b}\,, \qquad (8)$$

au moyen de quoi la formule (3) devient

$$t=a\text{Sec.}\,\frac{x}{b}\;; \qquad (9)$$

telles sont donc la densité et la tension de la chaînette en un quelconque (x,y) de ses points.

De la même formule (6) on tire

$$\text{d}s=\text{d}x\sqrt{1+p^2}=\frac{\text{d}x}{\text{Cos.}\,\frac{x}{b}}\;; \qquad (10)$$

d'où on tire en intégrant

$$s=\frac{b}{2}\,\text{Log.}\,\frac{1+\text{Sin.}\,\dfrac{x}{b}}{1-\text{Sin.}\,\dfrac{x}{b}}\;; \qquad (11)$$

ce qui donne la longueur d'un arc de la chaînette depuis le point le plus bas jusqu'au point quelconque (x,y).

En multipliant membre à membre les équations (8) et (10), on a

$$z\text{d}s=\frac{a}{b}\,\frac{\text{d}x}{\text{Cos.}^2\dfrac{x}{b}}=a.\frac{\text{d}.\dfrac{x}{b}}{\text{Cos.}^2\,\dfrac{x}{b}}\;;$$

donc

$$\int z\text{d}s=a\text{Tang.}\,\frac{x}{b}\;. \qquad (12)$$

C'est là le poids de l'arc compris depuis le point le plus bas jusqu'au point quelconque (x,y).

En représentant par r le rayon de courbure au point (x,y) on aura comme l'on sait

$$r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{\text{d}p}{\text{d}x}}=\frac{\left(\dfrac{\text{d}s}{\text{d}x}\right)^3}{\dfrac{\text{d}p}{\text{d}x}}\;;$$

mais la formule (5) donne

$$\frac{\text{d}p}{\text{d}x}=\frac{1}{b}\left(\frac{\text{d}s}{\text{d}x}\right)^2\;;$$

donc

$$r=b\,\frac{\text{d}s}{\text{d}x}\;;$$

c'est-à-dire (10),

$$r=b\text{Sec.}\,\frac{x}{b}\;. \qquad (13)$$

En mettant tour-à-tour, dans cette formule, pour Sec. $\frac{x}{b}$ les valeurs données par les équations (8) et (9), il viendra

$$r=\frac{bt}{a}=\frac{b^2z}{a}\ ; \qquad (14)$$

c'est-à-dire qu'en chaque point de la chaînette le rayon de courbure est proportionnel soit à la tension soit au poids de l'élément. On voit aussi qu'au point le plus bas ce rayon est égal à b.

III. Pour deuxième application, supposons une corde élastique et pesante, d'une densité uniforme, tant qu'elle est étendue librement sur un plan horizontal, où elle n'éprouve aucun frottement; mais susceptible, lorsqu'elle est tendue sur ce plan, de s'alonger uniformément et proportionnellement aux tensions qu'elle éprouve; et cherchons quelle courbure elle affectera lorsqu'étant enlevée de dessus ce plan, on la suspendra dans l'espace par ses deux extrémités. C'est le dernier des deux problèmes de statique proposés à la page 296 du précédent volume.

Soit pris pour unité de poids ce que pèse une unité de longueur de cette corde, lorsque, couchée sur le plan horizontal, on ne l'a encore soumise à aucune pression. Si, sur ce même plan, on la soumet à la pression t, chacune de ses unités de longueur primitive devra s'alonger d'une quantité proportionnelle à t qu'on pourra représenter par $\frac{t}{b}$, b étant une constante à déterminer par l'expérience. La longueur primitive 1 deviendra donc alors $1+\frac{t}{b}$, et aura toujours le poids 1; donc une unité de longueur de la corde tendue pèsera $\frac{1}{1+\frac{t}{b}}$ ou $\frac{b}{t+b}$; on aura donc ici

$$z=\frac{b}{t+b}\ ; \qquad (3)$$

et telle sera l'équation qu'il faudra joindre aux équations générales (1) et (2), pour obtenir la solution du problème particulier qui nous occupe.

En portant dans cette équation la valeur de t donnée par l'équation (1), elle deviendra

$$z=\frac{b}{b+a\sqrt{1+p^2}}\,. \qquad (4)$$

Portant ensuite cette dernière valeur de z dans l'équation (2), nous aurons pour l'équation différentielle du second ordre de la courbe cherchée

$$a(b+a\sqrt{1+p^2})\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=b\sqrt{1+p^2}\,. \qquad (5)$$

Si nous pouvons obtenir deux intégrales premières de cette équation, l'élimination de p entre elles conduira à l'équation primitive.

On en tire d'abord

$$b\mathrm{d}x=a\left(b.\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}+a\mathrm{d}p\right)\,; \qquad (6)$$

ce qui donne, en intégrant,

$$bx=a\{ap+b\mathrm{Log.}(p+\sqrt{1+p^2})\}\,,$$

ou encore

$$e^{\frac{bx}{a^2}-p}=(p+\sqrt{1+p^2})^{\frac{b}{a}}\,; \qquad (7)$$

intégrale à laquelle nous n'ajoutons point de constante, parce que x et p doivent être nuls en même temps.

En multipliant la même équation (6) par p et mettant ensuite dans son premier membre $\mathrm{d}y$ pour $p\mathrm{d}x$, elle devient

$$b\mathrm{d}y=a\left(b\,\frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}+ap\mathrm{d}p\right)$$

ce qui donne en intégrant, et observant que y et p doivent être nuls en même temps

$$2b(y+a)=a(2b\sqrt{1+p^2}+ap^2)\ . \qquad (8)$$

L'équation de la courbe sera donc le résultat de l'élimination de p entre les équations (7) et (8).

La dernière peut facilement être mise sous cette forme

$$(a\sqrt{1+p^2})^2+2b(a\sqrt{1+p^2})-\{2b(y+a)+a^2\}=0\ ;$$

et donne, en considérant $a\sqrt{1+p^2}$ comme l'inconnue,

$$a\sqrt{1+p^2}=-b+\sqrt{2by+(a+b)^2}\ , \qquad (9)$$

de là on tire en quarrant, transposant et extrayant ensuite la racine quarrée des deux membres

$$ap=\sqrt{2b\{y+a+b-\sqrt{2by+(a+b)^2}\}}\ . \qquad (10)$$

En prenant la somme de ces deux équations, on obtient encore

$$a(p+\sqrt{1+p^2})=-b+\sqrt{2by+(a+b)^2}+\sqrt{2b\{y+a+b-\sqrt{2by+(a+b)^2}\}}\ . \quad (11)$$

Il ne s'agira donc plus que de mettre pour p et pour $p+\sqrt{1+p^2}$, dans l'équation (7), leurs valeurs données par les équations (10) et (11).

En mettant pour $a\sqrt{1+p^2}$, dans l'équation (4) sa valeur donnée par l'équation (9), on trouve

$$z=\frac{b}{\sqrt{2by+(a+b)^2}}\ ; \qquad (12)$$

mais l'équation (3) donne

$$t=b\,\frac{1-z}{z}\ ;$$

en mettant donc, dans cette dernière, pour z sa valeur (12)

$$t=-b+\sqrt{2by+(a+b)^2}\ ; \qquad (13)$$

telles sont donc la densité et la tension de la chaînette en un quelconque (x,y) de ses points.

On a

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}$$

ou en mettant pour $\mathrm{d}x$ sa valeur donnée par l'équation (5)

$$\mathrm{d}s=\frac{a}{b}(b+a\sqrt{1+p^2})\mathrm{d}p\ ; \qquad (14)$$

d'où, en intégrant

$$s=\frac{a}{2b}\{2bp+ap\sqrt{1+p^2}+a\mathrm{Log.}(p+\sqrt{1+p^2})\}\ ; \qquad (15)$$

il ne s'agira donc plus, pour obtenir la longueur de l'arc de courbe compris depuis l'origine jusqu'au point (x,y), que de mettre pour p, dans cette formule, sa valeur tirée de l'équation (10).

En multipliant membre à membre les équations (4) et (14) il vient

$$z\mathrm{d}s=a\mathrm{d}p\ ,$$

d'où, en intégrant et ayant égard à l'équation (10)

$$\int z\mathrm{d}s=ap=\sqrt{2b\{y+a+b-\sqrt{2by+(a+b)^2}\}}\ . \qquad (15)$$

Tel est donc le poids de l'arc de courbe compris depuis le point le plus bas jusqu'au point (x,y).

Enfin, en désignant par r le rayon de courbure, on aura

$$r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}\ ,$$

ou bien, en mettant pour $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ sa valeur donnée par l'équation (5),

$$r-\frac{a}{b}(1+p^2)(b+a\sqrt{1+p^2})\ . \qquad (16)$$

Cette formule prouve, en particulier, qu'au point le plus bas le rayon de courbure est $\frac{a}{b}(a+b)$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Recherche graphique du cercle osculateur, pour les lignes du second ordre;

Par M. Pluker, docteur de l'Université de Bonn.

Soit rapportée une ligne du second ordre à l'un quelconque de ses points, pris pour origine des coordonnées, et à sa tangente en ce point prise pour axe des y, l'axe des x étant dirigé suivant la normale; l'équation de la courbe sera de la forme

$$y^2+2axy+bx^2+2cx=0\ , \qquad (1)$$

où a, b, c seront des quantités déterminées. Il faut en effet, d'après la situation donnée de la courbe qu'en posant $x=0$, on ait deux valeurs nulles pour y.

Toutes les autres lignes du second ordre touchant celle-là à l'origine seront comprises dans l'équation générale.

$$y^2+2Axy+Bx^2+2Cx=0\ , \qquad (2)$$

où A, B, C seront des quantités indéterminées.

Deux lignes du second ordre pouvant, en général, se couper en quatre points, et un point de contact étant la réunion en un seul de deux points d'intersection; il s'ensuit que les courbes (1) et (2), outre leur point commun à l'origine, doivent en avoir encore deux autres, réels ou imaginaires. Cherchons l'équation de la droite qui joint ces deux derniers.

Il est connu que, si l'on combine ensemble, d'une manière quelconque, les équations de deux lieux géométriques, l'équation résultante sera celle d'un troisième lieu géométrique, contenant les points communs aux deux premiers; donc, en particulier, la différence des équations (1) et (2) appartient à un lieu géométrique qui contient le point de contact qu'ont les deux courbes à l'origine et les deux autres points où elles se coupent; or, cette différence est

$$x\{2(A-a)y+(B-b)x+2(C-c)\}=0 ,$$

qui exprime le système de deux droites, dont l'une est l'axe des y qui contient uniquement le point de contact, donc l'autre

$$2(A-a)y+(B-b)x+2(C-c)=0 , \qquad (3)$$

est la droite qui joint les deux points d'intersection des deux courbes. Si ces points d'intersection sont imaginaires, la droite (3) deviendra ce que M. Poncelet a appelé *corde idéale*, mais on pourra toujours la construire.

Si l'on profite de l'indétermination des constantes A, B, C, pour faire en sorte que la droite (3) passe par l'origine; ce qui se réduit à poser $C=c$, l'un des deux points d'intersection viendra se joindre au point de contact; de sorte que les deux courbes auront alors, à l'origine, un contact du second ordre. Ainsi, toutes les courbes comprises dans l'équation générale

$$y^2+2Axy+Bx^2+2cx=0 , \qquad (4)$$

dans laquelle A et B sont indéterminés, ont à l'origine, avec la courbe (1), un contact du second ordre. Les deux courbes ont en outre une intersection qui, dans ce cas, est nécessairement réelle.

Si l'on profitait de l'indétermination des constantes A, B, C, pour faire coïncider la droite (3) avec l'axe des y, ce qui se réduirait à poser, à la fois, $A=a$ et $C=c$, les points d'intersection se confondraient alors tous deux avec l'origine ; de sorte que les deux courbes auraient en ce point un contact du troisième ordre. L'équation

$$y^2+2axy+Bx^2+2cx=0\ , \qquad (5)$$

où B est indéterminé, est donc l'équation commune à toutes les lignes du second ordre qui ont avec la courbe (1), à l'origine, un contact du troisième ordre. Dans ce cas les deux courbes ne peuvent plus se couper autre part.

Quelles que soient la nature de la courbe (1) et sa situation par rapport aux axes, la courbe (4) peut fort bien devenir un cercle, puisqu'il ne s'agit pour cela que de supposer à la fois $A=0$ et $B=1$. Ainsi, *il y a, pour chaque point d'une ligne du second ordre, un cercle qui a avec la courbe, en ce point, un contact du second ordre.* C'est ce cercle qu'on appelle le *cercle osculateur* de la courbe; il la coupe, en outre, en un autre point.

Mais l'équation (5) ne saurait devenir celle d'un cercle, qu'autant qu'on aurait déjà, dans l'équation (1), $a=0$; c'est-à-dire, qu'autant que l'origine des coordonnées serait un des sommets de la courbe ; c'est-à-dire, qu'*un cercle ne saurait avoir avec une ligne du second ordre, en l'un de ses points, un contact du troisième ordre qu'autant que ce point est un des sommets de la courbe.*

La courbe (2) variant sans cesse, la corde commune (3) avec la courbe (1) demeurera constamment parallèle à elle-même si le rapport $\frac{B-b}{A-a}$ demeure constant. Or, c'est ce qui arrivera, en particulier, si, A et B demeurant constans, on fait seulement varier C, dans l'équation (2) ; et cela quelles que soient d'ailleurs les valeurs constantes de A et B; donc, il en sera ainsi, en particulier, lorsqu'on aura $A=0$ et $B=1$, c'est-à-dire, lorsque l'équation (2) exprimera un cercle ; ainsi, *tant de cercles qu'on voudra, tangens en un même point à une ligne du second ordre, la coupent de manière que les cordes qui joignent les points d'intersec-*

tion sont toutes parallèles. Celui de ces cercles pour lequel la corde passe par l'origine est, d'après ce qui précède, le cercle osculateur de la courbe, en ce point.

De là résulte une construction facile, pour obtenir le centre de courbure, et conséquemment le cercle osculateur d'une ligne du second ordre, en l'un de ses points. Par ce point soit menée à la courbe une normale sur laquelle soit choisi un point tel qu'en décrivant, de ce point comme centre, un cercle passant par le point donné, ce cercle coupe la courbe en deux autres points. Soient menées à la courbe une corde par ces deux points, et par le point donné une nouvelle corde, parallèle à celle-là. La perpendiculaire sur le milieu de cette dernière corde coupera la normale au centre de courbure cherchée.

Cette construction revient à une autre construction déjà connue; mais il était difficile d'y parvenir par une voie plus simple.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Intégration directe de l'équation linéaire complète du premier ordre à coefficiens variables;

Par M. Vallès, élève à l'Ecole royale polytechnique.

Dans les traités de calcul intégral, on ramène d'ordinaire l'intégration de l'équation linéaire complète du premier ordre, à coefficiens variables à celle d'une autre équation linéaire du même ordre dans laquelle le dernier terme est nul; et M. Bouvier est peut-être le premier qui se soit proposé de parvenir directement au but. (Voyez *Annales*, tom. XV, pag. 41).

En réfléchissant sur ce sujet, il nous a paru que l'intégrale d'une telle équation pouvait être directement obtenue par un autre procédé assez simple, et qui a sur celui de M. Bouvier l'avantage d'être parfaitement analogue à celui qu'on emploie dans l'intégration des équations linéaires d'ordres plus élevés. Voici à quoi il se réduit :

Soit la proposée

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q\ .$$

Posons

$$y=e^{\int t dx}\ ;$$

t étant une fonction inconnue de x. Il en résultera

$$\frac{dy}{dx}=t.e^{\int t dx}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans la proposée,

$$e^{\int t dx}(t+P)=Q\ ;$$

et par conséquent

$$t=\frac{Q}{e^{\int t dx}}-P=\frac{Q}{y}-P\ ;$$

puis, en multipliant par dx et intégrant

$$\int t dx=\int\frac{Qdx}{y}-\int Pdx\ ,$$

donc

$$e^{\int t\mathrm{d}x} \quad \text{ou} \quad y = \frac{e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}}}{e^{\int P\mathrm{d}x}} = e^{-\int P\mathrm{d}x} \cdot e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}}. \qquad (1)$$

Or, on a

$$\mathrm{d}.e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}} = \frac{Q\mathrm{d}x}{y} \cdot e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}},$$

et, en intégrant

$$e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}} = \int \frac{Q}{y}\, e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}}\, \mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Mais, l'équation (1) donne

$$e^{\int \frac{Q\mathrm{d}x}{y}} = ye^{\int P\mathrm{d}x},$$

mettant donc cette valeur dans l'équation (2), elle deviendra

$$ye^{\int P\mathrm{d}x} = \int \frac{Q}{y} \cdot ye^{\int P\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x,$$

ou, en simplifiant et tirant ensuite la valeur de y

$$y = e^{-\int P\mathrm{d}x} \cdot \int e^{\int P\mathrm{d}x} \cdot Q\mathrm{d}x,$$

formule cherchée.

STATIQUE.

Note sur un paradoxe de statique ;

Par un ABONNÉ.

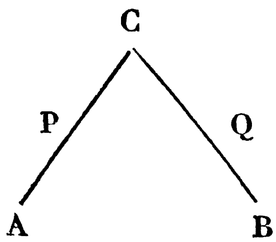
On sait que, lorsqu'un corps pesant est suspendu librement par un ou deux cordons verticaux, ou même par trois cordons verticaux non compris dans un même plan, les tensions de ces cordons sont complètement déterminées, et même faciles à calculer ; et qu'il en est encore de même des pressions éprouvées par un ou deux points d'un plan fixe horizontal, par lesquels y pose un corps pesant, et même pour trois pareils points, lorsqu'ils ne sont pas en ligne droite.

Mais il est généralement admis en statique que, si un corps pesant est suspendu par plus de trois cordons verticaux, ou même par trois cordons situés dans un même plan, les tensions de ces cordons demeurent indéterminées, et qu'il en est de même aussi des pressions exercées sur un plan fixe horizontal, dans les points par lesquels y pose un corps pesant, lorsque ces points sont au nombre de plus de trois, ou, lorsqu'étant au nombre de trois seulement, ils se trouvent appartenir à une même ligne droite.

Or, ce principe constitue une sorte de paradoxe qui naît de ce qu'on ne conçoit pas mieux qu'une tension ou une pression actuelle et effective puisse être indéterminée, qu'on ne le concevrait de la taille actuelle de tel ou de tel individu, de son âge, de son poids ou de sa fortune. Quelques géomètres ont tenté de répandre un peu de jour sur cette question, en distinguant l'état physique de l'état mathématique, l'état concret de l'état abstrait; mais il est permis de douter qu'ils l'aient fait de manière à satisfaire pleinement les esprits exacts.

Le principe qui donne naissance à ce singulier paradoxe est trop universellement admis pour que nous osions le nier formellement; mais il n'en est pas moins vrai qu'on peut lui opposer une objection assez grave, à ce qu'il nous paraît; et c'est seulement dans la vue de provoquer à cette objection une réponse qui nous semble indispensable, que nous allons la développer ici.

Soient CA, CB deux droites pesantes et inflexibles, assemblées à charnière en C, et formant, en ce point, un angle déterminé quelconque. Soient p, q leurs poids respectifs et P, Q leurs centres de gravité; supposons qu'elles



portent en A, C, B, perpendiculairement à leur plan et d'un même côté de ce plan, des pointes d'une même longueur quelconque, par lesquelles elles soient posées sur un plan fixe horizontal. Comme les trois points A, B, C ne sont pas supposés en ligne droite, ces pointes exerceront sur les trois points du plan où elles appuyeront des pressions déterminées, que l'on calculera comme il suit:

Décomposant tour-à-tour le poids p de CA, appliqué en P, en deux autres appliqués en C et A, puis le poids q de CB, appliqué en Q, en deux autres appliqués en C et B, on trouvera

$$\text{pour les composantes de } p \left\{ \begin{array}{l} \text{en C} \ldots\ldots p.\dfrac{AP}{AC}\,, \\[2ex] \text{en A} \ldots\ldots p.\dfrac{CP}{AC}\,; \end{array} \right.$$

$$\text{pour les composantes de } q \left\{ \begin{array}{l} \text{en C} \ldots\ldots q.\dfrac{BQ}{BC}\,; \\[2ex] \text{en B} \ldots\ldots q.\dfrac{CQ}{BC}\,; \end{array} \right.$$

réunissant donc les forces appliquées en C, on trouvera pour les pressions exercées respectivement sur le plan horizontal, par les points A, C, B,

$$p.\frac{CP}{AC}\,, \qquad p.\frac{AP}{AC}+q.\frac{BQ}{BC}\,, \qquad q.\frac{CQ}{BC}\,.$$

Or, comme ces pressions sont tout-à-fait indépendantes de l'ouverture de l'angle ACB, elles demeureront encore les mêmes si cet angle s'ouvre jusqu'à différer aussi peu qu'on le voudra de deux angles droits; et, comme il serait absurde d'admettre qu'un changement qu'on peut toujours supposer d'une petitesse illimitée, dans l'ouverture de cet angle, change tout-à-coup la nature des pressions, il s'ensuit qu'elles demeureront encore déterminées, et telles que nous venons de les calculer, lorsque l'angle ACB sera devenu tout-à-fait égal à deux angles droits, c'est-à-dire, lorsque les trois points A, B, C seront rigoureusement en ligne droite.

On pourrait évidemment appliquer un raisonnement analogue à tous les cas de statique où l'on a supposé jusqu'ici les pressions indéterminées; et, par cela même que la chose est facile, nous ne nous y arrêterons pas. Nous nous bornerons simplement à remarquer qu'il faut absolument ou bien faire à cette manière de raisonner une réponse décisive, ou bien se résigner à rejeter le principe de statique qui donne lieu au paradoxe dont il s'agit ici. Nous attendrons, sur cette alternative, l'opinion des juges compétens.

P. S. L'objection que nous venons de faire contre la doctrine généralement admise peut encore être présentée de la manière suivante.

Soient trois sphères S, S', S'', égales en volume, mais pouvant d'ailleurs différer en poids, posées sur un plan horizontal, de telle sorte que leurs centres soient sur une même ligne droite ; elles toucheront ce plan en trois points p, p', p'', qui seront aussi en ligne droite, et elles exerceront en ces trois points sur ce plan des pressions absolument déterminées et égales à leurs poids.

Que l'on conçoive ensuite les centres de ces trois sphères liés par une verge inflexible, inextensible et sans pesanteur. Cette verge ne pourra évidemment accroître ni diminuer les pressions exercées aux points p, p', p'' du plan horizontal, qui conséquemment demeureront les mêmes qu'auparavant ; mais ces mêmes verges feront des trois sphères un corps pesant unique, posant sur un plan horizontal par trois points en ligne droite ; donc il y a au moins des cas où, dans un tel système, les pressions sont absolument déterminées.

En vain montrerait-on, pour se tirer de cette difficulté, des formules de pression qui, dans le cas des points d'appui en ligne droite, se présenteraient sous une forme indéterminée ; il ne manque certes pas, en mathématiques, de formules à qui la même chose arrive, dans des cas particuliers ; et il doit même en être ainsi toutes les fois que, pour calculer ces formules, on a eu recours à des considérations qui cessent d'être applicables au cas particulier dont on s'occupe.

Pour n'en citer ici qu'un exemple entre mille, la formule algébrique qui donne la plus courte distance entre deux droites dans l'espace devient $\frac{0}{0}$, lorsqu'on suppose parallèles les deux droites dont il s'agit; et pourtant il n'est jamais venu à l'esprit de personne d'en conclure que la distance entre deux parallèles est indéterminée ; et si l'on objectait que du moins cette distance est alors indéterminée quant à sa situation , nous observerions que ce n'est pas la situation mais bien la longueur de cette distance que la formule dont nous parlons est destinée à faire connaître.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Sur la recherche des asymptotes des courbes algébriques , et , en particulier , de celles de l'hyperbole ;

Par M. LENTHÉRIC , docteur ès sciences , professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Montpellier.

IL y a quelques années que la plupart des auteurs de traités de géométrie analytique, pour prouver l'existence des asymptotes de l'hyperbole et en fixer la position , employaient le raisonnement que voici : soit , disaient-ils ,

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\ ,$$

l'équation de la courbe ; on en tire

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\ ;$$

or, on peut toujours prendre x assez grand pour que la fraction $\frac{a}{x}$ devienne moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'on voudra la supposer ; le facteur radical tend donc sans cesse à devenir l'unité ; et par suite la courbe tend sans cesse à se confondre avec le système des deux droites données par l'équation

$$y=\pm\frac{b}{a}x \ .$$

Il n'est pas difficile de montrer combien ce raisonnement est fautif. Concevons, en effet, que l'on transporte l'origine à l'un des sommets, l'équation de la courbe deviendra

$$b^2x^2-a^2y^2+2ab^2x=0 \ ;$$

d'où on tirera

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2+2ax}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1+2\frac{a}{x}} \ .$$

Or, on peut toujours prendre x assez grand pour rendre $\frac{a}{x}$ si petit qu'on le voudra, et par suite le facteur radical si voisin qu'on voudra de l'unité ; donc, en raisonnant comme ci-dessus, on se trouverait conduit à conclure que les asymptotes de la courbe ont pour équation commune

$$y=\pm\frac{b}{a}x \ ;$$

de sorte qu'alors ces asymptotes se trouveraient se couper à l'un des sommets.

On est aujourd'hui plus rigoureux, et l'on emploie généralement, pour la recherche des asymptotes le développement en série de la valeur de l'ordonnée en fonction de l'abscisse. Cette méthode, outre la rigueur, offre encore l'avantage de s'appliquer indistinctement à toutes les courbes ; mais il faut convenir qu'elle est bien peu élémentaire et qu'elle ne convient guère en particulier à un enseignement duquel est formellement exclu le développement de la formule du binome dans le cas de l'exposant fractionnaire. Il ne faut pas d'ailleurs s'appuyer trop sur les séries dans un enseignement où il est impossible de traiter de ce qui les concerne avec tout le développement convenable.

On peut heureusement parvenir aux équations des asymptotes de l'hyperbole et même d'un grand nombre d'autres courbes algébriques, à l'aide d'un principe facile à établir, qui peut être d'une utile application en d'autres rencontres, et qu'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÉME. Lorsqu'un radical de degré quelconque affecte la somme de deux quantités, l'une constante et l'autre variable, on peut toujours prendre la quantité variable assez grande pour que l'altération qu'éprouvera la quantité radicale, par la suppression du terme constant, tombe au-dessous d'une quantité donnée, si petite qu'on voudra la supposer.

Démonstration. Soient z le terme variable, k le terme constant, n le degré du radical et δ une quantité donnée si petite qu'on voudra. Il faut prouver qu'on peut toujours prendre z assez grand pour satisfaire à l'inégalité

$$\sqrt[n]{z+k}-\sqrt[n]{z}<\delta\ .$$

On tire de là, en effet,

$$\sqrt[n]{z+k}<\sqrt[n]{z}+\delta\ .$$

ou, en élevant les deux membres à la $n.^{ième}$ puissance, et effaçant z de part et d'autre

$$k<n\delta\sqrt[n]{z^{n-1}}+\frac{n(m-1)}{2}\delta^2\sqrt[n]{z^{n-2}}+\ldots..\ ;$$

or, cette inégalité sera évidemment satisfaite, pourvu que l'on prenne seulement z de manière à avoir

$$k < m\delta\sqrt[m]{z^{m-1}} \;;$$

ce qui donne

$$z > \frac{k}{m\delta}\sqrt[m-1]{\frac{k}{m\delta}} \;;$$

valeur qui ne sera jamais infinie tant que δ ne sera pas tout-à-fait nul.

Il suit de là que, toutes les fois que la valeur de l'ordonnée d'une courbe en fonction de l'abscisse pourra être mise sous la forme

$$y = mx + g + \sqrt[n]{(m'x+g')^n + k}\;, \qquad (1)$$

cette courbe aura une asymptote, donnée par l'équation

$$y = mx + g + (m'x+g') = (m+m')x + (g+g')\;. \qquad (2)$$

En effet, en désignant, pour une même abscisse donnée, par y l'ordonnée de la courbe et par y' celle de la droite, cette dernière pourra être écrite ainsi

$$y' = mx + g + \sqrt[n]{(m'x+g')^n}\;;$$

d'où

$$y - y' = \sqrt[n]{(m'x+g')^n + k} - \sqrt[n]{(m'x+g')^n}\;;$$

or, il résulte de notre théorème qu'on pourra toujours prendre la quantité variable $(m'x+g')^n$ et conséquemment l'abscisse x assez grande pour rendre le second membre de cette équation, et par suite $y-y'$, plus petit qu'une longueur donnée, quelque petite qu'on la suppose ; donc on peut toujours assigner une abscisse de la courbe (1) dont l'ordonnée ne diffère de l'ordonnée correspondante de la droite (2) que d'une longueur moindre qu'une longueur donnée, si petite qu'on veuille la prendre; donc, en effet, la droite (2) est asymptote de la courbe (1).

L'application de ceci au cas particulier des lignes du second ordre est trop facile pour que nous croyions nécessaire de nous y arrêter.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de géométrie descriptive.

Construire rigoureusement la droite qui coupe à la fois quatre droites données dans l'espace, non comprises deux à deux dans un même plan?

Problème de statique.

On veut construire une chaîne inextensible, d'un poids variable, destinée à être suspendue librement par ses deux extrémités.

De chacun de ses points doivent pendre verticalement d'autres chaînes d'un poids constant et connu, pour chaque unité de longueur, mais d'une longueur variable, telle qu'elles viennent toutes se terminer à une même horizontale donnée.

On suppose en outre que chacune de ces dernières chaînes doit porter à son extrémité inférieure un poids constant et donné, et on demande 1.° suivant quelle loi doit varier le poids de la première chaîne pour qu'elle présente dans toute sa longueur, une égale résistance à la rupture; 2.° suivant quelle loi variera son poids en ses différens points; 3.° enfin quelle est la courbure qu'elle affectera (*)?

(*) C'est ici, à peu près, le problème des ponts suspendus. Les chaînes verticales sont les barres de fer qui soutiennent le tablier; et les poids constans placés au bas de ces chaînes représentent ce que pèsent les divers élémens de ce tablier.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues et celle d'un grand nombre d'autres ;

Par M. A. L. Cauchy, de l'Académie royale des sciences, Professeur à l'école polytechnique, etc.

(*Deuxième Partie* (*).)

On a vu, dans la première partie de ce mémoire, qu'en désignant par $f(x)$ une fonction telle que $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouisse 1.° pour $x=\pm\infty$, quel que soit y ; 2.° pour $y=\infty$, quel que soit x, et que d'ailleurs cette fonction conserve une valeur unique et déterminée, pour toutes les valeurs de x et y renfermées entre les limites $x=-\infty$, $x=+\infty$, $y=0$, $y=+\infty$, qui ne satisfont pas à l'équation

$$\frac{1}{f(x+y\sqrt{-1})}=0\,;$$

si, après avoir cherché les racines réelles ou imaginaires de l'équation

(*) Voy. la page 97 du précédent volume. Consultez aussi l'errata du même volume sur des fautes assez graves qui se sont glissées dans l'impression de la première partie.

J. D. G.

$$(1) \qquad \frac{1}{f(x)}=0,$$

on désigne par x_1, x_2, x_3, ... celles de ces racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, et par f_1, f_2, f_3, ... les valeurs que reçoivent les produits

$$\varepsilon f(x_1+\varepsilon)\ ,\quad \varepsilon f(x_2+\varepsilon)\ ,\quad \varepsilon f(x_3+\varepsilon)\ ,\ \ldots\ldots,$$

lorsque ε se réduit à zéro; alors, en posant

$$(2) \qquad \Delta=2\varpi(f_1+f_2+f_3+\ldots\ldots)\sqrt{-1}\ ,$$

on a

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\Delta.$$

C'est cette formule qu'il s'agit présentement d'appliquer.

Rappelons auparavant que, si l'équation (1) avait plusieurs racines égales à x_1; en désignant par m le nombre de ces racines, et par ε un nombre infiniment petit, il faudrait supposer, dans la formule (2), non plus $f_1=\varepsilon f(x_1+\varepsilon)$, mais

$$f_1=\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-1}.[\varepsilon^m f(x_1+\varepsilon)]}{\mathrm{d}\varepsilon^{m-1}}.$$

Enfin, si, dans la racine x_1, le coefficient de $\sqrt{-1}$ se réduisait à la limite des quantités positives décroissantes, c'est-à-dire, à zéro; ou, en d'autres termes, si la racine x_1 devenait réelle, le terme f_1 correspondant à cette racine, devrait être réduit à moitié.

Passons maintenant à l'application de ces formules.

La formule (3) peut être, si l'on veut, remplacée par la suivante

$$(4) \qquad \int_0^{\infty} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Delta\ ;$$

et l'on voit que les formules (3) et (4) réduisent la détermination des intégrales qu'elles renferment à la recherche des racines de l'équation (1) dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$(5) \qquad f(x)=\varphi(u).\chi(v).\psi(w).....\mathrm{f}(x)\ ,$$

$\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... désignant des fonctions rationnelles des variables u, v, w, ..., et u, v, w, ...$\mathrm{f}(x)$ représentant des fonctions de x qui restent complètement déterminées, dans le cas même où, après avoir remplacé x par $x+y\sqrt{-1}$, on attribue à x une valeur réelle quelconque, et à y une valeur réelle positive. Concevons d'ailleurs que la fonction $\mathrm{f}(x)$ ne devienne jamais infinie pour aucune valeur finie, réelle ou imaginaire, de la variable x. Pour obtenir les racines de l'équation (1), il faudra d'abord chercher celles des équations

$$(6) \qquad \frac{1}{\varphi(u)}=0\ ,\quad \frac{1}{\chi(v)}=0\ ,\quad \frac{1}{\psi(w)}=0\ ,\ .....;$$

et comme, par hypothèse, les fonctions $\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... sont rationnelles, il est clair que les premiers membres des équations (6) pourront être remplacés par des fonctions entières de u, v, w, ...

Supposons ces mêmes équations résolues, et soit $h+k\sqrt{-1}$ une de leurs racines; on n'aura plus à résoudre que des équations de la forme

$$(7) \qquad u=h+k\sqrt{-1}\ ,\quad v=h+k\sqrt{-1}\ ,\ .....;$$

chacune d'elles fournira une seule racine, dont il sera facile de fixer la valeur, si l'on a pris pour u, v, w, ... quelques-unes des fonctions

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\,,\quad 1(r-x\sqrt{-1})\,,\quad 1\left(1+\dfrac{s}{x}\sqrt{-1}\right) \\ 1[r\text{Sin}.\theta+(r\text{Cos}.\theta-x)\sqrt{-1}]\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\};\ (*)$$

r et s étant des quantités positives, et θ un arc compris entre les limites o et ϖ.

En effet, posons, pour abréger,

(*) Pour fixer, d'une manière précise, les valeurs des notations employées dans le calcul, nous adopterons ici les conventions que nous avons admises dans le *Cours d'analyse algébrique* et dans les précédens mémoires. En vertu de ces conventions, la notation

$$\text{Arc.}\left(\text{Tang.}\,\frac{v}{u}\right)$$

est toujours employée pour désigner le plus petit arc, abstraction faite du signe, dont la tangente soit égale à $\frac{v}{u}$; et les notations

$$(u+v\sqrt{-1})^{\mu}\,,\quad 1(u+v\sqrt{-1})\,.$$

(u désignant une quantité positive ou nulle, et μ un exposant réel) pour représenter les expressions imaginaires

$$(u^2+v^2)^{\frac{\mu}{2}}.\left\{\text{Cos.}\left[\mu.\text{Arc.}\left(\text{Tang.}\,\frac{v}{u}\right)\right]+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\left[\mu.\text{Arc}\left(\text{Tang.}\,\frac{v}{u}\right)\right]\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}\,1(u^2+v^2)+\sqrt{-1}.\text{Arc.}\left(\text{Tang.}\,\frac{v}{u}\right).$$

$$(9) \qquad \rho=(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \omega=\text{Arc.}\left(\text{Tang.}\frac{h}{k}\right);$$

et l'on trouvera

On peut encore considérer la notation

$$(u+v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}},$$

dans laquelle λ et μ désignent des quantités quelconques, comme représentant une fonction unique et complètement déterminée, toutes les fois que u reçoit une valeur positive. En effet, comme dans cette hypothèse, on aura généralement

$$u+v\sqrt{-1}=e^{\mathrm{l}(u+v\sqrt{-1})},$$

on sera conduit naturellement à la formule

$$(u+v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=e^{(\lambda+\mu\sqrt{-1})\mathrm{l}(u+v\sqrt{-1})}$$

qui suffira pour fixer complètement le sens de l'expression imaginaire comprise dans son premier membre. Si l'on suppose, en particulier, $u=0$, on trouvera pour des valeurs positives de v,

$$(v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\left\{\text{Cos.}\left[\frac{\pi}{2}\lambda+\mu\mathrm{l}(v)\right]+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\left[\frac{\pi}{2}\lambda+\mu\mathrm{l}(v)\right]\right\}.e^{\lambda\mathrm{l}(v)-\frac{\pi}{2}\mu};$$

et, pour des valeurs négatives de v,

$$(v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\left\{\text{Cos.}\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu\mathrm{l}(-v)\right]-\sqrt{-1}.\text{Sin.}\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu\mathrm{l}\,(-v)\right]\right\}.e^{\lambda\mathrm{l}(-v)+\frac{\pi}{2}\mu}.$$

$$(10)\quad\left\{\begin{array}{l}
\text{pour } \dfrac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}=h+k\sqrt{-1}\ , \\[2ex]
\qquad x=\dfrac{2\rho\,\mathrm{Cos}.\omega+(1-\rho^2)\sqrt{-1}}{1+2\rho\,\mathrm{Sin}.\omega+\rho^2}\ ; \\[2ex]
\text{pour } \mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})=h+k\sqrt{-1}\ , \\[1ex]
\qquad x=-e^h\,\mathrm{Sin}.k+(e^h\mathrm{Cos}.k-r)\sqrt{-1}\ ; \\[1ex]
\text{pour } \mathrm{l}\left(1+\dfrac{s}{x}\sqrt{-1}\right)=h+k\sqrt{-1}\ , \\[2ex]
\qquad x=\dfrac{s}{e^h\mathrm{Sin}.k-(e^h\mathrm{Cos}.k-1)\sqrt{-1}}\ ; \\[2ex]
\text{pour } \mathrm{l}[r\mathrm{Sin}.\theta+(r\mathrm{Cos}.\theta-x)\sqrt{-1}]=h+k\sqrt{-1}\ , \\[1ex]
\qquad x=-(e^h\mathrm{Sin}.k-r\mathrm{Cos}.\theta)+(e^h\mathrm{Cos}.k-r\mathrm{Sin}.\theta)\sqrt{-1}\ ;
\end{array}\right.$$

et ainsi du reste.

Si, au contraire, on prenait pour u, v, w, ... quelques-unes des fonctions

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{Sin}.bx\ ,\ \mathrm{Cos}.bx\ ,\ e^{bx}\ ,\ e^{bx\sqrt{-1}}\ ,\ e^{(a+b\sqrt{-1})x}\ , \\
\mathrm{l}(1+re^{bx\sqrt{-1}})\ ,\ \mathrm{l}(1-re^{bx\sqrt{-1}})\ ,\ \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\ ;$$

a, b désignant des quantités quelconques, et r un nombre inférieur à l'unité ; chacune des équations (7) aurait une infinité de racines. Ainsi, par exemple, en représentant par n un nombre entier quelconque, on trouverait

$$
(12)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{pour } \operatorname{Sin}.bx=0\ , \\[4pt]
\qquad x=0,\ x=\pm\dfrac{\varpi}{b},\ x=\pm\dfrac{2\varpi}{b}\ ,\ \ldots\ldots\ x=\pm\dfrac{n\varpi}{b},\ \ldots\ ; \\[8pt]
\text{pour } \operatorname{Cos}.bx=0\ , \\[4pt]
\qquad x=\pm\dfrac{\varpi}{2b}\ ,\ x=\pm\dfrac{3\varpi}{2b}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ x=\pm\dfrac{(2n+1)\varpi}{2b}\ ,\ \ldots\ldots\ ; \\[8pt]
\text{pour } e^{bx}=h+k\sqrt{-1}\ , \\[4pt]
\qquad x=\dfrac{1}{b}\left[\mathrm{l}(\rho)+\left(\dfrac{\varpi}{2}-\varpi\right)\sqrt{-1}\pm 2n\varpi\sqrt{-1}\right]\ ; \quad (*) \\[8pt]
\text{pour } e^{bx\sqrt{-1}}=h+k\sqrt{-1}\ , \\[4pt]
\qquad x=\dfrac{1}{b}\left[\dfrac{\varpi}{2}-\omega-\sqrt{-1}.\mathrm{l}(\rho)\pm 2n\varpi\right]\ ; \\[8pt]
\text{pour } e^{(a+b\sqrt{-1})x}=h+k\sqrt{-1}\ , \\[4pt]
\qquad x=\dfrac{\mathrm{l}(\rho)+\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)\sqrt{-1}\pm 2n\varpi\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}\ ; \\[8pt]
\text{pour } \mathrm{l}(1+re^{bx\sqrt{-1}})=1\ , \\[4pt]
\qquad x=\pm\dfrac{2n\pi}{b}-\dfrac{\sqrt{-1}}{b}\,\mathrm{l}\,\dfrac{\epsilon-1}{r}\ ;
\end{array}
\right.
$$

et ainsi du reste.

(*) Voy le *Cours d'analyse algébrique*, chap. IX, (12) et (22).

Alors la somme désignée par Δ se composerait, en général, d'une infinité de termes; et par conséquent l'intégrale (4) se trouverait représentée par la somme d'une série infinie. Mais il arrivera, dans plusieurs cas, ou que la plupart des termes de la série devront être rejetés, parce qu'ils appartiendront à des racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera négatif, ou que la plupart des termes seront, deux à deux, égaux et de signes contraires, ou enfin que la somme de la série pourra être facilement déterminée, par la méthode que nous avons indiquée dans le paragraphe 13 du *Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires*. Il en résultera souvent que les équations (3) et (4) fourniront, en termes finis, les valeurs des intégrales qu'elles renferment. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend

$$f(x)=\varphi(x).\frac{\text{Cos}.ax}{\text{Cos}.bx}\;;$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction rationnelle et paire de la variable x.

En ayant égard aux diverses remarques que l'on vient de faire, on déduira des équations (3) et (4) une multitude de formules générales, propres à la détermination des intégrales définies. Je me contenterai d'en citer ici quelques-unes.

En désignant par r une quantité positive, et par m un nombre entier, on établira sans difficulté les formules générales

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}f(0)\,. \tag{13}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}\cdot\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}f(r\sqrt{-1})\,. \tag{14}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}f(r\sqrt{-1})\,. \tag{15}$$

$$(16)\quad \int_0^{\infty} \frac{f(x)+f(-x)}{2} \cdot \frac{r\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = \frac{\varpi}{4}[f(r)-f(-r)]\sqrt{-1} \;.$$

$$(17)\quad \int_0^{\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{x\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = \frac{\varpi}{4}[f(r)+f(-r)] \;.$$

$$(18)\quad \int_0^{\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{r^2\mathrm{d}x}{x(x^2+r^2)} \,, = \frac{\varpi}{2}[f(0)-f(r\sqrt{-1})] \;.$$

$$(19)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{r-x\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}x = 0 \;.$$

$$(20)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{r+x\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}x = 2\varpi f(r\sqrt{-1}) \;.$$

$$(21)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(r-x\sqrt{-1})^m}\,.\mathrm{d}x = 0 \;.$$

$$(22)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(r+x\sqrt{-1})^m}\,.\mathrm{d}x = (-1)^{m-1}.\frac{2\varpi}{\Gamma(m)}\,.\,\frac{\mathrm{d}^{m-1}.f(r\sqrt{-1})}{\mathrm{d}r^{m-1}} \quad (*)$$

Si l'on suppose $f(x) = \dfrac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}$; on trouvera

$$(23)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}\,.\mathrm{d}x = -2\varpi.\mathrm{f}(1-r\sqrt{-1})\,, \text{ pour } r<1 \;; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}\,.\mathrm{d}x = -\varpi\mathrm{f}(0)\,, \text{ ponr } r=1 \;; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}\,.\mathrm{d}x = 0\,, \text{ pour } r>1 \;; \end{array} \right.$$

(*) Le Γ est celui de M. Legendre, de sorte que $\Gamma(m)=1.2.3\ldots\ldots(m-n)$. C'est le $(m-1)!$ de M. Kramp.

J. D. G.

Puis, en réduisant la constante r à zéro, on tirera de la première de ces trois formules

$$(24)\quad \int_0^\infty \left\{ \frac{f(x)}{lx - \frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}} + \frac{f(-x)}{lx + \frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}} \right\} dx = -2\varpi f(\sqrt{-1}) .$$

Si, dans l'équation (21), on remplace le nombre entier m par un nombre quelconque a, on trouvera toujours

$$(25)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(r - x\sqrt{-1})^a} . dx = 0 .$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction rationnelle de la variable x, et concevons qu'après avoir calculé les diverses racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, on représente par $h + k\sqrt{-1}$ l'une quelconque de celles dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Soient de plus m le nombre des racines égales à $h + k\sqrt{-1}$, ε une quantité infiniment petite, et H_n, K_n deux quantités réelles, déterminées par la formule

$$(26)\qquad H_n + K_n\sqrt{-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n[\varepsilon^n \varphi(h + k\sqrt{-1} + \varepsilon)]}{d\varepsilon^n} ,$$

qui deviendra simplement

$$(27)\qquad H + K\sqrt{-1} = \varepsilon\varphi(h + k\sqrt{-1} + \varepsilon) ,$$

si une seule racine est égale à $h + k\sqrt{-1}$.

Soit enfin $f(x)$ une fonction telle que l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$ n'admette point de racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif; du moins qui ne produise dans la valeur de Δ que des termes dont la somme se réduise à zéro ; on tirera de la formule (3)

$$(28)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x=-2\varpi\left\{\begin{array}{l}(K_{m-1}-H_{m-1}\sqrt{-1})\,\mathrm{f}(h+k\sqrt{-1})+\ldots\\[4pt] +(K_{m-2}-H_{m-1}\sqrt{-1})\,\dfrac{\mathrm{f}'(h+k\sqrt{-1})}{1}+\ldots\\[4pt] +(K_{m-3}-H_{m-1}\sqrt{-1})\,\dfrac{\mathrm{f}''(h+k\sqrt{-1})}{1.2}+\ldots\\[4pt] +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\\[4pt] +(K_{1}-H_{m-1}\sqrt{-1})\,\dfrac{\mathrm{f}^{(m-1)}(h+k\sqrt{-1})}{1.2.3.\ldots.(m-1)}+\ldots\end{array}\right\};$$

les expressions $K-H\sqrt{-1}$, $K_1-H_1\sqrt{-1}$, ... devant être réduites à moitié, quand la quantité k devient nulle.

Ainsi, par exemple, a, b, r, s désignant toujours des quantités positives, θ un arc compris entre les limites o et ϖ, $h+k\sqrt{-1}$ une des racines inégales de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, et enfin ω, ρ les quantités que renferment les seconds membres des formules (9), on trouvera

$$(29)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}\varphi(x)\mathrm{d}x=-2\varpi[(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1}+\ldots].$$

$$(30)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{bx\sqrt{-1}}\varphi(x)\mathrm{d}x=-2\varpi[(K-H\sqrt{-1})e^{-bk}.(\mathrm{Cos}.bh+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.bh)+..].$$

$$(31)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x=-2\varpi\left[(K-H\sqrt{-1})\,\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{\rho}e^{\omega\sqrt{-1}}\right)+\ldots\right].$$

$$(32)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{l}(1-rx\sqrt{-1})\varphi(x)\mathrm{d}x = -2\varpi[(K-H\sqrt{-1})\mathrm{l}(1+kr-hr\sqrt{-1})+\ldots] .$$

$$(33)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{l}[r\mathrm{Sin.}\theta+(r\mathrm{Cos.}\theta-x)\sqrt{-1}]\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\{(K-H\sqrt{-1})\mathrm{l}[k+r\mathrm{Sin.}\theta-(h-r\mathrm{Cos.}\theta)\sqrt{-1}]+\ldots\} .$$

$$(34)\ \int_{-\infty}^{+\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} e^{bx\sqrt{-1}} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\omega\{(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1} e^{-bk}(\mathrm{Cos.}bh+\sqrt{-1}\mathrm{Sin.}bh)+\ldots\} .$$

$$(35)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^a}{\mathrm{l}(1-rx\sqrt{-1})}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1})(k+h\sqrt{-1})^a \frac{1}{\mathrm{l}(1+kr-hr\sqrt{-1})}+\ldots\right\} .$$

$$(36)\ \int_{-\infty}^{+\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} .\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1}\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{\rho}e^{\omega\sqrt{-1}}\right)+\ldots\right\} .$$

$$(37)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^a}{\mathrm{l}(1-rx\sqrt{-1})} .e^{bx\sqrt{-1}} .\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^a \mathrm{l}\left(1+\frac{s}{\rho}e^{\omega\sqrt{-1}}\right)\frac{1}{\mathrm{l}(1+kr-hr\sqrt{-1})}+\ldots\right\} .$$

$$(38)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ae^{bx\sqrt{-1}}}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\{(K-H\sqrt{-1}).e^{ae^{-bk}.\mathrm{Cos}.bh}[\mathrm{Cos}.(ae^{-bk}\,\mathrm{Sin}.bh)+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.(ae^{-bk}.\mathrm{Sin}.bh)]+\ldots\}.$$

$$(39)\ \int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}.e^{e^{bx\sqrt{-1}}}.\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\{K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1}.e^{e^{-bk}.\mathrm{Cos}.bh}[\mathrm{Cos}.(e^{-bh}\mathrm{Sin}.bh)+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.(e^{-bk}\mathrm{Sin}.bh)]+\ldots\}.$$

et ainsi du reste

On trouvera encore, en supposant $r<1$,

$$(40)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{l}(1+re^{bx\sqrt{-1}})\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\{(K-H\sqrt{-1})\mathrm{l}[1+re^{-bk}(\mathrm{Cos}.bh+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.bh)]+\ldots\}.$$

$$(41)\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ax\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}(1+re^{bx\sqrt{-1}})\,\varphi(x)\mathrm{d}x=\ldots\ldots;$$

et ainsi des autres.

Enfin, si l'on suppose $a<b$, on trouvera, en prenant pour x une fonction rationnelle et paire de la variable x,

$$(42)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Cos}.ax}{\mathrm{Cos}.bx}\,\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1}).\,\frac{(e^{ak}+e^{-ak})\mathrm{Cos}.ah-\sqrt{-1}\,(e^{ak}-e^{-ak})\mathrm{Sin}\;ah}{(e^{bk}+e^{-bk})\mathrm{Cos}.bh-\sqrt{-1}\,(e^{bk}-e^{-bk})\mathrm{Sin}.bh}+\ldots\right\}.$$

$$(43)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Sin}.ax}{\mathrm{Sin}.bx}\,\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1}).\,\frac{(e^{ak}-e^{-ak})\mathrm{Cos}\;ah-\sqrt{-1}\,(e^{ak}+e^{-ak})\mathrm{Sin}.ah}{(e^{bk}-e^{-bk})\mathrm{Cos}.bh-\sqrt{-1}\,(e^{bk}+e^{-bk})\,\mathrm{Sin}.bh}+\ldots.\right\}.$$

et, en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction rationnelle, mais impaire de la variable x,

$$(44)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Cos}.ax}{\mathrm{Sin}.bx}\,\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1}).\,\frac{(e^{ak}+e^{-ak})\mathrm{Cos}.ah-\sqrt{-1}\,(e^{ak}-e^{-ak})\mathrm{Sin}.ah}{(e^{bk}+e^{-bk})\mathrm{Sin}.bh+\sqrt{-1}\,(e^{bk}-e^{-bk})\mathrm{Cos}.bh}+\ldots\right\}.$$

$$(45)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Sin}.ax}{\mathrm{Cos}.bx}\,\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{(K-H\sqrt{-1}).\,\frac{(e^{ak}+e^{-ak})\mathrm{Sin}.ah+\sqrt{-1}\,(e^{ak}-e^{-ak})\mathrm{Cos}.ah}{(e^{bk}+e^{-bk})\mathrm{Cos}.bh-\sqrt{-1}\,(e^{bk}-e^{-bk})\mathrm{Sin}.bh}+\ldots\right\}.$$

Comme d'ailleurs ces quatre dernières intégrales s'évanouissent évidemment, savoir : les deux premières lorsque $\varphi(x)$ deviendra une fonction impaire, et les deux dernières lorsque $\varphi(x)$ deviendra une fonction paire ; on peut en conclure que les valeurs de ces quatre intégrales seront connues pour des valeurs quelconques de la fonction rationnelle désignée par $\varphi(x)$.

Chacune des formules que nous venons d'établir se décompose en deux équations réelles, lorsqu'on égale séparément à zéro et les parties réelles des deux membres et les parties multipliées par $\sqrt{-1}$. En opérant ainsi, et prenant pour $\varphi(x)$ une fonction réelle, on obtiendra une multitude de formules, dont quelques-unes sont déjà connues, et parmi lesquelles je citerai seulement les suivantes :

$$(46)\ \int_0^{\infty} x^{a-1}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{2\varpi}{\mathrm{Sin}.a\varpi}\Big\{\rho^{a-1}\Big[+k\,\mathrm{Cos}.(1-a)\Big(\frac{\pi}{2}+\varpi\Big)$$

$$-h\mathrm{Sin}.(1-a)\Big(\frac{\pi}{2}+\omega\Big)\Big]+\ldots\ldots\Big\}.$$

$$(47)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Cos}.bx.\varphi(x)\mathrm{d}x = -2\varpi\{(K\mathrm{Cos}.bh + H\mathrm{Sin}.bh)e^{-bk}+\ldots.\}.$$

$$(48)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sin}.bx\varphi(x)\mathrm{d}x = -2\varpi\{(K\mathrm{Sin}.bh - H\mathrm{Cos}.bh)e^{-bk}+\ldots..\}.$$

$$(49)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{l}(r^2-2rx\mathrm{Cos}\,\theta+x^2)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\varpi\Big\{K\mathrm{l}[r^2-2\rho r\mathrm{Sin}\,(\omega-\theta)+\rho^2]-2H\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{\rho\mathrm{Sin}.\omega-r\mathrm{Cos}.\theta}{\rho\mathrm{Cos}.\omega+r\mathrm{Sin}.\theta}+\ldots\Big\}.$$

$$(50)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{r\mathrm{Cos}.\theta-x}{r\mathrm{Sin}.\theta}.\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\varpi\Big\{H\mathrm{l}[r^2-2\rho r\mathrm{Sin}\,(\omega-\theta)+\rho^2]+2K\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{\rho\mathrm{Sin}.\omega-r\mathrm{Cos}.\theta}{\rho\mathrm{Cos}.\omega+r\mathrm{Sin}.\theta}+\ldots\Big\}:$$

$$(51)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{s}{x}.\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\varpi\Big\{H\mathrm{l}(1+2s\mathrm{Cos}.\omega+s^2)-2K\mathrm{Arc.Tang.}=\frac{s\mathrm{Sin}.\omega}{\rho+s\mathrm{Cos}.\omega}+\ldots\Big\}:$$

$$(52)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x).\mathrm{Arc\ Cot.}x.\mathrm{d}x$$

$$=\varpi\Big\{H\mathrm{l}\Big(1+\frac{2\mathrm{Cos}.\omega}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\Big)-2K\mathrm{Arc.Cot.}=\frac{\rho+\mathrm{Cos}.\omega}{\mathrm{Sin}.\omega}+\ldots\Big\}.$$

$$(53)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\text{Cos}.bx}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.bx).\varphi(x)\text{d}x$$

$$=-2\varpi\{e^{ae^{-bk}.\text{Cos}.bh}[K\text{Cos}.(ae^{-bk}.\text{Sin}.bh)+H\text{Sin}.(ae^{-bk}.\text{Sin}.bh)]+....\}\ .$$

$$(54)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\text{Cos}.bx}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.bx)\varphi(x)\text{d}x$$

$$=2\varpi\{e^{ae^{-bk}.\text{Cos}.bh}.[H\text{Cos}.(ae^{-bk}.\text{Sin}\ bh)-K\text{Sin}.(ae^{-bk}.\text{Sin}.bh)]+....\}\ .$$

$$(55)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{l}(1+2r\text{Cos}.bx+r^2).\varphi(x)\text{d}x$$

$$=-2\varpi\left\{K\text{l}(1+2re^{-bk}.\text{Cos}.bh+r^2e^{-2bk})+2H\text{Arc.Tang.}=\frac{r\text{Sin}.bh}{e^{bk}+r\text{Cos}.bh}+....\right\}\ .$$

$$(56)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Arc.Tang.}\ \frac{r\text{Sin}.bx}{1+r\text{Cos}.bx}.\varphi(x)\text{d}x$$

$$=\varpi\left\{H\text{l}(1+2re^{-bk}.\text{Cos}\ bh+r^2e^{-2bk})-2K\text{Arc.Tang.}=\frac{r\text{Sin}.bh}{e^{bk}+r\text{Cos}.bh}+....\right\}\ .$$

On trouvera encore, en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction paire de la variable x,

$$(57)\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1}\text{Sin}.\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right).\varphi(x)\text{d}x$$

$$=-\varpi\{\rho.^{a-1}e^{-bk}[K\text{Cos}\,(\omega-a\omega+bh)+H\text{Sin}.(\omega-a\omega+bh)]+...\}\ .$$

Il est facile de reconnaître les différentiations que doivent subir les diverses formules auxquelles nous sommes parvenus, dans le cas où l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$ a des racines égales. Si l'on différentie ces mêmes formules par rapport aux quantités a, b, r, ... on obtiendra de nouveaux résultats, que l'on pourrait déduire directement de la formule (3). Ainsi, par exemple, si l'on différentie n fois par rapport à la quantité a, l'équation (46), on en déduira la valeur de l'intégrale

$$(58)\int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1}(x)[\mathrm{l}(x)]^n dx\ ,$$

à laquelle on parviendrait aussi, en posant successivement, dans l'équation (3)

$$f(x)=(-x\sqrt{-1})^{a-1}\mathrm{l}(-x\sqrt{-1}).\varphi(x)\ ,$$

$$f(x)=(-x\sqrt{-1})^{a-1}[\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})]^2.\varphi(x)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

On obtiendrait encore plusieurs résultats dignes de remarque, en intégrant quelques formules par rapport aux constantes a, b, r,...

Il importe d'observer que les formules (29), (34), (35), (36) et (39) subsistent, dans le cas même où l'on remplace l'exposant réel a par une constante imaginaire $\lambda+\mu\sqrt{-1}$. En opérant ainsi, prenant pour $\varphi(x)$ une fonction réelle et posant successivement

$$a=\lambda+\mu\sqrt{-1}\ , \qquad a=\lambda-\mu\sqrt{-1}\ ,$$

on établira de nouvelles équations que l'on pourrait combiner entre elles, et l'on reconnaîtra facilement, par ce moyen, que les formules (46), (57), ... s'étendent à des valeurs réelles ou imaginaires quelconques de la constante a. Si l'on décompose ensuite chaque équation imaginaire en deux équations réelles, on obtiendra les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies, parmi lesquelles je citerai celles qui suivent :

$$(59)\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}\text{Cos.}[\mu l(x)]\varphi(x)dx\ , \quad \int_0^{\infty} x^{\lambda-1}\text{Sin.}[\mu l(x)]\varphi(x)dx\ ;$$

$$(60)\int_0^{\infty}\left\{e^{\frac{\mu\pi}{2}}\text{Sin.}\left[\frac{\lambda\pi}{2}-bx-\mu l(x)\right]+e^{-\frac{\mu\varpi}{2}}\text{Sin.}\left[\frac{\lambda\pi}{2}-bx+\mu l(x)\right]\right\}\varphi(x)dx\ ;$$

$$(61)\int_0^{\infty}\left\{e^{\frac{\mu\varpi}{2}}\text{Cos}\left[\frac{\lambda\varpi}{2}-bx-\mu l(x)\right]-e^{-\frac{\mu\pi}{2}}\text{Cos.}\left[\frac{\lambda\pi}{2}-bx+\mu l(x)\right]\right\}\varphi(x)dx\ .$$

On déterminera les deux premières, quelle que soit la fraction rationnelle désignée par $\varphi(x)$; et les deux dernières, toutes les fois que cette fraction deviendra une fonction paire de la variable x.

Aux formules générales ci-dessus établies, on pourrait en joindre un grand nombre d'autres, dans lesquelles entreraient des fonctions $\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... des variables

$$u=\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\ ;\quad v=l(r-x\sqrt{-1})\ ,\quad w=l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right),\ \ldots;$$

Ainsi, par exemple, $h+k\sqrt{-1}$ désignant toujours une des racines intégrales de $\frac{1}{\varphi(u)}$, et l'expression $H+K\sqrt{-1}$ étant déterminée par la formule (27), on tirera de l'équation (3)

$$(62)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)\frac{dx}{x^2+1}=\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}+\ldots.\right\}.$$

$$(63)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi[l(-x\sqrt{-1})]\ \frac{rdx}{x^2+r^2}$$

$$=\int_0^\infty\left\{\varphi\left[\mathrm{l}(x)-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right]+\varphi\left[\mathrm{l}(x)+\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right]\right\}\frac{r\mathrm{d}x}{x^2+r^2}$$

$$=\varpi\varphi[\mathrm{l}(r)]-2\varpi r\left\{(H+K\sqrt{-1}).\ \frac{\mathrm{Cos}.k+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.k}{r^2-e^{2h}(\mathrm{Cos}.2k+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2k)}\,e^h+\ldots\right\}.$$

Il résulte d'ailleurs des équations (10) qu'après avoir cherché les racines de $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, on devra seulement admettre, dans les formules (62), celles des racines dont le module sera inférieur à l'unité, et, dans la formule (3), celles qui fourniront des valeurs positives ou nulles de $\mathrm{Cos}.k$. Ajoutons que les quantités H et K devront être réduites à moitié, dans la formule (62), quand le module de $h+k\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, $\sqrt{h^2+k^2}$ deviendra égal à l'unité, et dans la formule (63), quand on aura $\mathrm{Cos}.k=0$.

On déterminera avec la même facilité les valeurs des intégrales

$$(64)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{bx\sqrt{-1}}.\varphi[\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})]\,\frac{r\mathrm{d}x}{r^2+x^2}\ ,$$

$$(65)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}\varphi[\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})]\,\frac{r\mathrm{d}x}{r^2+x^2}\ ,$$

$$(66)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\chi[\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})]\mathrm{d}x\ ;$$

et ainsi du reste.

On trouverait, par exemple,

$$(67)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})}=-2\varpi\left\{\varphi(\sqrt{-1})+\frac{K-H\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})}+\ldots\right\}.$$

On trouverait de même

$$(68)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}\varphi(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})}$$

$$=-2\varphi(\sqrt{-1})-2\varpi\left\{\frac{K-H\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})}\,(k-h\sqrt{-1})^{a-1}+\ldots\right\}.$$

On aurait, par suite, en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction paire de x

$$(69)\ \int_0^\infty \varphi(x)\frac{\mathrm{l}(x)}{\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\,\mathrm{d}x=-\varpi\left\{\varphi(\sqrt{-1})+\frac{K-H\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})}+\ldots\ldots\right\};$$

$$(70)\ \int_0^\infty x^{a-1}\varphi(x)\,\frac{\mathrm{Sin.}\,\frac{a\varpi}{2}\,\mathrm{l}(x)-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{a\varpi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\varpi\varphi(\sqrt{-1})-\varpi\left\{\frac{K-H\sqrt{-1}}{(\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})}\,(k-h\sqrt{-1})^{a-1}+\ldots\right\};$$

et, en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction impaire de x,

$$(71)\ \int_0^\infty \varphi(x)\,\frac{1}{\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left\{\varphi(\sqrt{-1})+\frac{K-H\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1})}+\ldots\ldots\right\}\sqrt{-1}\,.$$

$$(72)\ \int_0^\infty x^{a-1}.\varphi(x)\,\frac{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Sin.}\,\frac{a\varpi}{2}+\mathrm{Cos.}\,\frac{a\varpi}{2}\,.\mathrm{l}(x)}{\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\varpi\sqrt{-1}.\varphi(\sqrt{-1})+\varpi\left\{\frac{H+K\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(k-h\sqrt{-1}}\,(k-h\sqrt{-1})^{a-1}+\ldots\ldots\right\}.$$

On pourrait multiplier sans mesure les formules générales qui se déduisent des équations (2) et (3); on pourrait ensuite transformer les intégrales définies contenues dans ces formules, de manière à obtenir d'autres intégrales, prises entre des limites différentes; ce qui sera particulièrement utile, toutes les fois que les fonctions sous le signe $\int$ deviendront infiniment grandes, pour certaines valeurs de la variable. Ainsi, par exemple, on tirera de la formule (16)

$$(73)\ \int_0^r \frac{1}{2}\left\{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}\left(\frac{r^2}{x}\right)+\mathrm{f}(-x)-\mathrm{f}\left(-\frac{r^2}{x}\right)\right\}\frac{r\,\mathrm{d}x}{x^2-r^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}[\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(-r)]\sqrt{-1}\ .$$

Il sera pareillement facile de s'assurer que l'intégrale (58) est équivalente à l'expression

$$(74)\ \int_0^1 \left\{x^a\varphi(x)+(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)^a\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right\}[\mathrm{l}(x)]^a\frac{\mathrm{d}x}{x}\ .$$

Ajoutons que, dans les diverses formules obtenues, les valeurs numériques des constantes a, b, r, s, ... ne seront pas toujours entièrement arbitraires ; et que ces constantes devront être comprises entre certaines limites si, en les étendant au-delà de ces limites, on rend infinies les valeurs des intégrales qui les renferment. Ainsi, en désignant par $\varphi(x)$ une fraction rationnelle dans laquelle le degré du dénominateur surpasse de m unités celui du numérateur, on reconnaîtra sans peine que, dans la formule (58), la constante positive a doit être inférieure au nombre entier m.

Si maintenant on attribue aux fonctions $f(x)$, $\mathrm{f}(x)$, $\varphi(x)$, ..., ou bien aux constantes a, b, r, s, ... des valeurs particulières, on déduira des formules générales que nous avons construites la plupart des intégrales définies connues, et une infinité d'autres nouvelles. Je me contenterai de présenter ici quelques-uns des résultats les plus simples.

$$(75)\int_0^\infty x^{a-1}.\mathrm{Sin.}\left(\frac{a\varpi}{2}-bx\right)\frac{r\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}.r^{a-1}e^{-br}.$$

$$(76)\int_0^\infty x^{a-1}.\mathrm{Sin.}\left(\frac{a\varpi}{2}-bx\right)\frac{r\mathrm{d}x}{r^2-x^2}=\frac{\pi}{2}.r^{a-1}\mathrm{Cos.}\left(\frac{a\varpi}{2}-br\right);$$

$$(77)\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\mathrm{d}x}{1+x}=\frac{\varpi}{\mathrm{Sin.}a\varpi}\ ,\qquad\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\mathrm{d}x}{1+x}=\varpi\mathrm{Cot.}a\varpi\ .$$

$$(78)\int_0^\infty\frac{x^a\mathrm{d}x}{x^2-1}=\int_0^1\frac{x^a-\frac{1}{x^a}}{x-\frac{1}{x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\varpi}{2}\ .\ \mathrm{Tang.}\frac{a\varpi}{2}\ .$$

$$(79)\int_0^\infty \frac{x^a dx}{x^2+2rx\mathrm{Cos}.\theta+r^2}=\frac{\varpi r^{a-1}}{\mathrm{Sin}.a\varpi}\cdot\frac{\mathrm{Sin}.a\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}.$$

$$(80)\int_0^\infty \frac{x^\lambda\,\mathrm{Cos}.[\mu l(x)]}{x^2+2x\mathrm{Cos}\,\theta+1}dx$$

$$=\frac{\varpi}{\mathrm{Sin}.\theta}\cdot\frac{[e^{\mu(\varpi+\theta)}+e^{-\mu(\varpi+\theta)}]\mathrm{Cos}.\lambda(\varpi-\theta)-[e^{\mu(\varpi-\theta)}+e^{-\mu(\varpi-\theta)}]\mathrm{Cos}.\lambda(\varpi+\theta)}{e^{2\mu\varpi}-2\mathrm{Cos}.(2\lambda\varpi)+e^{-2\mu\varpi}}.$$

$$(81)\int_0^\infty \frac{x^\lambda\,\mathrm{Sin}.[\mu l(x)]}{x^2+2x\mathrm{Cos}.\theta+1}dx$$

$$=\frac{\varpi}{\mathrm{Sin}.\theta}\cdot\frac{[e^{\mu(\varpi+\theta)}-e^{-\mu(\varpi+\theta)}]\mathrm{Sin}.\lambda(\varpi+\theta)-[e^{\mu(\varpi-\theta)}-e^{-\mu(\varpi-\theta)}]\mathrm{Sin}.\lambda(\varpi-\theta)}{e^{2\mu\varpi}-2\mathrm{Cos}.(2\lambda\varpi)+e^{-2\mu\varpi}}.$$

$$(82)\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}[l(x)]^n dx=\int_0^1 \frac{x^a+(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^a}{x+\frac{1}{x}}[l(x)]^n\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{d^n.\mathrm{Sec}.(\frac{1}{2}a\varpi)}{da^n}.$$

$$(83)\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2-1}[l(x)]^n dx=\int_0^1 \frac{x^a-(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^a}{x=\frac{1}{x}}[l(x)]^n\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d^n.\mathrm{Tang}.(\frac{1}{2}a\varpi)}{da^n}.$$

$$(84)\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l(x)}\cdot\frac{dx}{x^2+1}=+\left(l\,\mathrm{Tang}.\frac{a\varpi}{4}-l.\,\mathrm{Tang}.\frac{b\pi}{4}\right).$$

$$(85)\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l(x)}\cdot\frac{dx}{x^2-1}=-\left(l.\mathrm{Sin}.\frac{a\pi}{2}-l.\mathrm{Sin}.\frac{b\varpi}{2}\right).$$

$$(86)\int_0^\infty \mathrm{Cos}.bx.\frac{r dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}.e^{-br},\quad \int_0^\infty \mathrm{Sin}.bx.\frac{x dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}.e^{-br}.$$

$$(87)\int_0^{\varpi}\text{Cos}.bx\ \frac{r\,dx}{x^2-r^2}=-\frac{\pi}{2}\text{Sin}.br\ ,\ \int_0^{\infty}\text{Sin}.bx.\ \frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}\text{Cos}.br\,.$$

$$(88)\int_0^{\varpi}\text{Cos}.bx.\frac{dx}{1-x^2}=2\int_0^{1}\text{Sin}.\frac{b}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right).\text{Sin}.\frac{b}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right).\frac{dx}{x^2-1}=\frac{\pi}{2}\text{Sin}.b\ .$$

$$(89)\int_0^{\infty}\frac{\text{Sin}.bx}{x}dx=\frac{\varpi}{2}.\int_0^{\infty}\frac{\text{Sin}.bx}{x}\ .\ \frac{r^2dx}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}\left(1-e^{-br}\right)\ .$$

$$(90)\int_{-\infty}^{+\infty}\text{l}(x^2-2rx\text{Cos}.\theta+r^2)\ \frac{dx}{1+x^2}=\varpi\text{l}(1+2r\text{Sin}.\theta+r^2)\ .$$

$$(91)\int_{-\infty}^{+\infty}\text{Arc.Tang.}=\frac{r\text{Cos}.\theta-x}{r\text{Sin}.\theta}.\frac{dx}{1+x^2}=\varpi.\text{Arc.Tang.}=\frac{r\text{Cos}.\theta}{1+r\text{Sin}.\theta}.$$

$$(92)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\text{l}\left(1+\frac{s^2}{x^2}\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\varpi\text{l}\left(1+\frac{s}{r}\right)\ ;\\&\int_0^{\infty}\text{Arc.Tang.}\left(\frac{s}{x}\right).\ \frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}\text{l}\left(1+\frac{s}{x}\right)\ .\end{aligned}\right.$$

$$(93)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\text{l}\left(1+\frac{s^2}{x^2}\right)\frac{r\,dx}{x^2-r^2}=-\varpi\text{Arc.Tang.}=\frac{s}{r}\ ;\\&\int_0^{\infty}\text{Arc.Tang.}\left(\frac{s}{x}\right).\ \frac{x\,dx}{x^2-r^2}=\frac{\varpi}{4}\text{l}\left(1+\frac{s^2}{r^2}\right)\ .\end{aligned}\right.$$

$$(94)\int_0^{\infty}(\text{Arc.Cot}.x)^2dx=2\int_0^{\infty}\text{Arc.Tang.}\frac{1}{x}.\frac{x\,dx}{x^2+1}=\varpi\text{l}(2)\ .$$

$$(95)\int_0^{1}\frac{x\text{Arc.Tang.}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\text{Arc.Tang.}x}{x-\frac{1}{x}}.\ \frac{dx}{x}=\frac{\varpi}{4}\text{l}(2)\ .$$

$$(96)\int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}\text{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\varpi r^{a-1}\text{l}\left(1+\frac{s}{r}\right).$$

$$(97)\int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{r-x\sqrt{-1}}=0\ .$$

$$(98)\int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}.e^{bx\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{r+x\sqrt{-1}}=2\varpi.r^{a-1}e^{-br}.\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{r}\right).$$

$$(99)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax\sqrt{-1}}-e^{bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}=-\frac{2\varpi}{1-r}\left[e^{-b(1-r)}-e^{-a(1-r)}\right],\ \text{pour } r<1\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax\sqrt{-1}}-e^{bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})}=-\varpi(a-b)\ ;\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax\sqrt{-1}}-e^{bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{l}(r-x\sqrt{-1})}=0,\ \text{pour } r>1\ .\end{array}\right.$$

$$(100)\int_{-\infty}^{+\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}.\frac{\mathrm{l}\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)}{\mathrm{l}\left(1-\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=2\varpi(1-r)^{a-1}e^{-b(1-r)}\mathrm{l}\left(\frac{1-r}{1-r+s}\right);\ \text{pour } r<1$$

$$(101)\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}(\mathrm{Cos}.ax-\mathrm{Cos}.bx)+(\mathrm{Sin}.ax-\mathrm{Sin}.bx)\mathrm{l}(x)}{\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2+[\mathrm{l}(x)]^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\varpi(e^{-a}-e^{-b})\ .$$

$$(102)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{(r-x\sqrt{-1})^a}\mathrm{d}x=0\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(r-x\sqrt{-1})^a(s-x\sqrt{-1})^b}=0\ .$$

$$(103)\int_{0}^{\infty}e^{a\mathrm{Cos}.bx}(a\mathrm{Sin}.bx)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\varpi}{2}(e^a-1)\ .$$

$$(104)\quad \int_0^\infty e^{a\mathrm{Cos}.bx}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.bx)\,\frac{r\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}e^{ae^{-br}}. \quad (*)$$

$$(105)\quad \int_0^\infty e^{a\mathrm{Cos}.bx}\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}.bx)\,\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}\left(e^{ae^{-bk}}-1\right).$$

$$(106)\quad \int_0^\infty x^{a-1}e^{\mathrm{Cos}.bx}\mathrm{Sin}.\left(\frac{a\pi}{2}-\mathrm{Sin}.bx\right)\frac{r\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=\frac{\varpi}{2}r^{a-1}.e^{e^{-br}}.$$

$$(107)\quad \int_0^\infty \frac{(r-x\sqrt{-1})^{-n}+(r+x\sqrt{-1})^{-n}}{2}\,\mathrm{l}\left(1+\frac{s^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\varpi}{n-2}\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{r+s}\right)^{n-2}\right\}.$$

$$(108)\quad \int_0^\infty \frac{(r-x\sqrt{-1})^{-n}-(r+x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}\,\mathrm{Arc.Tang.}\left(\frac{s}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\frac{\varpi}{n-1}\left\{\frac{1}{r^n}-\frac{1}{(r+s)^n}\right\};$$

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}.ax}{\mathrm{Cos}.bx}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{e^a+e^{-a}}{e^b+e^{-b}};\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.ax}{\mathrm{Sin}.bx}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{e^b-e^{-b}};\\ &\int_0^\infty \frac{x\mathrm{Cos}.ax}{\mathrm{Sin}.bx}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{e^a+e^{-a}}{e^b-e^{-b}};\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.ax}{x\mathrm{Cos}.dx}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{e^b+e^{-b}}.\end{aligned}\right.$$

Les quatre dernières formules supposent $a<b$.

Dans le tableau qui précède, on reconnaît facilement plusieurs formules établies à l'aide de méthodes diverses, par Euler et d'autres géomètres, et particulièrement par MM. Laplace, Legendre et Poisson, et par M. Bidone, géomètre italien. C'est à ce dernier que sont dues les équations (37), les formules (75), (76), et plusieurs autres sont entièrement nouvelles, ou extraites de quelques-uns des mémoires que j'ai déjà publiés sur les intégrales définies.

(*) Ces deux dernières formules doivent être déduites, non de la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\varpi\sqrt{-1}(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\mathrm{f}_3+\ldots.)\ ;$$

mais de la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\varpi\sqrt{-1}(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\mathrm{f}_3+\ldots.)-\varpi.\mathrm{F}\sqrt{-1}\ ;$$

F désignant la valeur que reçoit $(x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})$, pour $y=\infty$. (Voy. *la première partie du mémoire*).

En désignant, avec M. Legendre, par $\Gamma(a)$ l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x ,$$

et, en suivant la méthode que j'ai indiquée dans le *Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires* (Paris, in-4.°, *Debure*, 1825), on établit facilement les deux équations

$$(110)\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{bx\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{(r+x\sqrt{-1})^a}=\frac{2\pi}{\Gamma(a)}b^{a-1}.e^{-br}.\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(r+x\sqrt{-1})^a(s-x\sqrt{-1})^b}=2\varpi(r+s)^{1-a-b}.\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.\end{aligned}\right.$$

De ces dernières, combinées avec la formule (102), on tire immédiatement

$$(111)\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{(r-x\sqrt{-1})^{-a}+(r+x\sqrt{-1})^{-a}}{2}.\mathrm{Cos}.bx.\mathrm{d}x=\frac{\varpi}{2\Gamma(a)}.b^{a-1}.e^{-br};\\&\int_0^\infty\frac{(r-x\sqrt{-1})^{-a}-(r+x\sqrt{-1})^{-a}}{2\sqrt{-1}}\mathrm{Sin}.bx.\mathrm{d}x=\frac{\varpi}{2\Gamma(a)}.b.^{a-1}.e^{-br};\end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(112)\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{(r-x\sqrt{-1})^{-a}+(r+x\sqrt{-1})^{-a}}{2}.\frac{(s-x\sqrt{-1})^{-b}+(s+x\sqrt{-1})^{-b}}{2}\mathrm{d}x\\&\qquad=\frac{\varpi}{2}(r+s)^{1-a-b}.\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\\&\int_0^\infty\frac{(r-x\sqrt{-1})^{-a}-(r+x\sqrt{-1})^{-a}}{2\sqrt{-1})}.\frac{(s-x\sqrt{-1})^{-b}-(s+x\sqrt{-1})^{-b}}{2\sqrt{-1}}\mathrm{d}x\\&\qquad=\frac{\varpi}{2}(r+s)^{1-a-b}.\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.\end{aligned}\right.$$

J'ai donné les formules (111) au commencement de 1815, dans un mémoire où elles étaient appliquées à la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies, et pour lesquelles MM. Laplace, Legendre et Lacroix furent nommés commissaires. On peut, au reste, opérer cette conversion, en s'appuyant sur la première des formules (110), ou sur une autre formule qui s'accorde avec elle, et qui a été donnée par M. Laplace.

Enfin on tire des formules (87), en faisant $r=1$, puis écrivant z au lieu de b,

$$(113)\qquad \mathrm{Cos}.z=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Sin}.zx.\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}\ ;\quad \mathrm{Sin}.z=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Cos}.zx.\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\ .$$

Ces dernières fournissent le moyen de remplacer le cosinus d'un arc positif z, par le sinus d'un arc variable, proportionnel à z, et le sinus du premier arc par le cosinus du second. Cette propriété des formules (113) peut être utile dans la solution de quelques problèmes. C'est effectivement à l'aide des formules dont il s'agit que j'étais d'abord parvenu, en 1815, à résoudre la question de la propagation des ondes, ainsi qu'on peut le voir dans la note XVIII, placée à la suite du mémoire déjà cité.

Si, dans l'intégrale (74), on pose $x=e^{-p}$, elle prendra la forme

$$(114)\quad \int_{0}^{\infty}[e^{ap}.\varphi(e^{p})+(-1)^{n}e^{-ap}.\varphi(e^{-p})]p^{n}\mathrm{d}p\ .$$

Par conséquent, les méthodes ci-dessus exposées fourniront la valeur de l'intégrale (114), qui ne diffère pas de la suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p^{n}e^{ap}\varphi(e^{p})\mathrm{d}p\ .$$

Si l'on applique la même transformation aux intégrales (78), (80), (81), (82), (83), (88), (95), ...; puis que l'on écrive x au lieu de p, on trouvera

(115) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^x-e^{-x}}\,dx=\frac{\varpi}{2}\text{Tang.}\,\frac{a\varpi}{2}.$

(116) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{e^x+2\text{Cos.}\theta+e^{-x}}\,\text{Cos.}(\mu x).dx$

$$=\frac{\varpi}{\text{Sin.}\theta}\cdot\frac{[e^{\mu(\varpi+\theta)}+e^{-\mu(\varpi+\theta)}]\text{Cos.}\lambda(\varpi-\theta)-[e^{\mu(\varpi-\theta)}+e^{-\mu(\varpi-\theta)}]\text{Cos.}\lambda(\varpi+\theta)}{e^{2\mu\varpi}-2\text{Cos}\,(2\lambda\varpi)+e^{-2\mu\varpi}}.$$

(117) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{e^x+2\text{Cos.}\theta+e^{-x}}\,\text{Sin.}(\mu x).dx$

$$=\frac{\varpi}{\text{Sin.}\theta}\cdot\frac{[e^{\mu(\varpi+\theta)}-e^{-\mu(\varpi+\theta)}]\text{Sin.}\lambda(\varpi+\theta)-[e^{\mu(\varpi-\theta)}-e^{-\mu(\varpi-\theta)}]\text{Sin.}\lambda(\varpi+\theta)}{e^{2\mu\varpi}-2\text{Cos.}(2\lambda\varpi)+e^{-2\mu\varpi}}.$$

(118) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{ax}+(-1)^n e^{-ax}}{e^x+e^{-x}}.x^n dx=(-1)^n.\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{d^n\,\text{Sec.}\,\frac{a\varpi}{2}}{da^n}.$

(119) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{ax}-(-1)^n e^{-ax}}{e^x-e^{-x}}.x^n dx=(-1)^n.\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{d^n.\text{Tang.}\,\frac{a\varpi}{2}}{da^n}.$

(120) $\displaystyle\int_0^\infty \text{Sin.}\,\frac{b}{2}(e^x+e^{-x}).\text{Sin.}\,\frac{b}{2}(e^x-e^{-x})\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=+\frac{\varpi}{4}\text{Sin.}b.$

(121) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x\text{Arc}(\text{Tang.}e^{-x})-e^{-x}\text{Arc}(\text{Tang.}e^x)}{e^x-e^{-x}}\,dx=\frac{\varpi}{4}\,l(2);$

et ainsi du reste

On pourrait, au surplus, déduire directement la plupart des équations précédentes de la formule (4), combinée avec celles qui résultent de la méthode indiquée dans le 13.^{e} paragraphe du *Mé-*

moire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires.

Si l'on pose, dans la formule (62), $x = \text{Tang.}\,\frac{1}{2}p$, on trouvera

$$(122)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{p\sqrt{-1}})\,dp = 2\varpi \left\{ \varphi(0) + \frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}} + \ldots \right\};$$

ou, ce qui revient au même,

$$(123)\quad \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\varpi} [\varphi(e^{p\sqrt{-1}}) + \varphi(e^{-p\sqrt{-1}})]\,dp = \varpi \left\{ \varphi(0) + \frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}} + \ldots \right\}.$$

L'équation (122) coïncide avec l'une des formules générales que j'ai données dans le XIX.ᵉ cahier du *Journal de l'école polytechnique.* De plus, si, dans l'équation (123), on fait successivement

$$\varphi(u) = \frac{f(u)}{1 - ru}\ ; \qquad \varphi(u) = \frac{f(u)}{1 - \dfrac{r}{u}}\ ;$$

r désignant une constante positive, et $f(u)$ une fonction qui conserve une valeur finie pour toutes les valeurs de u, réelles ou imaginaires, dont le module est inférieur à l'unité; on trouvera, pour $r<1$,

$$(124)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{0}^{\varpi} \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1 - re^{p\sqrt{-1}}} + \frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1 - re^{-p\sqrt{-1}}} \right\} dp = \varpi f(0)\ , \\ &\int_{0}^{\varpi} \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1 - re^{-p\sqrt{-1}}} + \frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1 - re^{p\sqrt{-1}}} \right\} dp = \varpi f(r)\ ; \end{aligned} \right.$$

pour $r=1$

$$(125)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-e^{p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-e^{-p\sqrt{-1}}}\right\}dp=\varpi[f(0)-\tfrac{1}{2}f(1)]\ .\\ \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-e^{-p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-e^{p\sqrt{-1}}}\right\}dp=\tfrac{1}{2}\varpi f(1)\ ;\end{cases}$$

et enfin, pour $r>1$

$$(126)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-re^{p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-re^{-p\sqrt{-1}}}\right\}dp=\varpi\left[f(0)-f\left(\frac{1}{r}\right)\right],\\ \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1}{2}\left\{\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})}{1-re^{-p\sqrt{-1}}}+\frac{f(e^{-p\sqrt{-1}})}{1-re^{p\sqrt{-1}}}\right\}dp=0\ .\end{cases}$$

Lorsque, dans les équations (124), on suppose $r=0$, elles se réduisent à

$$(127)\ \int_0^{\varpi}\frac{1}{2}[f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})]dp=\varpi f(0)\ .$$

Si, dans celle-ci, on remplace $f(x)$ par $f(b+x)$, et les limites 0, ϖ par $-\varpi$, $+\varpi$, on conclura

$$(128)\ \int_{-\varpi}^{+\varpi}\frac{1}{2}f(b+e^{p\sqrt{-1}})dp=\varpi f(b)\ ;$$

De même, si après avoir différentié n fois, par rapport à la quantité r, la seconde des équations (124), on y remplace $f(x)$ par $f(b+x)$, on en tirera, en posant $r=0$,

$$(129)\ \int_{-\varpi}^{+\varpi}e^{-np\sqrt{-1}}.f(b+e^{p\sqrt{-1}})dp=\frac{2\pi}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{d^n.f(b)}{db^n}\ .$$

Ces diverses formules, que j'ai données dans le *Bulletin de la société philomatique*, s'accordent avec d'autres formules du même genre, obtenues par MM. Perseval, Libri et Poisson. Il est facile de les étendre à des valeurs négatives, ou même à des valeurs imaginaires des constantes r et b. Ainsi, par exemple, on reconnaîtra sans peine que les équations (124) subsistent pour toutes les valeurs de r, réelles ou imaginaires, dont le module est inférieur à l'unité. La seconde de ces équations, présentée sous la forme

$$(130) \qquad \mathrm{f}(r) = \frac{1}{2\varpi} \int_{-\varpi}^{+\varpi} \frac{\mathrm{f}(e^{p\sqrt{-1}})}{1 - re^{-p\sqrt{-1}}} dp,$$

offre évidemment le moyen de convertir une fonction donnée de r, considérée comme variable, en une intégrale définie, dans laquelle la fonction sous le signe se réduise à une fraction dont le numérateur soit indépendant de r, et le dénominateur une fonction linéaire de cette variable.

Si, dans l'équation (122), on pose successivement

$$\varphi(u) = \frac{\mathrm{f}(u)}{r - \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)}, \qquad \varphi(u) = \frac{\mathrm{f}(u)}{r + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)};$$

r désignant une constante positive, et $\mathrm{f}(u)$ une fonction qui conserve une valeur fixe, pour toutes les valeurs de u, réelles ou imaginaires, dont le module est inférieur à l'unité; on trouvera

$$(131) \quad \int_{0}^{\varpi} \frac{\mathrm{f}(e^{p\sqrt{-1}}) + \mathrm{f}(e^{-p\sqrt{-1}})}{2} \cdot \frac{dp}{r - \mathrm{Cos}.p}$$

$$= \frac{\mathrm{f}[r - (1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}] - \mathrm{f}[r + (1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}]}{2(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}} \varpi;$$

$$(132)\int_0^{\varpi}\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{dp}{r+\mathrm{Cos}.p}$$

$$=\frac{f[-r+(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}]-f[-r-(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}]}{2(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}\varpi\ ;$$

et pour $r>1$,

$$(133)\int_0^{\varpi}\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{dp}{r-\mathrm{Cos}.p}=\frac{f[r-(r^2-1)^{\frac{1}{2}}]}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}\varpi\ .$$

$$(134)\int_0^{\varpi}\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{dp}{r+\mathrm{Cos}.p}=\frac{f[-r+(r^2-1)^{\frac{1}{2}}]}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}\varpi\ .$$

Si, dans l'équation (122), on remplace la fonction

$$\varphi(u)=\varphi\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)=\varphi(e^{p\sqrt{-1}})$$

par l'un des produits

$$(-x\sqrt{-1})^a\varphi(u)\ ,\qquad(1-x\sqrt{-1})^a\varphi(u)\ ,\qquad\left(1+\frac{1}{x}\sqrt{-1}\right)^a\varphi(u)\ ,$$

$$\mathrm{l}(-x\sqrt{-1})\varphi(u)\ ,\qquad\mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})\varphi(u)\ ,\qquad\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(u)\ ,$$

$$\frac{\phi(u)}{\mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})}\ ,\qquad\frac{(-x\sqrt{-1})^a}{\mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})}\varphi(u)\ ;$$

on trouvera successivement

$$(135)\int_{-\varpi}^{+\varpi}\left(-\sqrt{-1}\,\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)^a\varphi(e^{p\sqrt{-1}})dp$$

$$=2\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)^a+\ldots\right\}.$$

(136) $$\int_{-\varpi}^{+\varpi}\frac{\text{Cos.}\,\frac{ap}{2}-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$=2^{a+1}.\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1+h+k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\}.$$

(137) $$\int_{-\pi}^{+\pi}\left(1-\sqrt{-1}\,\text{Cot.}\,\frac{p}{2}\right)^a.\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$=2^{a+1}.\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1-h-k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\};$$

(138) $$\int_{-\varpi}^{+\varpi}\mathrm{l}\left(-\sqrt{-1}.\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$=2\varpi\left\{\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)+\ldots\ldots\right\}.$$

(139) $$\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\mathrm{l}\text{Cos.}\,\frac{p}{2}+\tfrac{1}{2}p\sqrt{-1}\right]\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$=2\varpi\left\{\varphi(0).\mathrm{l}(\tfrac{1}{2})+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}.\mathrm{l}\left(\frac{1+h+k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\right\}.$$

(140) $$\int_{-\varpi}^{+\varpi}\mathrm{l}\left(1+\sqrt{-1}.\text{Cot.}\,\frac{p}{2}\right).\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$=-2\varpi\left\{\varphi(0)\mathrm{l}(\tfrac{1}{2})+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+h\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\ldots\right\}.$$

$$(141)\quad \int_{-\varpi}^{+\varpi} \frac{\mathrm{l}\,\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\sqrt{-1}}{\left(\mathrm{l}\,\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2}.\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$=-2\varpi\left\{\frac{\varphi(0)}{\mathrm{l}(2)}-\varphi(1)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+h+k\sqrt{-1}}+\ldots\right\}.$$

$$(142)\quad \int_{-\varpi}^{+\varpi}\left(-\sqrt{-1}.\mathrm{Tang.}\frac{p}{2}\right)^a\frac{\mathrm{l}\,\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\sqrt{-1}}{\left(\mathrm{l}\,\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2}\varphi(e^{p\sqrt{-1}})\mathrm{d}p$$

$$=-2\varpi\left\{\frac{\varphi(0)}{\mathrm{l}(2)}+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+h\sqrt{-1}}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)^a\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+h+k\sqrt{-1})}+\ldots\right\};$$

et ainsi du reste.

Par suite, si l'on prend pour $\varphi(u)$ une fonction réelle de u qui vérifie la condition

$$(143)\qquad \varphi(u)=\varphi\left(\frac{1}{u}\right),$$

on trouvera

$$(144)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}.\left(\mathrm{Tang.}\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p$$

$$=\frac{\pi}{\mathrm{Cos.}\frac{a\pi}{2}}\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)^a+\ldots\right\}.$$

$$(145)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}.\frac{\mathrm{Cos.}\frac{ap}{2}}{\left(\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}\right)^a}\mathrm{d}p$$

$$=2^{a}\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\left(1+h+k\sqrt{-1}\right)^{-a}+\ldots\right\}.$$

$$(146)\quad \int_{0}^{\pi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{\text{Cos.}\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{p}{2}\right)^{a}}\,\mathrm{d}p$$

$$=2^{a}\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\left(1-h-k\sqrt{-1}\right)^{-a}+\ldots\right\}.$$

$$(147)\quad \int_{0}^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\mathrm{l.Tang.}\left(\frac{p}{2}\right)\mathrm{d}p$$

$$=\varpi\left\{\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)+\ldots\ldots\right\}.$$

$$(148)\quad \int_{0}^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\mathrm{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\,\mathrm{d}p$$

$$=\varpi\left\{\varphi(0).\mathrm{l}\left(\tfrac{1}{2}\right)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+h+k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\right\}.$$

$$(149)\quad \int_{0}^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\mathrm{l.Sin.}\,\frac{p}{2}\,\mathrm{d}p$$

$$=\varpi\left\{\varphi(0)\mathrm{l}\left(\tfrac{1}{2}\right)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\ldots\right\}.$$

$$(150)\quad \int_{0}^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\cdot\frac{\mathrm{l.Cos.}\,\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^{2}+\left(\mathrm{lCos.}\,\frac{p}{2}\right)^{2}}\,\mathrm{d}p$$

$$=\varpi\varphi'(1)-\varpi\left\{\frac{\varphi(0)}{\mathrm{l}(2)}+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+h+k\sqrt{-1})}+\ldots\right\};$$

et ainsi du reste.

Si, au contraire, on prend pour $\varphi(u)$ une fonction rationnelle qui vérifie la condition

$$(151)\qquad \varphi(u)=-\varphi\left(\frac{1}{u}\right),$$

on trouvera

$$(152)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\cdot\left(\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p$$

$$=\frac{\pi}{\text{Sin.}\,\frac{a\pi}{2}}\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\left(\frac{1-h-k\sqrt{-1}}{1+h+k\sqrt{-1}}\right)^a+\ldots\right\}.$$

$$(153)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{\text{Sin.}\,\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\cdot\mathrm{d}p$$

$$=2^a\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1+h+k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\}.$$

$$(154)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{\text{Sin.}\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\mathrm{d}p$$

$$=2^a\varpi\left\{\varphi(0)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}(1-h-k\sqrt{-1})^{-a}+\ldots\right\}.$$

$$(155)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\varphi(e^{p\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\cdot p\,\mathrm{d}p$$

$$=-2\varpi\left\{\varphi(0)\,\mathrm{l}\left(\tfrac{1}{2}\right)+\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+h+k\sqrt{-1}}{2}\right)+\ldots\right\}.$$

$$(156)\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\phi\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-\phi\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{1\sqrt{-1}}\cdot\frac{\frac{1}{2}p\,dp}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\mathrm{l.Cos.}\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$=\varpi\left\{\varphi(1)-\frac{\phi(0)}{\mathrm{l}(2)}-\frac{H+K\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+h+k\sqrt{-1})}-\ldots\right\};$$

et ainsi du reste.

Il serait facile d'apercevoir les modifications que doivent présenter, dans les seconds membres de ces diverses équations, les termes correspondant à des racines égales de $\frac{1}{\phi(u)}=0$.

Lorsque la fonction $\varphi(u)$ est rationnelle, les valeurs de l'expression imaginaire $h+k\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, les racines de l'équation $\frac{1}{\phi(u)}=0$, sont en nombre fini; et par conséquent les valeurs des intégrales que contiennent les diverses formules ci-dessus établies, se composent d'un nombre limité de termes. On ne doit pas oublier que, dans ces formules comme dans l'équation (122), on doit seulement tenir compte des racines de l'équation $\frac{1}{\phi(u)}=0$ dont le module est inférieur à l'unité, et réduire à moitié tous les termes correspondant aux racines dont le module est précisément égal à 1.

Il est encore essentiel d'observer 1.° que les formules trouvées cessent d'être applicables, toutes les fois que les intégrales qu'elles renferment deviennent infinies; 2.° que de ces formules on en peut déduire un grand nombre d'autres, par des différentiations ou des intégrations relatives à la quantité a; 3.° enfin, que cette constante a, dans les équations qui la renferment, peut recevoir des valeurs réelles ou des valeurs imaginaires.

Si maintenant on attribue aux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, ou bien aux constantes r, a,..... des valeurs particulières, on déduira immédiatement des formules ci-dessus établies les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies, dont plusieurs étaient déjà connues. Je me contenterai de citer ici quelques-uns des résultats les plus simples.

$$(157)\qquad \int_{-\varpi}^{+\varpi} e^{-np\sqrt{-1}+be^{p\sqrt{-1}}}\,dp = 2\varpi\,\frac{b^n}{1.2.3....n}\ .$$

$$(158)\qquad \int_{0}^{\varpi}\left(\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a dp = \frac{\varpi}{\text{Cos.}\,\frac{a\varpi}{2}}$$

$$(159)\qquad \int_{0}^{\varpi}\frac{\text{Cos.}\,\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\,dp = \int_{0}^{\varpi}\frac{\text{Cos.}\,\frac{a}{2}\,(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\,dp = 2^a\varpi\,.$$

$$(160)\qquad \int_{0}^{\varpi}\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\,dp = \int_{0}^{\varpi}\text{l.Sin.}\,\frac{p}{2}\,dp = \varpi\text{l}(\tfrac{1}{2})\ .$$

$$(161)\qquad \int_{0}^{\varpi}\frac{p\text{Sin.}p}{1-\text{Cos.}p}\,dp = \int_{0}^{\varpi}\frac{1+\text{Cos.}p}{\text{Sin.}p}\,p\,dp = 2\varpi.\text{l}(2)\,.$$

$$(162)\qquad \int_{0}^{\varpi}\frac{\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^2}\,dp = \varpi\left[1-\frac{1}{\text{l}(2)}\right].$$

$$(163)\qquad \int_{0}^{\varpi}\frac{\frac{p}{2}\,\text{Tang.}\,\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^2}.dp = \frac{\pi}{\text{l}(2)}\ :$$

On trouvera de même, pour $r<1$,

$$(164)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{0}^{\varpi}\frac{\text{Sin.}p}{r-\text{Cos}\,p}\,p\,\mathrm{d}p=+\varpi\,\mathrm{l}(2+2r)\,,\\&\int_{0}^{\varpi}\frac{\text{Sin.}p}{r+\text{Cos.}p}\,p\,\mathrm{d}p=-\varpi\,\mathrm{l}(2-2r)\;;\end{aligned}\right.$$

et pour $r<4$,

$$(165)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{0}^{\varpi}\frac{\text{Sin.}p}{r-\text{Cos.}p}\,p\,\mathrm{d}p=+\varpi\,\mathrm{l}(2r+2)-\varpi\,\mathrm{l}(r+\sqrt{r^2-1})\,,\\&\int_{0}^{\varpi}\frac{\text{Sin.}p}{r+\text{Cos.}p}\,p\,\mathrm{d}p=-\varpi\,\mathrm{l}(2r-2)+\varpi\,\mathrm{l}(r+\sqrt{r^2-1})\;.\end{aligned}\right.$$

On trouvera encore, pour $r^2<1$,

$$(166)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{0}^{\pi}\frac{1-r\text{Cos.}p}{1-2r\text{Cos.}p+r^2}\left(\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2\text{Cos.}\,\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right],\\&\int_{0}^{\varpi}\frac{r\text{Sin.}p}{1-2r\text{Cos.}p+r^2}\left(\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2\text{Sin.}\,\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right].\end{aligned}\right.$$

$$(167)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{0}^{\varpi}\frac{1-r\text{Cos.}p}{1-2r\text{Cos.}p+r^2}\cdot\frac{\text{Cos.}\,\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^a}.\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi[1+(1+r)^{-a}]\,,\\&\int_{0}^{\varpi}\frac{r\text{Sin.}p}{1-2r\text{Cos.}p+r^2}\cdot\frac{\text{Sin.}\,\frac{ap}{2}}{\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^a}.\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi[1-(1+r)^{-a}]\;.\end{aligned}\right.$$

$$(168)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\frac{1-r\mathrm{Cos}\,p}{1-2r\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\mathrm{Sin}.\,\frac{p}{2}\right)^a}\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi[1+(1-r)^{-a}],\\&\int_0^{\varpi}\frac{r\mathrm{Sin}.p}{1-2r\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{Sin}.\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\mathrm{Sin}.\,\frac{p}{2}\right)^a}\mathrm{d}p=2^{a-1}.\varpi[1-(1-r)^{-a}].\end{aligned}\right.$$

$$(169)\quad\int_0^{\varpi}\frac{1-r\mathrm{Cos}.p}{1-2r\mathrm{Cos}.p+r^2}.\mathrm{l.Tang}.\frac{p}{2}\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}\mathrm{l}\left(\frac{1-r}{1+r}\right).$$

$$(170)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\frac{1-r\mathrm{Cos}.p}{1-2r\mathrm{Cos}.p+r^2}.\mathrm{lCos}.\frac{p}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}\mathrm{l}\left(\frac{1+r}{4}\right),\\&\int_0^{\varpi}\frac{r\mathrm{Sin}.p}{1-2r\mathrm{Cos}.p+r^2}p\mathrm{d}p=\varpi\mathrm{l}(1+r).\end{aligned}\right.$$

$$(171)\quad\int_0^{\varpi}\frac{1-r\mathrm{Cos}.p}{1-2r\mathrm{Cos}\,p+r^2}.\mathrm{l.Sin}.\frac{p}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}\mathrm{l}\left(\frac{1-r}{4}\right).$$

$$(172)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\frac{1-r\mathrm{Cos}.p}{1-2r\mathrm{Cos}\,p+r^2}\cdot\frac{\mathrm{l.Cos}.\frac{1}{2}p}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\mathrm{l.Cos}.\frac{p}{2}\right)^2}.\mathrm{d}p=\frac{\pi}{1-r}-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{l}(2)}+\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+r)}\right],\\&\int_0^{\varpi}\frac{r\mathrm{Sin}.p}{1-2r\mathrm{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}p}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\mathrm{l.Cos}.\frac{p}{2}\right)^2}.\mathrm{d}p=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{l}(2)}-\frac{1}{\mathrm{l}(2)-\mathrm{l}(1+r)}\right];\end{aligned}\right.$$

et ainsi du reste.

On trouvera, au contraire, pour $r^2>1$,

$$(173)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\frac{1-r\mathrm{Cos}\,p}{1-2r\mathrm{Cos}.p+r^2}\left(\mathrm{Tang}.\,\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2\mathrm{Cos}.\,\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^a\right],\\&\int_0^{\varpi}\frac{r\mathrm{Sin}.p}{1-2r\mathrm{Cos}.p+r^2}\left(\mathrm{Tang}.\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2\mathrm{Sin}.\,\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^a\right].\end{aligned}\right.$$

$$(174)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\text{Cos.}p}{1-2r\,\text{Cos.}p+r^2}\cdot\frac{\text{Cos.}\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\,dp=2^{a-1}.\varpi\left[1-\left(\frac{r+1}{r}\right)^a\right],\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\,\text{Sin.}p}{1-2r\,\text{Cos.}p+r^2}\cdot\frac{\text{Sin}\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\,dp=2^{a-1}.\varpi\left[1-\left(\frac{r+1}{r}\right)^{-a}\right].\end{cases}$$

$$(175)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{1-r\,\text{Cos.}p}{1-2r\,\text{Cos.}p+r^2}\cdot\frac{\text{Cos.}\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\,dp=2^{a-1}.\varpi\left[1-\left(\frac{r-1}{r}\right)^{-a}\right],\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\varpi}\frac{r\,\text{Sin.}p}{1-2r\,\text{Cos.}p+r^2}\cdot\frac{\text{Sin.}\,\frac{a}{2}(\varpi-p)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{p}{2}\right)^a}\,dp=2^{a-1}.\varpi\left[1-\left(\frac{r-1}{r}\right)^{-a}\right].\end{cases}$$

$$(176)\quad\int_0^{\pi}\frac{1-r\,\text{Cos.}p}{1-2r\,\text{Cos.}p+r}.\text{l.Tang.}\frac{p}{2}.dp=\frac{\pi}{2}\,\text{l}\left(\frac{r+1}{r-1}\right),$$

$$(177)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1-r\,\text{Cos.}p}{1-2r\,\text{Cos.}p+r^2}.\text{l.Cos.}\frac{p}{2}.dp=-\frac{\pi}{2}\,\text{l}\left(\frac{r+1}{r}\right),\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{r^2\,\text{Sin}\,p}{1-2r\,\text{Cos.}p+r^2}\,p\,dp=\varpi\,\text{l}\left(\frac{r+1}{r}\right).\end{cases}$$

$$(178)\quad\int_0^{\pi}\frac{1-r\,\text{Cos}\,p}{1-2r\,\text{Cos}\,p+r^2}\,\text{l Sin.}\frac{p}{2}\cdot dp=\frac{\pi}{2}\,\text{l}\left(\frac{r}{r-1}\right).$$

$$(179)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\frac{1-r\text{Cos}\,p}{1-2\text{Cos}.p+r^2}\cdot\frac{\text{lCos}.p.}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{1-r}-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\text{l}(2)}-\frac{1}{\text{l}(2)-\text{l}\left(1+\frac{1}{r}\right)}\right],\\&\int_0^{\varpi}\frac{r\text{Sin}.p}{1-2r\text{Cos}\,p+r^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}p}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\text{l.Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^2}=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\text{l}\left(\frac{1+r}{2r}\right)}+\frac{1}{\text{l}(2)}\right];\end{aligned}\right.$$

et ainsi du reste.

Si l'on développe, suivant les puissances ascendantes de r, les deux membres de chacune des équations (166), (167)....(172), on obtiendra de nouvelles formules, que l'on pourrait déduire directement de l'équation (122), étendue au cas où l'équation $\frac{1}{\phi(u)}=0$ a des racines égales. On trouvera de cette manière, n désignant un nombre entier quelconque,

$$(180)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\text{Cos}.np\left(\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a\text{d}p\\&=(-1)^n.\frac{\varpi}{2\text{Cos.}\,\frac{a\varpi}{2}}.\frac{a(a-1)....(a-n+1)}{1.2.3...n}\left[1+\frac{n}{1}\cdot\frac{a}{a-n+1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a(a+1)}{(a-n+1)(a-n+2)}+\ldots\right],\\&\int_0^{\varpi}\text{Sin}.np\left(\text{Tang.}\,\frac{p}{2}\right)^a\text{d}p\\&=(-1)^{n+1}\frac{\varpi}{2\text{Sin.}\,\frac{a\varpi}{2}}.\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{1.2.3....n}\left[1+\frac{n}{1}\cdot\frac{a}{a-n+1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a(a+1)}{(a-n-1)(a-n+2)}+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

$$(181)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\text{Cos}.np.\text{Cos.}.\,\frac{ap}{2}\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^{-a}\text{d}p=(-1)^n.2^{a-1}.\varpi.\,\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{1.2.3....n},\\&\int_0^{\varpi}\text{Sin}.np.\text{Sin.}\,\frac{ap}{2}\left(\text{Cos.}\,\frac{p}{2}\right)^{-a}\text{d}p=(-1)^{n+1}.2.^{a-1}.\varpi.\,\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{1.2.3.....n}.\end{aligned}\right.$$

La formule (157) et les formules (181), quand on y remplace a par $-a$, peuvent s'écrire comme il suit :

$$(182)\qquad \int_{-\varpi}^{+\varpi} e^{-np\sqrt{-1}+be^{p\sqrt{-1}}}\,\mathrm{d}p=\frac{2\varpi}{\Gamma(n+1)}.b^n.$$

$$(183)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\varpi}\text{Cos}\,np.\text{Cos}.\frac{ap}{2}\left(\text{Cos}.\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p=\frac{\varpi}{2^{a+1}}\cdot\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+1).\Gamma(a-n+1)},\\ &\int_0^{\varpi}\text{Sin}.np\text{Sin}.\frac{ap}{2}\left(\text{Cos}.\frac{p}{2}\right)^a\mathrm{d}p=\frac{\varpi}{2^{a+1}}\cdot\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+1).\Gamma(a-n+1)}.\end{aligned}\right.$$

Si, dans les équations (111) et (112), on pose $r=0$, ou $r=1$, $s=1$ et $x=\text{Tang}.\tfrac{1}{2}p$; on en tirera successivement

$$(184)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\varpi}\left(\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)^{-a}\text{Cos}\left(b\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\text{Cos}.^2\frac{p}{2}}=\frac{\varpi}{\Gamma(a).\text{Cos}.\frac{a\pi}{2}}.b^{a-1},\\ &\int_0^{\varpi}\left(\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)^{-a}\text{Sin}.\left(b\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\text{Cos}.^2\frac{p}{2}}=\frac{\varpi}{\Gamma(a).\text{Sin}.\frac{a\varpi}{2}}.b^{a-1}.\end{aligned}\right.$$

$$(185)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\varpi}\text{Cos}.\frac{ap}{2}\left(\text{Cos}\,\frac{p}{2}\right)^{a-2}\text{Cos}\left(b\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)\mathrm{d}p=\frac{\pi}{\Gamma(a)}.b^{a-1}.e^{a-1},\\ &\int_0^{\varpi}\text{Sin}.\frac{ap}{2}\left(\text{Cos}\,\frac{p}{2}\right)^{a-2}\text{Sin}\left(b\text{Tang}.\frac{p}{2}\right)\mathrm{d}p=\frac{\pi}{\Gamma(a)}.b^{a-1}.e^{-b}.\end{aligned}\right.$$

$$(186)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\varpi}\left(\text{Sin}.\frac{p}{2}\right)^{-a}\left(\text{Cos}.\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\text{Cos}.\frac{bp}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\varpi}{\text{Cos}.\frac{a\varpi}{2}}\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a).\Gamma(b)},\\ &\int_0^{\pi}\left(\text{Sin}.\frac{p}{2}\right)^{-a}\left(\text{Sin}.\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\text{Sin}.\frac{bp}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{\text{Sin}.\frac{a\pi}{2}}\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a).\Gamma(b)}.\end{aligned}\right.$$

$$(187)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\left(\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\mathrm{Cos.}\frac{ap}{2}.\mathrm{Cos.}\frac{bp}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2^{a+b-1}}\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a).\Gamma(b)},\\&\int_0^{\varpi}\left(\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\mathrm{Sin.}\frac{ap}{2}.\mathrm{Sin.}\frac{bp}{2}\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2^{a+b-1}}\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}.\end{aligned}\right.$$

$$(188)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\varpi}\left(\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\mathrm{Cos.}\left(\frac{b-a}{2}\right)p\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2^{a+b-1}}\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},\\&\int_0^{\varpi}\left(\mathrm{Cos.}\frac{p}{2}\right)^{a+b-2}.\mathrm{Cos.}\left(\frac{a+b}{2}\right)p\mathrm{d}p=0.\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières formules peuvent être remplacées par la suivante

$$(189)\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{Cos.}p)^a\mathrm{Cos.}bp.\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2^{a+1}}\cdot\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right).\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)};$$

que l'on déduit également des équations (183), dans le cas particulier où la demi-somme $\frac{a+b}{2}$ équivaut à un nombre entier.

La formule (189), dans laquelle les constantes a et b peuvent recevoir des valeurs réelles ou des valeurs imaginaires, cesse d'exister, toutes les fois que l'intégrale contenue dans le premier membre devient infinie; par exemple, quand la constante a, ayant une valeur réelle, devient inférieure à -1.

Si, dans la même formule, on remplace b par $b\sqrt{-1}$, on trouvera

$$(190)\qquad\int_0^{\frac{\varpi}{2}}(\mathrm{Cos.}p)^a.\frac{e^{bp}+e^{-bp}}{2}\,\mathrm{d}p$$

$$=\frac{\varpi}{2^{a+1}}\cdot\frac{\Gamma(a+1)}{\left[\int_0^{\infty}x^{\frac{a}{2}}.\mathrm{Cos.}\frac{b\,\mathrm{l}x}{2}\,e^{-x}\mathrm{d}x\right]^2+\left[\int_0^{\infty}x^{\frac{a}{2}}.\mathrm{Sec.}\frac{b\,\mathrm{l}x}{2}\,e^{-x}\mathrm{d}x\right]^2}$$

OPTIQUE.

Recherche de l'équation générale de la caustique par réflexion relative au cercle ;

Par M. THOMAS de ST-LAURENT, officier au Corps royal d'Etat-Major.

DANS un précédent article (*), nous avons donné l'équation de la caustique par réflexion relative au cercle pour deux cas particuliers, savoir : 1.° pour le cas où le point rayonnant est sur la circonférence même du cercle réfléchissant ; 2.° pour le cas où ce point est infiniment éloigné. Nous allons présentement chercher l'équation de cette caustique pour un point lumineux situé d'une manière quelconque sur le plan du cercle réfléchissant, en nous efforçant de conserver constamment à nos calculs et à leurs résultats cette symétrie si propre à en garantir l'exactitude.

En prenant le centre du cercle réfléchissant pour origine des coordonnées rectangulaires, soient r le rayon de ce cercle, (a,b) le point rayonnant, (t,u) un point d'incidence quelconque et (x,y) le point correspondant de la caustique cherchée, c'est-à-dire, le point où elle est touchée par le rayon réfléchi ; nous aurons d'abord

$$t^2+u^2=r^2 . \qquad (1)$$

(*) Voy. la première page du présent volume.

J. D. G.

Le rayon incident, la normale au point d'incidence et le rayon réfléchi feront avec l'axe des x des angles dont les tangentes tabulaires seront respectivement

$$\frac{b-u}{a-t}\,, \qquad \frac{t}{u}\,, \qquad \frac{y-u}{x-t}\,;$$

d'où il suit que les tangentes des angles d'incidence et de réflexion seront respectivement

$$\frac{\dfrac{b-u}{a-t}-\dfrac{u}{t}}{1+\dfrac{u}{t}\cdot\dfrac{b-u}{a-t}}\,, \qquad \frac{\dfrac{u}{t}-\dfrac{y-u}{x-t}}{1+\dfrac{u}{t}\cdot\dfrac{y-u}{x-t}}$$

ou bien

$$\frac{t(b-u)-u(a-t)}{t(a-t)+u(b-u)}\,, \qquad \frac{u(x-t)-t(y-u)}{t(x-t)+u(y-u)}\,,$$

ou, en développant, réduisant et simplifiant, à l'aide de l'équation (1)

$$\frac{bt-au}{at+bu-r^2}\,, \qquad \frac{ux-ty}{tx+uy-r^2}\,;$$

or, par les lois de la catoptrique, ces deux angles doivent être égaux : égalant donc entre elles leurs expressions il viendra, en chassant les dénominateurs

$$(bt-au)(tx+uy-r^2)+(ty-ux)(at+bu-r^2)=0\,. \qquad (2)$$

C'est donc là l'équation générale du rayon réfléchi, dans laquelle t et u sont deux paramètres variables, liés entre eux par la relation (1), et conséquemment équivalens à un seul.

La caustique cherchée étant l'enveloppe de l'espace parcouru par ce rayon, lorsqu'on fait varier t et u, conformément à la relation (1), on en obtiendra l'équation en éliminant t, u et le rapport de $\mathrm{d}t$ à $\mathrm{d}u$ entre les équations (1), (2) et leurs différentielles, prises par rapport à ces deux paramètres seulement. Or ces différentielles sont

$$t\mathrm{d}t+u\mathrm{d}u=0\ ,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{x(au-bt)-b(tx+uy-r^2)+a(ux-ty)-y(at+bu-r^2)\}\mathrm{d}t\\+\{y(au-bt)+a(tx+uy-r^2)+b(ux-ty+x(at+bu-r^2)\}\mathrm{d}u\end{array}\right\}=0\ ;$$

ce qui donne, en éliminant,

$$(at+bu)(tx+uy-r^2)+(tx+uy)(at+bu-r^2)=2(au-bt)(ux-ty)\ ; \quad (3)$$

de sorte que le problème se réduit présentement à éliminer t et u entre les équations (1), (2), (3). Dans ces équations a et b figurent de la même manière que x et y, et c'est là une chose qu'on pouvait fort bien prévoir à l'avance, puisque les rayons incident et réfléchi peuvent être pris l'un pour l'autre.

Pour des valeurs données de t et u, c'est-à-dire, pour un point d'incidence donné, les équations (2), (3) doivent être satisfaites par le point correspondant de la caustique; or l'équation (2) est celle du rayon réfléchi, et l'équation (3) est celle d'une autre droite; c'est donc l'équation d'une droite qui coupe le rayon réfléchi à son point de contact avec la caustique cherchée. Nous ne nous occuperons pas de la construction générale de cette droite, qui serait d'ailleurs susceptible d'une certaine élégance.

Nous remarquerons seulement que, si le rayon incident était tangent au cercle, le point d'incidence serait donné par l'équation (1) combinée avec l'équation $at+bu=r^2$ au moyen de laquelle les équations (2), (3) se réduisant à $tx+uy=r^2$, $ux-ty=0$ qui sont les équations de la tangente et de la normale en ce point, qui serait lui-même conséquemment le point correspondant de la caustique ; et, comme le rayon réfléchi, qui a alors même direction que le rayon incident, doit être tangent à la caustique en ce point ; il s'ensuit que le rayon incident tangent au cercle réfléchissant est aussi tangent à la caustique au même point ; c'est-à-dire que la caustique touche le cercle réfléchissant aux deux points où il est coupé par la polaire du point rayonnant.

En ordonnant les équations (2), (3) par rapport à t et u, on peut leur donner cette forme

$$(t^2-u^2)(ay+bx)-2tu(ax-by)=r^2\{(y+b)t-(x+a)u\}$$

$$4tu(ay+bx)+2(t^2-u^2)(ax-by)=r^2\{(x+a)t+(y+b)u\}$$

en éliminant tour à tour entre elles chacun des deux binômes $ax-by$ et $ay+bx$, on trouvera

$$r^2(ay+bx)=(x+a)u^3+(y+b)t^3\ , \qquad (4)$$

$$2r^2(ax-by)=(x+a)(t^3+3tu^2)-(y+b)(u^3+3t^2u).$$

Ajoutant au quarré de la seconde le quadruple du quarré de la première, en observant que

$$(ay+bx)^2+(ax-by)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ ,$$

on trouvera

$$4r^2(a^2+b^2)(x^2+y^2)=$$

$$(t^2+u^2)^2\{(x+a)^2(t^2+4u^2)-6(x+a)(y+b)tu+(y+b)^2(u^2+4t^2)\}\ ;$$

ou bien, à cause de l'équation (1)

$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(x+a)^2(r^2+3u^2)-6(x+a)(y+b)tu+(y+b)^2(r^2+3t^2)\ ,$$

ou encore

$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]=3[(x+a)u-(y+b)t]^2\,, \quad (5)$$

Si présentement on pose, pour abréger,

$$x+a=rA\,, \qquad y+b=rB\,,$$

$$t=rp\,, \quad u=rq\,, \quad ax+by=r^2C\,,$$

$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]=3r^4R^2\,,$$

les équations (1), (4), (5) deviendront

$$p^2+q^2=1\,, \qquad (6)$$

$$Aq^3+Bp^3=C\,, \qquad (7)$$

$$Aq-Bp=R\,; \qquad (8)$$

et tout se réduira à éliminer p et q entre elles.

Les équations (6) et (8) donnent

$$q=+\frac{AR\pm B\sqrt{A^2+B^2-R^2}}{A^2+B^2}\,, \qquad p=-\frac{BR\mp A\sqrt{A^2+B^2-R^2}}{A^2+B^2}\,;$$

d'où, en substituant dans (7) et chassant le dénominateur,

$$A\{AR\pm B\sqrt{A^2+B^2-R^2}\}^3-B\{BR\mp A\sqrt{A^2+B^2+R^2}\}^3=C(A^2+B^2)^3\,.$$

Par l'effet du développement des puissances dans le premier membre et des réductions qui en résultent, l'équation devient divisible par A^2+B^2 et se réduit à

$$\pm AB(A^2+B^2+2R^2)\sqrt{A^2+B^2-R^2}=(A^2+B^2)^2C-(A^2-B^2)R^3\,.$$

En quarrant, développant et ordonnant par rapport à R, l'équation devient en outre divisible par $(A^2+B^2)^2$ et se réduit à

$$A^2B^2(3R^2+A^2+B^2)=R^6-2(A^2-B^2)CR^3+(A^2+B^2)^2C^2 ,$$

ou encore

$$A^2B^2(3R^2+A^2+B^2-4C^2)=\{R^3-C(A^2-B^2)\}^2 .$$

Or, on a

$$3R^2+A^2+B^2-4C^2=\left(2.\frac{ax-by}{r^2}\right)^2 ;$$

donc, en substituant, extrayant la racine quarrée des deux membres et transposant,

$$R^3=C(A^2-B^2)\pm 2AB.\frac{ax-by}{r^2} .$$

Quarrant de nouveau et multipliant par $27r^{12}$, il viendra

$$(3r^4R^2)^3=27r^4\{r^4C(A^2-B^2)\pm 2r^2AB(ax-by)\}^2 ;$$

remettant enfin pour A, B, C, R leurs valeurs, on aura, pour l'équation de la caustique cherchée

$$\{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]\}^3$$
$$=27r^4\{(ay+bx)[(x+a)^2-(y+b)^2]\pm 2(x+a)(y+b)(ax-by)\}^2 .$$

A cause du double signe du second membre, cette équation exprime deux courbes distinctes, et il importe de découvrir laquelle de ces deux courbes est la véritable caustique. Pour y parvenir rappelons-nous ce que nous avons remarqué ci-dessus, que les points où le cercle réfléchissant est coupé par la polaire du point (a,b), sont des points de la courbe : or ces points sont donnés par le système des deux équations

$$x^2+y^2=r^2 , \qquad ax+by=r^2 , \qquad (9)$$

dont l'une est l'équation du cercle lui-même et l'autre celle de la polaire dont il s'agit ; il faudra donc que l'équation de la caustique soit satisfaite par le système de ces deux-là. Si de plus, pour un moment, nous faisons passer l'axe des x par le point rayonnant, ce qui donnera $b=0$, l'équation de la caustique deviendra

$$\{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-r^2(2ax+a^2)\}^3=27r^4a^2y^2[(x+a)^2-y^2\pm 2x(x+a)]^2$$

ou encore

$$\{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-r^2(2ax+a^2)\}^3=27r^4a^2y^2\{(x+a\pm x)^2-(x^2+y^2)\}^2 ;$$

il faudra donc que cette équation soit satisfaite par ce que deviennent les équations (9) dans la même hypothèse ; c'est-à-dire, qu'elle devra être satisfaite en y remplaçant x^2+y^2 par r^2, ax par r^2, x par $\frac{r^2}{a}$ et y^2 par r^2-x^2 ou $r^2-\frac{r^4}{a^2}$ ou $\frac{r^2(a^2-r^2)}{a^2}$: or elle devient ainsi, en réduisant et simplifiant,

$$(a^2-r^2)^2=\left\{\frac{a^4+a^2r^2+2r^4\pm 2r^2(a^2+r^2)}{a^2}\right\}^2 ;$$

équation qui ne peut être satisfaite qu'en prenant le signe inférieur du second membre. La véritable équation de la caustique est donc

$$\{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]\}^3$$
$$=27r^4\{(ay+bx)[(x+a)^2-(y+b)^2]-2(x+a)(y+b)(ax-by)\}^2 ,$$

ou en faisant le développement et les réductions dans le second membre,

$$\{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]\}^3=27r^4(bx-ay)^2(x^2+y^2-a^2-b^2)^2 ;$$

équation d'une symétrie parfaite et qui demeure invariablement la même, soit qu'on y permute simultanément a et x avec b et y, soit qu'on y permute simultanément a et b avec x et y.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Note sur le calcul des conditions d'inégalité ;

Par M. GERGONNE.

DANS l'analyse des travaux de l'Académie royale des sciences de Paris, pour 1823 (partie mathématique), M. le baron Fourier, secrétaire perpétuel, donne quelques développemens sur un nouveau genre de calcul, qu'il désigne sous la dénomination de *Calcul des conditions d'inégalité*, et qu'il signale comme éminemment propre à la résolution de certaines questions mathématiques.

Dans un article du Bulletin des sciences de la société philomatique (mai et juin 1825, pages 66 et 81), M. Navier donne, sur ce nouveau genre de calcul, des développemens techniques que l'analyse de M. Fourier n'avait pu comporter.

Enfin, dans le Bulletin général de M. le baron de Ferussac, partie mathématique (juillet 1826), M. A. C. revient sur le même sujet, pour le présenter sous un jour nouveau, d'une manière très-large et très-philosophique.

Voilà donc une nouvelle branche d'analyse que des géomètres du premier ordre s'accordent à regarder comme étant de quelque importance; et dès lors pourquoi nous refuserions-nous à rappeler que, dès la fin de 1811, lorsque rien encore n'avait été publié sur ce sujet, il avait déjà fixé notre attention, et que, précisément à l'occasion d'un problème de statique tout pareil à celui que prend M. Fourier pour exemple, nous annoncions positivement (*Annales* tom. II., pag. 195) qu'il n'était *aucune portion d'étendue*, *limitée en tout ou en partie*, *qu'on ne pût exprimer analytiquement*, *par un système convenable d'équations et d'inégalités*, *considérées comme ayant lieu à la fois*; et nous en donnions, entre autre exemple, celui de l'arc exprimé par le système

$$y>ax+b\ , \qquad y<a'x+b'\ , \qquad x^2+y^2=r^2\ .$$

Si alors nous n'insistâmes pas davantage sur ce point, c'est que la chose nous paraissait toute claire et toute simple, et de nature à se montrer telle aux yeux de tous les géomètres; mais ce qui prouve évidemment que nous étions loin de l'avoir perdue de vue, c'est que vers la fin de 1823, c'est-à-dire, six mois au moins avant les premières communications faites au public par M. Fourier, nous avions donné, dans des notes qui accompagnaient un mémoire de M. Péclet (*Annales*, tom. XIV, pag. 65) les inégalités qui expriment une droite ou un arc de courbes limitées, la surface d'une couronne circulaire, le volume d'une sphère pleine ou creuse, d'un cylindre, d'un cône, d'un anneau, etc. Nous donnions même en cet endroit l'idée d'une géométrie toute nouvelle, qui ferait entrer en compte le défaut d'homogénéïté de l'étendue, relativement à une quelconque de ses propriétés physiques, dont les formules, calculées à l'avance une fois pour toutes, comme celles de la géométrie analitique, rendraient les applications de la géométrie à la physique incomparablement plus promptes et plus faciles.

Nous ajouterons que, dans nos cours publics, nous avons toujours traité des inégalités, de leurs transformations, de leur résolution, de leur combinaison, de l'élimination des inconnues entre elles, etc, avec le même soin qu'on a coutume de le faire pour les équations; et la chose nous paraît même d'autant plus importante que, si la manière d'opérer sur les inégalités diffère, à quelques égards, de celle dont on traite les équations, les équations et les inégalités ont, d'un autre côté, des points de contact si nombreux qu'à moins d'une étendue un peu attentive des dernières, on pourrait être souvent entraîné à leur appliquer des transformations qui ne sont légitimes que pour les autres seulement, et tomber, par suite, dans les méprises les plus grossières.

Nous avons constamment eu soin d'observer, au surplus, que ce danger peut être évité, en remplacant chaque inégalité par une équation équivalente, renfermant une quantité indéterminée, comprise entre zéro et l'infini positif, de sorte que, par exemple, l'une ou l'autre des inégalités $Z>0$, $Z<0$ peut être remplacée par l'une ou l'autre des équations $Z-\alpha=0$, $Z+\alpha=0$, α étant comprise entre ces limites. En agissant ainsi, on n'a jamais à considérer que des équations. L'élimination des inconnues entre elles conduit à une ou à plusieurs équations de condition entre les données et les indéterminées α, β, γ, ... toutes comprises entre zéro et l'infini positif. Le problème n'est alors possible qu'autant que ces équations peuvent être toutes satisfaites ; et il a toute l'étendue que ces mêmes équations peuvent comporter.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de combinaison énoncé à la page 32 du précédent volume;

Par M. Ferriot, Doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

A la page 40 du XV.e volume du présent recueil, on a demandé de combien de manières m couleurs, toutes différentes les unes des autres, pouvaient être appliquées sur les m faces d'un polyèdre régulier ; m représentant, tour à tour, les nombres 4, 6, 8, 12, 20. A la page 32 du volume suivant, on a annoncé que ce nombre était

$$\frac{1.2.3.4.....(m-2)(m-1)}{2n}, \qquad (1)$$

n exprimant le nombre des côtés de chacune des faces du polyèdre ; et c'est cette formule que nous nous proposons ici de vérifier.

Remarquons bien d'abord qu'il n'est pas question de résoudre le problème pour le cas où, les faces du polyèdre étant numérotées, on regarderait comme solutions différentes celles même qui ne différeraient uniquement entre elles que par les numéros des faces où les mêmes couleurs se trouveraient appliquées. A nos yeux donc deux polyèdres égaux seront réputés colorés de la même manière, lorsqu'on pourra les superposer de telle sorte que les mêmes couleurs coïncident partout.

Observons, en second lieu, que, s'il était question d'appliquer m couleurs différentes aux m sommets d'un polygone ouvert, plan ou gauche, de $m-1$ côtés, on le pourrait d'un nombre de manières exprimé par

$$1.2.3\,4\ldots(m-2)(m-1)m\;. \qquad (2)$$

Observons enfin que, s'il s'agit d'appliquer quatre couleurs différentes sur les quatre faces d'un tétraèdre, on le pourra de deux manières seulement; puisque après avoir appliqué une couleur quelconque sur une de ses faces, on pourra appliquer les trois restantes sur les trois autres dans deux sens différens. Or, comme la formule (1) se réduit à l'unité seulement, lorsqu'on y suppose $m=4$ et $n=3$, nous sommes fondés à soupçonner que le coefficient 2 de son dénominateur doit être supprimé. Reste maintenant à la vérifier pour les quatre autres polyèdres réguliers, qui ont tous cette propriété commune d'avoir leurs faces opposées deux à deux.

Soit posé un quelconque de ces polyèdres par une de ses faces, prise pour *base inférieure*, sur un plan horizontal, et faisons-le tourner sur cette base, jusqu'à ce que l'un des côtés de la *base supérieure* soit tout-à-fait tourné vers nous et dirigé conséquemment de notre gauche à notre droite. Il y aura conséquemment une des faces adjacente à cette base supérieure qui sera aussi tournée vers nous.

Soit joint le centre de la base supérieur à celui de cette face par une droite, puis le centre de cette face à celui de sa voisine à droite par une autre droite, et ainsi de suite du centre d'une face à celui d'une autre face adjacente, en allant constamment vers la droite, sans revenir deux fois sur la même face, jusqu'à ce qu'on soit parvenu au centre de la base inférieure. On formera ainsi un polygone gauche ouvert du genre des spirales ayant m sommets et par suite $m-1$ côtés.

Imaginons qu'ayant réparti les noms des couleurs entre tous les sommets du polygone d'une manière quelconque, on applique ensuite à chacune des faces du polyèdre la couleur qu'indique son centre, on obtiendra ainsi un des polyèdres colorés dont on demande le nombre. Si on répète l'opération autant de fois qu'il y a de manières de répartir les m couleurs entre les m sommets du polygone gauche, on obtiendra ainsi des polyèdres colorés, en nombre exprimé par la formule (2), lesquels seront tous du genre de ceux dont nous cherchons le nombre.

Or je dis, en premier lieu, qu'on n'en aura omis d'aucune sorte; car supposons qu'on nous en présente un duquel on prétende qu'il ne se trouve pas parmi ceux que nous avons formés; posons-le sur une quelconque de ses faces comme base inférieure; tournons-le sur cette base jusqu'à ce qu'un côté de sa base supérieure soit complètement tourné vers nous; et construisons le polygone gauche ouvert suivant le procédé indiqué ci-dessus; il se trouvera une certaine couleur à chacun de ses sommets; et si, comme on le suppose, l'arrangement des couleurs y était nouveau, il s'ensuivrait, contrairement à l'hypothèse, que, dans l'exécution de notre procédé, nous n'aurions pas épuisé tous les arrangemens possibles.

Non seulement nous n'aurons point fait d'omissions, mais chaque sorte de polyèdre aura été exécuté plusieurs fois; et il s'agit, en second lieu, de savoir combien de fois chaque sorte de polyèdre aura été répetée.

Or, qu'on nous donne un quelconque de ces polyèdres colorés, qu'on le pose tour-à-tour sur chacune de ses m faces comme base inférieure, et que, pour chaque base inférieure, on le fasse tourner, de manière à amener tour-à-tour devant soi chacun des n côtés de sa base supérieure; on lui aura ainsi donné mn situations différentes, pour chacune desquelles on pourra construire le polygone gauche comme il a été dit ci-dessus. Or, il est clair que, dans chaque cas, on aura aux sommets de ce polygone une des combinaisons des couleurs qu'on avait faite d'abord, puisqu'on les avait toutes faites. Ainsi un seul polyèdre coloré doit se trouver mn fois parmi ceux que nous avons enseigné à faire. La formule (2) donne donc mn fois chacun de ces polyèdres; et conséquemment on obtiendra le nombre des polyèdres demandé par la question en divisant cette formule (1) par mn, ce qui donnera

$$\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(m-2)(m-1)}{n}, \qquad (3)$$

comme nous l'avions d'abord soupçonné. La formule (1) n'est donc point exacte (*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie.

I. QUELLE est la trajectoire orthogonale de toutes les droites qui, tracées sur le plan d'une ligne du second ordre, ont leurs cordes interceptées par cette courbe, égales à une longueur constante donnée ?

II. Quelle est la surface trajectoire orthogonale de toutes les droites qui, tracées dans l'espace, ont leurs cordes interceptées par une surface du second ordre, égales à une longueur constante donnée ?

(*) Il est probable que l'analyse suivie par l'auteur de cette formule, qui nous l'a adressée sans démonstration, lui aura laissé échapper le cas où, sur deux polyèdres égaux, les couleurs se succèdent entre elles dans le même ordre, mais en sens inverse.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

Note sur la théorie des transversales ;

Par M. Ferriot, Doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

I. Sur le plan d'un triangle quelconque ABC, soit menée une transversale arbitraire et indéfinie, coupant respectivement en A′, B′, C′ les directions des côtés BC, CA, AB. Ou bien cette transversale laissera d'un même côté les trois sommets du triangle, auquel cas les points A′, B′, C′ seront tous trois sur les prolongemens de ses côtés; ou bien elle aura l'un de ses sommets d'un côté et les deux autres de l'autre, et alors il n'y aura qu'un des trois points A′, B′, C′ qui soit sur le prolongement d'un côté, tandis que les deux autres seront sur les côtés même ; d'où l'on voit que, dans tous les cas, le nombre de ceux de ces points qui seront sur les prolongemens des côtés sera toujours impair.

Par l'un quelconque C des sommets du triangle soit menée une parallèle au côté opposé, coupant la transversale en D; on aura

$$CD:AC'::CB':AB'\ ,$$

$$BC':CD::BA':CA'\ ,$$

d'où, en multipliant et simplifiant,

$$BC':AC'::CB'\times BA':AB'\times CA'\ ;$$

et par suite

$$AB'\times BC'\times CA'=BA'\times CB'\times AC' \,. \qquad (1)$$

Réciproquement, si trois points A′, B′, C′, sont situés sur les directions des trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, de telle sorte que cette relation ait lieu, et si en outre le nombre de ceux d'entre eux qui sont sur les prolongemens des côtés est impair, ces trois points appartiendront nécessairement à une même droite.

En effet, il y aura toujours deux de ces points qui seront ou l'un et l'autre sur les côtés, même ou l'un et l'autre sur leurs prolongemens. Soient A′, B′ ces deux points; alors le point C′ sera nécessairement sur le prolongement de AB; et, s'il n'est pas en ligne droite avec A′ et B′, il faudra qu'en joignant ces deux derniers points par une droite, cette droite coupe la direction de AB en quelque point C″ différent de C′, mais qui devra se trouver, comme celui-ci, sur le prolongement de AB.

Les trois points A′, B′, C″ étant ainsi en ligne droite et se trouvant en nombre impair sur les prolongemens des côtés du triangle, on devra avoir, par ce qui précède,

$$AB'\times BC''\times CA'=BA'\times CB'\times AC'' \,; \qquad (2)$$

d'où, en divisant (1) par (2),

$$\frac{BC'}{BC''}=\frac{AC'}{AC''} \quad \text{ou} \quad \frac{AC'}{BC'}=\frac{AC''}{BC''} \,;$$

or, cette équation exprime que la droite AB est coupée harmoniquement aux points C′, C″; donc, si elle pouvait avoir lieu, un des points C′, C″ devrait, contrairement à l'hypothèse, se trouver entre les points A et B; donc le point C″ ne saurait être différent du point C′; donc la droite menée par les deux points

A' et B' doit aussi passer par le point C' ; donc enfin ces trois points doivent appartenir à une même droite (*).

Si par le point C' on mène une nouvelle transversale, coupant respectivement en A'', B'' les directions des côtés CB, CA, on aura pareillement

---

(*) On peut déduire de là une démonstration fort simple de la propriété de l'hexagone inscrit au cercle, démonstration dont l'idée nous a été suggérée par la lecture du mémoire de M. Sturm dont une partie a déjà paru dans le présent recueil.

Soient a, a', b, b', c, c' les sommets consécutifs de cet hexagone. Soient

A' le point de concours des côtés opposés aa' et $b'c$,

B' le point de concours des côtés opposés bb' et $c'a$,

C' le point de concours des côtés opposés cc' et $a'b$,

Soient en outre

A le point de concours des côtés bb' et cc',

B le point de concours des côtés cc' et aa',

C le point de concours des côtés aa' et bb'.

En se rappelant les propriétés des sécantes qui partent d'un même point, et considérant tour-à-tour ac', cb', ba' comme des transversales par rapport au triangle ABC, on aura

$$Ac\times Ac'=Ab\times Ab', \qquad AB'\times Ca\times Bc'=CB'\times Ba\times Ac',$$

$$Ba\times Ba'=Bc\times Bc', \qquad Bc'\times Ab\times Ca'=Ac'\times Cb\times Ba',$$

$$Cb\times Cb'=Ca\times Ca', \qquad CA'\times Bc\times Ab'=BA'\times Ac\times Cb';$$

équations qui, multipliées entre elles, donneront, en réduisant,

$$AB''\times BC'\times CA''=BA''\times CB''\times AC'\ ; \qquad (3)$$

d'où, en divisant (1) par (3),

$$\frac{AB'}{AB''}\times\frac{CA'}{CA''}=\frac{BA'}{BA''}\times\frac{CB'}{CB''}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{CA'}{CA''}:\frac{CB'}{CB''}::\frac{BA'}{BA''}:\frac{AB'}{AB''}\ ; \qquad (4)$$

et il est aisé de voir que réciproquement, si cette proportion a lieu, les deux transversales $A'B'$, $A''B''$ iront concourir en un point de la direction de AB, si du moins elles ne lui sont pas parallèles.

II. Par un quelconque P des points du plan d'un triangle ABC, et par chacun de ses sommets, soient menées les droites AP, BP, CP, rencontrant respectivement les directions des côtés opposés en A', B', C'. Si le point P est intérieur au triangle, les trois points A', B', C' seront sur ses côtés même ; tandis que si, au contraire, il lui est extérieur, deux d'entre eux seront sur les prolongemens des côtés ; tellement que, dans tous les cas, le nombre de ceux

---

$$AB'\times BC'\times CA'=BA'\times CB'\times AC'\ ;$$

ce qui prouve que les trois points A', B', C' sont en ligne droite.

Voilà donc le beau théorème de Pascal démontré fort simplement pour le cercle ; et on en peut aisément conclure le théorème analogue de M. Brianchon, par la théorie des pôles, susceptible aussi, pour le cercle, d'une exposition fort élémentaire. Ces deux théorèmes, si féconds en belles conséquences, peuvent donc figurer, pour ainsi dire dès l'entrée, dans les élémens de géométrie où on finira sans doute tôt ou tard par les introduire, au lieu de les reléguer, comme on l'a fait jusqu'ici, dans des traités speciaux.

J. D. G.

d'entre eux qui seront situés sur les côtés même, sera toujours impair.

Par l'un quelconque C des sommets du triangle soit menée au côté opposé une parallèle, coupée respectivement en D et E, par les directions de AA′ et BB′ ; on aura

$$AB' : CB' :: AB : CE ,$$

$$BC' : AC' :: CE : CD ,$$

$$AB : CD :: BA' : CA' ;$$

d'où, en multipliant et simplifiant,

$$AB' \times BC' : CB' \times AC' :: BA' : CA' ;$$

et par suite

$$AB' \times BC' \times CA' = BA' \times CB' \times AC' . \qquad (1)$$

Réciproquement, si trois points A′, B′, C′, sont situées, sur les directions des trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, de telle sorte que cette relation ait lieu, et si le nombre de ceux d'entre eux qui sont situés sur les côtés même du triangle est impair, les droites AA′, BB′, CC′ concourront toutes trois en un même point P.

En effet, il y aura toujours deux de ces trois points qui seront ou l'un et l'autre sur les côtés même, ou l'un et l'autre sur leurs prolongemens. Soient A′, B′ ces deux points, soit P l'intersection de AA′ et BB′; et admettons que la droite CP coupe la direction de AB en quelque point C″ différent de C′; il faudra nécessairement que les points C′ et C″ soient tous deux sur le côté AB lui-même.

Mais alors AA′, BB′, CC″ concourant en un même point P, on devra avoir, par ce qui précède,

$$AB'\times BC''\times CA'=BA'\times CB'\times AC'' ; \qquad (2)$$

d'où en divisant (1) par (2),

$$\frac{BC'}{BC''}=\frac{AC'}{AC''}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{AC'}{BC'}=\frac{AC''}{BC''} ;$$

or, cette équation exprime que la droite AB est coupée harmoniquement aux points C' et C''; donc, si elle pouvait avoir lieu, les points C', C'' ne pourraient, suivant l'hypothèse, être situés tous deux entre les points A et B; donc le point C'' ne saurait être différent du point C'; donc la droite menée du point C au point d'intersection de AA' et BB' coupe AB au point C'; donc enfin, les trois droites AA', BB', CC' se coupent au même point (*).

Par un autre point P' de la direction de CC', soient menées deux nouvelles droites AP', BP', coupant respectivement CB et CA en A'', B''; nous aurons semblablement

$$AB''\times BC'\times CA''=BA''\times CB''\times AC' ; \qquad (3)$$

d'où en divisant (1) par (3),

$$\frac{AB'}{AB''}\times\frac{CA'}{CA''}=\frac{BA'}{BA''}\times\frac{CB'}{CB''} ;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{CA'}{CA''}:\frac{CB'}{CB''}::\frac{BA'}{BA''}:\frac{AB'}{AB''} ; \qquad (4)$$

(*) Il serait curieux d'examiner si de là on ne pourrait pas tirer une démonstration directe de la propriété de l'hexagone circonscrit au cercle analogue à celle que nous avons donnée, dans la note précédente, pour l'hexagone inscrit.

J. D. G.

et il est aisé de voir que réciproquement, si cette proportion a lieu, les points P, P′ seront en ligne droite avec le point C.

III. On voit que, lorsque sur les directions BC, CA, AB des côtés d'un triangle ABC, on prend trois points A′, B′, C′ tels que

$$AB'\times BC'\times CA'=BA'\times CB'\times AC' ,$$

ou bien ces trois points sont en ligne droite, ou bien les trois droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point; et cela, suivant que ceux de ces points qui sont sur les côtés même du triangle sont en nombre pair ou en nombre impair.

Mais, lorsque quatre points A′, A″, B′, B″ pris, les deux premiers sur la direction du côté BC et les deux autres sur la direction du côté AC d'un triangle ABC, sont tels qu'on a la proportion

$$\frac{CA'}{CA''} : \frac{CB'}{CB''} :: \frac{BA'}{BA''} : \frac{AB'}{AB''} ,$$

il arrive à la fois que le point de concours de A′B′ et A″B″ est sur la direction du côté AB; et que les points d'intersection de AA′ et BB′, AA″ et BB″ sont en ligne droite avec le sommet C; ce qui donne cet élégant théorème :

Si trois droites issues d'un même point P coupent les côtés d'un angle dont le sommet est S, savoir l'un en A, A′, A″ et l'autre en B, B′, B″; et si C, C′, C″ sont les intersections respectives de A′B″ et B′A″, A″B et B″A, AB′ et BA′; ces trois points C, C′, C″ appartiendront à une même droite contenant le sommet S de l'angle; et réciproquement, si ces trois points appartiennent à une même droite contenant le point S, les droites AB, A′B′, A″B″ concourront toutes trois en un même point P (*).

(*) De là, par la théorie des polaires réciproques, on onclura cet autre théorème :

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre ;

Par M. Gergonne.

A la page 192 du VI.e volume du présent recueil, nous avons démontré, d'après M. Schawab, cet élégant théorème :

THÉORÈME. Si l'on forme une suite dont les deux premiers termes soient zéro *et* un, *et dont chacun des autres soit alternativement la demi-somme et la racine quarrée du produit des deux qui le précèdent immédiatement* ; *les termes de cette suite convergeront sans cesse vers le rayon du cercle dont la circonférence est* quatre (*).

Si à trois points d'une même droite P on mène des deux extrémités d'une autre droite S, savoir, de l'une, des droites A, A', A'' et de l'autre, des droites B, B', B'', et si C, C', C'' sont respectivement les droites qui joignent l'intersection de A' et B'' à celle de A'' et B', l'intersection de A'' et B à celle de A et B'', et enfin l'intersection de A et B' à celle de A' et B, ces trois droites C, C', C'' concourront en un même point de S, et réciproquement, si ces trois droites concourent en un même point de S, les points de concours de A et B, A' et B', A'' et B'' appartiendront tous trois à une même droite P.

J. D. G.

(*) M. Ampère nous a communiqué, il y a quelque temps, un théorème duquel celui-là peut facilement être déduit, et dont il déclare être depuis long-temps en possession.

Ce théorème, dont la démonstration est très-élémentaire, fournit déjà, tel qu'il vient d'être annoncé, un procédé tellement brief pour le calcul du nombre ϖ qu'on ne saurait désormais raisonnablement se refuser à l'introduire dans les traités de géométrie. C'est un exemple qui a été donné récemment par M. Vincent, professeur à Reims, et qui sera sans doute imité par d'autres géomètres.

Mais l'application du théorème de M. Schawab à la recherche du nombre ϖ est susceptible de diverses abréviations très-notables, qui paraissent avoir échappé à l'inventeur, et que nous avons fait connaître à l'endroit cité. On pourrait seulement nous reprocher d'avoir justifié ces simplifications par des procédés ou trop peu élégans ou trop peu géométriques; et c'est ce qui nous détermine à revenir de nouveau ici sur ce sujet.

D'abord, puisque les termes de la suite convergent vers une limite commune, ils tendent conséquemment à devenir égaux; et, comme on ne les calcule que par approximation, ils deviennent bientôt égaux en effet. Dès lors l'opération est terminée, et on peut regarder le dernier d'entre eux comme exprimant, dans les limites de l'approximation adoptée, le rayon du cercle dont la circonférence est quatre.

Mais, long-temps avant que ces termes soient devenus tout-à-fait égaux, on doit rencontrer deux termes consécutifs qui se ressemblent dans plus de la moitié de leurs chiffres de gauche, et il est clair qu'à plus forte raison, il en sera de même de tous ceux qui les suivront; or, une fois parvenu à ce point, on pourra, dans les limites de l'approximation adoptée, substituer de simples demi-sommes aux racines quarrées de produits, ce qui permettra de poursuivre le calcul de la suite par un procédé tout-à-fait simple et uniforme.

Comme on doit calculer tous les termes avec un même nombre de chiffres décimaux, on peut, pour prouver cette assertion, faire abstraction de la virgule. Tout se réduit alors à prouver que, si deux nombres entiers, d'un même nombre de chiffres, se ressemblent dans plus de la moitié de leurs chiffres de gauche, leur demi-somme n'excèdera pas d'une demi-unité la racine quarrée de leur produit.

Soient, en effet, a et b ces deux nombres ; d'après l'hypothèse, le nombre des chiffres de leur différence $a-b$ sera moindre que la moitié du nombre des chiffres de chacun d'eux, et, à plus forte raison, moindre que le nombre des chiffres de leur somme $a+b$ et, à plus forte raison encore, moindre que la moitié du nombre des chiffres de cette somme augmentée de $2\sqrt{ab}$ ou $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; et, comme le nombre des chiffres de $(a-b)^2$ est, au plus, double du nombre des chiffres de $a-b$, on aura

$$(a-b)^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2, \quad \text{ou bien} \quad a-b<\sqrt{a}+\sqrt{b}\,;$$

mais $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; donc

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<1\,, \quad \text{ou bien} \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<1$$

c'est-à-dire,

$$a+b-2\sqrt{ab}<1\,, \quad \text{ou bien} \quad \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{1}{2}$$

comme nous l'avions annoncé.

Soient a et b les deux termes à partir desquels on peut continuer la suite en prenant simplement chaque terme égal à la demi-somme des deux qui le précèdent immédiatement, et soient c, d, e, ... ceux qui suivent ces deux-là. Si l'on suppose que a et b soient les deux bases d'un trapèze, c sera la parallèle équidistante de a et b, d la parallèle équidistante de b et c, e la parallèle équidistante de c et d, et ainsi de suite. La limite vers laquelle convergeront les termes de la suite ne sera donc autre chose que la limite vers laquelle convergeront ces parallèles successives.

Concevons qu'on leur mène une perpendiculaire commune, coupée respectivement en A, B, C, D, E, ... par a, b, c, d, e, ... ; C sera le milieu de AB, D celui de BC, E celui de CD, et ainsi de suite ; la parallèle limite sera donc celle qui passera par le point limite des points A, B, C, D, E, ...

Soit construit arbitrairement un triangle tel que le point A soit un de ses sommets et le point B le milieu du côté opposé ; soient construits une suite d'autres triangles tels que les sommets de chacun soient les milieux des côtés de celui qui le précède immédiatement, à partir de celui qui aura été construit sur AB, il est aisé de voir que les milieux des côtés de ces triangles parallèles au côté du premier dont B est le milieu ne seront autre chose que nos points C, D, E, ... Il n'est pas moins évident que le triangle limite, qui se réduira à un point, ne sera autre chose que le centre commun de gravité des aires de tous ces triangles, lequel sera situé aux deux tiers de la longueur AB, à partir de A ; donc aussi le point limite des points A, B, C, D, E, ..., déterminés comme il a été dit ci-dessus, sera situé aux deux tiers de AB à partir de A ; et par conséquent la limite des parallèles c, d, e, ... aux bases a et b de notre trapèze, déterminées comme il a été dit ci-dessus, sera une parallèle à ces bases deux fois plus distante de a que de b.

Soit x la longueur de cette parallèle, et soit y la longueur de la parallèle également distante de x et de a ; on aura

$$2x=b+y\ , \qquad 2y=x+a\ ,$$

d'où, en éliminant y,

$$x=\frac{a+2b}{3}\ .$$

Ainsi a et b étant les deux premiers termes de la suite qui se ressemblent dans plus de moitié de leurs chiffres de gauche, la limite vers laquelle convergeront sans cesse les termes de cette suite sera donc $\frac{a+2b}{3}$. Telle sera donc aussi la longueur du rayon d'un cercle ayant une circonférence égale à *quatre*, du moins dans la limite de l'approximation à laquelle on se sera arrêtée. Le diamètre de ce cercle sera donc

$$\frac{2(a+2b)}{3},$$

et on aura conséquemment

$$\varpi=4\times\frac{3}{2(a+2b)}=\frac{6}{a+2b}:$$

Le calcul du nombre ϖ peut donc être ainsi renfermé dans le simple énoncé que voici :

THÉORÈME. Soient posés zéro *et* un *pour les deux premiers termes d'une suite ; soit continué cette suite, en faisant alternativement chacun de ses termes égal à la demi-somme et à la racine quarrée du produit des deux termes qui le précèdent immédiatement, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à deux termes consécutifs qui se ressemblent dans plus de la moitié de leurs chiffres de gauche. Divisant alors* six *par le premier de ces termes augmenté du double de l'autre, on obtiendra pour quotient le rapport de la circonférence d'un cerle à son diamètre.*

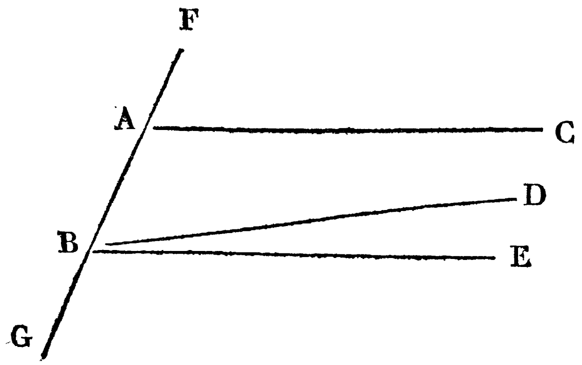
GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Essai de démonstration du Postulatum XI *des Élémens d'Euclide ;*

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du Génie, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

THÉORÈME. *Deux droites, suffisamment prolongées, se coupent nécessairement, lorsqu'elles font avec une troisième droite* *des angles internes d'un même côté dont la somme est moindre que deux angles droits.*

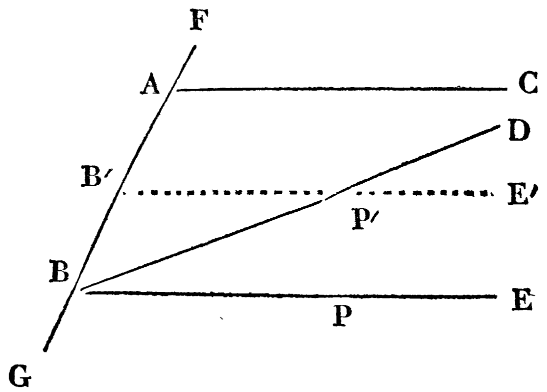
Démonstration. Soient les deux droites AC et BD, faisant avec FG deux angles internes d'un même côté CAB et DBA moindres ensemble que deux droits; il s'agit de prouver que ces droites AC et BD doivent se couper à une distance finie de FG.



Soit menée BE, faisant avec FG l'angle EBG = CAB. Puisque DBA+CAB est moindre que deux droits, DBA+EBG sera aussi moindre que deux droits, et conséquemment moindre que DBA +DBG; donc EBG sera moindre que DBG, c'est-à-dire, que BE, quelque loin qu'on la prolonge, sera entièrement comprise dans la région indéfinie DBG.

Concevons présentement que l'on fasse mouvoir l'angle EBG, sur le plan de la figure, de telle sorte que son côté BG ne quitte pas la droite FG et que son sommet B marche vers A. Lorsqu'enfin le point B aura atteint le point A, à cause de l'égalité des angles EBG et CAB, BE coïncidera avec AC.

Si donc l'on nie que AC coupe BD, il faudra admettre que BE, qui était d'abord toute entière dans la région indéfinie DBG, a passé, toute entière, dans la région indéfinie DBF.



Un quelconque P des points de BE se trouve avant le mouvement dans la région DBG, et doit ensuite, dans l'hypothèse que l'on prétend admettre, se trouver dans la région DBF, lorsque BE coïncidera avec AC. Quelle que soit donc la route suivie par ce point P dans le mouvement, puisqu'il aura passé d'un côté à l'autre de BD, il aura dû, tout au moins pour une position intermédiaire de BE, se trouver sur cette droite BD. Soit B′E′ cette position, et soit P′ la position correspondante du point P.

B′E′ ne coïncide pas alors avec BE, puisque le point B′ n'appartient pas à cette droite; donc B′E′ n'a que le seul point P′ de commun avec BD; d'où il suit que ces deux droites se coupent en P′, et que conséquemment B′E′, considérée comme droite indéfinie, se trouve partagée en P′ en deux parties dont l'une est toute entière d'un côté de BD, considérée aussi comme droite indéfinie, tandis que l'autre est toute entière de l'autre côté de cette droite. Donc, dans cette position intermédiaire, B′E′ n'est pas encore située toute entière dans la région FBD, qui est toute d'un même côté de BD.

En supposant que le mouvement continue; tant que B′E′ n'aura qu'un seul point P′ commun avec BE, on prouvera de même que cette droite n'est point toute entière dans la région FBD; puis donc qu'on admet que cette droite finit par être située toute entière dans cette région, il faut qu'il y ait un moment où D′E′ ait deux points communs avec BD ; mais alors elle devra coïncider avec cette droite, ce qui exigera que l'angle E′B′G soit égal à DBG, tandis que nous avons prouvé qu'il est plus petit ; ou, si l'on aime mieux, le point B′ coïnciderait avec le point B, de telle sorte que l'angle EBG n'aurait pas encore changé de place et que BE n'aurait de commun avec BD que ce seul point B. Donc AC ne saurait être entièrement contenue dans la région DBF, et doit conséquemment couper BD en quelque point.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Note sur la mesure de l'intensité de la pesanteur ;

Par M. GERGONNE.

ON s'occupe beaucoup aujourd'hui de la recherche de l'intensité de la pesanteur en différens points de la surface de la terre, au moyen des expériences du pendule, et l'on peut voir, dans le III.me volume du *Traité élémentaire d'astronomie physique* de M. Biot (pag. 148 des additions), combien d'attentions et de réductions minutieuses ces expériences exigent. Voici une manière de parvenir au but que nous n'avons vu indiquer nulle part, et qui serait peut-être d'un usage plus sûr et plus commode ; elle est du moins curieuse, sous le point de vue purement théorique.

Soit un pendule de figure et de matière quelconque, traversé par trois axes de suspension, dont les tranchans, parallèles entre eux, soient situés dans un même plan, contenant le centre de gravité de tout l'appareil, de telle sorte qu'en le suspendant par l'un quelconque de ces trois axes, les deux autres soient constamment avec lui dans un même plan vertical.

Soient M la masse du pendule Mk^2, son moment d'inertie par rapport à un axe idéal, conduit par son centre de gravité, parallèlement à ses axes effectifs, r, r', r'' les distances de cet axe idéal aux trois autres; les longueurs des pendules simples isochrones avec celui-là, pour ses trois points de suspension, seront respectivement (*Traité de mécanique* de M. Poisson, tom. II, pag. 116).

$$\frac{k^2+r^2}{r}, \quad \frac{k^2+r'^2}{r'}, \quad \frac{k^2+r''^2}{r''},$$

de sorte que, si t, t', t'' sont les durées respectives des oscillations du pendule, pour ses trois points de suspension, en représentant par g la gravité et par ϖ la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, on aura (*Ibid.*, pag. 117).

$$t=\varpi\sqrt{\frac{k^2+r^2}{gr}}, \quad t'=\varpi\sqrt{\frac{k^2+r'^2}{gr'}}, \quad t''=\varpi\sqrt{\frac{k^2+r''^2}{gr''}};$$

c'est-à-dire,

$$gt^2r=\varpi^2(k^2+r^2),$$

$$gt'^2r'=\varpi^2(k^2+r'^2),$$

$$gt''^2r''=\varpi^2(k^2+r''^2).$$

Si l'on pose

$$r'-r''=a, \quad r''-r=a', \quad r-r'=a'',$$

d'où

$$a+a'+a''=0,$$

en prenant les différences de ces équations deux à deux, il viendra

$$g(t'^2r'-t''^2r'')=\varpi^2a(r'+r''),$$

$$g(t''^2r''-t^2r)=\varpi^2a'(r''+r) \ ,$$

$$g(t^2r-t'^2r')=\varpi^2a''(r+r') \ ,$$

ou encore

$$(gt'^2-\varpi^2a)r'=(gt''^2+\varpi^2a)r'' \ ,$$

$$(gt''^2-\varpi^2a')r''=(gt^2+\varpi^2a')r \ ,$$

$$(gt^2-\varpi^2a'')r=(gt'^2+\varpi^2a'')r' \ ,$$

d'où en multipliant membre à membre et supprimant le facteur $rr'r''$, commun aux deux termes de l'équation produit,

$$(gt'^2-\varpi^2a)(gt''^2-\varpi^2a')(gt^2-\varpi^2a'')=(gt''^2+\varpi^2a)(gt^2+\varpi^2a')(gt'^2+\varpi^2a'') \ ;$$

ce qui donne, en développant, supprimant les termes communs aux deux membres, divisant ensuite par ϖ^2 et ordonnant enfin par rapport à g,

$$\{t'^2t''^2(a'+a'')+t''^2t^2(a^2+a)+t^2t'^2(a+a')\}g^2$$

$$-\varpi^2\{t^2a(a^2-a'')+t'^2a'(a''-a)+t''^2a''(a-a')\}g+2\varpi^4aa'a''=0 \ ,$$

ou plus simplement, parce que $a+a'+a''=0$,

$$(t'^2t''^2a+t''^2t^2a'+t^2t'^2a'')g^2+\varpi^2\{t^2a(a'-a'')+t'^2a'(a''-a)+t''^2a''(a-a')\}g-2\varpi^4aa'a''=0 \ .$$

Soient respectivement n, n', n'' les nombres d'oscillations t, t', t'' exécutées dans un même intervalle de temps quelconque T, on aura

$$t=\frac{\mathrm{T}}{n} \ , \qquad t'=\frac{\mathrm{T}}{n'} \ , \qquad t''=\frac{\mathrm{T}}{n''} \ ;$$

ce qui donnera, en substituant et chassant ensuite les dénominateurs,

$$T^4(n^2a+n'^2a'+n''^2a'')g^2+\varpi^2T^2\{n'^2n''^2a(a'-a'')+n''^2n^2a'(a''-a)$$

$$+n^2n'^2a''(a-a')\}g-2\varpi^4n^2n'^2n''^2aa'a''=0\ .$$

Cette équation donne deux valeurs pour g ; mais , quand bien même elles seraient toutes deux positives , comme cette quantité est toujours à très-peu près connue , il n'en résulterait jamais d'équivoque.

Au surplus , s'il n'était question que de connaître la très-petite quantité γ à ajouter à une valeur déjà très-approchée de g pour avoir la véritable, cette valeur de γ pourrait se calculer , à très-peu près , par la formule du premier degré que l'on emploie dans la méthode de Newton pour l'approximation des racines des équations numériques.

Au point où les arts sont parvenus aujourd'hui , il ne sera pas difficile de rendre les tranchans des trois axes parallèles et de les comprendre dans un même plan ; et il ne sera pas plus difficile d'en mesurer exactement les distances a , a' , a'' , dont les deux plus petites devront être prises avec un même signe quelconque, et la plus grande avec un signe contraire. La seule difficulté sérieuse consistera à amener le plan de ces trois axes à contenir le centre de gravité de l'appareil. On pourra , pour la surmonter , placer latéralement de part et d'autre de la partie inférieure de cet appareil, deux poids additionnels qui, portés par des vis horizontales, pourront être avancés et reculés de manière à amener le plan des trois tranchans à être rigoureusement vertical.

Si , au lieu de trois axes , on en établissait un plus grand nombre , on obtiendrait, pour déterminer g , autant d'équations différentes qu'il y aurait de manières de prendre ces axes trois à trois , ce qui offrirait des moyens de vérification et garantirait ainsi l'exactitude des résultats.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux premiers problèmes de géométrie proposés à la page 327 du précedent volume.

Solution du premier problème ;

Par M. Vallès, élève à l'Ecole polytechnique.

PROBLÈME. *Un fil parfaitement flexible et inextensible est appliqué sur la surface d'un cône droit, de manière à suivre exactement les circonvolutions d'une spirale conique qui s'y trouve tracée, et à se terminer au sommet du cône. On suppose que l'on développe ce fil, en le tenant constamment tangent à la spirale, et on demande quelle courbe décrira son extrémité dans l'espace?*

Solution. Le fil, en se développant, décrit dans l'espace une surface développable dont la spirale conique est l'arête de rebroussement; et la courbe demandée se trouve tracée sur cette surface, dont l'équation peut conséquemment être prise pour l'une des équations de cette courbe. Cherchons d'abord cette équation.

Soit pris le sommet du cône pour origine des coordonnées rectangulaires et son axe pour axe des z positifs. Disposons de plus le plan des xz de telle sorte qu'il soit tangent à la spirale à son origine. Comme il a été prouvé (*Annales*, tom. XVI, pag. 167) que la projection de cette courbe sur le plan des xy est une spirale d'Archimède, en appelant α l'angle générateur du cône et représentant par a une longueur donnée, si (t, u, v) est un quelconque des points de la spirale conique, on aura

$$t^2+u^2=v^2\text{Tang.}^2\alpha \qquad (1)$$

$$a\text{Arc.}\left(\text{Tang.}\frac{u}{t}\right)=\sqrt{t^2+u^2}=v\text{Tang.}\alpha$$

ou bien

$$\frac{u}{t}=\text{Tang.}\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a} \qquad (2)$$

équations d'où on tirera

$$t=v\text{Tang.}\alpha\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right), \quad u=v\text{Tang.}\alpha\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right); \qquad (3)$$

et ensuite, par différentiation

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}&=\left\{\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)-\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\text{Sin}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)\right\}\text{Tang.}\alpha,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}&=\left\{\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)+\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)\right\}\text{Tang.}\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Mais si (x, y, z) est un quelconque des points de la tangente à la spirale conique au point (t, u, v), on devra avoir, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{x-t}{z-v}, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{y-u}{z-v}, \qquad (5)$$

ou bien, en mettant pour t et u leurs valeurs (3)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}&=\frac{x-v\text{Tang.}\alpha\text{Cos.}\left(\dfrac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)}{z-v}\,,\\[2ex]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}&=\frac{y-v\text{Tang.}\alpha\text{Sin.}\left(\dfrac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)}{z-v}\,;\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

égalant donc respectivement ces valeurs aux valeurs (4) il viendra, en réduisant,

$$\left.\begin{aligned}&\left\{z\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)-(z-v).\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)\right\}\text{Tang}\,\alpha=x\,,\\&\left\{z\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)+(z-v).\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)\right\}\text{Tang}\,\alpha=y\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

l'élimination de v entre ces deux équations conduira à l'équation en x, y, z de la surface cherchée.

Pour l'obtenir facilement, prenons la somme des quarrés de ces deux équations ; nous aurons ainsi

$$\left\{z^2+v^2(z-v)^2\,\frac{\text{Tang.}^2\alpha}{a^2}\right\}\text{Tang.}^2\alpha=x^2+y^2\,;$$

ou bien

$$v^2(z-v)^2\text{Tang.}^4\alpha=a^2(x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha)\,;$$

d'où, en extrayant la racine quarrée

$$v(z-v)\text{Tang.}^2\alpha=-a\sqrt{x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha}\,.\qquad(8)$$

Nous donnons le signe $-$ au second membre attendu que, lorsque $z=0$, le premier devient essentiellement négatif.

Cette équation (8), résolue par rapport à v donne

$$\frac{v\,\text{Tang}.\alpha}{a}=\frac{z\,\text{Tang}.\alpha\pm\sqrt{z^2\,\text{Tang}.^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\,\text{Tang}.^2\alpha}}}{2a}\,.$$

On levera l'ambiguïté du signe du radical, en observant que la spirale conique étant sur la surface cherchée, il faut qu'en supposant $x=t$, $y=u$, $z=v$, ce qui donne $x^2+y^2-z^2\text{Tang}.^2\alpha=0$, les deux membres deviennent identiquement les mêmes, ce qui exige qu'on adopte le signe supérieur. On a donc simplement

$$\frac{v\,\text{Tang}.\alpha}{a}=\frac{z\,\text{Tang}.\alpha+\sqrt{z^2\,\text{Tang}.^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\,\text{Tang}.^2\alpha}}}{2a}\,. \quad (9)$$

On pourrait substituer immédiatement cette valeur dans l'une ou l'autre des équations (7); mais en prenant la somme de leurs produits respectifs par $\text{Cos.}\left(\frac{v\,\text{Tang}.\alpha}{a}\right)$ et $\text{Sin.}\left(\frac{v\,\text{Tang}.\alpha}{a}\right)$, on parvient à l'équation plus simple

$$\frac{x}{z\,\text{Tang}.\alpha}\,\text{Cos.}\left(\frac{v\,\text{Tang}.\alpha}{a}\right)+\frac{y}{z\,\text{Tang}.\alpha}\,\text{Sin.}\left(\frac{v\,\text{Tang}.\alpha}{a}\right)=1\,, \quad (10)$$

dans laquelle mettant pour $\frac{v\,\text{Tang}.\alpha}{a}$ sa valeur (9) on a, pour l'équation de la surface développable dont la spirale conique est l'arête de rebroussement.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{z\,\text{Tang}.\alpha}\,\text{Cos.}\left\{\dfrac{z\,\text{Tang}.\alpha+\sqrt{z^2\,\text{Tang}.^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\,\text{Tang}.^2\alpha}}}{2a}\right\}\\[2ex]+\dfrac{y}{z\,\text{Tang}.\alpha}\,\text{Sin.}\left\{\dfrac{z\,\text{Tang}.+\alpha\sqrt{z^2\,\text{Tang}.^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\,\text{Tang}.^2\alpha}}}{2a}\right\}\end{array}\right\}=1\,. \quad (11)$$

Si l'on veut savoir suivant quelle courbe cette surface est coupée par le plan des xy, il suffira de faire dans son équation $z=0$; elle deviendra ainsi

$$x\text{Cos.}\frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{a}}+y\text{Sin.}\frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{a}}=0\ ,$$

ce qui donne

$$\frac{x}{y}=-\text{Tang.}\frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{a}}\ \text{ou}\ \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{a}}=\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=-\frac{x}{y}\right)$$

ou encore

$$\sqrt{x^2+y^2}=+a\left\{\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{x}{y}\right)\right\}^2\ ; \qquad (12)$$

ainsi cette courbe est une spirale dans laquelle les rayons vecteurs sont proportionnels aux quarrés des angles que forme leur direction avec l'axe des x.

Pour achever de résoudre le problème il nous faut une nouvelle équation de la courbe demandée; mais, comme cette courbe est décrite par l'extrémité du fil, il nous faudra avoir égard à sa longueur, prise de cette extrémité jusqu'à son point de contact avec le cône. Or, cette longueur est égale à celle de la portion de spirale comprise depuis le même point jusqu'au sommet; il nous faut donc préalablement obtenir cette dernière longueur.

En prenant la somme des quarrés des équations (4) on trouve

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=\left\{1+\frac{\varphi^2\text{Tang.}^2\alpha}{a^2}\right\}\text{Tang.}^2\alpha\ ;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2}=\sqrt{1+\mathrm{Tang.}^2\alpha+\frac{v^2\mathrm{Tang.}^4\alpha}{a^2}}\;.$$

En posant, pour abréger,

$$a=b\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\mathrm{Tang.}\alpha\;,$$

cette expression deviendra

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}=\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}\;; \qquad (13)$$

ce qui donne, en intégrant,

$$s=\frac{b}{2\mathrm{Cos.}\alpha}\left\{\frac{v}{b}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}+\mathrm{Log.}\left(\frac{v}{b}+\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}\right)\right\}. \qquad (14)$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce que cette intégrale est nulle en même temps que v, ainsi que cela doit être.

Cela posé, on doit avoir

$$s=\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2+(z-v)^2}\;,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (5)

$$s=(z-v)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2}=(z-v)\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}\;;$$

ou enfin, par la formule (13)

$$s=\frac{z-v}{\mathrm{Cos.}\alpha}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}\;;$$

donc (14)

$$\frac{2(z-v)}{b}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}=\frac{v}{b}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}+\text{Log}\left(\frac{v}{b}+\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}\right),$$

ou encore

$$\frac{2z-3v}{b}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}=\text{Log.}\left(\frac{v}{b}+\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}\right); \quad (15)$$

équation dans laquelle il n'est plus question que de substituer pour v sa valeur (9)

$$v=\frac{z\text{Tang.}\alpha+\sqrt{z^2\text{Tang.}^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha}}}{2\text{Tang.}\alpha},$$

pour obtenir la deuxième équation de la courbe cherchée.

Concevons que, sur la surface du cône on trace une infinité de spirales coniques, en faisant varier la valeur de la constante a ; chacune d'elles, par son développement, donnera naissance à une courbe à double courbure, de la nature de celle qui est demandée. L'ensemble de ces courbes formera une certaine surface dont on obtiendra l'équation en éliminant a ou b des deux équations de la courbe demandée, après avoir amené ces deux équations, au moyen de la relation.

$$a=b\text{Sin.}\alpha\text{Tang.}\alpha;$$

à ne plus contenir que l'une ou l'autre de ces deux constantes.

Solution du deuxième Problème.

Par un Abonné.

PROBLÈME. *Suivant quelle courbe un fil parfaitement flexible et inextensible doit-il être roulé sur la surface d'un cône droit, pour qu'en développant ce fil, supposé se terminer au sommet du cône, de manière à le maintenir constamment tangent à la courbe, son extrémité ne sorte pas du plan conduit par ce sommet, perpendiculairement à l'axe du cône? Et quelle courbe décrira alors cette extrémité sur ce plan?*

Solution. Soit un fil d'une longueur déterminée quelconque, fixé, par l'une de ses extrémités, à l'un quelconque des points de la surface d'une cône. On pourra toujours l'amener à être situé dans le plan tangent au point d'attache, et le faire tourner ensuite dans ce plan, autour de ce point, jusqu'à ce que son autre extrémité se trouve sur le plan perpendiculaire à l'axe conduit par le sommet. Rien n'empêchera alors d'enrouler ce fil sur le cône, de manière que cette extrémité ne sorte pas de ce plan, et dès lors il s'appliquera sur ce cône suivant la courbe demandée.

Ces considérations, qui offriraient au besoin un moyen mécanique de tracer les deux courbes cherchées, prouvent que non seulement le problème est toujours possible, mais que de plus on peut toujours assujettir la courbe tracée sur le cône à passer par un point donné de sa surface et à avoir en outre, de ce point au sommet, une longueur donnée; de sorte que son équation doit contenir deux constantes arbitraires.

Lorsque le fil se développe, on peut, durant un instant infiniment petit, supposer qu'il tourne autour de son point de contact avec le cône, supposé fixe; et, puisque son extrémité ne quitte pas, dans ce mouvement, le plan perpendiculaire à l'axe conduit par le sommet, il est dans le même cas que s'il était mu sur la surface d'un autre cône droit ayant sa base sur ce plan et son sommet au point de contact. Son extrémité décrit donc un petit arc de cercle ayant son centre à la projection du point de contact sur le plan dont il s'agit.

Ainsi, dans chaque situation du fil mobile, la projection de son point de contact avec le cône, sur le plan perpendiculaire à son axe conduit par son sommet est le centre de courbure de l'arc de courbe que décrit son extrémité; de sorte que la projection de la courbe tracée sur le cône est la développée de la courbe tracée sur le plan de projection.

Cela posé, soit pris le sommet du cône pour origine des coordonnées rectangulaires et son axe pour axe des z positifs. En représentant par α son angle générateur, si (t, u, v) est le point de contact du fil avec sa surface, on aura

$$t^2+u^2=v^2\mathrm{Tang.}^2\alpha\,. \qquad (1)$$

Si de plus on suppose que (x, y) est l'extrémité du fil ou le point décrivant, sur le plan des xy; ce point devant satisfaire aux équations de la tangente, on aura

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{t-x}{v}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{u-y}{v}\,. \qquad (2)$$

En représentant par s la longueur du fil, depuis le point (t, u, v) jusqu'au point (x, y), on doit avoir

$$s=\sqrt{(t-x)^2+(v-y)^2+v^2}\,, \qquad (3)$$

ou, en vertu des formules (2),

$$s=\frac{\rho}{d\rho}\sqrt{dt^2+du^2+d\rho^2}\ , \qquad (4)$$

d'où

$$ds=\sqrt{dt^2+du^2+d\rho^2}-\frac{\rho}{d\rho}d\rho.\sqrt{dt^2+du^2+d\rho^2}\ ; \qquad (5)$$

mais on doit avoir d'ailleurs

$$ds=\sqrt{dt^2+du^2+d\rho^2}\ ; \qquad (6)$$

donc

$$d.\sqrt{dt^2+du^2+d\rho^2}=0\ ,\quad \text{d'où}\quad \sqrt{dt^2+du^2+d\rho^2}=Ad\rho\ ;$$

ρ étant la variable indépendante. Cela donne en quarrant et transformant la constante

$$dt^2+du^2=Bd\rho^2\ . \qquad (7)$$

mais, en vertu de l'équation (1)

$$\rho=\frac{\sqrt{t^2+u^2}}{\text{Tang.}\alpha}\ , \qquad (8)$$

d'où

$$d\rho=\frac{tdt+udu}{\text{Tang.}\alpha.\sqrt{t^2+u^2}}\ ,\quad \text{et}\quad d\rho^2=\frac{(tdt+udu)^2}{(t^2+u^2)\text{Tang.}^2\alpha}\ ; \qquad (9)$$

donc, en substituant dans (7) et transformant encore la constante

$$(t^2+u^2)(\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2)=C(t\mathrm{d}t+u\mathrm{d}u)^2\ ; \qquad (10)$$

telle est donc l'équation de la projection sur le plan des xy de la courbe tracée sur le cône.

Cette projection étant une spirale, nous poserons

$$t=r\mathrm{Cos}.\theta\ , \quad u=r\mathrm{Sin}.\theta\ , \qquad (11)$$

d'où

$$\mathrm{d}t=\mathrm{d}r\mathrm{Cos}.\theta-r\mathrm{d}\theta\mathrm{Sin}.\theta\ ; \qquad \mathrm{d}u=\mathrm{d}r\mathrm{Sin}.\theta+r\mathrm{d}\theta\mathrm{Cos}.\theta\ ;$$

il en résultera

$$t^2+u^2=r^2\ ,$$

$$\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2\ ;$$

$$t\mathrm{d}t+u\mathrm{d}u=r\mathrm{d}r\ ;$$

substituant dans (10) divisant par r^2, tranformant de nouveau la constante et extrayant la racine quarrée, il viendra

$$D\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}r}{r}\ , \qquad \text{d'où} \qquad D\theta=\mathrm{Log}.\frac{r}{a}\ ; \qquad (12)$$

a étant une nouvelle constante. Ainsi la projection sur le plan des xy de la courbe tracée sur le cône est une *spirale logarithmique*.

Les formules (2) et (7) donnent en différentiant

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\ , \qquad \rho\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\ ,$$

$$\frac{dt}{d\nu}\cdot\frac{d^2t}{d\nu^2}+\frac{du}{d\nu}\cdot\frac{d^2u}{d\nu^2}=0\,.$$

En éliminant $\frac{d^2t}{d\nu^2}$ et $\frac{d^2u}{d\nu^2}$ entre ces trois équations et mettant pour $\frac{dt}{d\nu}$ et $\frac{du}{d\nu}$, dans l'équation résultante leurs valeurs données par les formules (2), on aura

$$(t-x)dx+(u-y)dy=0\,. \qquad (13)$$

Si l'on met les mêmes valeurs dans l'équation différentielle de (1) qui est

$$t\frac{dt}{d\nu}+u\frac{du}{d\nu}=\nu\text{Tang.}^2\alpha\,,$$

elle deviendra

$$t(t-x)+u(u-y)=\nu^2\text{Tang.}^2\alpha\,;$$

ou simplement, en ayant égard à l'équation (1)

$$tx+uy=0\,. \qquad (14)$$

Les mêmes valeurs mises dans l'équation (7) donneront

$$(t-x)^2+(u-y)^2=B\nu^2\,.$$

ou, en développant et ayant égard aux équations (1) et (14)

$$x^2+y^2=(B-\text{Tang.}^2\alpha)\nu^2=E^2\nu^2\,; \qquad (15)$$

les équations (13) et (14) donnent d'ailleurs

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)t=+y(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\ ,$$

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)u=-x(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\ ;$$

d'où, en prenant la somme des quarrés et ayant égard à l'équation (1),

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2v^2\mathrm{Tang.}^2\alpha=(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2\ ,$$

ou en mettant pour x^2+y^2 sa valeur (15), divisant par v et extrayant la racine quarrée des deux membres

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\mathrm{Tang.}\alpha=E(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\ ;$$

équation d'une spirale logarithmique, comme on pouvait bien s'y attendre ; et dont la développée sera l'autre spirale logarithmique projection de la courbe tracée sur la surface du cône.

Voilà donc un moyen mécanique fort simple pour tracer une spirale logarithmique d'un mouvement continu, et qui présente en même temps une définition purement géométrique de cette courbe.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'analyse.

Les deux premiers termes d'une série sont arbitraires. Chacun des autres est alternativement la demi-somme et la racine quarrée du produit des deux qui le précèdent immédiatement. Quel est son terme général?

Problèmes de géométrie.

I. Un angle donné et invariable se meut sur le plan d'une ligne du second ordre, de manière que ses deux côtés soient constamment normaux à la courbe ; quelle ligne décrit son sommet ?

II. Un angle trièdre donné et invariable se meut dans l'espace de manière que ses trois arêtes soient constamment normales à une même surface fixe du second ordre ; quelle surface décrit son sommet ?

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Mémoire sur les lignes du second ordre ;

Par M. Ch. Sturm.

(*Deuxième partie* (*))

§. VI.

Nous avons développé, dans ce qui précède, la théorie purement analytique des pôles et polaires, et nous avons fait voir qu'on pouvait en déduire, avec facilité, les propriétés généralement connues des lignes du second ordre qui nous ont été transmises par les anciens géomètres. Nous allons présentement reprendre les considérations du §. I, concernant le système de trois lignes du second ordre qui, tracées sur un même plan, ont les mêmes points d'intersection ; et, après avoir étudié les propriétés d'un tel système, nous montrerons que, dans leur généralité, elles renferment la presque totalité de celles qui composent aujourd'hui la géométrie de ces sortes de courbes.

Soient sur un plan, trois lignes du second ordre, rapportées aux mêmes axes et ayant les mêmes intersections. Nous avons vu qu'en supposant ces courbes exprimées par les équations

(*) Voy. la pag. 265 du précédent volume.

J. D. G.

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\ , \qquad (c)$$

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F'=0\ , \qquad (c')$$

$$A''x^2+B''y^2+2C''xy+2D''x+2E''y+F''=0\ , \qquad (c'')$$

on devrait avoir les six relations

$$\left.\begin{array}{lll} mA+A'=A''\ , & mB+B'=B''\ , & mC+C'=C''\ , \\ mD+D'=D''\ , & mE+E'=E''\ , & mF+F'=F''\ ; \end{array}\right\} \quad (a)$$

dans lesquelles le nombre m peut être quelconque.

Cela posé, par un point O, pris à volonté sur le plan des trois courbes, et dont nous supposons les coordonnées X et Y, soit menée une droite parallèle à l'axe des x, c'est-à-dire, parallèle à une droite fixe arbitraire, puisque les axes des coordonnées sont quelconques. Ensuite, sans changer la direction des axes, transportons-en l'origine en O ; il nous suffira pour cela de changer respectivement x et y en $x+\mathrm{X}$ et $y+\mathrm{Y}$, dans les équations (c), (c'), (c''), qui deviendront ainsi

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2(AX+CY+D)x+2(BY+CX+E)y+(AX^2+BY^2+2CXY+2DX+2EY+F)=0,$$

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2(A'X+C'Y+D')x+2(B'Y+C'X+E')y+(A'X^2+B'Y^2+2C'XY+2D'X+2EY+F)=0\ ,$$

$$A''x^2+B''y^2+2C''xy+2(A''X+C''Y+D'')x+2(B''Y+C''X+E'')y+(A''X^2+B''Y^2+2C''XY+2D''X+2EY+F)=0\ .$$

Si l'on fait, dans la première $y=0$, on en tirera les valeurs des distances du point O aux deux intersections de la courbe (c) avec la transversale menée par ce point O. Ces distances pourront être réelles ou imaginaires, suivant que la transversale coupera ou ne coupera pas la courbe (c) ; mais, dans tous les cas, leur produit, aussi bien que leur somme algébrique, auront toujours des valeurs réelles. En effet, en désignant ce produit par P et cette somme par S, on a, par la propriété des équations du second degré,

$$P=\frac{AX^2+BY^2+2CXY+2DX+2EY+F}{A}\ ,\qquad S=-\frac{2(AX+CY+D)}{A}\ .$$

On obtiendrait des valeurs de même forme pour les produits P', P'', et pour les sommes S', S'', des distances du point O, aux points d'intersection réels ou imaginaires, de la transversale avec les courbes (c'), (c'') ; de sorte qu'on a

$$AP=AX^2+BY^2+2CXY+2DX+2EY+F\ ,\qquad AS=-2(AX+CX+D)\ ,$$

$$A'P'=A'X^2+B'Y^2+2C'XY+2D'X+2E'Y+F'\ ,\qquad A'S'=-2(A'X+C'Y+D')\ ,$$

$$A''P''=A''X^2+B''Y^2+2C''XY+2D''X+2E''Y+F''\ ,\qquad A''S''=-2(A''X+C''Y+D'')\ .$$

De là, en ayant égard aux relations (a), on déduit, sur-le-champ, ces deux équations

$$mAP+A'P'=A''P''\ ,\qquad mAS+A'S'=A''S''\ ,$$

qui donnent, par la substitution de $A''-A'$ à la place de mA

$$(A''-A')P+A'P'=A''P''\ ,\qquad (A''-A')S+A'S'=A''S''\ ;$$

ou bien

$$A'(P'-P)=A''(P''-P)\ ,\qquad A'(S'-S)=A''(S''-S)\ ;$$

d'où résulte enfin

$$\frac{P'-P}{P''-P}=\frac{A''}{A'}\ ;\qquad \frac{S'-S}{S''-S}=\frac{A''}{A'}\ .$$

Donc, quelle que soit la transversale, et quel que soit le point O de sa direction, les différences de l'un quelconque des produits désignées par P, P', P'' aux deux autres, ainsi que les différences de chacune des sommes désignées par S, S', S'' aux deux autres, sont dans un rapport donné et invariable, tant que cette transversale se meut parallélement à elle-même.

Les moitiés des sommes S, S', S'' expriment, comme l'on sait, les distances du point O aux milieux des cordes interceptées sur la transversale par les trois courbes; de sorte que les moitiés des différences $S'-S$, $S''-S$, expriment les distances de l'un de ces milieux aux deux autres. En vertu donc de la relation ci-dessus, ces distances sont toujours entre elles dans le même rapport, tant que la transversale se meut parallèlement à elle-même, et conséquemment elles doivent s'évanouir en même temps. La relation entre S, S', S'' nous donne donc ce théorème : *Lorsque trois lignes du second ordre, tracées sur un même plan, ont les mêmes points d'intersections, leurs diamètres dont les conjugués sont parallèles à une même droite fixe, vont tous trois concourir en un même point* (*).

(*) Il n'est pas difficile de prouver que cette propriété renferme implicitement les précédentes, bien qu'elle paraisse d'abord moins générale.

Soient, en effet, (A, B), (C, D), (E, F) les points où la transversale indéfinie coupe les trois courbes (c), (c'), (c''); et soient respectivement H, I, K, les milieux des cordes interceptées AB, CD, EF. En supposant que les quatre points C, D, E, F soient sur le prolongement de AB, la double relation

$$\frac{\mathrm{AC.AD}}{\mathrm{AE.AF}}=\frac{A''}{A'}=\frac{\mathrm{BC.BD}}{\mathrm{BE.BF}}$$

donnera

$$\frac{\mathrm{AC.AD}}{\mathrm{AE.AF}}=\frac{\mathrm{A''}}{\mathrm{A'}}=\frac{(\mathrm{AC-AB})(\mathrm{AD-AB})}{(\mathrm{AE-AB})(\mathrm{AF-AB})}=\frac{\mathrm{AC.AD-AB(AC+AD-AB)}}{\mathrm{AE.AF-AB(AE+AF-AB)}};$$

d'où l'on déduira

Voyons maintenant ce qui résulte, en particulier, de la relation établie entre les produits P, P', P''. Si l'on prend pour le point O l'un quelconque des points où la transversale coupe la courbe (c), on a $P=0$, et la relation $\frac{P'-P}{P''-P}=\frac{A''}{A'}$, devenant $\frac{P'}{P''}=\frac{A''}{A'}$, se traduit alors dans l'énoncé suivant :

$$\frac{A''}{A'}=\frac{AC+AD-AB}{AE+AF-AB},$$

puis, en observant que $AB=2AH$, $AC+AD=2AI$, $AE+AF=2AK$,

$$\frac{A''}{A'}=\frac{2AI-2AH}{2AK-2AH}=\frac{AI-AH}{AK-AH}=\frac{HI}{HK};$$

c'est la relation contenue dans l'équation $\frac{S'-S}{S''-S}=\frac{A''}{A'}$,

Soit pris ensuite un point quelconque O sur la direction de la transversale. En supposant que tous les points A, B, C, D, E, F se trouvent situés d'un même côté de ce point O, on aura

$$\frac{OC.OD-OA.OB}{OE.OF-OA.OB}=\frac{(OA+AC)(OA+AD)-OA(OA+AB)}{(OA+AE)(OA+AF)-OA(OA+AB)}$$

$$=\frac{OA(AC+AD-AB)+AC.AD}{OA(AE+AF-AB)+AE.AF};$$

ou, ce qui revient au même $\frac{P'-P}{P''=P}=\frac{A''}{A'}$.

La propriété qu'exprime la double équation

$$\frac{AC.AD}{AE.AF}=\frac{A''}{A'}=\frac{BC.BD}{BE.BF};$$

et que nous avons tout-à-l'heure énoncée, doit donc être considérée comme la seule propriété fondamentale du système de trois lignes du second ordre ayant les mêmes points d'intersection.

Lorsque trois lignes du second ordre, tracées sur un même plan, ont les mêmes intersections, soit réelles soit imaginaires, toute droite menée sur leur plan, parallèlement à une droite donnée de position, les coupe de telle sorte que le produit des segmens compris entre l'un des points de section de l'une des courbes, proposée, et les deux points de section de l'une des deux autres est égal au produit des segmens compris entre le même point et les deux points de section de la courbe restante.

De là nous passons aisément à la propriété suivante : *Etant données, sur un plan, trois lignes du second ordre, ayant les mêmes points d'intersection, si par un point* A *pris à volonté sur l'une d'elles* (c), *on mène des parallèles à deux droites données de position, l'une coupant la courbe* (c′) *en deux points* c, d, *et l'autre coupant la courbe* (c″) *en deux points* e, f; *les deux produits de segmens* Ac.Ad, Ae.Af *seront toujours entre eux dans un rapport constant.* En effet, par le point A, pris à volonté sur la courbe (c), soit menée une parallèle à une autre droite fixe quelconque, et soient respectivement C et D, E et F les points où cette parallèle coupe (c') et (c''). En vertu d'un principe connu, le rapport $\frac{\mathrm{AC.AD}}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}d}$ est donné et invariable, aussi bien que le rapport $\frac{\mathrm{AE.AF}}{\mathrm{A}e.\mathrm{A}f}$; mais on a prouvé ci-dessus que le rapport $\frac{\mathrm{AC.AD}}{\mathrm{AE.AF}}$ doit aussi être donné et constant; donc il doit également en être de même du rapport $\frac{\mathrm{A}c.\mathrm{A}d}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}f}$.

Au reste la même proposition peut directement se déduire de notre analyse. En effet, soient rapportées les trois courbes à deux axes de coordonnées, parallèles aux deux droites données de position. Ces courbes étant alors représentées par les équations (c), (c'), (c''), accompagnées des relations (a); si l'on transporte l'origine en un point quelconque (X, Y) de la courbe (c), les deux nouveaux axes étant menés par ce point là, parallèlement aux premiers, on trouvera que le produit des abscisses comprises entre cette nouvelle origine et les points d'intersection de la courbe (c') avec le nouvel axe des x, est au produit des ordonnées comprises entre la même origine et les points d'intersection de la courbe (c'') avec le

Soient donc respectivement (A, B), (C, D), (E, F) les points où les courbes proposées (c), (c'), (c'') sont coupées par la transversale dont il s'agit, cette transversale étant toujours menée parallélement à une droite fixe quelconque, les deux rapports

$$\frac{AC.AD}{AE.AF}, \qquad \frac{BC.BD}{BE.BF}$$

auront une même valeur déterminée et constante, et il en sera de même des rapports

$$\frac{CA.CB}{CE.CF}, \qquad \frac{DA.DB}{DE.DF},$$

comme aussi des deux suivans

$$\frac{EA.EB}{EC.ED}, \qquad \frac{FA.FB}{FC.FD};$$

de là résulte ce nouveau théorème, qui n'est qu'une conséquence immédiate du précédent.

---

nouvel axe des y, en raison inverse des coefficiens A' et B'' de x^2 et y^2, dans les équations (c'), (c''), ce rapport étant toujours le même, quel que soit, sur la courbe (c) le point (X, Y) par lequel on mène les parallèles aux deux axes primitifs; la proposition dont il s'agit se trouve ainsi démontrée.

Voici une autre proposition, déjà connue, qui découle, comme corollaire, de ce qui précède: *Un quadrilatère étant inscrit à une ligne du second ordre, si, d'un point quelconque de la courbe, on abaisse sur les directions des côtés de ce quadrilatère des perpendiculaires, ou des obliques faisant avec eux des angles égaux à un angle donné, le rectangle des perpendiculaires ou des obliques abaissées sur deux côtés opposés sera dans un rapport constant avec le rectangle des perpendiculaires ou des obliques abaissées sur les deux autres.*

Soient trois lignes du second ordre, tracées sur un même plan et ayant les mêmes points d'intersection. Si l'on mène à volonté, sur leur plan, une droite coupant chacune d'elles en deux points, il y aura sur cette droite arbitraire six points de section tels que les deux produits de segmens compris entre un point de section appartenant à l'une quelconque des trois courbes et les points de section de chacune des deux autres, seront entre eux dans le même rapport que les deux produits de segmens compris entre le second point de section de la première courbe et les mêmes points de section des deux autres.

Ainsi, l'on a ces trois équations

$$\frac{AC.AD}{AE.AF}=\frac{BC.BD}{BE.BF}\ ,\quad \frac{CA.CB}{CE.CF}=\frac{DA.DB}{DE.DF}\ ,\quad \frac{EA.EB}{EC.ED}=\frac{FA.FB}{FC.FD}\ . \qquad (f)$$

En les combinant par voie de multiplication, on en déduit, sur-le-champ, les quatre autres que voici :

$$\left.\begin{array}{ll} AC.BE.DF=AF.BD.CE\ , & AD.BE.CF=AF.BC.DE\ , \\ AC.BF.DE=AE.BD.CF\ , & AD.BF.CE=AE.BC.DF\ . \end{array}\right. \qquad (f)$$

Lors donc qu'une droite arbitraire coupe trois lignes du second ordre qui ont les mêmes points d'intersection, les divers segmens formés sur cette droite par les trois courbes, sont liés entre eux par le système de sept équations. Il est clair, au surplus, qu'une seule de ces équations doit comporter les six autres, puisqu'elles dérivent toutes d'une seule et même propriété, et que d'ailleurs une seule suffit évidemment pour déterminer l'un quelconque des six points A, B, C, D, E, F; les cinq autres étant placés arbitrairement sur la transversale indéfinie.

Il pourra souvent arriver que la transversale arbitraire ne rencontre pas à la fois les trois courbes proposées. Supposons, par exemple, qu'elle ne coupe pas la troisième (c''); alors, parmi les six points de section A, B, C, D, E, F, que cette droite doit, en général, déterminer sur les courbes proposées, les deux E, F seront devenus imaginaires, et toutefois les produits AE.AF, BE.BF conserveront toujours des valeurs réelles, puisque chacun d'eux n'est autre chose que le produit des racines d'une certaine équation du second degré dont les coefficiens sont toujours réels. Nous conclurons de cette remarque, qui se lie d'ailleurs avec celle que nous avons faite dans la note du §. II, que le système des formules (f) a toujours une signification réelle et indépendante de la réalité des points de section de la transversale, pourvu néanmoins que ces points ne soient pas tous à la fois imaginaires; car alors on serait obligé de remonter à la relation $\frac{P'-P}{P''-P}=\frac{A''}{A''}$, pour leur trouver un sens intelligible.

Desargues, géomètre contemporain de Descartes, le premier qui ait consideré les diverses sections coniques comme des variétés d'une courbe unique, paraît être aussi le premier qui ait examiné les propriétés qui appartiennent à six points rangés sur une même droite et liés entre eux par les relations (f). Cette liaison remarquable était nommée par lui *involution de six points.* Son ouvrage sur les sections coniques, qui ne nous est connu que par quelques citations des contemporains, renfermait, entre autres, le développement de la proposition suivante et de ses corollaires: *Un quadrilatère étant inscrit à une section conique quelconque, toute droite tracée sur son plan détermine, par ses intersections avec la courbe et les côtés du quadrilatère, six points qui sont en involution*, c'est-à-dire, qui satisfont au système des relations (f). Ce principe, sur lequel nous reviendrons bientôt, et qui se déduit, comme corollaire, de notre second théorème, a fourni à M. Brianchon le sujet de son intéressant *Mémoire sur les lignes du second ordre.* Il a encore été rappelé dans la 2.^{me} section du *Traité des propriétés projectives des figures*; mais jusqu'ici on n'avait pas encore considéré l'ensemble des relations (f) comme l'expression de la propriété essentielle et caractéristique du système de trois sections coniques qui ont mêmes points d'intersection. Le principe de Désargues, ainsi généralisé, devient beaucoup plus fécond et plus digne d'intérêt. Le présent mémoire est particulièrement consacré au développement des nombreuses conséquences qui découlent de cette source (*).

(*) A cause de l'importance de cette propriété, on sera sans doute bien aise d'en trouver ici une démonstration analytique directe et simple, et telle nous paraît être la suivante :

Les équations des trois courbes, rapportées à deux axes quelconques, étant toujours supposées

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\ , \\ A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F'=0\ , \\ A''x^2+B''y^2+2C''xy+2D''x+2E''y+F''=0\ ; \end{array}\right\} \quad (1)$$

on a vu dans une note du §. I, que, pour que ces trois courbes se coupassent aux quatre mêmes points, il fallait que, λ, λ', λ'' étant trois multiplicateurs, on eût les six relations suivantes

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda A+\lambda' A'+\lambda'' A''=0\ , & \lambda D+\lambda' D'+\lambda'' D''=0\ , \\ \lambda B+\lambda' B'+\lambda'' B''=0\ , & \lambda E+\lambda' E'+\lambda'' E''=0\ , \\ \lambda C+\lambda' C'+\lambda'' C''=0\ , & \lambda F+\lambda' F'+\lambda'' F''=0\ . \end{array}\right\} \quad (2)$$

Cela posé, puisque les courbes sont situées d'une manière quelconque par rapport aux axes, l'axe des x peut, à l'inverse, être considéré comme une transversale quelconque tracée sur le plan de ces trois courbes. Soient respectivement p et q, p' et q', p'' et q'' les abscisses des points d'intersection de cette transversale avec les trois courbes, c'est-à-dire, les valeurs de x que donnent leurs équations, lorsqu'on y fait $y=0$; nous aurons, par la nature des racines des équations du second degré, Il est bon d'observer, dès à présent, qu'il peut arriver que l'un des six points de section vienne à coïncider avec son conjugué, ce qui arrivera si la transversale est tangente à une des trois courbes. Il est aisé de voir à quoi se réduiront, dans ce cas, les relations (f), qui constitueront alors une *involution de cinq points*, suivant l'expression de Desargues. Si en outre la même chose arrive pour deux autres points également conjugués, on retombera

---

$$\left.\begin{array}{ll} A(p+q)+2D=0\ , & Apq-F=0\ , \\ A'(p'+q')+2D'=0\ . & A'p'q'-F'=0\ , \\ A''(p''+q'')2D''=0\ , & A''p''q''-F''=0\ , \end{array}\right\} \quad (3)$$

prenant la somme des produits respectifs des équations de chacune de ces deux colonnes par λ, λ', λ'', et ayant égard aux relations (2), il viendra

$$\lambda(p+q)A+\lambda'(p'+q')A'+\lambda''(p''+q'')A''=0\ ,$$

$$\lambda pqA+\lambda'p'q'A'+\lambda''p''q''A''=0\ ,$$

joignant à ces équations l'équation

$$\lambda A+\lambda'A'+\lambda''A''=0\ ,$$

et éliminant entre elles $\frac{\lambda'A'}{\lambda A}$ et $\frac{\lambda''A''}{\lambda A}$ comme deux inconnues, on obtiendra cette équation

$$(p+q)(p'q'-p''q'')+(p'+q')(p''q''-pq)+(p''+q'')(pq-p'q')=0\ . \quad (4)$$

Or, si dans l'équation

$$\frac{(p-p')(p-q')}{(p-p'')(p-q'')}=\frac{(q-p')(q-q')}{(p-p'')(q-q'')} \qquad (5)$$

on chasse les dénominateurs; en transposant, réduisant et divisant par $p-q$

sur la relation entre quatre points, que nous avons déjà fait connaître sous le nom de *division harmonique*.

Nous devons encore placer ici une conséquence immédiate de notre théorie qui nous sera utile dans la suite. On sait que trois cercles tracés sur un même plan et ayant une corde commune, réelle ou idéale, peuvent être envisagés comme trois lignes du second ordre qui ont les mêmes points d'intersection, dont deux situés à l'infini. On peut donc leur appliquer les résultats précédens; et, en les combinant avec la propriété connue des sécantes menées d'un même point à un même cercle, on aura le théorème suivant qui est d'ailleurs facile à démontrer par les élémens : *Si trois circonférences tracées sur un même plan, ont une corde commune, réelle ou idéale, et que, d'un point quelconque de l'une d'elles, on mène à volonté deux droites qui coupent respectivement les deux*

---

on obtiendra l'équation (4); donc, quand $p-q$ n'est pas nul, l'équation (4) revient à l'équation (5); or, cette dernière exprime que les six points d'intersection sont en *involution*; donc l'autre l'exprime également.

On sait que les conjugués des diamètres qui, dans les trois courbes, sont parallèles à l'axe des x ont pour équations respectives

$$Ax+Cy+D=0\,,$$

$$A'x+C'y+D'=0\,,$$

$$A''x+C''y+D''=0\,.$$

Or, trois des équations (2) prouvent que ces trois droites concourent en un même point; puis donc que l'axe des x est une droite arbitraire sur le plan des trois courbes, il en faut conclure que, *lorsque trois coniques sont les mêmes intersections, si on leur mène, sous une direction arbitraire, trois diamètres parallèles, les conjugués de ces diamètres concourent nécessairement en un même point.* C'est ce que M. Sturm avait déjà établi plus haut, d'une manière un peu différente.

J. D. G.

autres, les deux produits de segmens compris sur l'une et sur l'autre de ces sécantes, entre le point commun d'où elles partent et les circonférences qu'elles coupent, sont toujours entre eux dans un rapport constant. En outre, *si l'on mène une transversale arbitraire, les six points de section, soit réels soit imaginaires, qu'elle déterminera sur les trois circonférences, seront en involution.*

§. VII.

Etant donné sur un plan un quadrilatère simple quelconque, on peut envisager ses deux couples de côtés opposés et ses deux diagonales comme trois lignes du second ordre ayant quatre points communs; conséquemment, si l'on mène sur son plan une droite arbitraire, coupant ces mêmes côtés et diagonales en des points A, B, C, D, E, F; ces six points de section seront entre eux en involution. Cette propriété, qu'il serait d'ailleurs facile de démontrer directement, est une extension de celle qui concerne la division harmonique des diagonales du quadrilatère complet; puisqu'il suffit, pour obtenir cette dernière, de supposer, dans les relations ci-dessus, que la transversale arbitraire passe par les points de concours des côtés opposés de notre quadrilatère simple. Il suit de là que, si l'on déforme ce quadrilatère, de manière que cinq des points de section dont il s'agit demeurent fixes, sur la même droite, le sixième ne variera pas. Ainsi, tout quadrilatère simple dont les côtés et l'une des diagonales passeront respectivement, et dans un ordre assigné, par cinq points A, B, C, D, E, pris à volonté sur une même droite, aura son autre diagonale toujours dirigée vers un autre point fixe F de la même droite, et liée aux premiers par l'ensemble des relations (f). Donc, *cinq points étant donnés, sur une même droite, il sera toujours facile, avec la règle pour tout instrument, d'en trouver un sixième qui soit en involution avec eux;* et l'on voit en outre que ce sixième point sera unique.

Ceci fournit une nouvelle solution du problème connu : *Par un point donné, mener avec la règle une droite qui passe par le point de concours, supposé inaccessible de deux droites données de position ?* Et conséquemment de celui-ci : *Deux parallèles étant tracées sur un plan, mener par un point donné sur ce plan, et en n'employant que la règle, une parallèle à ces droites ?* Ce problème, dont Lambert a déduit la solution des principes de la perspective, a été rappelé à la page 108 du *Traité des propriétés projectives des figures.*

Ayant, sur un plan, un quadrilatère simple avec ses deux diagonales; si l'on fait varier deux côtés adjacens de ce quadrilatère, en les assujettissant à tourner sur deux points fixes pris à volonté sur son plan, et qu'on laisse immobiles les deux autres côtés et la diagonale qui part de leur point de concours; il arrivera que l'autre diagonale, en variant de direction, coupera toujours au même point la droite que déterminent les deux points fixes vers lesquels les deux côtés mobiles sont dirigés sans cesse. Par conséquent, en considérant, dans deux positions quelconques, le triangle variable formé par cette diagonale et ses côtés mobiles, on aura ce théorème : *Si deux triangles ont l'un et l'autre leurs sommets situés sur trois lignes droites qui concourent en un même point, les trois points de concours de leurs côtés placés entre ces mêmes droites, prises deux à deux se trouveront en ligne droite.* Et réciproquement, *si deux triangles sont tellement disposés sur un plan que leurs côtés concourent deux à deux en trois points situés en ligne droite, les trois droites qui joindront leurs sommets correspondans iront concourir en un même point* (*).

(*) On peut consulter, sur diverses autres démonstrations de ces théorèmes le *Traité des propriétés projectives des figures* (pag. 87 — 94), et les mémoires de M. Brianchon.

(*Note de l'auteur.*)

Cette proposition, fort importante dans la géométrie de la règle, a été donnée pour la première fois par Desargues, et reproduite par MM. Servois et Brianchon. Quoique nous ne fassions pas usage ici de la méthode des projections, nous ne pouvons nous refuser à observer que la proposition dont il s'agit devient évidente, par simple intuïtion, quand on met en projection ou en perspective sur un plan un tronc de pyramide triangulaire à bases non parallèles (*). On en déduit ce corollaire qui peut être souvent utile, savoir, que *si deux triangles sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre de telle sorte que les droites qui joignent leurs sommets opposés concourent en un même point, les points de concours des directions de leurs côtés opposés appartiendront à une même droite ; et réciproquement.*

Au moyen du même théorème, *étant donné sur un plan un quadrilatère simple on pourra construire, avec la règle seulement, la droite dont la direction passe par les deux points de concours de ses côtés opposés, en supposant ces deux points inaccessibles, et déterminer en même temps le point où cette droite est coupée par une autre droite donnée à volonté sur le même plan* (**).

On peut encore, en n'employant que la règle, *construire le point de concours de deux droites, déterminées chacune par deux points et que des obstacles quelconques, situés entre ces points ou au-delà, empêcheraient de tracer* (***).

(*) C'est ainsi que nous l'avons nous-même démontrée dans notre XVI.e volume (pag. 219) où l'on peut voir les applications que nous en avons déduites.

J. D. G.

(**) Nous avons indiqué cette application à l'endroit cité.

J. D. G.

(***) C'est un des deux problèmes résolus par M. Vallès (tom. XVI, pag. 385).

J. D. G.

§. VIII.

Lorsqu'un quadrilatère est inscrit à une ligne du second ordre quelconque, on peut envisager ses deux couples de côtés opposés comme deux lignes du second ordre ayant avec la proposée quatre points communs. On peut donc appliquer ici la théorie du §. VI; c'est-à-dire que *si, sur le plan d'un quadrilatère inscrit à une ligne du second ordre, on mène une droite arbitraire, ses points d'intersection avec deux côtés opposés du quadrilatère, ses points d'intersection avec les deux autres et enfin ses points d'intersection avec la courbe seront six points en involution.* C'est en cela que consiste le théorème de Desargues mentionné au §. VI. M. Brianchon en a déduit un grand nombre de conséquences particulières, sur lesquelles il serait superflu de revenir.

Supposons que l'on rende fixes les points où la transversale est coupée par trois des côtés du quadrilatère inscrit, et qu'on fasse ensuite varier ce quadrilatère de telle sorte que, sans cesser d'être inscrit, il ait toujours trois de ses côtés dirigés vers les mêmes points, le quatrième côté variera aussi; mais comme, des six points en involution, cinq demeureront invariables, savoir, les trois points dont il s'agit et les deux points d'intersection de la transversale avec la courbe, le sixième aussi devra être invariable. Donc, *si l'on inscrit à une ligne du second ordre une suite de quadrilatères tels que trois de leurs côtés passent constamment, et dans un ordre assigné, par trois points fixes, pris à volonté sur une droite arbitraire, leurs quatrièmes côtés concourront constamment en un quatrième point fixe de la même droite.*

Soit ABCDEF un hexagone quelconque inscrit à une ligne du second ordre; désignons par G, H, K, respectivement, les points de concours des côtés opposés AB et DE, BC et EF, CD et FA; menons par les deux sommets opposés A et D une diagonale coupant GH en L; les deux quadrilatères ABCD et DEFA auront trois de leurs côtés qui passeront par les trois mêmes points G, H, L d'une droite; donc le point k de concours des côtés restans devra aussi se trouver sur cette droite; c'est-à-dire, que, *dans tout hexagone inscrit à une ligne du second ordre, les points de concours des côtés respectivement opposés sont situés sur une même ligne droite* (*).

Cette belle et importante propriété de l'hexagone inscrit a été énoncée pour la première fois par Pascal, qui la désignait sous

---

(*) La démonstration que je viens de donner de ce beau théorème, démonstration que je crois nouvelle, me paraît se recommander par sa simplicité. La théorie ordinaire des transversales en fournit une autre qui peut trouver ici sa place.

Soit formé un triangle par les prolongemens des côtés AB, CD, EF de l'hexagone, et soient respectivement L, M, N les sommets de ce triangle opposés à ces côtés. En lui appliquant un théorème connu, on aura d'abord

$$MA.MB.NC.ND.LE.LF=ME.MF.NA.NB.LC.LD.$$

Considérant ensuite tour à tour BC, DE, FA, comme des transversales coupant le triangle LMN, nous aurons

$$LC.MH.NB=LH.MB.NC\ ,$$

$$ME.NG.LD=MG.ND.LE\ ,$$

$$NA.LK.MF=NK.LF.MA\ ;$$

multipliant ces quatre équations membre à membre, et réduisant, il viendra

$$MH.NG.LK=LH.MG.NK\ ;$$

ce qui prouve que les trois points G, H, K appartiennent à une même droite.

le nom d'*hexagrame mystique*, et en avait fait la base d'un traité de sections coniques qui n'a pas été publié. Quoiqu'elle paraisse n'avoir pas été ignorée de Desargues, la découverte en est généralement attribuée à Pascal. Depuis lors, plusieurs géomètres l'ont reproduite sous différentes formes, et en ont tiré beaucoup de conséquences utiles ou curieuses. M. Brianchon a établi sur le même principe, d'une manière purement géométrique, toute la théorie des pôles et polaires des lignes et surfaces du second ordre (*Journal de l'école polytechnique* XIII.e cahier). Il a fait connaître, en même temps, un théorème non moins intéressant que celui de Pascal; théorème que nous allons démontrer d'après lui, à l'aide de la théorie des pôles et polaires.

Etant donné un hexagone circonscrit à une ligne du second ordre, si nous joignons les points de contact de ses côtés consécutifs par des droites, nous formerons un hexagone inscrit, dont chaque côté aura pour pôle un sommet de l'hexagone circonscrit; et, comme (§. II) la droite qui joint les pôles de deux autres a son pôle au point de concours de celles-ci, il s'ensuit que les diagonales qui, dans l'hexagone circonscrit, joindront deux sommets opposés, auront pour pôles les points de concours des directions des côtés opposés de l'inscrit; puis donc que ces trois points appartiennent à une même ligne droite, les trois diagonales dont il s'agit devront concourir en un même point, pôle de cette droite; c'est-à dire que, *dans tout hexagone circonscrit à une ligne du second ordre, les diagonales qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point* (*).

(*) On trouve dans le présent recueil, tom. IV, pag. 78 et 381, tom. XIV, pag. 29, tom. XV, pag. 387 et tom. XVI, pag. 322, diverses démonstrations de ces deux théorèmes.

J. D. G.

Les propositions inverses des deux précédentes s'en déduisent si facilement qu'il nous suffira de les énoncer, 1.° *lorsque cinq des sommets d'un hexagone appartiennent à une ligne du second ordre, et que d'ailleurs les points de concours des côtés opposés de cet hexagone appartiennent tous trois à une même droite, son sixième sommet est aussi sur la courbe;* 2.° *lorsque cinq des côtés d'un hexagone sont tangens à une ligne du second ordre, et que d'ailleurs les diagonales qui joignent les sommets opposés de cet hexagone se coupent au même point, son sixième côté est aussi tangent à la courbe.*

Il suit de là qu'*il n'existe qu'une seule conique qui puisse passer par cinq points ou toucher cinq droites données sur un plan.* Les mêmes propriétés fournissent le moyen, bien connu, de *construire, avec la règle seulement, une conique dont on a cinq points ou cinq tangentes.* Elles s'étendent au cas où l'on suppose qu'un côté, ou plusieurs côtés non consécutifs, de l'hexagone inscrit deviennent nuls et tangens à la courbe, et à celui où un angle, ou plusieurs angles non consécutifs, de l'hexagone circonscrit deviennent égaux à deux angles droits et ont leur sommet sur la courbe. On retrouve ainsi les propriétés des quadrilatères inscrits et circonscrits démontrés précédemment (§. V).

En particulier, si l'on suppose que, dans l'hexagone inscrit, trois côtés non consécutifs soient d'une longueur nulle, ou que, dans l'hexagone circonscrit, trois angles non consécutifs soient égaux à deux angles droits, on obtient ce théorème : *Si deux triangles sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même ligne du second ordre; de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit;* 1.° *les points de concours des côtés respectivement opposés, dans ces deux triangles appartiendront tous trois à une même droite;* 2.° *les droites qui joindront leurs sommets opposés concourront toutes trois en un même point.*

Il y aurait beaucoup d'autres choses à dire sur le sujet qui nous occupe ; mais ces détails intéressans se trouvent pour la plupart dans le *Traité des propriétés projectives des figures* (pag. 109 — 120 et 290 — 304), auquel nous renvoyons. Nous nous bornerons à extraire les énoncés suivans de deux théorèmes qui dérivent des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits :

1.° *Si tous les côtés d'un polygone variable, tracé sur un plan, sont assujettis à tourner sur autant de points fixes, tandis que ses sommets, un seul excepté, parcourent respectivement des droites données de position ; le sommet libre décrira, dans son mouvement, une ligne du second ordre passant par les points fixes sur lesquels tournent ses deux côtés.*

2.° *Si tous les sommets d'un polygone variable, tracé sur un plan, sont assujettis à se mouvoir sur autant de droites fixes, tandis que ses côtés, un seul excepté, tournent sur des points fixes ; le côté libre sera constamment, dans son mouvement, tangent à une ligne du second ordre touchant les deux droites fixes parcourues par ses extrémités.*

§. IX.

Soient ABC, DEF, deux triangles inscrits arbitrairement à une même ligne du second ordre ; soient respectivement H, I, K les points de concours de AB et DE, AC et DF, BC et EF ; en menant les cordes BF et CE, concourant en G, on formera un hexagone inscrit BACEDF, dans lequel les points de concours G, H, I des côtés opposés seront en ligne droite ; de sorte que les trois droites BF, EC, HI concourent en un même point ; or, on peut considérer ces droites comme joignant les sommets opposés de l'hexagone BCIFEH, dont les côtés sont ceux des deux triangles proposés ; donc cet hexagone est circonscriptible à une ligne du second ordre ; ainsi *deux triangles inscrits à une même ligne du second ordre sont par là même circonscriptibles à la fois à une autre ligne du même ordre.*

Réciproquement, *deux triangles circonscrits à une même ligne du second ordre sont par là même inscriptibles à une autre ligne du même ordre.* En effet, si deux triangles ABC, DEF, sont circonscrits à une même ligne du second ordre; en désignant respectivement par H et I les points de concours de AB et DE, AC et DF, l'hexagone BCIFEH sera circonscrit à la courbe; d'où il suit que les droites BF, CE et HI concourront en un même point G; les trois points G, H, I seront donc en ligne droite; d'où il suit que l'hexagone BACEDF, dont les sommets sont précisément ceux de nos deux triangles sera inscriptible à une ligne du second ordre.

De ces théorèmes, dus à M. Brianchon, il résulte que, *si un seul triangle est inscrit à une ligne du second ordre et circonscrit à un autre, une infinité d'autres triangles pourront être, à la fois comme celui-là, inscrits à la première courbe et circonscrits à la seconde.*

En considérant toujours les mêmes triangles inscrits ABC, DEF, joignons leurs sommets correspondans par des droites, et soient L, M, N, respectivement, les intersections de AD et BE, CF et AD, BE et CF. On voit d'abord que ces trois points seront situés sur les polaires respectives de H, I, K. Ensuite si l'on mène KN, cette droite sera la polaire du point G de la droite HI; d'où il suit que KN contiendra le pôle de HI, et que, par conséquent le point N est sur la droite qui joint le point K au pôle de HI. Pareillement, les points L, M, sont situés sur les droites qui joignent les points H, I, avec les pôles des droites IK et HK, respectivement, d'où résulte ce théorème : *Lorsque deux triangles sont inscrits à une même ligne du second ordre, le triangle formé par les trois droites qui joignent les sommets correspondans de ces deux là est tel que chacun de ses sommets se trouve à l'intersection de la polaire du point de concours de deux côtés correspondans des deux premiers avec la droite menée de ce point de concours au pôle de la droite qui joint les deux autres.*

Deux triangles inscrits à une même ligne du second ordre ordre pouvant prendre une infinité de formes et de situations différentes, il s'ensuit que les points de concours de leurs côtés correspondans pourront aussi prendre toutes les situations qu'on voudra. On pourra donc supposer ces trois points donnés à volonté sur le plan de la courbe; et, pour chaque situation qu'on leur assignera, il existera, en général, deux triangles inscrits dont les côtés correspondans se couperont en ces points; triangles qu'il sera facile de construire d'après ce qui précède. On obtiendra donc ainsi une construction très-simple et purement linéaire du problème suivant: *Inscrire à une ligne donnée du second ordre un triangle dont les côtés passent par trois points donnés*? La solution qui résulte de ce qui précède, et à laquelle M. Gergonne a été conduit par l'analyse (*Annales*, tom. VII, pag. 325), peut être énoncée comme il suit :

Formez un triangle dont les sommets soient les pôles des droites qui joignent les points donnés, pris deux à deux; joignez chacun des sommets de ce triangle à celui des trois points donnés qui n'a pas concouru à sa détermination par une droite; les droites ainsi menées de trois sommets détermineront trois points sur les côtés respectivement opposés. Formant alors un triangle dont ces trois nouveaux points soient les sommets, les côtés de ce triangle, par leurs intersections avec la courbe, détermineront les six sommets des deux triangles cherchés.

Si l'on circonscrit à la même courbe deux triangles dont les points de contact soient les sommets des deux triangles inscrits, il est aisé de voir que ces triangles seront inscrits au triangle dont les sommets sont les pôles des trois points donnés, pris deux à deux; et de là résulte le moyen de ramener, au problème qui vient d'être résolu, cet autre problème : *A une ligne donnée du second ordre circonscrire un triangle dont les sommets soient sur trois droites données*? On peut aussi attaquer directement ce problème, à l'aide de ce que nous avons dit ci-dessus sur les propriétés du système de deux triangles circonscrits à une même ligne du second ordre. De l'une ou de l'autre manière on parvient à la construction linéaire que voici, et qui a aussi été indiquée par M. Gergonne, en l'endroit cité :

Formez un triangle dont les côtés soient les polaires des intersections deux à deux des trois droites données ; marquez le point de concours de chaque côté de ce triangle avec celle des droites données qui n'aura pas concouru à sa détermination, joignez les points ainsi déterminés avec les sommets respectivement opposés du triangle des polaires par trois droites, ces trois droites formeront un nouveau triangle tel que les six tangentes menées à la courbe par ses trois sommets seront les côtés des deux triangles cherchés.

§. X.

En exposant (§. II) la théorie des pôles et polaires, nous avons remarqué que la droite qui joint les pôles de deux autres droites, tracées sur le plan d'une ligne du second ordre, a pour pôle le point de concours de celle-ci. Il s'ensuit immédiatement que, *si deux polygones d'un même nombre de côtés, tracés sur le plan d'une ligne du second ordre, sont tels que les sommets de l'un soient les pôles des côtés de l'autre, réciproquement les sommets de ce dernier seront les pôles des côtés du premier ; et de plus le point de concours de deux quelconques des côtés de chacun sera le pôle de la droite qui joindra les sommets pôles de ce deux côtés dans l'autre.* A raison de ces propriétés corrélatives, les deux polygones peuvent être dits *polaires réciproques* l'un de l'autre par rapport à la courbe, qui en sera dit elle-même la *directrice.*

Supposons que les polygones proposés soient deux hexagones et que le premier se trouve inscrit à une ligne quelconque du second ordre, autre que la directrice ; les trois points de concours de ses côtés opposés seront alors situés en ligne droite ; mais ces points sont les pôles des diagonales qui, dans l'autre hexagone, joignent les sommets opposés; donc ces trois diagonales doivent concourir en un même point; donc ce second hexagone est inscriptible à une ligne du second ordre; donc *quand deux hexagones sont polaires réciproques l'un de l'autre, si l'un d'eux est inscriptible à une ligne du second ordre, l'autre est nécessairement circonscriptible à une ligne du même ordre; et réciproquement.*

De là, en faisant varier simultanément le sixième sommet du premier hexagone sur la courbe à laquelle il est inscrit et le sixième côté du second, de telle sorte que ce sommet en reste toujours le pôle, on conclut généralement que, *si un polygone quelconque tracé sur le plan d'une ligne du second ordre, prise pour directrice, est inscriptible à une autre ligne du même ordre, son polaire réciproque sera circonscriptible à une troisième ligne de cet ordre et réciproquement.* Il en résulte encore ce théorème : *Si un point, pris arbitrairement sur le plan d'une ligne du second ordre, se meut en parcourant une deuxième ligne du même ordre, sa polaire enveloppera, dans son mouvement, une troisième ligne de cet ordre ;* et réciproquement, *si une droite, tracée arbitrairement sur le plan d'une ligne du second ordre, se meut en enveloppant une deuxième ligne du même ordre, son pôle parcourra, dans son mouvement, une troisième ligne de cet ordre.*

Il est à remarquer que la relation qui a lieu entre la courbe parcourue par le pôle et celle qu'enveloppe sa polaire est réciproque entre ces deux courbes ; c'est-à-dire que, *si en un point quelconque de la ligne du second ordre parcourue par le pôle, on lui mène une tangente, la polaire de ce point touchera la courbe enveloppée par les polaires en un point qui sera le pôle de cette tangente*; de sorte que chacune des deux courbes dont il s'agit peut être considérée, à la fois, comme le lieu des pôles des tangentes de l'autre et comme l'enveloppe des polaires de tous les points de cette même courbe ; ce qui justifie complètement la dénomination de *polaires réciproques* qu'elles ont reçue. En effet, soient P, P′, deux points pris sur la première courbe, et dont les polaires touchent la seconde en des points T, T′, respectivement. La corde PP′ aura elle-même pour son pôle le point d'intersection des deux polaires. Or ce point approche d'autant plus de se confondre avec les points de contact T, T′, que ceux-ci seront plus rapprochés, et en même temps les pôles P, P′, sur la première courbe, deviennent d'autant plus voisins l'un de l'autre. En faisant donc coïncider T′ avec T, la corde PP′ se changera en une tangente à la première courbe, ayant pour son pôle le point T de la seconde; ce qui démontre la proposition annoncée. On prouverait avec la même facilité qu'*étant donnés un point et sa polaire, par rapport à la première courbe, si l'on construit, relativement à la directrice, la polaire de ce point et le pôle de cette droite, on aura par là même un point et sa polaire, par rapport à l'autre courbe.*

Ce qui précède renferme les principes de la théorie des pôles et polaires réciproques, dont nous ferons souvent usage dans la suite de ces recherches. M. Poncelet, à qui est due cette extension importante de la théorie des pôles, a montré dans son grand traité, et dans un article du tome VIII des *Annales de mathématiques* (pag. 201), comment on peut y parvenir directement, sans recourir aux propriétés des hexagones inscrit et circonscrit. Il a fait voir, par des applications très-variées, toute l'utilité de cette nouvelle théorie, dont il a enrichi la géométrie. En général, il résulte de cette théorie qu'il n'existe aucune relation descriptive d'une figure donnée sur un plan qui n'ait sa correspondante dans une autre figure; en sorte que toute propriété appartenant à une figure composée de points et de lignes, soit droites soit courbes, et tracée sur le plan d'une ligne arbitraire du second ordre, prise pour directrice, entraîne nécessairement l'existence d'une certaine propriété corrélative de la figure qu'on peut concevoir comme polaire réciproque de la proposée. Par exemple, à chaque propriété des polygones inscrits aux lignes du second ordre doit correspondre une propriété analogue des polygones circonscrits de même espèce, et réciproquement. C'est ce qu'on peut vérifier au sujet des quadrilatères et hexagones inscrits et circonscrits, dont il a été question précédemment.

Pour le présent, nous nous proposons, à l'aide de cette théorie, et en partant du théorème général que nous avons établi sur les lignes du second ordre qui ont quatre points communs, lequel est exprimé par les formules (f) du §. VI, de démontrer un théorème analogue à celui-là, relatif à des lignes du même ordre qui ont quatre tangentes communes. Cette application fera le sujet du §. suivant.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de Statique.

Soient A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... A_nB_n des droites représentant en intensité et en direction des forces appliquées respectivement à des points quelconques A_1, A_2, A_3, ... A_n de l'espace. Soient PD_1, PD_2, PD_3, ... PD_n, des droites respectivement parallèles et égales à celles-là, conduites par un même point quelconque P. Soient PG_1, PG_2, PG_3, ... PG_n d'autres droites respectivement perpendiculaires aux plans des triangles PA_1B_1, PA_2B_2, PA_3B_3, ... PA_nB_n, et proportionnelles à leurs surfaces. Soient enfin Δ le centre des moyennes distances des points D_1, D_2, D_3, ... D_n, et Γ le centre des moyennes distances des points G_1, G_2, G_3, ... G_n.

1.° Pour qu'il y ait équilibre entre les forces dont il s'agit, il est nécessaire et il suffit qu'on ait à la fois

$$P\Delta=0\,,\qquad P\Gamma=0\,,$$

ou, en d'autres termes, que le point P soit le centre commun des moyennes distances de D_1, D_2, D_3, ... D_n et de G_1, G_2, G_3, ... G_n.

2.° Lorsqu'aucune de ces conditions n'étant remplie, l'angle $\Delta P\Gamma$ n'est pas droit, les forces dont il s'agit ont deux résultantes, situées dans des plans différens.

3.° Si, au contraire, l'angle $\Delta P\Gamma$ est droit, elles admettent une résultante unique, parallèle à $P\Delta$ et représentée en intensité par $n.P\Delta$.

4.° Si, en particulier, $P\Gamma=0$, cette résultante unique se confond avec $P\Delta$.

5.° Enfin, si l'on a $P\Delta=0$ et $P\Gamma>0$, les forces du système se réduisent à un couple.

Théorèmes de Géométrie.

I. Toutes les surfaces du second ordre qui touchent sept plans donnés ont leurs centres sur un même plan.

II. Toutes les surfaces du second ordre qui touchent huit plans donnés ont leurs centres sur une même droite.

Problèmes de Géométrie.

I. Partager la circonférence d'un cercle en parties ayant entre elles des rapports donnés, soit par des droites partant d'un même point donné, soit par des parallèles à une droite donnée ?

II. Partager l'aire d'un cercle en segmens ayant entre eux des rapports donnés, soit par des droites partant d'un même point donné, soit par des parallèles à une droite donnée ?

III. Partager la surface d'une sphère en zônes ayant entre elles des rapports donnés, soit par des plans passant par une même droite donnée, soit par des plans parallèles à un plan donné ?

IV. Partager le volume d'une sphère en segmens ayant entre eux des rapports donnés, soit par des plans passant par une même droite donnée, soit par des plans parallèles à un plan donné ?

ASTRONOMIE.

Observation faite à Montpellier de l'éclipse de soleil du 29 novembre 1826;

Par M. Gergonne.

La position géographique du lieu d'où j'ai observé l'éclipse est telle qu'il suit :

Longitude orientale . . . . . 1.° 32′. 25″

Latitude boréale . . . . . . 43.° 36′. 39″.

Cette position, conclue de celle de l'ancien observatoire, toujours en ruine, d'après un plan de la ville de Montpellier, dressé par MM. les officiers du 1.er régiment du génie, mérite la plus entière confiance.

D'après les données fournies par la Connaissance des temps, j'avais annoncé, dans l'Annuaire du département, les principales circonstances de l'éclipse ainsi qu'il suit :

Commencement, en temps vrai de Montpellier, à 9^h 57′ du mat.

Plus grande phase d'environ six doigts . . . . à 11.^{h} 11′.

Fin de l'éclipse . . . . à 12.^{h} 35′.

M. le professeur Lenthéric qui, de son côté avait fait le même calcul, avait obtenu les résultats que voici :

Commencement, en temps vrai de Montpellier, à 10.^{h} 9$'$ du mat.
Plus grande phase de 4,7 doigts . . . . . . à 11.^{h} 38$'$
Fin de l'éclipse . . . . à 12.^{h} 27$'$.

Postérieurement, je recommençai en entier mon calcul, que j'avais fait très-rapidement, et j'arrivai aux résultats que voici, que je consignai dans le journal du département.

Commencement, en temps vrai de Montpellier, à 10.^{h} 18$'$ du mat.
Plus grande phase de 5,9 doigts . . . . . . à 11.^{h} 11$'$
Fin de l'éclipse . . . . à 12.^{h} 15$'$.

Le premier contact devait avoir lieu, suivant mon premier calcul, à environ 30°, et suivant le second à environ 29° à droite de l'extrémité supérieure du diamètre vertical du soleil. Le dernier contact devait avoir lieu, suivant mon premier calcul à 57°. et suivant le second à 65°.$\frac{1}{2}$ à gauche du même point.

J'avais, pour mesurer le temps, deux pendules à secondes de Julien Leroy, dans lesquelles j'ai fait remplacer, depuis plusieurs années, les verges métalliques, non compensatrices, par des verges en vieux bois de sapin bouilli dans l'huile. Ces pendules marchent assez bien pour ne pas s'écarter l'une de l'autre, dans le cours d'une semaine, de plus de 4 à 5 secondes. J'avais, en outre, un chronomètre de Bréguet, n.° 4006, donnant les 150.$^{\text{ièmes}}$ de minutes.

Pour m'assurer de la marche des pendules et du chronomètre, j'avais pris les 20, 22, 24 et 28, vers les 3 heures après-midi, plusieurs séries de dix hauteurs absolues du soleil, à l'aide d'un théodolite doublement répétiteur de Gambey, de dix pouces de diamètre, donnant, par ses quatre verniers, armés de loupes, les 20.$^{\text{ièmes}}$ de minutes. J'aurais voulu répéter les mêmes observations pour les jours qui ont suivi immédiatement l'éclipse ; mais l'état du ciel s'y est opposé.

Le jour de l'éclipse, mes devoirs ne me permirent d'être chez moi qu'après dix heures du matin. Je me hâtai de diriger vers le soleil une lunette de Cauchoix de 42 pouces de foyer, garnie de son plus faible grossissement; mais gêné par l'incommodité du local, je fus obligé de déplacer mes appareils, pour éviter l'interposition d'un tuyau de cheminée qui me masquait le soleil; et quand la lunette fut placée d'une manière plus convenable, l'éclipse était déjà commencée. Je jugeai même par sa grandeur qu'elle avait dû commencer vers l'époque indiquée par M. Lenthéric; peut-être même vers celle que j'avais obtenue par mon premier calcul.

N'ayant point à ma disposition de lunette garnie de micromètre je ne pus juger du progrès de l'éclipse qu'au moyen de son image reçue en chambre obscure, à travers une lunette de Dollond, de 28 pouces de foyer, sur un carton où une figure avait été tracée à l'avance. Je jugeai ainsi qu'elle n'avait pas dû être moindre de 6 doigts. Mais je dois dire que j'étais fort gêné par de prétendus amateurs d'astronomie qui m'entouraient et faisaient par leurs mouvemens osciller la lunette.

L'éclipse se prolongeant, les amateurs se retirèrent, et je jugeai dès lors que je pourrais fixer l'instant de la fin de l'éclipse avec beaucoup de précision. De légers nuages qui, pendant quelque temps avaient permis de regarder l'éclipse à la vue simple se retirèrent en effet; le disque solaire parut très-nettement terminé dans la lunette de Cauchoix, et la fin de l'éclipse put être exactement saisie. Le chronomètre marquait alors $12.^h\ 12'.\ 4''.4$. En négligeant les dixièmes de secondes, j'en ai conclu ce qui suit.

Fin de l'éclipse en temps du chronomètre	$12.^h$	$12'.$	$4''$
Retard du chronomètre sur le temps moyen . . .		8.	44.
Fin de l'éclipse en temps moyen de Montpellier . .	$12.^h$	$20'$	$48''$
Retard du temps moyen sur le temps vrai . . .		11	32
Fin de l'éclipse en temps vrai de Montpellier	$12.^h$	$32'$	$20''$

Je ne pense pas que ce résultat puisse être fautif de plus d'une seconde.

Si jamais l'administration locale relève l'observatoire de ses ruines ou m'en procure un nouveau autre part, je tâcherai d'y faire des observations plus utiles à la science.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données ;

Par M. N. H. Abel. (*Norvégien.*)

Lorsqu'une quantité satisfait, à la fois, à deux équations algébriques données, ces deux équations ont un facteur commun du premier degré. En supposant qu'elles n'ont pas d'autre facteur commun que celui-là, on peut toujours, comme l'on sait, exprimer rationnellement l'inconnue en fonction des coefficiens des deux équations. On y parvient d'ordinaire à l'aide de l'élimination ; mais je vais faire voir, dans ce qui va suivre, que, dans tous les cas, on peut calculer immédiatement la valeur de l'inconnue, ou, plus généralement encore, la valeur d'une fonction rationnelle quelconque de cette inconnue.

Soient

$$\varphi(y)=p_0+p_1y+p_2y^2+\dots\dots+p_{m-1}y^{m-1}+y^m=0\ , \qquad (1)$$

$$\psi(y)=q_0+q_1y+q_2y^2+\dots\dots+q_{m-1}y^{m-1}+y^n=0\ , \qquad (2)$$

les deux équations proposées, la première du $m.^{ième}$ et l'autre du $n.^{ième}$ degré.

Désignons les n racines de (2) par y, y_1, y_2, ... y_{n-1} en les substituant tour-à-tour dans (1), on aura les n fonctions

$$\varphi(y)\ ,\quad \varphi(y_1)\ ,\quad \varphi(y_2)\ ,\ .....\ \varphi(y_{n-1}). \qquad (3)$$

Soient

$$\left.\begin{array}{l}
R=\varphi(y_1).\varphi(y_2).\varphi(y_3)\ ......\ \varphi(y_{n-2}).\varphi(y_{n-1})\ ,\\
R_1=\varphi(y).\varphi(y_2).\varphi(y_3)\ ......\ \varphi(y_{n-2}).\varphi(y_{n-1})\ ,\\
R_2=\varphi(y).\varphi(y_2).\varphi(y_3)\ ......\ \varphi(y_{n-2}).\varphi(y_{n-1})\ ,\\
.\ ,\\
R_{n-2}=\varphi(y).\varphi(y_1).\varphi(y_2)\ .....\ \varphi(y_{n-3}).\varphi(y_{n-1})\ ,\\
R_{n-1}=\varphi(y)\,\varphi(y_1).\varphi(y_2)\ ......\ \varphi(y_{n-3}).\varphi(y_{n-2})\ .
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Cela posé, soit $\mathrm{f}(y)$ la fonction rationnelle de y dont on veut déterminer la valeur, et désignons par $\theta(y)$ une autre fonction rationnelle quelconque de y. On aura l'équation identique

$$\mathrm{f}(y).\theta(y).R=\mathrm{f}(y).\theta(y).R. \qquad (5)$$

Maintenant, ayant $\varphi(y)=0$, on aura

$$R_1=0\ ,\qquad R_2=0\ ,\qquad R_3=0\ ,\ ....\ R_{n-1}=0\ ,$$

et, par suite,

$$tR+t_1R_1+t_2R_2+t_3R_3+\ ....\ +t_{n-2}R_{n-2}+t_{n-1}R_{n-1}=tR\ ;$$

où t, t_1, t_2, ... t_{n-2}, t_{n-1} sont des quantités quelconques.

En faisant donc d'abord

$$t=\theta(y)\ ,\quad t_1=\theta(y_1)\ ,\quad t_2=\theta(y_2)\ ,\ \ldots\ldots\ t_{n-1}=\theta(y_{n-1})\ ,$$

et ensuite

$$t=\mathrm{f}(y).\theta(y)\ ,\ t_1=\mathrm{f}(y_1).\theta(y_1)\ ,\ t_2=\mathrm{f}(y_2).\theta(y_2),\ \ldots\ t_{n-1}=\mathrm{f}(y_{n-1}).\theta(y_{n-1})$$

on obtiendra les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}\theta(y)R=\theta(y)R+\theta(y_1)R_1+\theta(y_2)R_2+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ +\theta(y_{n-1}).R_{n-1}\ ,\\ \mathrm{f}(y).\theta(y).R=\mathrm{f}(y_1).\theta(y_1).R_1+\mathrm{f}(y_2).\theta(y_2).R_2+\ldots\ \mathrm{f}(y_{n-1}).\theta(y_{n-1}).R_{n-1}\ ;\end{array}\right\}(6)$$

par là, l'équation (5) deviendra

$$\mathrm{f}(y)\{\theta(y)R+\theta(y_1)R_1+\theta(y_2)R_2+\ldots\ldots+\theta(y_{n-1})R_{n-1}\}$$
$$=\theta(y).\mathrm{f}(y)R+\theta(y_1).\mathrm{f}(y_1)R_1+\theta(y_2).\mathrm{f}(y_2)R_2+\ldots\ldots+\theta(y_{n-1}).\mathrm{f}(y_{n-1})R_{n-1}\ ;$$

équation qui, en posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l}\theta(y)R+\theta(y_1)R_1+\theta(y_2)R_2+\ldots\ldots+\theta(y_{n-1})R_{n-1}=\Sigma\theta(y)R\ ,\\ \mathrm{f}(y)\theta(y)R+\mathrm{f}(y_1)\theta(y_1)R_1+\mathrm{f}(y_2)\theta(y_2)R_2+\ldots+\mathrm{f}(y_{n-1})\theta(y_{n-1})R_{n-1}=\Sigma\mathrm{f}(y)\theta(y)R,\end{array}\right\}(7)$$

deviendra

$$\mathrm{f}(y).\Sigma\theta(y)R=\Sigma\mathrm{f}(y).\theta(y).R\ ,$$

et de là

$$\mathrm{f}(y)=\frac{\Sigma\mathrm{f}(y)\theta(y)R}{\Sigma\theta(y)R}\ . \qquad (8)$$

Maintenant, il est clair que le numératenr et le dénominateur de cette valeur de $\mathrm{f}(y)$ sont des fonctions rationnelles et symétriques des racines $y, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{n-1}$; on peut donc, en vertu des formules connues, les exprimer rationnellement par les coefficiens des équations (1) et (2). Il en est donc de même de la fonction $f(y)$

La fonction rationnelle $\theta(y)$ étant arbitraire, on peut en disposer pour simplifier l'expression de $f(y)$. Pour cela, soit

$$f(y) = \frac{F(y)}{\chi(y)},$$

où $F(y)$ et $\chi(y)$ sont deux fonctions entières ; on aura, en substituant,

$$\frac{F(y)}{\chi(y)} = \frac{\Sigma \frac{F(y)\theta(y)R}{\chi(y)}}{\Sigma\theta(y)R};$$

Si donc on suppose $\theta(y) = \chi(y)$, on aura

$$\frac{F(y)}{\chi(y)} = \frac{\Sigma F(y)R}{\Sigma\chi(y)R}; \qquad (9)$$

et alors le numérateur et le dénominateur de cette fonction seront des fonctions entières des coefficiens des équations proposées.

Si $\chi(y) = 1$, on aura, pour une fonction entière quelconque $F(y)$,

$$F(y) = \frac{\Sigma F(y)R}{\Sigma R}; \qquad (10)$$

ou bien

$$F(y) = \frac{F(y)R + F(y_1)R_1 + F(y_2)R_2 + \ldots\ldots + F(y_{n-1})R_{n-1}}{R + R_1 + R_2 + \ldots\ldots + R_{n-1}}.$$

Mais on peut encore simplifier beaucoup l'expression de $F(y)$ de la manière suivante :

Désignons par $\psi'(y)$ la dérivée de $\psi(y)$, par rapport à y, et faisons

$$\theta(y) = \frac{1}{\psi'(y)}\ ;$$

l'équation (8) donnera

$$F(y) = \frac{\Sigma \frac{F(y)R}{\psi'(y)}}{\Sigma \frac{R}{\psi'(y)}}\ . \qquad (11)$$

Cela posé, on peut d'abord exprimer R par une fonction entière de y. En effet, si l'on fait

$$(z-y_1)(z-y_2)\ldots\ldots(z-y_{n-1}) = z^{n-1} + v_{n-2}z^{n-1} + v_{n-3}z^{n-3} + \ldots\ldots + v_0 = 0\ ;$$

on peut transformer R, qui est une fonction entière et symétrique de y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1}, en fonction entière des coefficiens v_0, v_1, v_2, ...v_{n-2}.

Maintenant, on a

$$(v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \ldots\ldots + v_{n-2} z^{n-2} + z^{n-1})(z-y) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots\ldots + q_{n-1} z^{n-1} + z^n$$
$$= z^n + (v_{n-2} - y) z^{n-1} + (v_{n-3} - y v_{n-2} + y^2) z^{n-2} + (v_{n-4} - y v_{n-3} + y^2 v_{n-2} - y^3) z^{n-3} + \ldots\ldots$$

donc

$$v_{n-2} = q_{n-1} + y\ ,$$

$$v_{u-3} = q_{n-2} + y v_{n-2} - y^2\ ,$$

$$v_{n-4} = q_{n-3} + y v_{u-3} - y^2 v_{n-2} + y^3\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où il suit que v_0, v_1, v_2, ... v_{n-2} sont des fonctions entières de y; la fonction R l'est donc aussi; elle est donc de la forme

$$R=\rho_0+\rho_1 y+\rho_2 y^2+\rho_3+\dots+\rho_\mu y^\mu \;; \qquad (12)$$

où il est évident que ρ_0, ρ_1, ρ_2, ... ρ_μ seront des fonctions *entières* des coefficiens des équations (1) et (2).

La fonction R sera d'un degré supérieur à $n-1$; mais, il est clair qu'on peut, en vertu de l'équation (2), en éliminer toutes les puissances de y supérieures à la $(n-1)^{ième}$, et de cette manière mettre R sous la forme

$$R=\rho_0+\rho_1 y+\rho_2 y^2+\rho_3 y^3+\dots\dots+\rho_{n-1} y^{n-1} \;,$$

où ρ_0, ρ_1, ρ_2, ... ρ_{n-1} sont toujours des fonctions entières de p_0, p_1, p_2 . ... p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, ... q_{n-1}.

En multipliant R par la fonction entière $F(y)$ on aura la fonction $F(y)R$, qui est de même une fonction entière de y. On peut donc la mettre sous la même forme que R, c'est-à-dire, qu'on peut poser

$$F(y).R=t_0+t_1 y+t_2 y^2+t_3 y^3+\dots\dots+t_{n-1} y^{n-1} \;; \qquad (13)$$

t_0, t_1, t_2, ... t_{n-1} étant encore des fonctions entières de p_0, p_1, p_2, ... p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, ... q_{n-1}.

Dès que R sera déterminé par l'équation (12), il est clair qu'on aura

$$R_1=\rho_0+\rho_1 y_1+\rho_2 y_1^2+\rho_3 y_1^3+\dots\dots\dots\dots+\rho_{n-1} y_1^{n-1} \;,$$

$$R_2=\rho_0+\rho_1 y_2+\rho_2 y_2^2+\rho_3 y_2^3+\dots\dots\dots\dots+\rho_{n-1} y_2^{n-1} \;,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R_{n-1}=\rho_0+\rho_1 y_{n-1}+\rho_2 y^2_{n-1}+\rho_3 y^3_{n-1}+\dots+\rho_{n-1} y_{n-1}^{n-1} \;.$$

On aura de même

$$F(y_1)R_1 = t_0 + t_1 y_1 + t_2 y_1^2 + t_3 y_1^3 + \ldots\ldots + t_{n-1} y_1^{n-1} \;,$$

$$F(y_2)R_2 = t_0 + t_1 y_2 + t_2 y_2^2 + t_3 y_2^3 + \ldots\ldots + t_{n-1} y^{n-1} \;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$F(y_{n-1})R_{n-1} = t_0 + t_1 y_{n-1} + t_2 y_{n-1}^2 + t_3 y_{n-1}^3 + \ldots + t_{n-1} y_{n-1}^{n-1} .$$

Maintenant, je dis qu'on aura

$$F(y) = \frac{t_{n-1}}{\rho_{n-1}} \;:$$

En effet, on a d'abord

$$\Sigma \frac{R}{\psi'(y)} = \frac{R}{\psi'(y)} + \frac{R_1}{\psi'(y_1)} + \frac{R_2}{\psi'(y_2)} + \ldots\ldots + \frac{R_{n-1}}{\psi'(y_{n-1})} \;;$$

donc, en substituant les valeurs de R, R_1, R_2, ... R_{n-1},

$$\Sigma \frac{R}{\psi'(y)} = \rho_0 \left\{ \frac{1}{\psi'(y)} + \frac{1}{\psi'(y_1)} + \frac{1}{\psi'(y_2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{\psi'(y_{n-1})} \right\}$$

$$+ \rho_1 \left\{ \frac{y}{\psi'(y)} + \frac{y_1}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2}{\psi'(y_2)} + \ldots\ldots + \frac{y_{n-1}}{\psi'(y_{n-1})} \right\}$$

$$+ \rho_2 \left\{ \frac{y^2}{\psi'(y)} + \frac{y_1^2}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2^2}{\psi'(y_2)} + \ldots\ldots + \frac{y^2_{n-1}}{\psi'(y_{u-1})} \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \rho_{n-1} \left\{ \frac{y^{n-1}}{\psi'(y)} + \frac{y_1^{n-1}}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2^{n-1}}{\psi'(y_2)} + \ldots + \frac{y^{n-1}_{n-1}}{\psi'(y_{n-2})} \right\} .$$

Or, y, y_1, y_2, ... y_{n-1}, étant les racines de l'équation (2) on a

$$\psi'(y)=(y-y_1)(y-{}_2y)(y-y_3)\ldots\ldots(y-y_{n-1})\ ,$$

$$\psi'(y_1)=(y_1-y)(y_1-y_2)(y_1-y_3)\ldots\ldots(y_1-y_{n-1})\ ;$$

$$\psi'(y_2)=(y_2-y)(y_2-y_1)(y_2-y_3)\ldots\ldots(y_2-y_{n-1})\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

$$\psi'(y_{n-1})=(y_{n-1}-y)(y_{n-1}-y_1)(y_{n-1}-y_2)\ldots\ldots(y_{n-1}-y_{n-2})\ ;$$

donc, d'après une formule connue, les coefficiens de ρ_0, ρ_1, ρ_2, ... ρ_{n-1}, dans l'expression de $\Sigma\,\frac{R}{\psi'(y)}$, s'évanouiront tous, excepté celui de μ_{n-1}, qui se réduira à l'unité ; on aura donc

$$\Sigma\,\frac{R}{\psi'(y)}=\rho_{n-1}\ ;$$

On prouvera exactement de la même manière que

$$\Sigma\,\frac{R.F(y)}{\psi'(y)}=t_{n-1}\ ;$$

donc, en vertu de l'équation (11),

$$F(y)=\frac{t_{n-1}}{\rho_{n-1}}\ ;$$

ou bien, en écrivant t et ρ, au lieu de t_{n-1} et ρ_{n-1},

$$F(y)=\frac{t}{\rho}\ . \qquad (14)$$

Soit maintenant $F'(y)$ une autre fonction entière de y ; en supposant

$$F'(y)R = t'y^{n-1} + t'_{n-2}y^{n-2} + t'_{n-3}y^{n-3} + \ldots\ldots + t'_1 y + t'_0 , \qquad (15)$$

t', t'_{n-1}, t'_{n-2}, ... t'_0 étant des fonctions entières des quantités p_0, p_1, p_2, ... p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, ... q_{n-1}, on aura

$$F'(y) = \frac{t'}{\rho} ; \qquad (16)$$

d'où, en comparant (14) à (16)

$$\frac{F(y)}{F'(y)} = \frac{t}{t'} . \qquad (17)$$

Ainsi, on aura la valeur d'une fonction rationnelle quelconque $\frac{F(y)}{F'(y)}$, par le développement des deux fonctions

$$F(y)R \quad \text{et} \quad F'(y)R .$$

La formule (17) peut facilement être traduite en théorème.

Le cas le plus simple est celui où l'on cherche uniquement la valeur de y. Alors on a

$$y = \frac{t}{\rho}$$

où

$$R = \rho y^{n-1} + \rho' y_{n-2} + \ldots. \qquad \text{et} \qquad Ry = ty^{n-1} + t'y^{n-2} + \ldots$$

On peut exprimer t en ρ et ρ'. En effet, en substituant la valeur de R, il viendra

$$Ry = \rho y^n + \rho' y^{n-1} + \ldots\ldots ;$$

or, en vertu de l'équation (2), on a

$$y^n = -q_{n-1}y^{n-1} - q_{n-2}y^{n-2} - \ldots\ldots;$$

donc, en substituant

$$Ry = (\rho' - \rho q_{n-1})y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$$

Dans le développement de Ry, le coefficient de y^{n-1} est donc

$$\rho' - \rho q_{n-1} = t\ ;$$

donc

$$y = \frac{\rho' - \rho q_{n-1}}{\rho}$$

ou bien

$$y = -q_{n-1} + \frac{\rho'}{\rho}\ . \qquad (18)$$

De cette manière, on n'a besoin de connaître que les coefficiens de y^{n-1} et y^{n-2} dans le développement de

$$R = \rho y^{n-1} + \rho' y^{n-2} + \ldots\ldots = \varphi(y_1)\,\varphi(y_2)\cdot\varphi(y_3)\ldots\ldots\varphi(y_{n-1})\ .$$

Paris, le 2 novembre 1826.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres ;

Par M. Gergonne.

> En observant ce que les résultats particuliers avaient de commun entre eux, on est successivement parvenu à des résultats fort étendus, et les sciences mathématiques sont à la fois devenues plus générales et plus simples.
>
> (Laplace ; *Leçons à l'Ecole normale*).

Nous observions, il n'y a pas long-temps (*), qu'au point où les sciences mathématiques sont aujourd'hui parvenues, et encombrés comme nous le sommes de théorèmes, dont la mémoire la plus intrépide ne saurait même se flatter de conserver les énoncés, on servait peut-être moins utilement la science en cherchant des vérités nouvelles qu'en s'efforçant de ramener à un petit nombre de chefs principaux les vérités déjà découvertes. Une science d'ailleurs se recommande peut-être moins encore par la multitude des pro-

(*) Voy. la pag. 314 du précédent volume.

positions dont se compose son domaine que par la manière dont ces propositions sont liées et enchaînées les unes aux autres. Or, il est dans chaque science certains points de vue élevés où il suffit de se placer pour embrasser d'un même coup-d'œil un grand nombre de vérités que, dans une position moins favorable, on aurait pu croire indépendantes les unes des autres, et que l'on reconnaît dès lors dériver toutes d'un principe commun, souvent même incomparablement plus facile à établir que les vérités particulières dont il est l'expression abrégée.

C'est dans la vue de confirmer ces considérations par quelques exemples assez remarquables que nous nous proposons ici d'établir, sur les points communs et tangentes communes aux courbes planes, situées dans un même plan, sur les lignes communes et points communs aux surfaces courbes, sur les surfaces développables qui leur sont circonscrites et sur leurs plans tangens communs, un petit nombre de théorèmes généraux, offrant une infinité de corollaires, parmi lesquels nous nous bornerons à signaler les plus simples ou les plus dignes de remarque. Plusieurs de ces corollaires sont connus depuis long-temps ; mais nous ne pensons pas qu'on en rencontre autre part des démonstrations aussi simples et aussi briè-ves, et qui exigent aussi peu de contention d'esprit, que celles qu'on trouvera ici des théorèmes généraux qui les renferment tous.

Comme il ne s'agira aucunement ici des relations métriques, tous nos théorèmes seront doubles. Pour en faire mieux saisir la correspondance, nous placerons dans deux colonnes, en regard les unes des autres, les théorèmes qui devront se correspondre, ainsi que nous l'avons déjà pratiqué plusieurs fois.

SECTION PREMIÈRE.

Propriétés des courbes algébriques, situées dans un même plan.

Soit une figure plane, composée de tant de points et de lignes droites et courbes qu'on voudra. Concevons qu'ayant tracé arbitrairement, sur le plan de cette figure, une ligne quelconque du second ordre, on construise, sur le même plan, une autre figure dont tous les points et toutes les droites soient les pôles et polaires de toutes les droites et de tous les points de la première, par rapport à cette ligne du second ordre, considérée comme *directrice*; les deux figures ainsi tracées seront dites *polaires réciproques* l'une de l'autre, attendu que la première pourra être déduite de la seconde comme celle-ci est supposée l'être de l'autre. Or, en conséquence des propriétés, bien connues aujourd'hui, des pôles et polaires, voici les relations principales qui se trouveront exister entre ces deux figures.

1.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de points situés en ligne droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de droites concourant en un même point.

2.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de points situés sur une même courbe, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de tangentes à une courbe de même ordre.

3.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de points d'une même courbe, situés sur une même droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de tangentes à une courbe de même ordre, issues d'un même point.

4.° Enfin, autant il y aura

1.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de droites concourant en un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés en ligne droite.

2.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de tangentes à une même courbe, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une courbe de même ordre.

3.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de tangentes à une même courbe, issues d'un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points d'une courbe de même ordre, situés sur une même droite.

4.° Enfin, autant il y aura

dans l'une des figures de systèmes de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de tangentes communes à deux ou à un plus grand nombre de courbes de même ordre.

dans l'une des figures de systèmes de tangentes communes à deux ou à un plus grand nombre de courbes, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes de même ordre.

Il importe beaucoup de se rendre toutes ces diverses relations bien familières, de s'en imprégner, s'il est permis de s'exprimer ainsi ; parce qu'en même temps qu'elles peuvent faire découvrir un grand nombre de théorèmes, elles en rendent toute démonstration superflue. C'est ainsi que nous allons en user nous-même ; et lorsque, par quelque moyen que ce soit, nous serons parvenus à établir un théorème, susceptible de l'espèce de traduction dont il est question ici, nous écrirons à sa droite celui qui lui correspond, sans nous mettre aucunement en peine de le démontrer ; bien certain que, si l'un est vrai, l'autre doit l'être également.

Dans tout ce qui va suivre, nous réputerons également comme ligne d'un certain ordre, soit une ligne effective de cet ordre, soit un système équivalent de lignes d'ordres inférieurs, c'est-à-dire, un système de lignes données par une équation unique, d'un degré égal à l'ordre dont il s'agit. Ainsi, par exemple, un système de deux lignes des $p^{\text{ième}}$ et $q^{\text{ième}}$ ordre sera réputé une ligne unique du $(p+q)^{\text{ième}}$ ordre. Pareillement, le système de m droites sera réputé une ligne unique de $m^{\text{ième}}$ ordre.

Nous convenons aussi de comprendre, parmi les intersections de deux courbes, leurs intersections *idéales* aussi bien que leurs intersections *réelles*, leurs intersections *infiniment distantes* aussi bien que leurs intersections *acces-*

Nous convenons aussi de comprendre, parmi les tangentes communes à deux courbes, leurs tangentes communes *idéales* aussi bien que leurs tangentes communes *réelles*, leurs tangentes communes *infiniment distantes* aussi *sibles*; de sorte que, dans notre langage, le nombre des intersections de deux courbes sera constamment égal au produit des degrés de leurs équations.

bien que leurs tangentes communes *accessibles*; de sorte que, dans notre langage, le nombre des tangentes communes à deux courbes sera constamment égal au produit des degrés de leurs équations.

Ces conventions sont nécessaires pour que nos théorèmes puissent avoir lieu sans aucune restriction.

§. I.

Ces choses ainsi entendues, considérons deux lignes du m^ième^ ordre, situées dans un même plan, rapportées aux mêmes axes quelconques, et ayant respectivement pour équations *rationnelles*, en x et y,

$$M=0\ ,\quad (1)\qquad\qquad M'=0\ ;\quad (2)$$

elles se couperont en m^2 points qui, dès que m sera plus grand que *trois*, ne pourront être supposés quelconques, puisqu'alors m^2 se trouvera surpasser le nombre des points qu'il est permis de prendre au hasard sur un plan, pour déterminer complètement une ligne *unique* du m^{ieme} ordre. Dans tous les cas, on obtiendra les coordonnées de ces différens points en considérant x et y, dans les équations (1) et (2), comme les deux inconnues d'un même problème déterminé.

Soit représentée par λ une constante indéterminée, et soit posée l'équation

$$\lambda M+M'=0\ ;\ (*)\qquad\qquad (3)$$

chacune de nos trois équations sera évidemment comportée par les deux autres, quel que soit λ; de sorte que, de quelque manière qu'on les combine deux à deux, elles donneront exactement les

(*) On ne gagnerait évidemment rien à poser $\lambda M+\lambda' M'=0$, puisque l'autre équation rentre dans celle-ci en y changeant λ, qui est quelconque, en $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

mêmes systèmes de valeurs pour x et y ; mais, à cause de l'indétermination de λ, la dernière appartient à une infinité de lignes du $m.^{\text{ième}}$ ordre ; ces lignes ont donc la propriété commune de couper l'une quelconque des deux proposées précisément en tous les points et aux seuls points où elle est coupée par l'autre.

Réciproquement, toute ligne qui coupera une quelconque des deux proposées précisément en tous les points et aux seuls points où elle est coupée par l'autre, ne pourra être qu'une ligne du $m.^{\text{ième}}$ ordre dont l'équation soit comportée par les équations (1) et (2) ; cette équation devra donc être un cas particulier de l'équation (3), et de nature à pouvoir en être déduite par une détermination convenable de la constante arbitraire λ (*).

Soit $m=p+q$, p et q étant deux nombres entiers positifs, et supposons que, pour une certaine valeur de la constante λ, l'équation (3) prenne la forme

$$PQ=0\,, \qquad (4)$$

P et Q étant des facteurs *rationnels* des $p^{\text{ièmes}}$ et $q^{\text{ièmes}}$ degré, respectivement ; il s'ensuivra que, pour cette valeur de λ, l'équation (3) n'exprime plus une courbe unique, mais le système de deux lignes des $p^{\text{ième}}$ et $q^{\text{ième}}$ ordre, sur lesquelles conséquemment devront

(*) On pourrait objecter ici que si, par exemple, les deux proposées sont

$$x^2+y^2+ax+by+c=0\,, \qquad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0\,,$$

en supposant $\lambda=-1$, l'equation (3) sera

$$(a'-a)x+(b'-b)y+(c'-e)=0\,,$$

qui n'est plus alors que du premier degré ; mais on doit observer que, dans ce cas, la veritable équation (3) est proprement

$$0x^2+0y^2+(a'-a)x+(b'-b)y+(c'-c)=0\,,$$

qui continue d'être du second degré, lorsque x et y sont supposés infinis. Cela revient à dire, comme l'a déjà remarqué M. Poncelet (*Propriétés projectives*, pag. 49, n.° 95), qu'indépendamment des deux points d'intersection *accessibles*, réels ou imaginaires, deux cercles tracés sur un même plan en ont encore deux autres, toujours imaginaires, qui en sont *infiniment distans*.

être distribués les m^2 ou $(p+q)^2$ points d'intersection des deux proposées ; savoir, $p(p+q)$ sur la première et $q(p+q)$ sur l'autre.

Réciproquement, si la nature et la situation respective des deux proposées sont telles que, parmi leurs $(p+q)^2$ points d'intersection, il s'en trouve $p(p+q)$ qui appartiennent à une seule et même ligne du $p^{ième}$ ordre ; ces points seront de nature à être obtenus par la combinaison de l'une quelconque des équations (1) et (2) avec une équation *rationnelle* du $p^{ième}$ degré ; puis donc que *tous* les points d'intersection s'obtiennent par la combinaison de la même équation avec l'équation (3), il faudra que, par une détermination convenable de la constante arbitraire λ, le premier membre de cette dernière acquiert un facteur *rationnel* P du $p^{ième}$ degré : ce premier membre devra donc, pour cette même valeur, avoir un autre facteur *rationnel* Q du q^{ieme} degré ; cette équation sera donc alors de la forme de l'équation (4) ; d'où il suit que les $q(p+q)$ points d'intersection restants se trouveront tous appartenir à une seule et même ligne du q^{ieme} ordre. On a donc ce théorème général :

THÉORÈME I. Si, parmi les $(p+q)^2$ *points d'intersection de deux lignes du* $(p+q)^{ieme}$ *ordre, situées dans un même plan, il s'en trouve* $p(p+q)$ *appartenant tous à une seule et même ligne du* p^{ieme} *ordre ; les* $q(p+q)$ *points d'intersection restans appartiendront tous à une seule et même ligne du* q^{ieme} *ordre* (*).

THÉORÈME I. Si parmi les $(p+q)^2$ *tangentes communes à deux lignes du* $(p+q)^{ieme}$ *ordre, situées dans un même plan, il s'en trouve* $p(p+q)$ *touchant toutes une seule et même ligne du* p^{ieme} *ordre ; les* $q(p+q)$ *tangentes communes restantes toucheront toutes une seule et même ligne du* q^{ieme} *ordre.*

(*) Si l'on suppose que la ligne du p^{ieme} ordre se réduit au système de p droites, dont chacune contient $p+q$ intersection, on obtiendra le premier des théorèmes dont la démonstration a été demandée à la page 35 du présent volume ; et qui n'est, comme l'on voit, qu'un cas très-particulier de celui-ci.

Remarque. Dans l'application de ce théorème, il ne faudra pas perdre de vue que chaque contact du $(n-1)^{ieme}$ ordre ou de n points, entre deux courbes, doit compter pour n points communs, tous situés sur la tangente commune en ce point.

Remarque. Dans l'application de ce théorème, il ne faudra pas perdre de vue que chaque tangente commune à deux courbes en un même point où elles ont entre elles un contact du $(n-1)^{ieme}$ ordre ou de n points, doit compter pour n tangentes communes, passant toutes par ce point.

La vérité de ce théorème dépendant uniquement du degré commun des deux équations, et non du nombre et de la nature des lignes que chacune d'elles exprime, il ne cessera pas d'être vrai lorsqu'elles exprimeront, l'une et l'autre des systèmes de $p+q$ droites. On a donc ce premier corollaire :

Corollaire I. Deux systèmes de $p+q$ droites existant dans un même plan ; si, parmi les $(p+q)^2$ points d'intersection des droites de l'un des systèmes avec celles de l'autre système, il s'en trouve $p(p+q)$ qui appartiennent toutes à une seule et même ligne du p^{ieme} ordre ; les $q(p+q)$ points d'intersection restans appartiendront tous à une seule et même ligne du q^{ieme} ordre.

Corollaire I. Deux systèmes de $p+q$ points existans dans un même plan ; si, parmi les $(p+q)^2$ droites qui joignent les points de l'un des systèmes à ceux de l'autre système, il s'en trouve $p(p+q)$ qui touchent toutes une seule et même ligne du p^{ieme} ordre ; les $q(p+q)$ droites restantes toucheront toutes une seule et même ligne du q^{ieme} ordre.

En supposant $p+q=m$, et prenant tour-à-tour p et q égaux à deux, ce corollaire prendra cette autre forme :

Corollaire II. Deux systèmes de m droites existant dans un même plan ; si, parmi les m^2 points d'intersection des droites de l'un des systèmes avec celles

Corollaire II. Deux systèmes de m points existant dans un même plan ; si parmi les m^2 droites qui joignent les points de l'un des systèmes à ceux de l'autre de l'autre système, il s'en trouve $2m$ qui appartiennent tous à une seule et même ligne du second ordre ; les $m(m-2)$ points d'intersection restans appartiendront tous à une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

système, il s'en trouve $2m$ qui touchent toutes une seule et même ligne du second ordre ; les $m(m-2)$ droites restantes toucheront toutes une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

Soit un polygone de $2m$ côtés inscriptible à une ligne quelconque du second ordre ; nous pourrons considérer ses côtés de rangs pairs et ceux de rangs impairs comme deux systèmes de m droites ayant $2m$ points d'intersection sur une seule et même ligne du second ordre. Le dernier corollaire donnera donc celui-ci :

Corollaire III. Dans tout polygone de $2m$ côtés inscriptible à une ligne du second ordre, les $m(m-2)$ points d'intersection des directions des côtés de rangs pairs avec les directions des côtés de rangs impairs non consécutifs appartiennent toutes à une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

Corollaire III. Dans tout polygone de $2m$ sommets circonscriptible à une ligne du second ordre, les $m(m-2)$ droites qui joignent les sommets de rangs pairs avec les sommets de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs touchent toutes une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

Dans le cas particulier où l'on supposera $m=3$, ce corollaire se changera dans le suivant :

Corollaire IV. Dans tout hexagone inscriptible à une ligne du second ordre, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite et réciproquement.

Corollaire IV. Dans tout hexagone circonscriptible à une ligne du second ordre, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point et réciproquement.

Voilà donc les deux théorèmes de Pascal (*) et de Brianchon,

(*) C'est pour nous conformer à l'opinion la plus répandue que nous at-si féconds en belles et importantes conséquences (*), qui se trouvent ainsi établis sans aucune construction ni calcul, et déduits de considérations analytiques d'une extreme simplicité ; car remarquons bien qu'ils découlent, sans aucun intermédiaire, de notre théorème fondamental (**).

---

tribuons ici à Pascal le premier de ces deux theorèmes. Tout ce qu'on sait de bien positif sur ce point, et c'est le P. Mersenne qui nous l'apprend, dans son *Harmonie universelle*, c'est que Pascal en avait déduit 400 corollaires, formant un traité de sections coniques plus complet que celui d'Appollonius; traité que Descartes a eu entre les mains, mais qui n'a jamais été rendu public.

Dans son *Histoire des mathématiques*, Montucla reproche assez durement à Descartes d'avoir mieux aimé attribuer ce traité à Pascal pere ou à Desargues que de le croire d'un jeune homme de seize ans. Mais voici comment s'exprime Descartes, dans l'une de ses nombreuses lettres au P. Mersenne : « J'ai aussi reçu, dit-il, l'essai touchant les coniques du fil de M. Pascal; et, avant d'en avoir lu la moitié, j'ai jugé qu'il avait appris de » M. Desargues ; ce qui m'a été confirmé incontinent après, par la con» fession qu'il en fait lui-même ». Ne serait-il donc pas possible que le théorème fût véritablement de Desargues qui aurait proposé à son élève d'en déduire, par manière d'exercice, un traité de sections coniques, dont il lui aurait même jalonné les principales divisions, et que le jeune homme aurait écrit ensuite sous les yeux et avec l'assistance de son père? Ce qui semblerait donner quelque poids à cette conjecture, c'est que, comme l'a fait voir dernièrement M. Sturm (pag. 188), le théorème relatif à l'hexagone inscrit se déduit presque immédiatement d'un autre théorème que personne n'a jamais songé à contester à Desargues. A la vérité, le fait ainsi envisagé perdrait un peu de son merveilleux ; mais il n'en deviendrait par là même que plus vraisemblable.

(*) On peut consulter, sur les conséquences les plus immédiates de ces deux théorèmes, la page 39 de notre XIV.e volume et la page 37 de celui-ci.

(**) Si, dans la crainte de rendre les élémens moins *euclidiens*, on persistait à en repousser la démonstration de ces deux théorèmes que nous avons indiquée dernièrement (pag. 143); ne pourrait-on pas du moins introduire celle-ci dans les élémens de *Géométrie analytique*, dont les anciens ne nous ont pas laissé de modèle?

Si, dans le même *corollaire III*, on suppose $m=4$, on en déduira celui-ci :

Corollaire V. Dans tout octogone inscriptible à une ligne du second ordre, les huit points où les côtés de rangs pairs concourent avec les côtés de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs appartiennent tous à une autre ligne du second ordre et réciproquement.

Corollaire V. Dans tout octogone circonscriptible à une ligne du second ordre, les huit droites qui joignent les sommets de rangs pairs avec les sommets de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs touchent toutes une autre ligne du second ordre et réciproquement.

En d'autres termes :

Corollaire VI. Si un octogone étoilé, non régulier, est inscriptible à une ligne du second ordre, l'octogone non étoilé qui aura les mêmes côtés sera aussi inscriptible à une ligne du second ordre et réciproquement.

Corollaire VI. Si un octogone étoilé, non régulier, est circonscriptible à une ligne du second ordre, l'octogone non étoilé qui aura les mêmes sommets sera aussi circonscriptible à une ligne du second ordre et réciproquement.

Si, dans le théorème général, on remplace $p+q$ par m et qu'on fasse tour-à-tour p et q égaux à deux, on en déduira ce corollaire :

Corollaire VII. Si, parmi les m^2 intersections de deux lignes du $m^{ième}$ ordre, situées dans un même plan, il s'en trouve $2m$ qui appartiennent à une ligne du deuxième ordre, les $m(m-2)$ intersections restantes appartiendront toutes à une seule et même ligne du $(m-2)^{ième}$ ordre et réciproquement.

Corollaire VII. Si, parmi les m^2 tangentes communes à deux lignes du $m^{ième}$ ordre, situées dans un même plan, il s'en trouve $2m$ qui touchent une ligne du deuxième ordre, les $m(m-2)$ tangentes communes restantes toucheront toutes une seule et même ligne du $(m-2)^{ième}$ ordre et réciproquement.

Soit menée à une ligne du $m^{ième}$ ordre une sécante arbitraire, puis des tangentes par les m points où cette sécante la coupera ;

nous pourrons considérer l'ensemble de ces tangentes comme une ligne unique du m^{ieme} ordre ayant avec la première $2m$ points d'intersection se confondant deux à deux dans les m points de contact, et situées conséquemment sur deux droites qui se confondent. Mais deux droites qui se confondent forment un système du second ordre; et par conséquent le précédent corollaire donne celui-ci :

Corollaire VIII. Les m tangentes menées à une ligne du m^{ieme} ordre, par ses points d'intersection avec une transversale rectiligne quelconque, coupe de nouveau la courbe en $m(m-2)$ points seulement, lesquels appartiennent tous à une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre (*).

Corollaire VIII. Par les m points ou des tangentes issues d'un même point touchent une ligne du m^{ieme} ordre, on ne peut lui mener que $m(m-2)$ nouvelles tangentes seulement, lesquelles touchent toutes une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre (*).

§. II.

Considérons présentement trois lignes du m^{ieme} ordre, données sur un même plan, par les équations *rationnelles* en x et y

$$M=0\,,\quad(1)\qquad M'=0\,,\quad(2)\qquad M''=0\,;\quad(3)$$

elles auront, deux à deux, m^2 points d'intersection. Soit encore, comme ci-dessus, $m=p+q$, et supposons que ces courbes passent toutes trois par les mêmes $p(p+q)$ points, appartenant tous à une seule et même ligne du p^{ieme} ordre, donnée par l'équation *rationnelle*, en x et y,

$$P=0\;;$$

(*) A la page 315 du précédent volume, M. Vallès a démontré que *les points de contact de toutes les tangentes menées à une ligne du* m^{ieme} *ordre, par un même point de son plan, appartiennent tous à une seule et même ligne du* $(m-1)^{ieme}$ *ordre*. Il en résulte que *les tangentes menées à une ligne du* m^{ieme} *ordre, par les points où elle est coupée par une transversale rectiligne, touchent toutes une seule et même ligne du* $(m-1)^{ieme}$ *ordre.*

d'après ce qui précède (*théorème I*), les points d'intersection restans de ces courbes, deux à deux, au nombre de $q(p+q)$, pour chaque système de deux courbes, seront sur trois lignes du $q^{ième}$ ordre dont nous supposons les équations

$$Q=0\ , \quad (4) \qquad Q'=0\ , \quad (5) \qquad Q''=2\ ; \quad (6)$$

chacune de ces dernières se rapportant aux deux qui ne lui correspondent pas dans la première série. On devra donc avoir par une détermination convenable de λ et λ'

$$\lambda M+M''=PQ'\ , \qquad \lambda' M'+M''=PQ\ ;$$

d'où

$$\lambda M-\lambda' M'=P(Q'-Q)$$

ou bien

$$-\frac{\lambda}{\lambda'}M+M'=P\,\frac{Q-Q'}{\lambda'}\ ,$$

mais, d'après ce qui a été démontré (§. I), pour une détermination convenable de μ, on doit avoir

$$\mu M+M'=PQ''\ ;$$

puis donc qu'en prenant $\mu=-\dfrac{\lambda}{\lambda'}$, on a

$$\mu M+M'=P\,\frac{Q-Q'}{\lambda'}\ ,$$

il s'en suit qu'on doit avoir

$$\frac{Q-Q'}{\lambda'}=Q''\ ,$$

c'est-à-dire

$$\lambda' Q''+Q'=Q\ ;$$

ce qui prouve que chacune des équations (4), (5), (6) est comportée par les deux autres, et que conséquemment les trois courbes qu'elles expriment se coupent exactement aux mêmes q^2 points. On a donc ce théorème général :

THÉORÈME II. Si trois lignes du $(p+q)^{ieme}$ *ordre, tracées sur un même plan, passent par* $p(p+q)$ *points appartenant tous à une seule et même ligne du* p^{ieme} *ordre; les* $q(p+q)$ *points d'intersection restans de ces courbes, prises deux à deux, seront sur trois lignes du* q^{ieme} *ordre, se coupant tous aux mêmes* q^2 *points* (*).

THÉORÈME II. Si trois lignes du $(p+q)^{ieme}$ *ordre, tracées sur un même plan, ont* $p(p+q)$ *tangentes communes, touchant toutes une seule et même ligne du* p^{ieme} *ordre; les* $q(p+q)$ *tangentes communes restantes de ces courbes, prises deux à deux, toucheront trois lignes du* q^{ieme} *ordre, ayant toutes les mêmes* q^2 *tangentes communes.*

Parmi les corollaires, en nombre infini, qui résultent de ce théorème, bornons-nous à signaler les plus simples. Si d'abord nous supposons $p=q=1$. Nous aurons celui-ci :

Corollaire I. Si trois lignes du second ordre, comprises dans un même plan et circonscrites à une même droite, sont deux à deux circonscrites à trois autres droites; ces trois dernières concourront en un même point.

Corollaire I. Si trois lignes du second ordre, comprises dans un même plan et inscrites à un même angle, sont deux à deux inscrites à trois autres angles; les sommets de ces trois derniers appartiendront à une même droite.

Observant ensuite que les deux côtés d'un même angle forment une ligne du second ordre, ce corollaire conduira au suivant :

Corollaire II. Trois angles compris dans un même plan étant circonscrits à une même droite, les trois droites auxquelles ces mêmes angles, pris deux à deux,

Corollaire II. Trois droites comprises dans un même plan étant inscrites à un même angle, les trois angles auxquels ces mêmes droites, prises deux à deux, se-

(*) En supposant que les $p(p+q)$ premiers points sont situés $p+q$ à $p+q$ sur p droites, on aura le deuxième théorème proposé à démontrer à la page 36 du présent volume, lequel n'est, comme l'on voit, qu'un cas très-particulier de celui-ci.

seront circonscrits concourront en un même point (*).

ront inscrites auront leurs sommets sur une même droite (*).

En remarquant que les tangentes communes à deux courbes en sont aussi des cordes communes, le corollaire I donnera aussi le suivant :

Corollaire III. Si trois lignes du second ordre qui se touchent au même point se coupent deux à deux, leurs trois cordes communes concourront en un même point.

Corollaire III. Trois lignes du second ordre se touchant au même point, les sommets des angles qu'on leur circonscrira deux à deux appartiendront tous trois à une même droite.

Dans tout hexagone inscrit à une ligne du second ordre, les côtés de rangs pairs, les côtés de rangs impairs et les diagonales qui joignent les sommets opposés, peuvent être considérés comme trois lignes du troisième ordre ayant six points communs, d'où il suit, par le théorème général, qu'on a encore ce corollaire.

Corollaire IV. Dans tout hexagone inscrit à une ligne du second ordre, les diagonales qui joignent les sommets opposés sont coupés respectivement soit par les côtés de rangs pairs soit par ceux de rang impair qui ne leur sont pas adjacens en trois points qui appartiennent à une même droite; et les droites auxquelles appartiennent ces deux systèmes de trois points concourent sur la droite qui contient les trois points de concours des directions des côtés opposés de l'hexagone.

Corollaire IV. Dans tout hexagone circonscrit à une ligne du second ordre, les droites qui joignent respectivement les points de concours des directions des côtés opposés soit avec les sommets de rangs pairs soit avec les sommets de rangs impairs qui n'appartiennent pas à ces côtés concourent toutes trois en un même point; et les points où concourent ces deux systèmes de trois droites sont en ligne droite avec celui où concourent les trois droites qui joignent les sommets opposés de l'hexagone.

(*) On ne démontre d'ordinaire cette proposition que pour le cas particulier où les trois sommets sont en ligne droite.

(*) On ne démontre d'ordinaire ce théorème que pour le cas particulier où les trois droites concourent en un même point.

SECTION DEUXIÈME.

Propriétés générales des surfaces courbes.

Soit une figure à trois dimensions, composée de tant de points, droites, plans courbes planes et à double courbure et surfaces courbes qu'on voudra. Concevons qu'ayant décrit arbitrairement une surface quelconque du second ordre, on construise, dans l'espace, une autre figure dont tous les points, toutes les droites et tous les plans soient les pôles, polaires conjuguées et plans polaires des plans, droites et points de la première, par rapport à cette surface du second ordre, considérée comme *directrice* ; les deux figures ainsi tracées seront dites *polaires réciproques* l'une de l'autre ; attendu que la première pourra être déduite de la seconde comme celle-ci est supposée l'être de l'autre. Or, d'après les propriétés connues des pôles, polaires conjuguées et plans polaires, voici les relations principales qui se trouveront exister entre ces deux figures.

1.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés dans un même plan, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans concourant en un même point.

1.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans concourant en un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés dans un même plan.

2.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés en ligne droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans se coupant suivant une même droite.

2.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans se coupant suivant une même droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés en ligne droite.

3.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de droites situées dans un même plan, autant on ren-

3.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de droites concourant en un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de droites concourant en un même point.

4.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés sur une même courbe plane, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans tangens à une même surface conique.

5.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés sur une même courbe à double courbure, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans tangens à une même surface développable.

6.° A des points d'intersection d'une courbe plane avec une sécante rectiligne, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de plans tangens à une même surface conique, tous issus d'une même droite passant par son sommet.

7.° A des points d'intersection d'une courbe à double courbure avec un plan sécant, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de plans tangens à une même surface développable, tous issus d'un même point.

contrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de droites situées dans un même plan.

4.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans tangens à une même surface conique, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une même courbe plane.

5.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans tangens à une même surface développable, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une même courbe à double courbure.

6.° A des plans tangens à une même surface conique, tous issus d'une même droite passant par son sommet, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de points d'intersection d'une courbe plane avec une sécante rectiligne.

7.° A des plans tangens à une surface développable, tous issus d'un même point, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de points d'intersection d'une même courbe à double courbure avec un plan sécant.

8.° Autant il y aura, dans l'une des figures, de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes planes, situées dans un même plan, autant on rencontrera dans l'autre de plans tangens à deux ou à un plus grand nombre de surfaces coniques de même sommet.

9.° Aulant il y aura, dans l'une des figures, de tangentes communes à deux ou un plus grand nombre de courbes planes, comprises dans un même plan, autant on rencontrera dans l'autre d'intersections de deux ou d'un plus grand nombre de surfaces coniques de même sommet.

10.° Autant il y aura, dans l'une des figures, de systèmes de points situés sur une même courbe à double courbure, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans tangens à une même surface développable.

11.° A toute surface développable, circonscrite à la fois à deux ou à un plus grand nombre de courbes à double courbure, dans l'une des figures, répondra dans l'autre une courbe à double courbure inscrite à la fois à

8.° Autant il y aura, dans l'une des figures, de plans tangens communs à deux ou à un plus grand nombre de surfaces coniques de même sommet, autant on rencontrera dans l'autre de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes planes, comprises dans un même plan.

9.° Autant il y aura, dans l'une des figures, d'intersections de deux ou d'un plus grand nombre de surfaces coniques de même sommet, autant on rencontrera dans l'autre de tangentes communes à deux ou à un plus grand nombre de courbes planes, comprises dans un même plan.

10.° Autant il y aura, dans l'une des figures, de systèmes de plans tangens à une même surface développable, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une même courbe à double courbure.

11.° A toute courbe à double courbure, inscrite à la fois à deux ou à un plus grand nombre de surfaces développables, dans l'une des figures, répondra dans l'autre une surface développable circonscrite à la fois à un égal nom-un égal nombre de surfaces développables.

12.° Autant on rencontrera, dans l'une des figures, de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes à double courbure, autant il y aura dans l'autre de plans tangens communs à un égal nombre de surfaces développables.

13.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés sur une même surface courbe, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans tangens à une autre surface de même ordre.

14.° A des courbes planes, intersection d'une même surface courbe avec un plan sécant, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de surfaces coniques de même sommet, circonscrites à une autre surface de même ordre.

15.° A des points où une même surface courbe est percée par une droite, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de plans tangens à une surface de même ordre, se coupant suivant une même droite.

bre de courbes à double courbure.

12.° Autant on rencontrera, dans l'une des figures, de plans tangens communs à deux ou à un plus grand nombre de surfaces développables, autant il y aura dans l'autre de points communs à un égal nombre de courbes à double courbure.

13.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans tangens à une même surface courbe, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une autre surface de même ordre.

14.° A des surfaces coniques de même sommet circonscrites à une même surface courbe, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de courbes planes, intersections d'un plan sécant avec une autre surface de même ordre.

15.° A des plans tangens à une même surface courbe, se coupant suivant une même droite, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de points où une surface de même ordre est percée par une même droite.

16.° Autant on rencontrera, dans l'une des figures, de courbes à double courbure, intersections de deux ou d'un plus grand nombre de surfaces courbes, autant il y aura dans l'autre de surfaces développables circonscrites à un égal nombre de surfaces de même ordre.

16.° Autant on rencontrera, dans l'une des figures, de surfaces développables circonscrites à deux ou à un plus grand nombre de surfaces courbes, autant il y aura dans l'autre de courbes à double courbure, intersections d'un égal nombre de surfaces de même ordre.

17.° Enfin, autant il y aura, dans l'une des figures, de points communs à trois ou à un plus grand nombre de surfaces courbes, autant on rencontrera dans l'autre de plans tangens communs à un égal nombre de surfaces de même ordre.

17.° Enfin, autant il y aura, dans l'une des figures, de plans tangens communs à trois ou à un plus grand nombre de surfaces courbes, autant on rencontrera dans l'autre de points communs à un égal nombre de surfaces de même ordre.

Il importe extrêmement de se rendre ces diverses relations bien familières, parce qu'en même temps qu'elles peuvent faire découvrir un grand nombre de théorèmes elles en rendent toute démonstration superflue (*). En les appliquant, par exemple, aux vingt-six propositions établies dans la section première, on en déduira vingt-six autres propositions de géométrie à trois dimensions, relatives à des surfaces coniques de même sommet et à des plans et droites passant par leur sommet commun. En particulier, les deux corollaires V du théorème I donneront les deux propositions suivantes :

Dans tout angle hexaèdre ins-

Dans tout angle hexaèdre cir-

(*) Ce sont aussi ces analogies qu'il faudrait consulter, si l'on voulait reconstruire la langue de la géométrie sur un plan plus symétrique ; elles en deviendraient aussi par là beaucoup plus faciles à saisir.

criptible à une surface conique du second ordre, les droites suivant lesquelles concourent les directions des faces opposées, appartiennent toutes trois à un même plan, et réciproquement.

conscriptible à une surface conique du second ordre, les plans qui contiennent les arêtes opposées se coupent tous trois suivant une même droite, et réciproquement.

Il en serait exactement de même de toutes les autres; mais, comme ces sortes de traductions sont tout-à-fait sans difficulté, nous ne nous y arrêterons pas. Nous observerons seulement que si, après les avoir toutes exécutées, on imagine le sommet commun des cônes transporté au centre d'une sphère, on verra incontinent que des théorèmes analogues ont lieu pour des figures tracées sur une surface sphérique, et qu'ils s'y correspondent deux à deux comme sur un plan, comme il doit résulter d'ailleurs de la propriété connue des triangles sphériques supplémentaires l'un de l'autre, pourvu qu'on y remplace les lignes droites par des arcs de grands cercles.

Dans tout ce qui va suivre, nous réputerons également comme surface d'un certain ordre, soit une surface effective de cet ordre, soit un système équivalent de surfaces d'ordres inférieurs, c'est-à-dire, de surfaces données par une équation unique, d'un degré égal à l'ordre proposé. Ainsi, par exemple, le système de deux surfaces des p^{ieme} et q^{ieme} ordres sera réputé une surface unique du $(p+q)^{\text{ieme}}$ ordre, pareillement, le système de m plans sera réputé une surface unique du m^{ieme} ordre.

Nous convenons aussi de comprendre, parmi les intersections de deux ou de trois surfaces, leurs intersections *idéales*, aussi bien que leurs intersections *réelles*, leurs intersections *infiniment distantes*, aussi bien que leurs intersections *accessibles*; de sorte que, dans notre langage, le nom-

Nous convenons aussi de comprendre, parmi les plans tangens à deux ou à trois surfaces courbes, leurs plans tangens *idéals*, aussi bien que leurs plans tangens *réels*, leurs plans tangens *infiniment distans* aussi bien que leurs plans tangens *accessibles*; de sorte que, dans notre langage, bre des points d'intersection de trois surfaces sera constamment égal au produit des degrés de leurs équations.

le nombre des plans tangens communs à trois surfaces sera constamment égal au produit des degrés de leurs équations.

Ainsi que nous l'avons pratiqué dans la section première, à mesure que, par quelque moyen que ce soit, nous serons parvenus à établir un théorème, nous écrivons à sa droite le théorème qui s'en déduit par la théorie des polaires réciproques, sans nous arrêter à le démontrer; bien certains que l'un ne saurait être vrai sans que l'autre le soit également.

§. I.

Ces choses ainsi entendues, considérons dans l'espace deux surfaces du $m^{ième}$ ordre, rapportées aux mêmes axes quelconques, et ayant respectivement pour équations *rationnelles* en x, y, z,

$$M=0\,, \quad (1) \qquad\qquad M'=0\,; \quad (2)$$

elles se couperont suivant un certain nombre de lignes, droites ou courbes, planes ou à double courbure, données par ces mêmes équations, considérées comme appartenant à un même problème indéterminé à trois inconnues.

Soit représentée par λ une constante indéterminée et soit posée l'équation

$$\lambda M+M'=0\,; \qquad (3)$$

chacune de nos trois équations sera évidemment comportée par les deux autres, quel que soit λ; de sorte que, de quelque manière qu'on les combine deux à deux, elles établiront constamment les mêmes relations entre x, y, z; mais, à cause de l'indétermination de λ, la dernière appartient à une infinité de surfaces du $m^{ième}$ ordre; donc ces surfaces ont la propriété commune de couper l'une quelconque des deux proposées précisément suivant toutes les lignes et les seules lignes qu'y détermine l'autre.

Réciproquement, toute surface qui coupera l'une quelconque des deux proposées précisément suivant toutes les lignes et suivant les seules lignes qu'y détermine l'autre, devra être une surface du m^{ieme} ordre dont l'équation soit comportée par les équations (1) et (2); cette équation devra donc être un cas particulier de l'équation (3), et de nature à pouvoir en être déduite par une détermination convenable de la constante arbitraire λ.

Soit $m=p+q$, p et q étant deux nombres entiers positifs, et supposons que, pour une certaine valeur de la constante λ, l'équation (3) prenne la forme

$$PQ=0\,, \qquad (4)$$

P et Q étant deux facteurs rationnels des p^{ieme} et q^{ieme} degrés, il s'ensuivra que, pour cette valeur de λ, l'équation (3) n'exprime plus une surface unique, mais le système de deux surfaces des p^{ieme} et q^{ieme} ordres, sur lesquelles doivent conséquemment se trouver distribuées les lignes d'intersections des deux proposées.

Réciproquement, si la nature et la situation respective des deux proposées sont telles que, parmi leurs lignes d'intersection, il s'en trouve qui soient toutes situées sur une seule et même surface du p^{ieme} ordre, ces lignes seront de nature à être déterminées par la combinaison de l'une quelconque des équations (1) et (2) avec une équation *rationnelle* du p^{ieme} degré; puis donc que *toutes* les lignes d'intersection s'obtiennent par la combinaison de la même équation avec l'équation (3), il s'ensuit que le premier membre de cette dernière doit, par une détermination convenable de la constante arbitraire λ, acquérir un facteur *rationnel* P du p^{ieme} degré; ce premier membre devra donc, pour cette même valeur, avoir un autre facteur *rationnel* Q du q^{ieme} degré. Cette équation sera donc alors de la forme de l'équation (4); en sorte que les lignes d'intersection restantes se trouveront toutes appartenir à une seule et même surface du q^{ieme} ordre. On a donc ce théorème général :

THÉORÈME III. Si, parmi les lignes droites ou courbes, planes ou à double courbure suivant lesquelles se coupent, dans l'espace, deux surfaces du $(\mathrm{p}+\mathrm{q})^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve une partie qui soient toutes situées sur une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre ; les intersections restantes seront toutes situées sur une seule et même surface du* q^{ieme} *ordre.*

THÉORÈME III. Si, parmi les surfaces planes, coniques ou développables circonscrites à deux surfaces du $(\mathrm{p}+\mathrm{q})^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve une partie qui soient toutes circonscrites à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre ; les surfaces circonscrites restantes seront toutes circonscrites à une seule et même surface du* q^{ieme} *ordre.*

La vérité du théorème dépendant uniquement du degré commun des deux équations et non du nombre et la nature des surfaces que chacune d'elles exprime, il ne cessera pas d'être vrai lorsqu'elles exprimeront, l'une et l'autre, des systèmes de $p+q$ plans. On a donc ce premier corollaire :

Corollaire I. Deux systèmes de $p+q$ plans existant dans l'espace, si, parmi les $(p+q)^2$ droites suivant lesquelles les plans de l'un des systèmes coupent les plans de l'autre système, il s'en trouve $p(p+q)$ qui appartiennent à une seule et même surface réglée du p^{ieme} ordre ; les $q(p+q)$ droites restantes appartiendront à une seule et même surface réglée du q^{ieme} ordre.

Corollaire I. Deux systèmes de $p+q$ points existant dans l'espace, si, parmi les $(p+q)^2$ droites qui joignent les points de l'un de ces systèmes à ceux de l'autre système, il s'en trouve $p(p+q)$ qui appartiennent à une seule et même surface réglée du p^{ieme} ordre, les $q(p+q)$ droites restantes appartiendront à une seule et même surface réglée du q^{ieme} ordre.

On sait que, par chacun des points d'une surface réglée du second ordre on peut tracer deux droites qui y soient entièrement situées ; que par conséquent une telle surface peut, de deux manières différentes, être engendrée par le mouvement d'une droite, et que chacune des droites de l'une des générations est coupée par toutes les droites de l'autre génération ; d'où il suit évidemment que l'on peut toujours, sur une telle surface, tracer un polygone rectiligne gauche de $2m$ côtés dont les côtés soient alternativement des portions de droites de l'une et de l'autre générations.

Si l'on considère ensuite les plans des angles de rangs pairs du polygone et les plans de ses angles de rangs impairs comme deux systèmes de m plans, les plans de l'un des systèmes couperont ceux de l'autre système suivant m^2 droites, et $2m$ de ces droites seront les côtés même du polygone gauche dont il s'agit, et appartiendront ainsi à une même surface réglée du second ordre. Supposant donc, dans le précédent corollaire, $p+q=m$, et alternativement p et q égaux à *deux*, on reconnaîtra que les $m(m-2)$ intersections restantes doivent appartenir à une seule et même surface réglée du $(m-2)^{ieme}$ ordre. On a donc cet autre corollaire :

Corollaire II. Dans tout polygone rectiligne gauche de $2m$ côtés, exactement applicable sur une surface réglée du second ordre, les plans des angles de rangs pairs et ceux des angles de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs se coupent suivant $m(m-2)$ droites qui appartiennent toutes à une seule et même surface réglée du $(m-2)^{ieme}$ ordre, et réciproquement.

Corollaire II. Dans tout polygone rectiligne gauche de $2m$ côtés, exactement applicable sur une surface réglée du second ordre, les droites qui joignent les sommets de rangs pairs aux sommets de rangs impairs non consécutifs, au nombre de $m(m-2)$, appartiennent toutes à une seule et même surface réglée du $(m-2)^{ieme}$ ordre, et réciproquement.

Dans le cas particulier où l'on supposera $m=3$, ce corollaire se changera dans le suivant :

Corollaire III. Dans tout hexagone rectiligne gauche exacte-

Corollaire III. Dans tout hexagone rectiligne gauche exacte-

ment applicable à une surface réglée du second ordre, les droites suivant lesquelles se coupent les plans des angles opposés, appartiennent toutes trois à un même plan, et réciproquement (*).	ment applicable à une surface réglée du second ordre, les droites qui joignent les sommets opposés, concourent toutes trois en un même point, et réciproquement (*).

Si, dans le même corollaire, on suppose $m=4$, on obtiendra le suivant :

Corollaire IV. Dans tout octogone rectiligne gauche, exactement applicable sur une surface réglée du second ordre, les huit droites suivant lesquelles les plans des angles de rangs pairs coupent les plans des angles de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs, appartiennent toutes à une autre surface réglée du second ordre, et réciproquement.	*Corollaire IV.* Dans tout octogone rectiligne gauche, exactement applicable sur une surface réglée du second ordre, les huit droites qui joignent les sommets de rangs pairs aux sommets de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs, appartiennent toutes à une autre surface réglée du second ordre, et réciproquement.

Si, dans le théorème général, on suppose $p=q=1$, on aura cet autre corollaire :

Corollaire V. Si deux surfaces du second ordre se coupent suivant deux courbes dont l'une soit une courbe plane, l'autre sera aussi nécessairement une courbe plane.	*Corollaire V.* Si deux surfaces du second ordre sont inscriptibles à deux surfaces développables dont l'une soit une surface conique, l'autre sera aussi nécessairement une surface conique.

En considérant que deux surfaces courbes qui se touchent en un

---

(*) On reconnaît ici les deux élégans théorèmes de M Dandelin, démontrés tom. XV (pag. 393) et tom. XVI (pag. 229). Ces théorèmes ne sont, comme l'on voit, que des cas très-particuliers de nos corollaires II.

point sont censée avoir, en ce point, une section plane, située dans le plan tangent au même point, on conclura encore de là ce nouveau corollaire :

Corollaire VI. Si deux surfaces du second ordre qui se coupent se touchent en outre en un point, elles se couperont nécessairement suivant une courbe plane.

Corollaire VI. Toute surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre, qui se touchent est nécessairement une surface conique.

Si deux surfaces du second ordre se touchent suivant une ligne courbe, cette ligne pourra être considérée comme une commune section des deux surfaces ; mais on pourra aussi, d'après ce qui a été observé plus haut, considérer comme tel un quelconque des points de leur ligne de contact ; et comme cette dernière intersection est plane, l'autre devra l'être également. On a donc cet autre corollaire :

Corollaire VII. Deux surfaces du second ordre inscrite et circonscrite l'une à l'autre se touchent suivant une courbe plane.

Corollaire VII. Deux surfaces du second ordre inscrite et circonscrite l'une à l'autre sont inscriptibles à une même surface conique.

Si l'on suppose que l'une des deux surfaces du second ordre soit elle-même une surface conique, on aura cette proposition connue :

Corollaire VIII. Toute surface conique circonscrite à une surface du second ordre, la touche suivant une courbe plane.

Corollaire VIII. Toute surface développable qui touche une surface du second ordre suivant une courbe plane, est une surface conique.

Le raisonnement qui nous a conduit au corollaire VII, appliqué au théorème général, nous conduira à cet autre corollaire, dont celui-là n'est qu'un cas particulier :

Corollaire IX. Si deux surfa-

Corollaire IX. Si deux surfaces du m^{ieme} ordre sont inscrites et circonscrites l'une à l'autre, leurs lignes de contact appartiendront toutes à une seule et même surface du $(m-1)^{ieme}$ ordre au plus.

ces du m^{ieme} ordre sont inscrites et circonscrites l'une à l'autre, les surfaces développables qui leur seront circonscrites toucheront toutes une seule et même surface du $(m-1)^{ieme}$ ordre au plus.

Dans le cas particulier où l'une des deux surfaces proposées sera une surface conique, on aura ce nouveau corollaire :

Corollaire X. Toute surface conique circonscrite à une surface du m^{ieme} ordre la touche suivant un système de courbes qui appartiennent toutes à une seule et même surface du $(m-1)^{ieme}$ ordre au plus (*).

Corollaire X. Tout système de surfaces développables qui touchent une surface courbe quelconque suivant une section plane quelconque faite dans cette surface est circonscriptible à une seule et même surface du $(m-1)^{ieme}$ ordre au plus.

§. II.

Considérons, en second lieu, trois surfaces du m^{ieme} ordre, données par les équations *rationnelles*, en x, y, z,

$$M=0, \quad (1) \qquad M'=0, \quad (2) \qquad M''=0; \quad (3)$$

elles se couperont, deux à deux, suivant diverses lignes, droites ou courbes, planes ou à double courbure.

Soit toujours $m=p+q$, et supposons que ces trois surfaces aient un certain nombre de leurs lignes d'intersection communes, et que ces lignes d'intersection communes appartiennent toutes à une seule

(*) On reconnait ici le théorème démontré par M. Vallès, à la page 315 du précédent volume. Nous avions négligé, à l'endroit cité, de signaler son correspondant.

et même surface du p^{ieme} ordre, donnée par l'équation rationnelle

$$P=0 \;;$$

d'après ce qui précède (*Théorème III*), les lignes d'intersection restantes de ces surfaces, prises deux à deux, seront sur trois surfaces du q^{ieme} ordre, dont nous supposerons les équations

$$Q=0\,, \quad (4) \qquad Q'=0\,, \quad (5) \qquad Q''=0\,; \quad (6)$$

chacune de ces dernières étant supposée relative aux deux qui ne lui correspondent pas parmi les trois autres. On devra donc avoir pour une détermination convenable de λ et λ',

$$\lambda M+M''=PQ'\,, \qquad \lambda' M'+M''=PQ\;;$$

d'où

$$\lambda M-\lambda' M'=P(Q'-Q)\,,$$

ou bien

$$-\frac{\lambda}{\lambda'}M+M'=P.\frac{Q-Q'}{\lambda'}\;;$$

mais, d'après ce qui a été démontré (§. I), pour une détermination convenable de μ, on doit avoir

$$\mu M+M'=PQ''$$

puis donc qu'en posant $\mu=-\frac{\lambda}{\lambda'}$, on a

$$\mu M+M'=P.\frac{Q-Q'}{\lambda'}\;:$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\frac{Q-Q'}{\lambda'}=Q'' ;$$

c'est-à-dire,

$$\lambda' Q''+Q'=Q ;$$

ce qui montre que chacune des trois équations (4), (5), (6) est comportée par les deux autres, et que conséquemment les trois surfaces qu'elles expriment se coupent exactement suivant les mêmes lignes. De là naît ce théorème :

THÉORÈME IV. Si trois surfaces du $(p+q)^{\text{ieme}}$ *ordre passent toutes par un certain nombre de lignes, droites ou courbes, planes ou à double courbure, appartenant à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre, leurs lignes d'intersection restantes, deux à deux, appartiendront à trois surfaces du* q^{ieme} *ordre, se coupant suivant les mêmes lignes.*

THÉORÈME IV. Si trois surfaces du $(p+q)^{\text{ieme}}$ *ordre sont toutes inscrites à un certain nombre de surfaces développables, circonscrites elles-mêmes à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre, leurs surfaces développables circonscrites restantes, deux à deux, seront circonscrites à trois surfaces du* q^{ieme} *ordre, qui auront leurs surfaces développables circonscrites communes.*

De ce théorème, on peut conclure, comme cas particuliers, une infinité de corollaires, parmi lesquels nous nous bornerons à signaler les plus simples.

Corollaire I. Si, par une même courbe plane du second ordre, on fait passer trois surfaces de cet ordre qui se coupent de nouveau deux à deux ; elles se couperont suivant trois courbes

Corollaire I. Si, à une même surface conique du second ordre, on inscrit trois surfaces de cet ordre qui puissent être de nouveau inscrites deux à deux à des surfaces développables ; ces dernières se-planes dont les plans passeront tous trois par une même droite.

ront également des surfaces coniques, et leurs sommets appartiendront tous trois à une même droite.

En remarquant que trois surfaces courbes qui se touchent en un même point sont censées avoir en ce point une section plane commune, située dans leur plan tangent, on aura cet autre corollaire:

Corollaire II. Si trois surfaces du second ordre qui se touchent au même point se coupent deux à deux, elles se couperont suivant des courbes planes, dont les plans passeront tous trois par une même droite.

Corollaire II. Si trois surfaces du second ordre qui se touchent au même point sont inscriptibles deux à deux à des surfaces développables, ces dernières seront des surfaces coniques, dont les sommets appartiendront tous trois à une même droite.

En considérant un angle trièdre comme une surface unique du troisième ordre, on aura aussi ce corollaire :

Corollaire III. Trois angles trièdres étant circonscrits à un même triangle; indépendamment des trois côtés de ce triangle, ils se couperont encore deux à deux suivant six droites appartenant toutes à une seule et même surface réglée du second ordre; et les surfaces réglées ainsi déterminées se couperont toutes trois suivant les mêmes courbes.

Corollaire III. Trois triangles étant inscrits à un même angle trièdre; indépendamment des trois arêtes de cet angle trièdre, les sommets de ces triangles, considérés deux à deux détermineront six droites appartenant toutes à une seule et même surfaces réglée du second ordre; et les surfaces réglées ainsi déterminées se couperont toutes trois suivant les mêmes courbes.

§. III.

Soient de nouveau trois surfaces du $m^{ième}$ ordre, données par les équations *rationnelles* en x, y, z

$$M=0\,, \quad (1) \qquad M'=0\,, \quad (2) \qquad M''=0\,; \quad (3)$$

Ces surfaces se couperont en m^3 points qui, dès que m sera plus grand que *deux*, ne pourront plus être supposés quelconques, puisqu'alors m^3 surpassera le nombre des points qu'il est permis de prendre au hasard dans l'espace, pour déterminer complètement une surface *unique* du m^{ieme} ordre. Dans tous les cas, on obtiendra les coordonnées de ces différens points, en considérant x, y, z, dans les équations (1), (2), (3), comme les inconnues d'un même problème déterminé.

Soient représentées par λ et λ' deux constantes indéterminées, et soit posée l'équation

$$\lambda M+\lambda' M'+M''=0\,; \qquad (4)$$

cette équation, à cause de l'indétermination de λ et λ', exprimera une infinité de surfaces du m^{ieme} ordre, et, comme chacune de nos quatre équations est comportée par les trois autres, chacune de ces surfaces coupera précisément les lignes d'intersection de deux quelconques des trois proposées en tous les points et aux seuls points où ces lignes seraient coupées par la troisième.

Réciproquement, toute surface qui coupera les lignes d'intersection de deux quelconques des trois proposées précisément en tous les points et aux seuls points où ces lignes seraient coupées par la troisième, devra être une surface du m^{ieme} ordre, dont l'équation soit comportée par les équations (1), (2), (3); cette équation ne pourra donc être qu'un cas particulier de l'équation (4) et de nature à pouvoir en être déduite par une détermination convenable des constantes arbitraires λ et λ'.

Soit $m=p+q$, p et q étant des nombres entiers positifs, et supposons que la nature et la situation respective des trois proposées soient telles que, parmi leurs m^3 ou $(p+q)^3$ points d'intersection, il y en ait $p(p+q)^2$ qui se trouvent tous appartenir à une seule et même surface du p^{ieme} ordre; ces points pourront ainsi être obtenus par la combinaison de deux quelconques des équations (1), (2), (3) avec une équation *rationnelle* du p^{ieme} degré; puis donc que tous les points d'intersection sont obtenus par la combinaison des deux mêmes équations avec l'équation (4); il s'ensuit que cette dernière équation devra, pour des valeurs convenables de λ et λ', acquérir un facteur *rationnel* P du p^{ieme} degré; son premier membre devra donc avoir, dans ce cas, un autre facteur *rationnel* Q du q^{ieme} degré qui, égalé à son tour à zéro, fera connaître, par la combinaison de l'équation résultante avec les deux mêmes équations, les $q(p+q)^2$ points d'intersection restans, lesquels se trouveront ainsi appartenir tous à une seule et même surface du q^{ieme} ordre. De là naît ce théorème général:

THÉORÈME V. Si, parmi les $(p+q)^3$ *points d'intersection de trois surfaces du* $(p+q)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve* $p(p+q)^2$ *qui appartiennent tous à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre; les* $q(p+q)^2$ *points d'intersection restans appartiendront tous à une seule et même surface du* q^{ieme} *ordre.*

THÉORÈME V. Si, parmi les $(p+q)^3$ *plans tangens communs à trois surfaces du* $(p+q)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve* $p(p+q)^2$ *qui soient tous tangens à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre; les* $q(p+q)^2$ *plans tangens communs restans toucheront tous une seule et même surface du* q^{ieme} *ordre.*

La vérité de ce théorème dépendant uniquement du degré commun des trois équations, et non du nombre et de la nature des surfaces exprimées par chacune d'elles, il ne cessera pas d'être vrai lorsqu'elles exprimeront des systèmes de $p+q$ plans. On a donc ce premier corollaire :

Corollaire I. Trois systèmes de $p+q$ plans existant dans l'espace; si, parmi les $(p+q)^3$ points communs à ces trois systèmes, il s'en trouve

Corollaire I. Trois systèmes de $p+q$ points existant dans l'espace; si, parmi les $(p+q)^3$ plans qui peuvent être déterminés par des

$p(p+q)^2$ qui appartiennent tous à une seule et même surface du $p^{ième}$ ordre, les $q(p+q)^2$ points communs restans appartiendront tous à une seule et même surface du $q^{ième}$ ordre.

points pris dans les trois systèmes, il s'en trouve $p(p+q)^2$ qui touchent tous une seule et même surface du $p^{ième}$ ordre, les $q(p+q)^2$ plans restans toucheront tous une seule et même surface du $q^{ième}$ ordre.

En supposant $p=q=1$, ce corollaire se changera dans le suivant :

Corollaire II. Trois angles dièdres se coupant dans l'espace ; si quatre de leurs huit points d'intersection sont dans un même plan, les quatre points d'intersection restans seront aussi dans un même plan.

Corollaire II. Trois droites existant dans l'espace ; si, parmi les huit plans passant par les extrémités des trois droites il s'en trouve quatre qui se coupent en un même point, les quatre restans se couperont aussi en un même point.

Supposant ensuite $p=2$ et $q=1$, on aura cet autre corollaire :

Corollaire III. Si, parmi les vingt-sept points d'intersection de trois angles trièdres dans l'espace, il s'en trouve dix-huit qui appartiennent à une seule et même surface du second ordre ; les neuf points d'intersection restans appartiendront tous à un seul et même plan et réciproquement.

Corollaire III. Si, parmi les vingt-sept plans qu'on peut conduire par les sommets de trois triangles donnés dans l'espace, il s'en trouve dix-huit qui touchent tous une seule et même surface du second ordre ; les neuf plans restans se couperont tous en un un même point et réciproquement.

Si, dans le théorème général, on suppose $p=q=1$, il prendra la forme suivante :

Corollaire IV. Si quatre des huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre sont dans un même plan, leurs quatre points

Corollaire IV. Si quatre des huit plans tangens communs à trois surfaces du second ordre concourent en un même point, les d'intersection restans seront aussi dans un même plan.

quatre plans tangens communs restans concourront aussi en un même point.

§. V.

Soient toujours les trois mêmes équations *rationnelles* du $m^{ième}$ degré en x, y, z,

$$M=0\ ,\quad (1)\qquad M'=0\ ,\quad (2)\qquad M''=0\ ;\quad (3)$$

exprimant trois surface du $m^{ième}$ ordre dont les intersections déterminent m^3 points de l'espace, desquels on obtiendrait les coordonnées en considérant x, y, z comme les trois inconnues d'un même problème déterminé.

Soient encore λ, λ' deux constantes indéterminées, et soient posées les équations

$$\lambda M+M''=0\ ,\quad (4)\qquad \lambda' M'+M''=0\ ;\quad (5)$$

ces équations, à cause de l'indétermination de λ et λ', exprimeront, l'une et l'autre, une infinité de lignes, toutes du $m^{ième}$ ordre; et, comme deux quelconques de nos cinq équations sont comportées par les trois autres, chaque système de deux surfaces comprises dans les équations (4) et (5) déterminera, sur l'une quelconque des surfaces représentées par les équations (1), (2), (3), tous les points et les seuls points d'intersection que les deux autres y détermineraient. Et réciproquement, tout système de deux surfaces déterminant, sur l'une quelconque des trois proposées, tous les points et les seuls points d'intersection que les deux autres y détermineraient, devra être un système de deux surfaces du $m^{ième}$ ordre, dont les équations soient comportées par les équations (1), (2), (3), et soient conséquemment des cas particuliers des équations (4),

(5), et de nature à pouvoir en être déduites par une détermination convenable des constantes λ et λ'.

Soit $m=p+q=t+u$, p, q, t, u étant des nombres entiers positifs, et supposons que la nature et la situation respective des trois proposées soient telles que, parmi leurs m^3 ou $m(p+q)(t+u)$ points d'intersection il s'en trouve mpt qui soient situés sur les lignes d'intersection de deux surfaces des p^{ieme} et t^{ieme} ordre; ces points pourront ainsi être obtenus par la combinaison de l'une quelconque des équations (1), (2), (3) avec deux équations *rationnelles*, des p^{ieme} et t^{ieme} degrés; puis donc que *tous* les points d'intersection de ces trois surfaces sont obtenus par la combinaison de la même équation avec les équations (4) et (5); il s'ensuit que les premiers membres de ces dernières doivent, pour des valeurs convenables de λ et λ', acquérir respectivement des facteurs *rationnels* P et T, des p^{ieme} et t^{ieme} degrés; ces premiers membres devront donc avoir, dans ce cas, d'autres facteurs *rationnels* Q et U des q^{ieme} et u^{ieme} degrés respectivement; c'est-à-dire que ces équations reviendront à

$$PQ=0\,, \qquad TU=0\,,$$

ce qui donne ces quatre combinaisons

$$\left\{\begin{array}{l}P=0\,,\\ T=0\,;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}P=0\,,\\ U=0\,;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}Q=0\,,\\ T=0\,;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}Q=0\,,\\ U=0\,;\end{array}\right.$$

à chacune desquelles joignant une quelconque des trois équations proposées, on obtiendra la totalité des points d'intersection de nos trois surfaces, lesquels se trouveront ainsi au nombre de mpt sur les lignes d'intersection de deux surfaces des p^{ieme} et q^{ieme} ordre, au nombre de mqu sur les lignes d'intersection de deux autres surfaces des q^{ieme} et u^{ieme} ordre, au nombre de mpu sur les lignes d'intersection des deux surfaces des p^{ieme} et u^{ieme} ordre, et enfin au nombre de mqt sur les lignes d'intersection des deux surfaces des q^{ieme} et t^{ieme} ordre. On a donc ce théorème général :

THÉORÈME V. Si, parmi les $(p+q)^3$ *ou* $(t+u)^3$ *points d'intersection de trois surfaces du* $(p+q)^{ieme}$ *ou* $(t+u)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve* $pt(p+q)$ *ou* $pt(t+u)$ *qui soient sur les lignes d'intersection de deux surfaces des* p^{ieme} *et* t^{ieme} *ordres, il y en aura nécessairement* $qu(p+q)$ *ou* $qu(t+u)$ *qui seront sur les lignes d'intersection de deux surfaces des* q^{ieme} *et* u^{ieme} *ordre. Quant aux points d'intersection restans, il y en aura* $pu(p+q)$ *ou* $pu(t+u)$ *qui seront sur les lignes d'intersection des deux surfaces des* p^{ieme} *et* u^{ieme} *ordres et* $qt(p+q)$ *ou* $qt(t+u)$ *qui seront sur les lignes d'intersection des deux surfaces des* q^{ieme} *et* t^{ieme} *ordres.*

THÉORÈME V. Si, parmi les $(p+q)^3$ *ou* $(t+u)^3$ *plans tangens communs à trois surfaces du* $(p+q)^{ieme}$ *ou* $(t+u)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve* $pt(p+q)$ *ou* $pt(t+u)$ *qui soient tangens à deux surfaces des* p^{ieme} *et* t^{ieme} *ordres, il y en aura nécessairement* $qu(p+q)$ *ou* $qu(t+u)$ *qui seront tangens à deux surfaces des* q^{ieme} *et* u^{ieme} *ordres. Quant aux plans tangens communs restans, il y aura* $pu(p+q)$ *ou* $pu(t+u)$ *qui seront tangens aux deux surfaces des* p^{ieme} *et* u^{ieme} *ordres et* $qt(p+q)$ *ou* $qt(t+u)$ *qui seront tangens aux deux surfaces des* q^{ieme} *et* t^{ieme} *ordres.*

La vérité de notre théorème dépendant uniquement du degré commun des trois équations et non du nombre et de la nature des surfaces exprimées par chacune d'elles, il ne cessera pas d'être vrai lorsqu'elles exprimeront, les unes et les autres, des systèmes de $p+q$ ou $t+u$ plans. On a donc ce corollaire :

Corollaire I. Trois systèmes de $p+q$ ou $t+u$ plans existant dans l'espace. Si, parmi les $(p+q)^3$ ou $(t+u)^3$ points déterminés par les intersections des plans des trois systèmes, il s'en trouve

Corollaire I. Trois groupes de $p+q$ ou $t+u$ points existant dans l'espace. Si, parmi les $(p+q)^3$ ou $(t+u)^3$ plans déterminés par des points pris dans les trois groupes, il s'en trouve $pt(p+q)$ ou

$pt(p+q)$ ou $pt(t+u)$ qui appartiennent aux intersections de deux surfaces des p^{ieme} et t^{ieme} ordres, il y en aura nécessairement $qu(p+q)$ ou $qu(t+u)$ qui appartiendront aux intersections de deux surfaces des q^{ieme} et u^{ieme} ordres. Quant aux points d'intersection restans, il y en aura $pu(p+q)$ ou $pu(t+u)$ qui appartiendront aux intersections des deux surfaces des p^{ieme} et u^{ieme} ordres, et $qt(p+q)$ ou $qt(t+u)$ qui appartiendront aux intersections des surfaces des q^{ieme} et t^{ieme} ordres.

$pt(t+u)$ qui touchent à la fois deux surfaces des p^{ieme} et t^{ieme}, il y en aura nécessairement $qu(p+q)$ ou $qu(t+u)$ qui toucheront à la fois deux surfaces des q^{ieme} et u^{ieme} ordres. Quant aux plans restans, il y en aura $pu(p+q)$ ou $pu(t+u)$ qui toucheront à la fois les surfaces des p^{ieme} et u^{ieme} ordres, et $qt(p+q)$ ou $qt(t+u)$ qui toucheront à la fois les surfaces des q^{ieme} et t^{ieme} ordres.

Dans le cas particulier où l'on suppose $p=t=2$ et $q=u=1$, ce corollaire prend la forme suivante :

Corollaire II. Trois angles trièdres existant ensemble dans l'espace ; si, parmi leurs *vingt-sept* points d'intersection, il s'en trouve *douze* aux intersections de deux surfaces du second ordre, il y en aura nécessairement *trois* autres qui appartiendront à une même droite. Quant aux *douze* points d'intersection restans, ils se trouveront *six à six* aux périmètres de deux courbes planes du second ordre, appartenant aux surfaces de même ordre dont il vient d'être question.

Corollaire II. Trois triangles existant ensemble dans l'erpace ; si, parmi les *vingt-sept* plans que déterminent leurs sommets il s'en trouve *douze* qui touchent à la fois deux surfaces du second ordre, il y en aura nécessairement *trois* autres qui se couperont suivant une même droite. Quant aux *douze* plans restans, ils se trouveront *six à six* tangens à deux surfaces coniques du second ordre, circonscrites aux deux surfaces de même ordre dont il vient d'être question.

En nous engageant pour la première fois dans une route qui n'avait point encore été tracée, il ne serait pas surprenant qu'il nous fût échappé quelques méprises; il se pourrait aussi que nous eussions négligé des propositions plus intéressantes que quelques-unes de celles que nous avons signalées; mais l'important ici était de mettre entre les mains du lecteur un nouvel instrument de recherches que bientôt sans doute il maniera plus habilement que nous ne l'avons fait nous-mêmes. Tout repose au surplus ici, comme en beaucoup d'autres rencontres, sur la correspondance entre les procédés de l'analyse et les spéculations de la géométrie; et tout ce que nous avons dit ici aurait sans doute été aperçu depuis long-temps, si, dans les traités élémentaires, on s'occupait avec plus de soin qu'on n'a coutume de le faire de la théorie des équations qui ont lieu en même temps ou qui ont un certain nombre de système de racines communes.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur les caractères d'égalité des angles trièdres;

Par un Abonné.

La démonstration donnée par Simpson des deux principaux cas d'égalité des angles trièdres, démonstration admise dans la plupart des traités élémentaires, est fort simple sans doute; mais elle présente l'inconvénient de se trouver en défaut dans plusieurs cas. On a cherché, à diverses époques et par des moyens plus ou moins ingénieux, à éluder cette difficulté; mais ce n'a été constamment qu'en compliquant plus ou moins la démonstration de Simpson. On a lieu d'être surpris que les considérations suivantes, qui sont extrêmement simples ne se soient pas offertes à l'esprit de ceux qui se sont occupés de cette recherche.

La difficulté tient ici à ce que, contrairement à ce qui a lieu pour les triangles, deux angles trièdres peuvent être égaux dans toutes leurs parties sans être pourtant superposables ; car autrement plusieurs de leurs cas d'égalité pourraient aisément se démontrer par la superposition. C'est en particulier le cas de deux angles trièdres *opposés par le sommet*, comme tous les géomètres le savent, et comme il est d'ailleurs facile de s'en assurer.

Mais, de cela même que deux angles trièdres opposés par le sommet sont égaux dans toutes leurs parties, sans être superposables, il s'ensuit qu'en général, *lorsque deux angles trièdres sont égaux dans toutes leurs parties, sans être superposables, chacun d'eux est superposable avec l'opposé au sommet de l'autre*. Or, de cette proposition découle naturellement la marche à suivre pour démontrer, sans aucun embarras, les quatre cas d'égalité des angles trièdres. Nous disons *les quatre cas*, car l'omission d'un seul, dans des élémens, nous semble une négligence intolérable.

On considérera d'abord 1.° deux angles trièdres ayant un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux, chacun à chacun. Ou bien ces deux angles trièdres seront superposables, auquel cas on les superposera en effet, ou bien ils ne le seront pas, et alors on superposera l'un d'eux avec l'opposé au sommet de l'autre. De l'une ou de l'autre manière, on parviendra à s'assurer que ces angles trièdres sont égaux dans toutes leurs parties. Il est clair qu'on pourrait en user de même pour deux angles trièdres qui auraient 2.° un angle plan égal compris entre deux angles dièdres égaux chacun à chacun.

On démontrera ensuite, à peu près comme on le fait pour les triangles, que si deux angles trièdres ont deux angles plans égaux chacun à chacun, et l'angle dièdre compris inégal, l'angle plan opposé au plus grand angle dièdre sera plus grand que l'angle plan opposé au plus petit; en observant ici de comparer l'un des angles trièdres à l'autre ou à son opposé au sommet, suivant les cas.

On conclura facilement de là 3.° que deux angles trièdres qui ont les trois angles plans égaux chacun à chacun, ont aussi les angles dièdres opposés égaux chacun à chacun; enfin, par la considération de l'angle trièdre supplémentaire ou polaire, on déduira de cette dernière proposition que réciproquement 4.° deux angles trièdres qui ont les trois angles dièdres égaux chacun à chacun, ont aussi les angles plans opposés égaux chacun à chacun. On fera d'ailleurs remarquer que le 1.° et le 2.° se déduisent l'un de l'autre par le même moyen.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Note sur le problème de géométrie résolu à la page 166 du présent volume;

Par M. Bobillier, professeur à l'école des arts et métiers de Châlons.

Je venais de m'occuper du problème résolu à la page 166, lorsque le numéro de novembre m'est parvenu. Je me bornerai donc à consigner ici, parmi les résultats que j'avais obtenus, ceux qui paraissent les plus dignes de remarque.

1.° Toutes les courbes à double courbure d'inclinaison constante, par rapport à un plan, ont leur développantes situées dans des plans parallèles à celui-là.

2.° Toutes ces développantes sont communes à la courbe à double courbure et à sa projection sur le plan de développement.

3.° Pour le cône droit dont l'axe est perpendiculaire au plan de développement, le fil doit couper toutes les génératrices sous un angle constant, et son extrémité doit décrire une *spirale logarithmique*.

4.° Plus généralement, pour toute surface développable dans laquelle la ligne de plus grande pente est une droite d'inclinaison constante par rapport à un plan, le fil, en se développant, doit faire un angle constant avec les génératrices. En outre, la projection de la courbe suivant laquelle le fil se développe, coupe sous un angle constant les élémens prolongés de la projection de l'arête de rebroussement de la surface développable dont il s'agit.

5.° Enfin, pour un paraboloïde de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan de développement, la projection de la courbe suivant laquelle le fil doit être ployé, est la développante du cercle.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie.

I. TROIS lignes du m^{ieme} ordre étant tracées sur un même plan ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire trois autres qui, ayant entre elles les mêmes m^2 points d'intersection, soient telles en outre que chacune d'elles passe par les m^2 points d'intersection de deux des trois premières.

II. Quatre surfaces du m^{ieme} ordre étant données dans l'espace ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en cons-

I. TROIS lignes du m^{ieme} ordre étant tracées sur un même plan ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire trois autres qui, ayant entre elles les mêmes m^2 tangentes communes soient telles en outre que chacune d'elles ait les m^2 mêmes tangentes communes avec deux des trois premières.

II. Quatre surfaces du m^{ieme} ordre étant données dans l'espace ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire quatre autres ayant entre elles les mêmes m^3 points communs et telles en outre que chacune d'elles ait aussi les mêmes m^3 points communs avec trois des quatre premiers.

truire quatre autres ayant entre elles les mêmes m^3 plans tangens communs, et telles en outre que chacune d'elles ait aussi les mêmes m^3 plans tangens communs avec trois des quatre premières.

Problèmes.

I. Inscrire à une ligne donnée du second ordre un polygone rectiligne fermé, d'un nombre de côtés donné, tel que certains côtés de rangs désignés passent par des points donnés, et que les côtés restans de rangs également désignés aient des longueurs données ?

I. Circonscrire à une ligne donnée du second ordre un polygone rectiligne fermé, d'un nombre de côtés donné, tel que certains sommets de rangs désignés soient sur des droites données, et que les sommets restans de rangs également désignés appartiennent à des angles de grandeur donnée ?

II. Inscrire à une surface donnée du second ordre un polygone rectiligne gauche, d'un nombre de côtés donné, tels que certains côtés de rangs désignés passent par des points donnés, et que les côtés restans de rangs également désignés aient des longueurs données ?

II. Circonscrire à une surface donnée du second ordre un angle *polyèdre gauche* fermée (*), d'un nombre de faces déterminé, dont certaines arêtes de rangs désignés soient sur des plans donnés, et dont les autres de rangs également désignés appartiennent à des angles dièdres d'une grandeur donnée ?

(*) A défaut d'autres, nous employons ici l'expression *angle polyèdre gauche*, pour exprimer l'espace indéfini compris entre une suite de plans qui se succèdent consécutivement, sans passer par un même point. Une telle surface a, comme les surfaces courbes développables, deux *nappes* et une *arête de rebroussement*, qui est un polygone gauche.

GNOMONIQUE.

Note sur le tracé graphique des cadrans solaires ;

Par M. SARRUS, docteur agrégé ès sciences.

A la page 219 du XV.^e volume du présent recueil, nous avons indiqué une méthode graphique fort simple pour tracer des cadrans solaires sur toutes sortes de surfaces planes, inclinées et déclinantes, sans qu'on ait aucun besoin de déterminer à l'avance l'inclinaison et la déclinaison du plan sur lequel on opère, ni même de connaître la latitude du lieu pour lequel le cadran est destiné.

En réfléchissant de nouveau sur ce sujet, il nous a paru que notre procédé, déjà si simple, était encore susceptible de quelques simplifications assez notables, soit sous le point de vue théorique, soit sous le point de vue pratique ; et c'est à les faire connaître que nous consacrons cette note.

Nous rappellerons d'abord que, dans tout cadran solaire du genre de ceux dont il est question ici, les heures sont indiquées par la coïncidence de l'ombre solaire d'une verge rectiligne, parallèle à l'axe de la terre et pouvant, à raison de l'extrême distance du soleil, être réputée l'axe même de son mouvement diurne apparent, avec une suite de droites concourant en un même point. Ces droites sont ce qu'on appelle les *lignes horaires ;* leur point de concours est le *centre du cadran* ; et la verge rectiligne dont l'ombre indique les heures et qui perce le cadran à son centre, en est dite l'*axe* ou le *style*. On appelle *soustylaire* la projection orthogonale du style sur le plan du cadran.

Quelquefois on remplace le style par une plaque métallique circulaire, percée à son centre d'un petit trou et fixée solidement en avant du cadran, dont le centre est alors le point où ce cadran serait percé par la parallèle à l'axe du monde conduite par le centre du trou de la plaque. C'est alors la coïncidence successive de l'extrémité du rayon solaire qui passe par le trou avec les lignes horaires qui indique les heures. Nous supposerons même, dans tout ce qui va suivre, qu'il en est ainsi, parce qu'en effet, c'est par là qu'il convient de commencer; sauf ensuite, quand on a déterminé le centre du cadran, à remplacer la plaque par un style dirigé de ce centre au centre du trou de cette plaque. Nous supposons, en outre, qu'on a déterminé à l'avance la projection orthogonale du centre du trou de la plaque sur le plan du cadran. Cette projection sera un point de la soustylaire, laquelle doit passer en outre par le centre du cadran.

Nous avons ici deux objets à nous proposer, savoir: 1.° la détermination du centre du cadran, qui entraîne celle de la soustylaire; 2.° le tracé de la méridienne et par suite celui des autres lignes horaires.

En faisant abstraction du changement journalier en déclinaison, ou du moins en choisissant une époque de l'année pour laquelle ce changement est insensible dans l'intervalle d'un jour, le soleil décrit chaque jour un parallèle à l'équateur céleste; et par conséquent le rayon solaire mobile qui passe par le trou de la plaque et que nous supposons réduit à une ligne droite mathématique, trace dans l'espace une surface conique de révolution, dont les deux nappes ont pour sommet commun le centre du trou de la plaque. L'axe du double cône, coïncidant avec l'axe de l'équateur céleste, est aussi l'axe du cadran, qui a conséquemment pour centre le point où son plan est percé par cet axe.

Si, à deux époques quelconques d'un même jour, on marque, sur le plan du cadran, deux images du trou de la plaque, les droites qui joindront les centres de ces images au centre du trou seront deux arêtes du cône ; de sorte que le plan perpendiculaire au leur qui passera par la droite qui divise leur angle en deux parties égales contiendra l'axe du cône, et par suite le centre du cadran qui est un point de cet axe. La trace de ce plan sur le plan du cadran contiendra donc aussi le centre cherché.

Si, au lieu de deux images du trou de la plaque, on en a marqué trois, on aura trois arêtes du cône qui, combinées deux à deux, détermineront trois plans se coupant suivant son axe ; les traces de ces trois plans sur celui du cadran devront donc concourir en un même point qui en sera le centre. Voyons donc comment ces traces pourront être déterminées par une construction plane.

A une même distance quelconque du sommet du cône, soient pris trois points sur les arêtes dont il vient d'être question, et considérons ces points comme les centres de trois sphères égales, d'un rayon arbitraire, assez grand toutefois pour qu'elles se coupent deux à deux et qu'il en soit de même de leurs traces sur le plan du cadran ; les plans radicaux de ces trois sphères seront visiblement les trois plans que nous avons dit contenir l'axe du cône, qui en sera ainsi l'axe radical (*) ; d'où il suit que le centre du cadran ne sera autre que le centre radical des traces de ces trois sphères sur ce plan, lesquelles traces sont très-faciles à déterminer. Or, de là résulte la construction suivante :

Soient O (fig. 1) la projection orthogonale sur le plan du cadran, du centre du trou de la plaque et P, P′, P″ trois images

(*) Voy. la page 378 du précédent volume.

de ce trou sur le même plan. A OP, OP′, OP″, soient élevées en O des perpendiculaires OS, OS′, OS″, d'une longueur commune égale à la hauteur perpendiculaire du centre du trou de la plaque au-dessus du plan du cadran, soient menées SP, S′P′, S″P″, sur lesquelles soient prises les longueurs égales arbitraires SA, S′A′, S″A″. Des points A, A′, A″, comme centres et avec un même rayon arbitraire suffisamment grand, soient décrits des arcs coupant respectivement OP, OP′, OP″, en E et F, E′ et F′, E″ et F″. Sur EF, E′F′, E″F″ comme diamètres soient décrits trois cercles se coupant deux à deux en G et H, G′ et H′, G″ et H″; leurs axes radicaux GH, G′H′, G″H″, se couperont en C, centre radical de ces trois cercles et conséquemment centre du cadran, dont OC sera ainsi la soustylaire.

On sait, en outre que si, du centre du trou de la plaque, on fait descendre un fil à plomb, jusqu'au plan du cadran, le point où ce fil le rencontrera sera un point de la méridienne ou ligne de midi; et, comme cette ligne doit d'ailleurs passer par le centre du cadran, elle sera tout-à-fait déterminée.

Nous avons donné, dans notre premier article, pour déterminer les autres lignes horaires la méthode que l'on rencontre dans la plupart des traités de gnomonique; en observant, toutefois, que souvent elle exige qu'on opère sur le prolongement du plan du cadran. A la vérité, nous avons observé qu'on pourrait parer à cet inconvénient; mais le moyen que nous avons indiqué pour cela ajouterait à la complication du procédé. Il est une autre manière de parvenir au but qui n'est point sujette à cette inconvénient, et qui n'étend jamais les constructions au-delà de l'espace que le cadran doit embrasser. Elle est fondée sur un lemme qui ne paraît pas être connu, et que nous allons d'abord démontrer.

Soit AB (fig. 2) une corde quelconque d'un cercle et DE un diamètre perpendiculaire sur son milieu F. Par l'un quelconque G des points de l'arc DBE et par le point F soit menée une droite rencontrant de nouveau la circonférence en H. Soit menée DH, coupant AB en K, puis EK rencontrant de nouveau la circonférence en L; il arrivera alors que les angles DEL et DHG seront égaux et qu'ainsi les arcs DAL et DBG, dont les moitiés servent de mesure à ces angles seront aussi égaux. En effet, si l'on mène la corde EH, à cause des deux triangles rectangles KHE et KFE, dont KE est l'hypothénuse commune, le quadrilatère EF, HK sera inscriptible à un cercle ayant KE pour diamètre; d'où il suit que les angles FEK et DHF mesurés par la moitié du même arc de ce cercle, sont égaux.

Donc, réciproquement, si, ayant pris les arcs DBG et DAL égaux entre eux, on mène GH, DH et EL; le point d'intersection K des deux dernières droites sera situé sur AB. Si donc on a besoin de mener par le point E une droite faisant avec EF un angle donné, puis du point D une droite au point K où celle-là rencontre AB, on pourra, au lieu de cela, prendre un arc DBG, double de celui qui mesurerait l'angle donné, mener ensuite GF rencontrant de nouveau la circonférence en H; et alors DH sera la droite cherchée. Or, on conçoit que, si l'angle donné différait peu d'un angle droit, le point K pourrait se trouver fort loin, sur le prolongement de AB, tandis que, par le dernier procédé, la construction ne sort jamais du cercle dont DE est le diamètre.

Voici donc, d'après ces remarques, à quoi se réduit le tracé des lignes horaires. Soient, comme dans notre premier article, C (fig. 3) le centre du cadran, O la projection sur son plan du centre du trou de la plaque et conséquemment CO la direction de la soustylaire. Soit élevée à CO au point O la perpendiculaire OΣ, égale à la hauteur du centre du trou de la plaque au-dessus du plan du cadran. Soit menée CΣ et par le point Σ à cette droite la perpendiculaire ΣT, coupant en T le prolongement de CO. Soit prolongée CT, au-delà de T, d'une quantité Tσ égale à TΣ; sur Cσ, comme diamètre, soit décrite une circonférence, et soit enfin menée, par le point T, l'équinoxiale GH, perpendiculaire à ce diamètre.

Soit CM la ligne du midi, que nous avons enseigné à déterminer ci-dessus, coupant l'équinoxiale en M'. Soit menée σM', coupant de nouveau la circonférence en m, et soit pris l'arc Co égal à Cm. Soit divisée la circonférence, à partir du point o, en douze parties égales, aux points o, 1, 2, 3,....9, 10, 11. Alors pour construire, par exemple, la ligne de neuf heures, on joindra le point 9 au point T, par une droite rencontrant de nouveau la circonférence en n et la droite Cn sera la ligne cherchée.

En traduisant en analyse les diverses constructions que nous venons d'indiquer, on obtiendrait vraisemblablement les formules trigonométriques les plus simples, pour le calcul des cadrans solaires sur toutes sortes de plans.

STATIQUE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur le centre de gravité du tétraèdre;

Par M. GERGONNE.

ON démontre d'ordinaire, dans les élémens, que le centre de gravité du volume d'un tétraèdre est sur la droite qui joint un quelconque des sommets au centre de gravité de l'aire de la face opposée; on démontre ensuite que ce point est aux trois quarts de la longueur de cette droite, à partir de celle de ses deux extrémités qui coïncide avec l'un des sommets. On en conclut aisément que le centre de gravité du volume d'un tétraèdre est le même que le centre commun de gravité de quatre masses égales quelconques, situées à ses sommets (*); d'où il résulte finalement que *le centre de gravité du volume d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques.*

De toutes les manières de signaler la situation de ce point, cette dernière est certes bien la plus simple et la plus symétrique ; et, pour cette raison, on peut désirer d'y parvenir directement, et sans la faire dépendre d'une suite d'autres. C'est une chose extrêmement facile, comme on va le voir,

Soit ABCD (fig. 4) le tétraèdre dont il s'agit, et soit EF la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques AB et CD. Concevons le tétraèdre décomposé en élémens plans, parallèles à la fois à ces deux arêtes ; ces élémens ayant deux côtés opposés parallèles à AB et les deux autres côtés opposés parallèles à CD, seront tous des parallélogrammes. Soit GHKL l'un d'eux, ayant ses deux côtés GL et HK parallèles à AB, et ses deux côtés GH et KL parallèles à CD ; et soit P le point où cet élément est percé par EF.

Le plan conduit par AB et par le point F coupera les côtés opposés GH et KL en leurs milieux M et N ; et le point P sera le milieu de MN, c'est-à-dire, le milieu de la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés du parallélogramme et conséquemment son centre de figure. Ce sera donc aussi le centre de gravité de l'élément. Tous les élémens du tétraèdre ont donc leur centre de gravité sur EF ; cette droite contient donc aussi le centre commun de gravité de tous ces élémens et conséquemment le centre de gravité du volume du tétraèdre.

Ainsi, il demeure déjà établi, par ce qui précède, que *le centre de gravité du volume d'un tétraèdre est sur l'une quelconque des trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposés ;* et on

(*) Cette dernière proposition est due à Roberval.

en pourrait déjà conclure, au besoin, que ces trois droites concourent en un même point, centre de gravité cherché ; il resterait donc seulement à établir que ce point en est le milieu commun.

Mais ces deux dernières propositions deviendront manifestes si l'on considère que deux couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre sont les quatre côtés d'un quadrilatère gauche. On sait, en effet, que le quadrilatère dont les sommets sont les milieux de ses côtés est un parallélogramme, dans lequel les deux diagonales se coupent à leur milieu commun. Or, on voit que ces diagonales ne sont autre chose que les droites qui joignent les milieux de deux systèmes d'arêtes opposées du tétraèdre.

Quant au centre de gravité de la surface d'un tétraèdre; en se rappelant que *le plan qui divise en deux parties égales l'un des angles dièdres d'un tètraèdre partage l'arête opposée en deux segmens proportionnels aux aires des faces correspondantes* (*Annales*, tom. III, pag. 317), on s'assurera aisément que ce centre de gravité est *le centre de la sphère inscrite au tètraèdre dont les sommets sont les centres de gravité des aires des faces du tètraèdre dont il s'agit ;* théorème tout-à-fait analogue à celui que M. Poinsot a donné, dans sa Statique, sur le centre de gravité du périmètre d'un triangle.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences ;

Par M. PONCELET.

(Extrait d'une lettre de l'Auteur au Rédacteur des *Annales.*)

. . . .
. . . .

Vous désirez, Monsieur, que je vous donne quelques détails relativement au dernier mémoire que j'ai présenté à l'Académie des sciences, et sur lequel, dites-vous, M. Arago a piqué votre curiosité sans la satisfaire. Je vais essayer de vous donner une idée des recherches qui font le sujet de ce mémoire, autant du moins que les bornes d'une lettre peuvent le permettre.

Le but que je me suis principalement proposé, et que je désirerais avoir atteint, est de rendre plus évidente encore, s'il est possible, cette sorte de *dualité* de la géométrie que vous avez vous-même mise en avant et développée d'une manière très-philosophique à la page 209 de votre XVI.e volume. J'avais déjà avancé et prouvé, ce me semble, par un nombre suffisant d'exemples, soit dans vos *Annales*, soit dans mon *Traité des propriétés projectives des figures*, qu'il n'existe, pour ainsi dire, aucune relation descriptive et suffisamment générale d'une figure donnée, sur un plan ou dans l'espace, qui n'ait son analogue, ou plutôt sa réciproque dans une autre figure, tout aussi générale que la première, et cela en vertu même de la théorie des *polaires réciproques ;* mais je n'avais fait qu'indiquer, à la hâte, les principes de cette théorie, pour le cas de l'espace, et surtout j'avais totalement négligé ce qui concerne les relations métriques d'angles et de distances, sur lesquelles d'ailleurs il n'existe absolument rien nulle part. Cette nouvelle extension étant indispensable à l'objet des recherches que j'ai depuis long-temps entreprises, sur les propriétés des lignes et surfaces d'un ordre quelconque, j'ai jugé à propos d'en faire le sujet d'un mémoire spécial qui, avec celui où j'ai traité des *Centres de moyennes harmoniques* (*), servirait d'introduction à mes recherches subséquentes.

Le but principal que je me propose, dans ce mémoire, c'est d'examiner quelle espèce de modification éprouvent une figure donnée et les relations qui lui appartiennent, lorsque l'on passe à celle qui en est la polaire réciproque, et *vice versâ*, et de réduire, en quelque sorte, à un pur mécanisme, à une simple substitution de noms et de lettres, écrites à la place les unes des autres, la traduction de toutes les affections, de toutes les propriétés tant soit peu générales qui appartiennent à une figure donnée et à sa réciproque ; enfin de montrer comment on peut, au simple énoncé d'une proposition qui se rapporte soit aux relations projectives, en général, soit aux relations d'angles des figures situées dans un plan ou dans l'espace, comment on peut, dis-je, obtenir sur-le-champ et sans recourir à aucun calcul ou raisonnement, une, deux ou trois autres propositions, tout-à-fait distinctes de la première et néanmoins tout aussi générales.

Ce mémoire est divisé en quatre parties. Dans la première, j'expose la théorie des polaires réciproques, pour le cas du plan ; je

---

(*) Voy. la pag. 349 du précédent volume.

J. D. G.

reviens ainsi, mais avec plus d'extension, sur les principes que j'avais déjà mis en avant ailleurs; en insistant plus particulièrement sur les relations de réciprocité qui concernent les figures polygonales et les lignes courbes. La discussion des affections qui surviennent dans le cours d'une ligne quelconque et qui constituent ce que l'on nomme les *points singuliers*, met en état d'assigner le véritable degré des polaires réciproques des courbes données, dans chaque cas particulier.

La seconde partie du mémoire est relative aux figures dans l'espace. J'y établis les relations de réciprocité qui existent entre les polygones rectilignes gauches et les polyèdres indéfinis et entre les polyèdres définis ordinaires qui sont polaires les uns des autres, par rapport à une surface quelconque du second ordre. Je montre ainsi l'emploi de ce principe pour la démonstration des propriétés les plus générales des polyèdres (*). Ces notions préliminaires me conduisent directement, par l'application de la loi de continuité, aux relations de réciprocité entre les courbes à double courbure et les surfaces développables, ainsi qu'entre les surfaces courbes de nature quelconque; en un mot, je généralise ici, pour le cas de l'espace, tous les principes de la première partie, relatifs aux figures comprises dans un seul plan; ce qui permet de traduire, sur-le-champ, toute relation descriptive donnée en une autre essentiellement distincte, pourvu toutefois qu'il ne s'agisse que de relations et de figures *projectives*. On peut même, à l'aide de ce principe, transporter à l'espace toute relation pareille qui n'aurait été établie que pour les figures comprises dans un seul plan. En les appliquant, en particulier, aux lignes du second ordre, ils conduisent sur les surfaces du même ordre, à un grand nombre de

---

(*) Ce sont ces relations que nous avons tenté de mettre en évidence à la page 157 de notre XV.^e volume.

J. D. G.

nouveaux théorèmes, dont quelques-uns ont été indiqués dans le supplément du *Traité des propriétés projectives* (n.os 592 et 610). Par exemple, j'ai fait voir (n.o 636) comment les nombreuses propriétés des systèmes de sphères qui, par leur généralité, appartiennent à la classe de celles qui nous occupent, comment, dis-je, ces nombreuses propriétés pouvaient s'étendre immédiatement aux systèmes de surfaces quelconques du second ordre qui ont un plan de section commune, réelle ou idéale ; or, de là on est conduit, par les principes de la théorie des polaires réciproques, aux propriétés générales qui appartiennent aux systèmes de surfaces du second ordre inscrites à un même cône, ou à deux cônes, ou même à une autre surface quelconque du même ordre.

Pour ne pas rester dans des généralités trop vagues, j'ai rapporté, dans mon mémoire, quelques-unes des propriétés des surfaces du second ordre qui ont huit points communs ou la même courbe d'intersection, et j'en ai déduit, sans discussion, les propriétés réciproques des surfaces du second ordre qui ont huit plans tangens communs ou qui sont inscrites à une même surface développable. Il en résulte, par exemple, que *les centres de toutes ces surfaces sont situés sur une même ligne droite*, *dans l'un et dans l'autre système*. Je montre pareillement comment on peut passer directement des propriétés qui appartiennent à la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques du second ordre et qui ont été démontrées n.o 611 et suivans de l'ouvrage cité, à celles qui concernent la surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre également quelconques. Cette développable n'est autre chose, comme l'on sait, que celle qui sert de limite à l'ombre et à la pénombre de l'une des surfaces du second ordre, lorsque l'autre est supposée lumineuse ; or je démontre 1.° *qu'elle est du quatrième ordre ; que ses nappes portent généralement quatre lignes de striction*, *qui sont toutes planes et du second ordre ;* 3.° *que les plans de ces quatre courbes forment*, *par leurs rencontres mutuelles*, *un tétraèdre dont chaque sommet est respectivement*, *et pour chacune* *des surfaces du second ordre proposées, le pôle de la face opposée;* 4.° *enfin, que ces mêmes quatre sommets du tétraèdre sont aussi ceux des quatre surfaces coniques du second ordre qui contiennent les courbes d'intersection des deux surfaces que l'on considère.* Ces considérations conduisent d'ailleurs à une solution géométrique très-simple du problème intéressant et proposé quelquefois à l'école polytechnique, où il s'agit de construire la courbe de séparation d'ombre et de lumières, pour le cas d'une surface quelconque du second ordre, éclairée par une sphère lumineuse, ou même par une autre surface quelconque du même ordre.

Jusqu'à présent, il n'a encore été question que des relations descriptives des figures. Dans la troisième partie du mémoire, j'examine les moyens de traduire, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, les relations d'angles en d'autres relations pareilles. Il serait trop long d'indiquer ici, même sommairement, l'esprit de la méthode que j'emploie. Je me contenterai, comme précédemment, de citer quelques-unes des conséquences des principes théoriques. Par exemple, je prouve de suite que les théorèmes des n.os 452, 481, 487 du *Traité des propriétés projectives* sont les réciproques de ceux qui ont été démontrés aux n.os 482 et 488. Je montre pareillement comment on peut traduire la construction des lignes du second ordre, au moyen d'angles constans, donnée par Newton, et en général toutes celles de la *Géométrie organique* de Maclaurin, en d'autres absolument analogues, quoique néanmoins bien différentes. Pour le cas de l'espace, je fais voir que les propriétés de la *pyramide supplémentaire* sont des conséquences immédiates de la théorie des polaires réciproques. En appliquant les principes de cette même théorie au théorème de Monge, démontré par M. Poisson à la page 240 du tome I.er de la *Correspondance sur l'école polytechnique*, lequel consiste en ce que *le lieu du sommet d'un angle trièdre trirectangle mobile, dont les faces sont constamment tangentes à une même surface du second ordre, est une surface sphérique qui lui est concentrique*, on conclut, par exemple, que *si un tel angle se meut autour d'un point quelconque de l'espace, pris pour sommet invariable, les plans qui renferment constamment trois des intersections de ses arêtes, avec une surface donnée du second ordre, demeurent perpétuellement tangens à une surface de révolution du même ordre, qui a pour foyer général le sommet fixe de l'angle mobile et qui se réduit à un point, quand ce sommet est sur la surface directrice*, comme l'a démontré M. Frégier (*Annales*, tom. VI, pag. 231 et suiv.), pour le cas particulier, qui répond d'ailleurs à celui du théorème de Monge, dans lequel la surface enveloppe de l'angle trièdre est un des *paraboloïdes*; la sphère décrite par le sommet de l'angle mobile se réduisant alors à un plan. On peut faire subir une transformation analogue aux théorèmes de MM. Hachette et Binet (*Correspondance* tom. II, pag. 71), relatifs aux angles droits dièdres qui s'appuyent sur deux droites données dans l'espace, et en général à toutes les propositions analogues concernant les angles, ce qui permet, dès à présent d'en doubler le nombre. On remarquera d'ailleurs que nos principes s'appliquent au cas où les angles sont variables ou donnés par leurs lignes trigonométriques.

Enfin, je crois devoir encore signaler l'application que j'ai faite de la théorie des polaires réciproques aux propriétés des lignes du second ordre ou des surfaces de révolution du même ordre, qui ont un *foyer commun* ou sont *confocales*. J'établis, sans discussion, d'une part, que les propriétés descriptives, et de l'autre, que les propriétés angulaires d'un tel système sont réciproques de celles qui appartiennent à un système de cercles quelconques, tracés sur un même plan, ou de sphères également quelconques, situées arbitrairement dans l'espace. Si maintenant on joint à ces propositions générales celles que j'ai déduites des principes posés dans le *Traité des propriétés projectives*, section IV, chapitre I.er, et qui consistent en ce qu'un système de lignes ou de surfaces du second ordre qui ont un foyer commun, peut être considéré comme la *perspective plane* ou *en relief* les unes des autres, et si, en outre, on substitue à quelqu'une de ces lignes ou surfaces un cercle ou une sphère, il en résultera une multitude de propositions et de rapprochemens très-curieux relativement au foyer commun des lignes et surfaces du second ordre, dont quelques-uns ont servi à M. Dupin, dans ses *Applications de géométrie*, pour établir sa théorie des faisceaux lumineux, réfléchis à leur rencontre avec une surface quelconque.

La quatrième et dernière partie du mémoire est relative aux principes à l'aide desquels on peut traduire une relation métrique donnée, de la nature de celles que j'ai considérées dans le *Traité des propriétés projectives*, en une ou en deux autres, qui appartiennent à la figure réciproque de la proposée. Cette dernière partie du mémoire offre donc le moyen de convertir, sur-le-champ, toutes les propriétés métriques de la *Théorie des transversales* en d'autres tout-à-fait distinctes. Cette traduction s'opère d'ailleurs d'une manière très-facile, par une simple substitution de lettres et de mots, mis à la place les uns des autres.

Par exemple, on sait que, si une ligne du second ordre est coupée par les directions des côtés d'un triangle quelconque ABC, en nommant R, R′ ses intersections avec AB, P, P′ ses intersections avec BC et enfin Q, Q′ ses intersections avec CA, on a

$$AR.AR'.BP.BP'.CQ.CQ'=BR.BR'.CP.CP'.AQ.AQ' ;$$

or, si l'on applique à cette propriété les principes du mémoire, on arrive à cet autre énoncé :

Si, des sommets d'un triangle ABC, *situé sur le plan d'une ligne du second ordre, on mène à la courbe trois couples de tangentes, puisqu'ayant coupé, par une droite arbitraire, le système de ces six tangentes et des trois côtés du triangle, on désigne par* a, b, c *les intersections respectives de la transversale avec les directions des côtés opposés aux angles* A, B, C*; et en outre par* p, p′, q, q′, r, r′ *ses intersections avec les couples de tangentes* *respectivement issues de* A , B; C ; *on aura , entre les divers segmens formés sur la transversale , la nouvelle relation* :

$$ar.ar'.bp.bp'.cq.cq'=br.br'.cp.cp'.aq.aq' \ ,$$

analogue à la première , bien que très-différente dans le fond.

Les principes posés dans le mémoire permettent également de traduire la relation primitive en une autre relation entre les lignes trigonométriques des angles formés par les droites de la dérivée ; enfin ils donnent des moyens pour traduire immédiatement cette même relation en d'autres qui appartiennent à des figures situées dans l'espace et dans lesquelles les angles dièdres remplaçent les angles plans. Le mémoire est terminé par quelques applications de la théorie des polaires réciproques aux propriétés métriques des courbes à double courbure et des surfaces géométriques quelconques , ainsi que par l'exposé de la notation très-simple à l'aide de laquelle on peut transformer toute propriété qui se rapporte à celles que j'ai nommées ailleurs *projectives* , en plusieurs autres très-différentes de la première et non moins générales. La conclusion de ce travail est donc que les principes qu'il contient mettent en état de doubler et de tripler même le nombre des propriétés dont il s'agit , ainsi que celui des propriétés qui concernent les angles des figures , ce qui comprend toutes celles de la *théorie des transversales* , de la *géométrie de la règle* , et une infinité d'autres plus générales encore.

Réflexion sur le précédent article ;

Par M. Gergonne.

Les esprits superficiels , ceux qui n'étudient les sciences que comme on apprend un métier , et qui n'en comptent pour rien la philosophie , pourront ne voir dans le beau travail de M. Poncelet, que quelques théorèmes nouveaux ajoutés à ceux dont nous sommes déjà en possession, et une manière nouvelle de démontrer des théorèmes déjà connus. Peut-être même des gens incapables de rien inventer eux-mêmes, viendront-ils nous prouver, avec une sorte de triomphe, que quelques-uns des théorèmes donnés pour nouveaux par l'auteur sont implicitement compris dans d'autres théorèmes déjà démontrés, il y a tant ou tant de siècles, par quelque géomètre grec ou latin bien ignoré.

Mais il s'agit ici, suivant nous, de bien autre chose; il ne s'agit pas moins que de commencer, pour la géométrie, mal connue depuis près de deux mille ans qu'on s'en occupe, une ère tout-à-fait nouvelle; il s'agit d'en mettre tous les anciens traités à peu près au rebut, de leur substituer des traités d'une forme tout-à-fait différente, des traités vraiment philosophiques qui nous montrent enfin cette étendue, réceptacle universel de tout ce qui existe, sous sa véritable physionomie, que la mauvaise méthode d'enseignement adoptée jusqu'à ce jour ne nous avait pas permis de remarquer; il s'agit, en un mot, d'opérer dans la science une révolution aussi impérieusement nécessaire qu'elle a été jusqu'ici peu prévue.

Ce n'est précisément pas parce que la nouvelle doctrine promet une moisson plus abondante de théorèmes qu'elle mérite toute notre attention. Qu'importent, en effet, quelques théorèmes de plus qui demeureront peut-être éternellement sans applications? Qu'importe, par exemple, que quelques-unes des solutions données récemment par M. le docteur Pluker (pag. 37) soient déjà connues et soient même moins générales et moins complètes que celles que d'autres géomètres ont pu donner des mêmes problèmes, comme la remarque nous en a déjà été faite plusieurs fois.? La théorie des polaires réciproques aurait même fort bien pu épargner à l'auteur la moitié de ses démonstrations, comme elle nous les a épagnées à nous-mêmes dans notre mémoire sur les *lois générales qui régissent les surfaces courbes* (pag. 214); mais ici le fond est de peu d'importance, et la forme est à peu près tout; et ce qui recommande principalement le petit mémoire de M. Pluker, c'est qu'il nous montre les deux gémétries marchant constamment de front, sans qu'aucune d'elles ait rien à emprunter à l'autre. C'est là aussi ce que nous avons eu principalement en vue, soit dans notre essai sur les *lois générales qui régissent les polyèdres* (tom. XV, pag. 157), soit dans un autre mémoire plus étendu (tom. XVI, pag. 209).

Mais, comme toutes les révolutions, celle qui se prépare dans la science de l'étendue, et que M. Poncelet regarde peut-être à tort comme étant presque achevée, doit compter pour adversaires, ou tout au moins pour spectateurs indifférens, tous ceux qui n'y auront pas coopéré; et déjà n'entendons-nous pas bourdonner autour de nous que les recherches du genre de celles dont s'occupe M. Poncelet n'excitent, à l'époque où nous nous trouvons, qu'un médiocre intérêt, que cela est à peu près *passé de mode?* Qui sait même si l'on n'aura pas fait des tentatives pour entraîner leur estimable auteur sur un autre terrain et le détourner d'un genre de méditations dans lequel on est contraint d'avouer toute sa supériorité?

Au surplus, si les doctrines que M. Poncelet cherche à faire prévaloir ne sont pas encore aussi répandues qu'elles méritent de l'être, peut-être y a-t-il aussi un peu de sa faute, et peut-être pourrions-nous nous glorifier d'avoir mieux servi la cause qu'il défend qu'il ne l'a servie lui-même. Ce qu'il y a de plus important et de plus éminemment philosophique dans ces recherches, c'est, ce nous semble, d'une part cette double face de la géométrie que son dernier mémoire a pour objet de mettre en évidence, et de l'autre la possibilité de démontrer, sans aucune sorte de calculs ni de constructions, la totalité peut-être des théorèmes qui ne dépendent ni des relations d'angles ni des relations de longueur. Or, le dernier mémoire de M. Poncelet n'est encore connu jusqu'ici que de peu de personnes; et, bien que les points principaux en soient indiqués dans le *Traité des propriétés projectives*, c'est d'une manière si fugitive qu'il n'en est fait aucune mention ni dans le rapport des commissaires de l'académie, ni dans la préface de l'auteur, ni même dans son introduction de trente pages. N'est-on pas fondé, d'après cela, à penser que M. Poncelet avait d'abord regardé cette partie de son ouvrage comme très-accessoire, surtout lorsqu'on lui voit recommander les élémens d'Euclide, et qu'on le voit débuter par des proportions et des calculs ?

L'ouvrage de M. Poncelet est sans doute rempli d'une multitude de choses très-remarquables ; mais peut-être l'auteur aurait-il bien fait d'en faire le sujet d'autant d'ouvrages séparés ; d'autant que, parmi les doctines qu'il cherche à faire prévaloir, il en est qui sont tout au moins sujettes à controverse et dont le mélange avec les autres peut faire tort à celles-ci, qui sont au contraire au-dessus de toute attaque.

Quant à nous, convaincus comme nous le sommes que, loin de rien gagner en brusquant les révolutions, on ne fait le plus souvent ainsi qu'en reculer l'accomplissement, et convaincus également qu'il est des choses qu'il faut redire bien de fois avant de les faire recevoir, nous avons embrassé un horizon moins vaste. Certains, même avant que M. Poncelet ait rien publié sur ce sujet, que toute la partie de la géométrie qui ne dépend pas des relations métriques était double, nous avons saisi toutes les occasions de rendre cette vérité sensible ; et pourtant, malgré tous nos efforts, nous n'oserions nous flatter d'y avoir complètement réussi. Toujours est-il vrai, du moins, qu'aujourd'hui encore nous recevons de diverses parts des énoncés de théorèmes, susceptibles de l'espèce de traduction qui fait le sujet des méditations de M. Poncelet, sans que leurs auteurs aient l'air de se douter que cette traduction soit possible.

Il est au surplus un obstacle réel à la propagation facile des doctrines que M. Poncelet et nous cherchons à populariser, et cet obstacle, comme nous l'avons déjà insinué plusieurs fois, réside dans l'obligation où nous nous trouvons de parler la langue créée pour une géométrie bien plus restreinte que celle qui nous occupe. Condillac a sans doute fort exagéré en prétendant réduire toute science à une langue bien faite ; mais ce qu'on ne saurait raisonnablement contester, et ce que prouve victorieusement le progrès immense qu'a dû l'algèbre au perfectionnement progressif de ses notations, c'est que, quand la langue d'une science est bien faite, les déductions logiques y deviennent d'une telle facilité, que l'esprit va pour ainsi dire de lui-même au-devant des vérités nouvelles. Or, M. Poncelet a pu souvent éprouver ce que nous avons éprouvé nous-mêmes; savoir, qu'il est certaines propositions, évidemment susceptibles de l'espèce de traduction qui fait le sujet de son mémoire, et que pourtant on ne parvient pas à traduire sans quelque contention d'esprit ; et cela uniquement parce que les mots se refusent à les exprimer nettement. La double existence des propriétés de l'étendue pourra donc bien rester encore un mystère pour le gros des géomètres, aussi long-temps que, par exemple, on devra remplacer, dans les traductions, le mot unique *diagonale* par cette suite de mots *points de concours des directions de deux côtés non consécutifs*. L'embarras est bien plus grand encore dans la géométrie de l'espace, où nous n'avons pas même de périphrase pour caractériser nettement la surface polyèdre dont une surface développable est la limite; car M. Poncelet conviendra, sans doute sans peine, que l'expression de *polyèdre indéfini* qu'il emploie n'est guère préférable à celle d'*angle polyèdre gauche*, que nous avions hasardée dans un précédent mémoire.

Il sera donc nécessaire, pour présenter la nouvelle théorie sous le jour le plus avantageux, de créer d'abord une langue à sa taille, s'il est permis de s'exprimer ainsi ; mais cette langue, nous en convenons, sera difficile à bien faire, et il sera peut-être plus difficile encore, lorsqu'elle sera faite, de lui obtenir un accueil favorable de la part des géomètres.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution d'un cas particulier du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 172 du présent volume ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

PROBLÈME. *Si un angle droit se meut sur le plan d'une ligne du second ordre, de manière que ses côtés soient constamment normaux à la courbe ; quelle courbe décrira son sommet ?*

Solution. Soient d'abord la courbe une ellipse donnée par l'équation

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \;.$$

Soit (t,u) le sommet de l'angle droit mobile. L'équation d'une droite conduite par ce sommet sera de la forme

$$y-u=M(x-t) \;;$$

Si cette droite est normale à l'ellipse au point (x',y'), on devra avoir, à la fois, les trois équations

$$M=\frac{y'-u}{x'-t} \;,\quad M=\frac{a^2y'}{b^2x'} \;,\quad b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2$$

on tire des deux premières

$$x'=\frac{a^2(tM-u)}{(a^2-b^2)M}\,,\qquad y'=\frac{b^2(tM-u)M}{(a^2-b^2)M}\;;$$

valeurs qui, substituées dans la troisième, donnent, toutes réductions faites,

$$b^2t^2M^4-2b^2tuM^3+\{a^2t^2+b^2u^2-(a^2-b^2)^2\}M^2-2a^2tuM+a^2u^2=0\;.$$

Dans cette équation, l'inconnue est, comme l'on voit, la tangente tabulaire de l'angle que fait avec l'axe des x la normale menée à l'ellipse par le point (t,u). Elle est du quatrième degré parce que, généralement parlant, on peut mener quatre tangentes à une ellipse par un même point de son plan.

Soient M, M', M'', M''' les quatre racines de cette équation, on devra avoir

$$M+M'+M''+M'''=(M+M')+(M''+M''')=2\,\frac{u}{t}\,,$$

$$MM'+MM''+M'M''+MM'''+M'M'''+M''M'''=(M+M')(M''+M''')$$

$$+MM'+M''M'''=\frac{a^2t^2+b^2u^2-(a^2-b^2)^2}{b^2+t^2}\,,$$

$$MM'M''+MM'M'''+MM''M'''+M'M''M'''=MM'(M''+M''')$$

$$+M''M'''(M+M')=2\,\frac{a^2u^2}{b^2t^2}\,,$$

$$MM'M''M'''=MM'.M''M'''=\frac{a^2u^2}{b^2t^2}\,.$$

Mais il faut que deux des quatre normales soient perpendiculaires l'une à l'autre. Supposons que ce soient celles qui répondent aux tangentes tabulaires M'', M''' ; on devra avoir alors $M''M'''=-1$, ce qui changera les quatre équations ci-dessus dans les suivantes :

$$(M+M')+(M''+M''')=2\,\frac{u}{t}\ ,$$

$$(M+M')(M''+M''')+MM'=\frac{a^2t^2+b^2(t^2+u^2)-(a^2-b^2)^2}{b^2t^2}\ ,$$

$$MM'(M''+M''')-(M+M')=2\,\frac{a^2u}{b^2t}\ ,$$

$$MM'=-\frac{a^2u^2}{b^2t^2}\ .$$

Substituant dans la seconde et dans la troisième les valeurs de $M''+M'''$ et de MM', tirées de la première et de la quatrième, on aura

$$(M+M')^2-2\,\frac{u}{t}\,(M+M')+\frac{(a^2+b^2)(t^2+u^2)-(a^2-b^2)^2}{b^2t^2}=0\ .$$

$$\frac{a^2u^2-b^2t^2}{b^2t^2}(M+M')-2\,\frac{a^2u^2}{b^2t^2}\cdot\frac{t^2+u^2}{t^2}=0\ .$$

Substituant enfin, dans la première de ces deux-ci, la valeur de $M+M'$, donnée par l'autre, on obtiendra, pour l'équation en t et u du lieu cherché du sommet de l'angle droit mobile dont les côtés sont constamment normaux à l'ellipse,

$$(a^2+b^2)(t^2+u^2)(a^2u^2+b^2t^2)^2-(a^2-b^2)^2(a^2u^2-b^2t^2)^2=0\ ; \qquad (1)$$

équation du sixième degré.

Pour passer de là à l'équation polaire, il faudra faire

$$t = r\text{Cos.}\theta\ , \qquad u = r\text{Sin.}\theta\ ,$$

ce qui donnera, en substituant

$$r = \pm\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2\text{Sin.}^2\theta-b^2\text{Cos.}^2\theta}{a^2\text{Sin.}^2\theta+b^2\text{Cos.}^2\theta} = \pm\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2\text{Tang.}^2\theta-b^2}{a^2\text{Tang.}^2\theta+b^2}\ .$$

L'équation mise sous cette forme, on voit aisément 1.° que le centre de l'ellipse est un point quadruple de la courbe, puisqu'avant de tirer la valeur de r, tout était divisible par r^4; 2.° que les diamètres conjugués égaux sont tangens à la courbe, puisqu'à $r=0$ répond $\text{Tang.}\theta = \pm\frac{b}{a}$; 3.° que la courbe rencontre les axes de l'ellipse en des points pour lesquels on a $r = \pm\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, puisqu'on obtient également ces valeurs, soit qu'on fasse $\theta=0$ ou bien $\theta=90°$. Par une discussion ultérieure, on se convaincra que cette courbe est formée de quatre espaces fermés en forme de feuilles, inscrits dans les angles des diamètres conjugués égaux et formant une sorte de double lemniscate.

Si, dans l'équation polaire, on change b^2 en $-b^2$, on aura, pour l'équation de la courbe relative à l'hyperbole,

$$r = \pm\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^2\text{Tang.}^2\theta+b^2}{a^2\text{Tang.}^2\theta-b^2}\ .$$

Comme on aura toujours un facteur t^4, commun à tous les termes de l'équation, le centre de l'hyperbole sera encore, comme celui de l'ellipse, un point quadruple : mais ce point sera tout-à-fait isolé. Quant au surplus de la courbe, on voit 1.° qu'elle est imaginaire lorsqu'on a $a>b$ c'est-à-dire, quand l'angle des asymptotes est obtus ; 2.° que cette courbe est infiniment éloignée, lorsque l'hyperbole est équilatère ; 3.° enfin que, lorsque l'angle des coordonnées est aigu, elle se compose de quatre parties ayant chacune deux branches infinies, inscrites dans les angles des asymptotes, qui leur sont communes avec l'hyperbole, et coupant ses axes en des points dont les distances à l'origine sont $\pm\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

Quant à la parabole, en prenant pour son équation

$$y^2=4cx\ ,$$

et en prenant encore pour l'équation de la normale menée par le point (t, u)

$$y-u=M(x-t)$$

on devra avoir

$$M=\frac{y-u}{x-t}\ ,\qquad M=-\frac{y}{2c}\ ;$$

ces deux équations donneront

$$x=\frac{(t-2c)M-u}{M}\ ,\qquad y=-2cM\ .$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la parabole, elle deviendra

$$c^2M^3-c(t-2c)M+cu=0\ .$$

En représentant par M, M', M'' les trois racines de cette équation, on aura

$$M+M'+M''=M+(M'+M'')=0\ ,$$

$$MM'+MM''+M'M''=M(M'+M'')+M'M''=\frac{2c-t}{c}\ ,$$

$$MM'M''=M.M'M''=-\frac{u}{c}\ .$$

Or, il faudra encore poser ici, comme ci-dessus $M'M''=-1$, au moyen de quoi ces trois équations deviendront

$$M+(M'+M'')=0\ ,\quad M(M'+M'')=\frac{3c-t}{c}\ ,\quad M=\frac{u}{c}\ .$$

En substituant dans les deux premières la valeur de M donnée par la dernière, on aura

$$M'+M''=-\frac{u}{c}\ ,\qquad M'+M''=\frac{3c-t}{u}\ ;$$

égalant enfin ces deux valeurs, on obtiendra pour l'équation en t et u du sommet de l'angle droit mobile

$$u^2=c(t-3c)\ ;$$

ce lieu est donc une parabole de même axe que la première, mais d'un paramètre quatre fois moindre. La distance de son sommet au sommet de la première est triple de la distance du sommet de celle-ci à son foyer.

On aurait pu, au surplus, déduire ce résultat de l'équation (1), en y changeant d'abord t en $t-a$, pour amener l'origine au sommet négatif du grand axe, changeant ensuite b^2 en $\frac{ap}{2}$, développant, réduisant et supposant enfin a infini.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie.

I. CINQ rayons vecteurs d'une ellipse étant représentés par a, b, c, d, e, et son paramètre par p, si l'on fait

$$\text{Ang.}(b,c)+\text{Ang.}(d,e)=\alpha\ ,$$

$$\text{Ang.}(c,d)+\text{Ang.}(e,a)=\beta\ ,$$

$$\text{Ang.}(d,e)+\text{Ang.}(a,b)=\lambda\ ,$$

$$\text{Ang.}(e,a)+\text{Ang.}(b,c)=\delta\ ,$$

$$\text{Ang.}(a,b)+\text{Ang.}(c,d)=\varepsilon\ ;$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}p=\frac{\text{Sin}\,\alpha+\text{Sin.}\beta+\text{Sin.}\gamma+\text{Sin.}\delta+\text{Sin.}\varepsilon}{\dfrac{\text{Sin.}\alpha}{a}+\dfrac{\text{Sin.}\beta}{b}+\dfrac{\text{Sin.}\gamma}{c}+\dfrac{\text{Sin.}\delta}{d}+\dfrac{\text{Sin.}\varepsilon}{e}}\ .$$

II. Si sur le grand axe d'une demi-ellipse pris pour petit axe, et du même côté, on décrit une autre demi-ellipse, semblable à la première, et qu'on leur mène ensuite une ordonnée commune les coupant en deux points ; la droite menée du centre à l'un de ces points sera perpendiculaire à la tangente menée par l'autre.

Problème de statique.

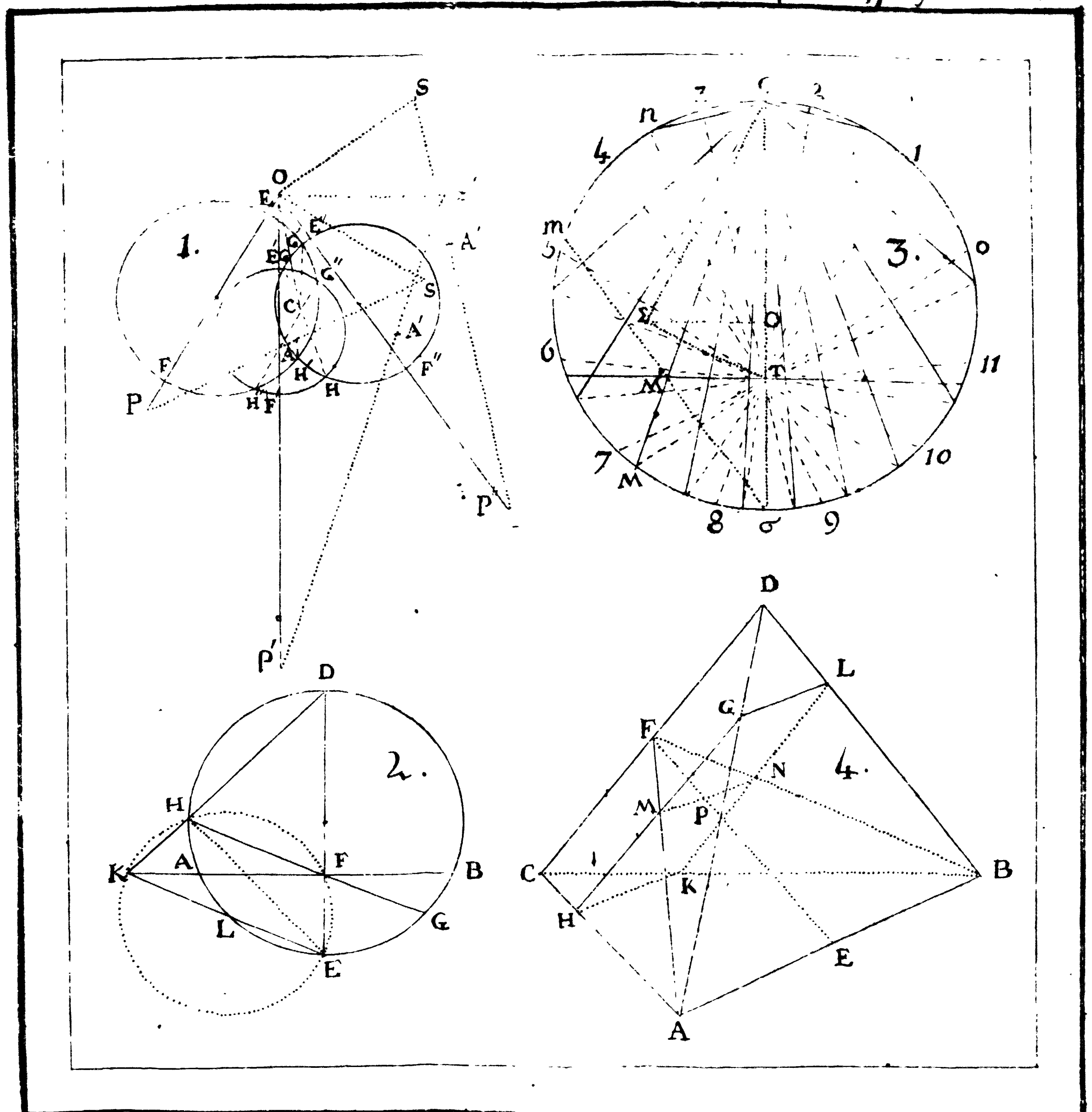
Quelle est la plus petite de toutes les cordes uniformément pesantes, parfaitement flexibles et inextensibles qui, passées dans deux anneaux fixes, sans frottement, situées à une distance donnée l'un de l'autre, sur une droite infinie, donnée de position, sont maintenues en équilibre par le poids de leurs extrémités pendant verticalement ?

Problèmes de géométrie.

I. Quelle est l'ellipse la plus approchante du cercle que l'on puisse circonscrire ou inscrire à un quadrilatère donné ?

II. Quelle est la surface conique du second ordre la plus approchante du cône droit que l'on puisse circonscrire ou inscrire à un angle tétraèdre donné ?

III. Quelle est l'ellipsoïde la plus approchante de la sphère, entre toutes celles que l'on peut faire passer par huit, sept, six ou cinq points donnés dans l'espace, ou entre toutes celles qu'on peut rendre tangentes, à la fois, à huit, sept, six ou cinq plans donnés ?



J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE PURE.

Théorie* générale des contacts et des intersections des cercles ;

Par M. Steiner.

Extraite du Journal allemand de M. *Crelle* ;

Par M. Gergonne.

On a vu dans le présent recueil (tom. I , pag. 196 , 343 et 347 , tom. II , pag. 60 et 165 , et tom. X , pag. 289) à quel point est difficile le problème vulgairement appelé *Problème de Malfatti*, lequel consiste , comme l'on sait , à *inscrire à un triangle scalène donné trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux des côtés du triangle.* Son analogue dans l'espace , que nous avons proposé (tom. I , pag. 196), sans en espérer de solution , consiste à *inscrire à un tétraèdre donné quelconque quatre sphères telles que chacune d'elles touche les trois autres et trois des faces du tétraèdre ?*

En considérant que , sur un plan , les points et les droites peuvent être considérés comme des cercles d'un rayon nul ou infini, et qu'il en est de même des points et des plans dans l'espace, par rapport aux sphères , on aperçoit sur-le-champ que le premier de ces deux problèmes n'est qu'un cas très-particulier de celui où , *trois cercles étant donnés , on en demande trois nouveaux tels que chacun de ces derniers touche les deux autres et deux des cercles don-*

nés ? Problème dont l'analogue dans l'espace est le suivant : *Quatre sphères étant données, on en demande quatre nouvelles telles que chacune de ces dernières touche les trois autres et trois des sphères données ?* et l'on comprend, d'après cela, à quel point ces dernières doivent être difficiles.

Cependant M. Steiner, dans l'excellent journal publié à Berlin, par M. Crelle (II.ᵉ livraison, pag. 161), non content de donner de ces deux problèmes des solutions très-élégantes, annonce qu'il est en état de les étendre au cas où le nombre des cercles à décrire serait un quelconque des nombres de la forme $\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}$, où le nombre des sphères à décrire un quelconque des nombres de la forme $\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}$; et même de résoudre les problèmes analogues pour le cas où on voudrait substituer aux conditions de contact des conditions d'intersections sous des angles donnés.

M. Steiner annonce qu'il a commencé de publier sur ce sujet un ouvrage que peut-être il aurait déjà terminé si, comme il arrive d'ordinaire aux savans qui dominent le sujet qu'ils traitent, la matière ne s'était indéfiniment étendue sous sa plume. Il se contente, dans l'endroit que nous venons de citer, d'exposer les théories élémentaires sur lesquelles repose tout son travail.

On conviendra que des théories qui permettent d'atteindre sans effort à des questions aussi éminemment difficiles doivent être considérées comme fondamentales dans la géométrie et doivent mériter, à ce titre, toute l'attention des géomètres. Ces théories ne sont pourtant autres que celle des *centres*, *axes et plans de similitude*, celles des *axes*, *plans et centres radicaux*, celle enfin des *pôles*, *polaires*, *plans polaires et polaires conjuguées*, que nous avons si souvent recommandées à l'attention de nos lecteurs, et dont on a déjà tiré si bon parti dans le présent recueil (tom. XI, pag. 1, tom. XIII, pag 193 et tom. XIV, pag. 29), mais que l'auteur a tout à la fois, étendues et simplifiées d'une manière assez notable.

Nous pensons donc faire une chose très-utile pour le progrès de la géométrie pure, et conséquemment très-agréable à nos lecteurs, en offrant ici, dans un cadre resserré, les principaux points de la doctrine de M. Steiner; mais sans toutefois le suivre servilement, et en nous permettant de nous écarter un peu de sa marche, toutes les fois que nous penserons qu'il en peut résulter quelque avantage, sous le rapport de la clarté ou de la brièvete, nous exposerons, en un mot, ces théories comme nous pensons qu'elles pourraient et devraient l'être dans les traités élémentaires, en nous rappelant toutefois que nous n'écrivons pas pour des commençans; c'est-à-dire, en négligeant, pour abréger, des développemens faciles à suppléer pour tout lecteur intelligent.

Ceux de MM. les Professeurs de nos écoles publiques qui sont dans l'usage de donner des devoirs journaliers à leurs élèves, usage qui devrait être universellement adopté, trouveront dans ce qui va suivre d'abondantes ressources pour les exercer d'une manière plus profitable qu'ils ne pourraient le faire avec la plupart des problèmes qu'on leur donne ordinairement, et dont la difficulté constitue souvent tout le mérite.

§. I.

1. Deux polygones semblables sont dits *semblablement situés* sur un même plan, lorsqu'ils y sont situés de telle sorte que leurs côtés homologues se trouvent être parallèles chacun à chacun. Il peut alors arriver que les côtés homologues des deux polygones se succèdent dans le même ordre ou bien que la succession de ces côtés soit dans l'un inverse de ce qu'elle est dans l'autre. Nous dirons, dans le premier cas, que les deux polygones sont *directement semblables* et dans le second qu'ils sont *inversement semblables*.

2. Il est aisé de démontrer que, dans l'un et dans l'autre cas, si l'on joint par des droites les sommets homologues, ou plus généralement les points homologues des deux polygones, toutes ces

droites concourront en un seul et même point, seul point homologue commun que puissent avoir les deux polygones, du moins en général. Ce point a été nommé par Monge, le *centre de similitude* des deux polygones; nous le dirons centre de *similitude directe* ou centre de *similitude inverse*, suivant que les deux polygones seront *directement* ou *inversement* semblables. Ces dénominations nous paraissent d'autant plus préférables à celles d'*externe* et d'*interne* employées jusqu'ici, qu'il peut souvent arriver que le centre de similitude qu'on dit externe soit intérieur à la fois aux deux polygones et que celui qu'on dit interne leur soit extérieur à tous deux.

3. Il est aisé de démontrer 1.° que toute droite qui passe par le centre de similitude de deux polygones semblables et semblablement situés est une droite homologue commune à ces deux polygones; 2.° que réciproquement toute droite homologue commune à deux polygones semblables et semblablement situés passe par leur centre de similitude.

A cause de cette propriété nous appellerons de telles droites des *axes de similitude* de deux polygones; ce seront des axes de *similitude directe* ou de *similitude inverse*, suivant la dénomination du centre de similitude duquels ils seront issus.

4. Soient trois polygones P, P', P'', directement semblables, tracés sur un même plan, et soient d, d', d'' respectivement les centres de similitude de P' et P'', de P'' et P, de P et P'. Si, par les deux points d' et d'', on conduit une droite D, cette droite sera (3) axe de similitude directe de P'' et P, aussi bien que de P et P'; elle sera donc aussi axe de similitude directe de P' et P'' et passera conséquemment (3) par le point d; de sorte que les trois points d, d', d'' seront sur la droite D.

Supposons, en second lieu, que P' et P'' étant toujours directement semblables, P leur soit inversement semblable à tous deux. Soient alors d, i', i'' respectivement les centres de similitude de P' et P'', de P'' et P, de P et P'. Si, par les deux points i' et i'' on conduit une droite I, cette droite sera (3) axe de similitude inverse de P'' et P, aussi bien que de P et P'; elle sera donc axe de similitude directe de P et P', et passera conséquemment (3) par le point d; de sorte que les trois points d, i', i'' seront sur la droite **I.** On a donc ce théorème :

5. *Les centres de similitude de trois polygones semblables et semblablement situés sur un même plan, pris successivement deux à deux, appartiennent tous trois à une même droite.* Cette droite est évidemment la seule droite homologue commune que les trois polygones puissent avoir, du moins généralement parlant.

Une telle droite est ce que nous appellerons, à l'avenir l'*axe de similitude* de trois polygones. Ce sera un axe de *similitude directe*, si les trois polygones sont directement semblables. Ce sera, au contraire, un axe de *similitude inverse*, si deux des trois polygones sont directement semblables et que le troisième soit inversement semblable à l'un et à l'autre.

On voit par là qu'un axe de similitude directe passe par trois centres de similitude directe, tandis qu'un axe de similitude inverse passe par un seul centre de similitude directe et par deux centres de similitude inverse.

6. Si, en particulier, les polygones étaient réguliers, leurs centres en seraient des points homologues, lesquels devraient conséquemment se trouver en ligne droite avec leur centre de similitude, dont les distances à ces deux centres seraient proportionnelles à leurs côtés et par suite proportionnelles aux rayons des cercles inscrit ou circonscrit.

7. A l'avenir lorsqu'il s'agira de deux polygones réguliers semblables et semblablement situés, nous ne réputerons côtés homologues que ceux-là seulement qui seront parallèles ; et en conséquence les sommets homologues seront ceux-là seulement qui se trouveront en ligne droite avec le centre de similitude.

§. II.

8. Supposons présentement que les polygones, toujours réguliers,

soient d'un nombre pair de côtés ; comme alors chaque côté de l'un sera parallèle à la fois à deux côtés opposés de l'autre, deux pareils polygones pourront être réputés, à la fois, directement et inversement semblables ; ils auront donc, à la fois (2), un centre de similitude directe et un centre de similitude inverse, dont les distances à leurs centres seront, l'une et l'autre (6), proportionnelles aux rayons des cercles inscrit et circonscrit ; ils auront donc à la fois des axes de similitude directe et des axes de similitude inverse, et la droite qui joindra leurs centres de similitude appartiendra seule aux axes des deux sortes.

9. Que l'on conçoive ensuite trois pareils polygones tracés sur un même plan ; en les considérant tour à tour deux à deux, on leur trouvera trois centres de similitude directe et trois centres de similitude inverse, et il arrivera (4) que leurs trois centres de similitude directe appartiendront à une même ligne droite et qu'en outre chacun d'eux sera en ligne droite avec deux des centres de similitude inverse ; de telle sorte que ces six points se trouveront distribués trois à trois aux intersections de quatre droites.

Les trois polygones auront donc à la fois, dans ce cas, un axe de similitude directe et trois axes de similitude inverse, lesquels seront tous quatre des droites homologues communes.

§. III.

10. Deux cercles tracés sur un même plan peuvent être considérés comme deux polygones réguliers d'une infinité de côtés en nombre pair, semblablement situés sur ce plan et conséquemment (8) comme étant à la fois *directement* et *inversement* semblables, et ont, en cette qualité, deux centres de similitude, l'un de *similitude directe* et l'autre de *similitude inverse*, situés tous deux sur la droite indéfinie qui joint leurs centres, et dont les distances à ces deux centres sont respectivement proportionnelles aux rayons des deux cercles.

Deux tels cercles ont donc une infinité d'axes de similitude distribués en deux séries, savoir des *axes de similitude directe* et des *axes de similitude inverse*; et les axes de chaque série concourent tous au centre de similitude de même dénomination. La droite qui joint les centres des deux cercles, et qui contient conséquemment les deux centres de similitude, est la seule qui appartienne à la fois aux deux séries.

11. A l'avenir, lorsque nous considérerons sous ce point de vue le système de deux cercles, nous ne réputerons comme points homologues de leurs circonférences (7) que ceux pour lesquels les rayons seront parallèles; deux pareils points seront toujours en ligne droite avec l'un des centres de similitude; nous les dirons *directement* ou *inversement* homologues, suivant la dénomination de celui des deux centres de similitude avec lequel ils se trouveront en ligne droite.

12. Si, par l'un quelconque des deux centres de similitude de deux cercles, on mène une tangente à l'un de ces cercles, elle devra l'être aussi à l'autre (3); de sorte que *toute tangente commune à deux cercles coupe la droite qui joint leurs centres en un de leurs centres de similitude;* savoir, en leur centre de *similitude directe* ou en leur centre de *similitude inverse*, suivant que les deux cercles sont situés d'un *même côté* ou de *différens côtés* de la tangente.

13. Il suit de là que, *si deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, leurs tangentes communes extérieures concourront à leur centre de similitude directe, tandis que leurs tangentes communes intérieures concourront à leur centre de similitude inverse*, ce qui offre un moyen commode de mener une tangente commune à deux cercles dont les centres de similitude sont connus.

14. Donc, en particulier, *le point de contact de deux cercles qui se touchent en est un centre de similitude*; savoir, de similitude *directe* ou de similitude *inverse*, suivant que les deux cercles se touchent intérieurement ou extérieurement.

15. Il suit de ce qui a été dit ci-dessus (9) que *les centres de similitude directe de trois cercles tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, appartiennent tous trois à une même droite. En outre, chacun d'eux est en ligne droite avec deux des centres de similitude inverse de ces trois mêmes cercles pris aussi successivement deux à deux*; de sorte que ces six points sont distribués trois à trois aux intersections de quatre droites.

La première de ces droites sera ce que nous appellerons à l'avenir l'*axe de similitude directe* des trois cercles; les trois autres seront dites leurs *axes de similitude inverse*; ce sont évidemment les seules droites homologues communes que puissent avoir trois cercles tracés sur un même plan.

Ainsi, trois cercles étant représentés par C, C′, C″, si d et i, d' et i', d'' et i'' représentent respectivement les centres de similitude directe et inverse de C′ et C″, de C″ et C, de C et C′; les trois points d, d', d'' appartiendront à une même droite D, les trois points d, i', i'' à une même droite I, les trois points d', i'', i à une même droite I′ et les trois points d'', i, i' à une même droite I″; et ces quatre droites D, I, I′, I″ en sont les quatre axes de similitude.

16. Il suit de là en particulier (12) que, *lorsque trois cercles sont extérieurs les uns aux autres, les points de concours des tangentes communes extérieures à ces cercles, pris tour à tour deux à deux appartiennent tous trois à une même droite. En outre, chacun d'eux est en ligne droite avec deux des trois points de concours des tangentes communes intérieures à ces cercles, pris aussi tour à tour deux à deux.*

17. On voit aussi que, *si un cercle variable de grandeur et de situation se meut sur le plan de deux autres cercles, de grandeur et de situation fixes, les deux droites qui joindront les centres de similitude de même dénomination de ce troisième cercle avec les deux autres, mobiles comme lui, ne feront néanmoins que tourner sur le centre de similitude directe de ces deux cercles*; *tandis*

que les deux droites qui joindront les centres de similitude de dénomination différente tourneront constamment sur le centre de similitude inverse de ces deux mêmes cercles.

De là résulte un moyen de construire les centres de similitude de deux cercles auxquels on ne peut pas mener de tangentes communes, à l'aide d'un troisième cercle auxiliaire, extérieur à la fois à l'un et à l'autre. On pourra donc aussi construire, dans tous les cas, les quatre axes de similitude de trois cercles donnés.

18. Il résulte de ce que nous avons dit ci-dessus (14, 15) que *lorsque deux cercles sont touchés à la fois par un troisième cercle, les deux points de contact sont en ligne droite avec l'un des centres de similitude des deux premiers*; savoir, avec leur centre de similitude *directe*, ou avec leur centre de similitude *inverse*, suivant que le troisième cercle touche les deux premiers de la *même manière* ou d'une *manière différente*. Dans tous les cas, cette droite est un axe de similitude des trois cercles.

19 Réciproquement, si, par l'un quelconque des centres de similitude de deux cercles, on leur mène une sécante commune arbitraire, on pourra toujours assujettir un troisième cercle à la quadruple condition de toucher les deux premiers en deux des points où ils seront coupés par cette sécante commune; pourvu qu'on choisisse deux points pour lesquels les deux rayons ne soient pas parallèles; ce qui pourra être fait de deux manières différentes.

20. Bien qu'en général trois cercles tracés sur un même plan ne puissent avoir plus de quatre axes de similitude; on conçoit cependant que, si trois ou un plus grand nombre de cercles sont inscrits à la fois à un même angle ou à deux angles opposés par le sommet, toutes les droites conduites par ce sommet en seront des axes de similitude.

§. IV.

21. On sait que si, par un point situé comme on le voudra sur

le plan d'un cercle, on mène à ce cercle une sécante arbitraire ; le produit des distances de ce point aux deux intersections de la sécante avec la circonférence sera une quantité constante, indépendante de la direction de cette sécante. Ce produit constant est ce que M. Steiner appelle indistinctement la *puissance d'un point par rapport* à un cercle ou la *puissance d'un cercle par rapport à un point* ; et cela par analogie avec ce qu'on est convenu d'appeler *puissance de l'hyperbole*.

22. Si le point dont il s'agit est extérieur au cercle, la puissance de ce point ne sera autre chose que le quarré de la tangente menée à ce cercle par le même point. Si au contraire il lui est intérieur sa puissance sera le quarré de la moitié de la plus petite corde menée au cercle par ce point. Dans le cas particulier où le point dont il s'agit se trouverait sur la circonférence, il est clair que sa puissance serait nulle.

23. Si de ce point comme centre et avec un rayon dont le quarré soit égal à sa puissance par rapport au cercle, on décrit un autre cercle ; ce dernier sera ce que M. Gaultier, de Tours, appelle le *cercle radical* du premier qui est alors appelé *primitif* par rapport à lui (*Journal de l'école polytechnique*, XVI.e cahier, pag. 124). Si le point est extérieur au cercle primitif, les deux cercles se coupent orthogonalement et peuvent être dits indistinctement primitifs ou radicaux *réciproques* l'un de l'autre. Lorsqu'au contraire le point est intérieur au cercle primitif, celui-ci est dit primitif *simple* et l'autre radical *simple*. Leur corde commune est alors à la fois un diamètre du radical et la plus petite corde qu'on puisse mener au primitif par son centre. Dans le cas particulier où le point serait situé sur la circonférence même du cercle primitif, son cercle radical se réduirait à ce point lui-même et les deux cercles pourraient indistinctement être dits primitifs ou radicaux simples ou réciproques l'un de l'autre.

24. Réciproquement 1.° si deux cercles se coupent orthogonalement, ils seront primitifs ou radicaux réciproques l'un par rapport

à l'autre et le quarré du rayon de chacun d'eux sera la puissance de son centre, par rapport à l'autre cercle; 2.° si deux cercles se coupent de telle sorte que leur corde commune soit à la fois un diamètre de l'un et la plus petite corde menée à l'autre par son centre, le cercle qui aura cette corde commune pour diamètre sera le radical simple de l'autre, qui en sera le primitif simple, et le quarré de la moitié de cette corde sera la puissance du centre du radical par rapport au primitif.

§. V.

25. On démontre, par les élémens, que *le lieu géométrique de tous les points d'un plan tels que la différence des quarrés de leurs distances à deux points fixes de ce plan est une quantité constante, est une perpendiculaire unique et indéfinie à la droite qui joint ces deux points*; perpendiculaire dont il est d'ailleurs facile d'assigner la situation, dans chaque cas particulier, conformément aux données du problème.

D'un autre côté, il est aisé de démontrer que, si un point, à la fois extérieur ou à la fois intérieur à deux cercles, a la même puissance par rapport à ces deux cercles, la différence des quarrés des distances de ce point aux centres des deux cercles est égale à la différence des quarrés de leurs rayons et est conséquemment constante quelle que puisse être d'ailleurs la situation du point dont il s'agit sur le plan des deux cercles.

26. Donc, *le lieu géométrique de tous les points du plan de deux cercles d'égale puissance par rapport à ces deux cercles est une perpendiculaire unique et indéfinie à la droite qui joint leurs centres*, pourvu toutefois qu'on ne considère que des points à la fois extérieurs ou à la fois intérieurs aux deux cercles.

C'est cette droite, unique sur le plan de deux cercles, que M. Steiner appelle leur *ligne d'égale puissance* et que nous continuerons d'appeler, avec M. Gaultier, leur *axe radical*.

27. Lorsque l'axe radical de deux cercles les coupe, il ne saurait évidemment les couper que dans dans leurs points communs; puisqu'autrement (23) la puissance du point d'intersection serait nulle par rapport à l'un des cercles, sans l'être par rapport à l'autre. Si donc deux cercles sont entièrement intérieurs ou entièrement extérieurs l'un à l'autre, leur axe radical ne les coupera ni l'un ni l'autre; et l'on pourra de tous les points de cet axe leur mener des tangentes de même longueur.

28. Si les deux cercles se touchent, soit intérieurement soit extérieurement, leur point de contact, de puissance nulle par rapport à l'un et à l'autre (23), sera un des points de leur axe radical, qui sera ainsi leur tangente commune, de tous les points de laquelle on pourra encore conséquemment mener aux deux cercles des tangentes de même longueur.

29. Si enfin les deux cercles se coupent, leurs points d'intersection devront être, l'un et l'autre (23), des points de leur axe radical qui, de cette sorte, ne sera autre que leur corde commune, indéfiniment prolongée. Alors de tous les points de cet axe, autres que ceux de la corde commune, et conséquemment extérieurs aux deux cercles, on pourra encore leur mener des tangentes de même longueur. Quant aux points de la corde commune, intérieurs à la fois aux deux cercles, ce seront (23) les plus petites cordes menées aux deux cercles par chacun d'eux qui seront d'égale longueur.

30. Si l'on peut mener à deux cercles une tangente commune, le milieu de cette tangente sera évidemment (22) un point d'égale puissance par rapport à ces deux cercles, et conséquemment un des points de leur axe radical; d'où l'on voit que les milieux de toutes les tangentes communes que l'on peut mener à deux cercles sont sur cet axe et par conséquent en ligne droite.

31. On voit que, dans tous les cas, l'axe radical de deux cercles a une infinité de points de chacun desquels on peut leur mener quatre tangentes de même longueur. Si donc de l'un de ces points comme centre et avec la longueur commune des quatre tangentes pour

rayon, on décrit un troisième cercle, ce dernier coupera orthogonalement les deux premiers; de sorte que deux cercles tracés sur un même plan peuvent toujours être à la fois coupés orthogonalement par une infinité d'autres cercles. Il est visible que réciproquement du centre de tout cercle qui en coupe orthogonalement deux autres on peut mener à ceux-ci quatre tangentes de même longueur; d'où il suit (22) que ce centre est un des points de leur axe radical.

32. Si l'axe radical a une portion intérieure aux deux cercles et que, par l'un quelconque des points de cette portion, on leur mène, à l'un et à l'autre, les plus petites cordes qu'on puisse y faire passer, ces cordes auront même longueur et leur milieu commun en ce point, qui sera ainsi le centre d'un troisième cercle dont les quatre demi-cordes seront des rayons. Il est visible que réciproquement un cercle qui aura pour rayons les quatre demi plus petites cordes qu'on puisse mener à deux autres cercles par son centre, aura ce centre en l'un des points de leur axe radical.

33. On peut donc encore définir l'axe radical de deux cercles le lieu des centres tant des cercles qui les coupent tous deux orthogonalement que de ceux qui les coupent, de telle sorte que les cordes communes sont à la fois des diamètres du cercle coupant et les plus petites cordes qu'on puisse mener par son centre aux cercles coupés.

§. VI.

34. Soient C, C', C'', trois cercles non concentriques, tracés sur un même plan, de manière que leurs centres ne soient pas en ligne droite. Soient R, R', R'' respectivement les axes radicaux de C' et C'', C'' et C, C et C'; et soit r le point de concours de R' et R''. Ce point r sera à la fois (26) d'égale puissance par rapport à C'' et C, et d'égale puissance par rapport à C et C'; il sera donc aussi d'égale puissance par rapport à C' et C'', et sera con-

séquemment (31, 32) situé sur R ; de sorte que R, R′, R″ concourront en ce point. On a donc ce théorème :

35. *Les axes radicaux de trois cercles tracés sur un même plan, et pris tour à tour deux à deux, concourent tous trois en un même point.* C'est ce point unique, sur le plan de trois cercles, que M. Steiner appelle leur *point d'égale puissance* et que nous appellerons, avec M. Gaultier, leur *centre radical.*

36. Lorsque le centre radical de trois cercles est extérieur à l'un d'eux, il l'est aussi aux deux autres (27); et c'est aussi le seul point de leur plan duquel on puisse leur mener à tous trois des tangentes de même longueur ; c'est aussi le centre du seul cercle qui puisse les couper tous trois orthogonalement. Il n'est, dans ce cas aucun cercle qui puisse avoir pour diamètres les plus petites cordes menées à ces trois-là par son centre.

37. Si, au contraire, ce centre radical est intérieur à l'un d'eux, il le sera également aux deux autres (29). On ne pourra alors leur mener d'aucun point de leur plan des tangentes de même longueur et conséquemment aucun cercle ne pourra les couper tous trois orthogonalement ; mais leur centre radical sera le centre d'un cercle dont trois diamètres seront les plus petites cordes menées aux trois autres par ce même centre.

38. Il résulte de ce qui a été dit ci-dessus (28, 29, 35) que *les tangentes ou les cordes communes à trois cercles qui se touchent ou se coupent deux à deux concourent toutes trois en un même point, centre radical des trois cercles.*

39. On voit aussi que, *si un cercle variable de grandeur et de situation, sur le plan de deux cercles de grandeur et de situation fixe, les touche ou les coupe constamment, les tangentes ou cordes communes au premier et aux deux autres, mobiles comme lui, iront néanmoins constamment concourir sur une même droite, axe radical de ces deux-là.*

De là résulte un moyen de construire l'axe radical de deux cercles entièrement intérieurs ou entièrement extérieurs l'un à l'autre à l'aide d'un troisième cercle auxiliaire qui les coupe tous deux. On pourra donc aussi construire, dans tous les cas, le centre radical de trois cercles donnés.

40. On voit enfin que, *lorsqu'un cercle en touche deux autres, les tangentes communes à celui-là et à ces deux-ci vont concourir en un point de l'axe radical de ces derniers, centre radical des trois cercles.*

41. Réciproquement, si, par un point de l'axe radical de deux cercles, extérieur à l'un et à l'autre, on mène quatre tangentes à ces deux cercles, on pourra toujours assujettir un troisième cercle à la quadruple condition de toucher les deux autres en des points de contact de ces tangentes; ce qui pourra être fait de quatre manières différentes. Deux des quatre cercles qu'on pourra ainsi décrire toucheront les deux cercles dont il s'agit de la même manière, tandis que les deux autres les toucheront d'une manière différente.

42. Bien qu'en général trois cercles tracés sur un même plan n'aient qu'un centre radical unique, on conçoit pourtant que, si trois ou un plus grand nombre de cercles passent tous par les deux mêmes points, tous les points de la droite qui joindra ces deux-là pourront être considérés comme des centres radicaux de tous ces cercles. Nous allons même voir que des cercles peuvent avoir une infinité de centres radicaux sans passer par les deux mêmes points.

§. VII.

43. Soient M et M′ deux cercles tracés sur un même plan; ils pourront toujours (31) être coupés orthogonalement par une infinité d'autres, ayant tous leurs centres sur l'axe radical des deux premiers. Soient N, N′, N″, ... une suite de ces cercles; deux quelconques N et N′ d'entre eux seront, à leur tour, coupés orthogonalement par M et M′ dont les centres se trouveront ainsi sur leur axe radical; et comme on en peut dire autant de deux quelconques des cercles de la série N, N′, N″, ... il s'ensuit que

tous ces cercles ont pour axe radical commun la droite qui joint les centres de M et M′.

Donc tout cercle M″ qui coupera orthogonalement N et N′ aura son centre en ligne droite avec ceux de M et M′, et devra conséquemment couper orthogonalement tous les cercles de la série N, N′, N″, ...; ces cercles pourront donc être tous coupés orthogonalement par une série de cercles M, M′, M″, ... ayant tous leurs centres sur leur axe radical commun; et comme ces derniers seront tous, à l'inverse, coupés orthogonalement par les cercles de la série N, N′, N″, ... ils auront pour axe radical commun la droite sur laquelle les centres de ces derniers se trouvent situés.

44. Il demeure donc établi par là qu'on peut toujours construire deux séries de cercles ayant leurs centres distribués sur deux droites perpendiculaires entre elles, dont chacune est l'axe radical commun de ceux qui ont leurs centres sur l'autre; et il est clair qu'alors chacun des cercles de chaque série sera coupé orthogonalement par tous les cercles de l'autre série. On voit en outre qu'on pourra toujours se donner à volonté deux des cercles de l'une des séries.

45. Si deux des cercles de l'une des deux séries se coupent, tous les cercles de cette série devront passer par les points d'intersection de ces deux-là et avoir ainsi une corde commune unique, puisqu'autrement (27, 28, 29) ils ne pourraient avoir un axe radical commun; mais il est aisé de voir qu'alors les cercles de l'autre série ne se couperont pas. Les tangentes menées à tous les cercles de l'une quelconque des deux séries par le centre de l'un quelconque des cercles de l'autre série seront d'égale longueur; et les points de la corde commune à tous les cercles de la première série seront les centres d'autant de cercles ayant pour diamètres les plus petites cordes qu'on puisse mener par ces différens points aux cercles de la seconde série.

On peut citer comme un des exemples les plus familiers de ces deux séries de cercles, les méridiens et les parallèles, dans la projection stéréographique dite de Ptolémée ou de Mercator.

45. Dans le cas particulier où deux des cercles de l'une des séries seraient tangens l'un à l'autre, tous les cercles de cette série se toucheraient en leur point de contact; et il en serait de même de tous les cercles de l'autre série; de sorte que le lieu des centres des cercles de chaque série serait une tangente commune aux cercles de l'autre série.

46. Dans le cas général, deux quelconques des cercles de la série M, M′, M″, ... ayant pour axe radical la ligne des centres des cercles de la série N, N′, N″, ..., il faut en conclure (38) que les cordes communes à l'un quelconque des cercles de cette dernière série et à tous les cercles de la série M, M′, M″, ... concourent en un même point de la ligne des centres de N, N′, N″, ... Par une semblable raison, les cordes communes à l'un quelconque des cercles de la série M, M′, M″, ... et à tous les cercles de la série N, N′, N″, ... doivent toutes concourir en un même point de la ligne des centres des cercles de la première de ces deux séries.

§. VIII.

47. Soient un cercle C et une droite indéfinie P, situés comme on voudra dans un même plan. Imaginons une série d'angles circonscrits au cercle, ayant tous leurs sommets s, s', s'', ... sur la droite P; ces sommets seront aussi les centres d'une suite de cercles S, S′, S″, ... coupant tous orthogonalement le cercle C et ayant conséquemment pour axe radical commun la perpendiculaire à P conduite par le centre de C. Les cordes de contact de ces angles circonscrits ne seront donc autre chose que les cordes communes à C et aux cercles S, S′, S″, .. ; donc (45) toutes ces cordes devront concourir en un même point p de la perpendiculaire à P conduite par le centre de C. On a donc ce théorème.

48. *Lorsque des angles circonscrits à un même cercle ont leurs sommets sur une même droite, leurs cordes de contact concourent*

toutes en un même point ; et il est aisé de voir que, réciproquement, *lorsque les cordes de contact d'une suite d'angles circonscrits à un même cercle concourent en un même point, les sommets de ces angles appartiennent tous à une même droite.*

49. Lorsqu'un point et une droite ont une semblable relation, par rapport à un cercle, le point est dit le *pôle* de la droite qui est dite, à son tour, la *polaire* de ce point. On voit par là qu'une tangente à un cercle et son point de contact sont polaires et pôle l'un de l'autre, par rapport à ce cercle.

50. Soient s le sommet d'un angle circonscrit à un cercle dont c soit le centre ; soient p et q les deux extrémités de la corde de contact et m son milieu qui se trouvera sur cs. On pourra considérer p et q comme les sommets de deux angles circonscrits, égaux l'un et l'autre à deux angles droits, se confondant, ainsi que leurs cordes de contact, avec les tangentes ps et qs ; d'où il suit (48) que le point s est le pôle de la droite pq.

Par le point s soit menée une parallèle à pq, laquelle sera comme elle perpendiculaire à cs ; son pôle devra se trouver sur pq, mais, comme ce pôle doit aussi être sur cs, il se trouvera à l'intersection m de ces deux droites.

51. Ainsi, *lorsqu'un angle est circonscrit à un cercle, son sommet est le pôle de la corde de contact dont le milieu est, à l'inverse, le pôle de sa parallèle conduite par ce sommet.*

Ce théorème offre tout ce qui est nécessaire pour construire, dans tous les cas, le pôle d'une droite donnée ou la polaire d'un point donné.

52. Soient A et B deux droites se coupant en c ; soient a et b leurs pôles respectifs et C la droite qui joint ces pôles. 1.° Si le point c est extérieur au cercle, la corde de contact de l'angle circonscrit qui y aura son sommet et qui en sera la polaire (51), devra (48) contenir les deux points a et b, et ne sera conséquemment autre chose que la droite C elle-même.

2.° Si le point c est intérieur au cercle, auquel cas les droites A et B seront deux cordes, les points a et b seront (51) les sommets de deux angles circonscrits dont ces cordes seront les cordes de contact; d'où il suit (48) que la droite C, qui joint a et b, sera la polaire du point c.

53. Ainsi, *le point d'intersection de deux droites est le pôle de la droite qui joint leurs pôles*; et réciproquement *la droite qui joint deux points est la polaire de l'intersection des polaires de ces deux points.*

54. On peut encore dire (48) que *la polaire de tout point d'une droite passe par le pôle de cette droite*, et que réciproquement, *le pôle de toute droite qui passe par un point est sur la polaire de ce point.*

55. On voit enfin (52) que, *si plusieurs droites concourent en un même point, leurs pôles appartiendront tous à une même droite*; et que réciproquement, *si plusieurs points appartiennent à une même droite, leurs polaires concourront toutes en un même point.*

56. Il est manifeste que *les pôles des lignes homologues de deux cercles en sont des points homologues*, et que réciproquement *les polaires de leurs points homologues en sont des lignes homologues.*

57. Le centre de similitude de deux cercles a, par rapport à ces deux cercles, des polaires perpendiculaires à la droite qui joint leurs centres, et qui, suivant la précédente remarque, sont des lignes homologues de ces cercles. Ces droites ont été appelées les *polaires de similitude* de deux cercles. Elles sont dites polaires de *similitude directe* ou de *similitude inverse*, suivant la dénomination des centres de similitude dont elles sont les polaires.

Si deux cercles sont désignés par C et C′, nous désignerons respectivement par d'' et i'' leurs centres de similitude directe et inverse, par $P_{d''}$ et $P'_{d''}$ leurs polaires de similitude directe, et par $P_{i''}$ et $P'_{i''}$ leurs polaires de similitude inverse.

Lorsque les deux cercles seront désignés par C′ et C″, nous désignerons respectivement leurs centres de similitude directe et inverse par d et i, leurs polaires de similitude directe par P'_d et P'_i, et leurs polaires de similitude inverse par $P'_{d'}$ et $P''_{d'}$.

Et lorsqu'enfin les deux cercles seront désignés par C'' et C, nous désignerons respectivement leurs centres de similitude directe et inverse par d' et i', leurs polaires de similitude directe par $P''_{d'}$ et $P_{d'}$ et leurs polaires de similitude inverse par $P''_{i'}$ et $P_{i'}$.

58. Soient présentement C, C', C'' trois cercles tracés sur un même, plan on sait (15) qu'ils ont pris tour-à-tour deux à deux, six centres de similitude, trois d, d', d'' de similitude directe et trois i, i', i'' de similitude inverse. On sait de plus que les trois points d, d', d'' appartiennent à une même droite D, que les trois points d, i', i'' appartiennent à une même droite I, les trois points d', i'', i à une même droite I' et enfin les trois points d'', i, i' à une même droite I''.

Désignons respectivement par p_d, p'_d, p''_d les pôles de D par rapport à C, C', C'', par p_i, p'_i, p''_i, par $p_{i'}$, $p'_{i'}$, $p''_{i'}$, par $p_{i''}$, $p'_{i''}$, $p''_{i''}$ les pôles respectifs, par rapport aux mêmes cercles, de I, I', I''.

Il y aura ainsi (53) quatre pôles relatifs à chaque cercle, savoir :

pour C :
- p_d, intersection des polaires $P_{d'}$, $P_{d''}$,
- p_i, intersection des polaires $P_{i'}$, $P_{i''}$,
- $p_{i'}$, intersection des polaires $P_{d'}$, $P_{i''}$,
- $p_{i''}$, intersection des polaires $P_{i'}$, $P_{d''}$;

pour C' :
- p'_d, intersection des polaires $P'_{d''}$, P'_d,
- p'_i, intersection des polaires $P'_{i''}$, P'_i,
- $p'_{i'}$, intersection des polaires $P'_{d''}$, P'_i,
- $p'_{i''}$, intersection des polaires $P'_{i''}$, P'_d,

$$\text{pour } C'' \left\{ \begin{array}{ll} p''_d\,, & \text{intersection des polaires } P''_i\,,\ P''_{i'}\,, \\ p''_{i''}\,, & \text{intersection des polaires } P''_i\,,\ P''_{i'}\,, \\ p''_i\,, & \text{intersection des polaires } P''_d\,,\ P''_{i''}\,, \\ p''_{i'}\,, & \text{intersection des polaires } P''_i\,,\ P''_d\,. \end{array} \right.$$

Et, comme les quatre droites D, I, I′, I″ sont (15) des droites homologues communes aux trois cercles C, C′, C″, il s'ensuit que

$$\left. \begin{array}{l} p_d\,,\ p'_d\,,\ p''_d \\ p_i\,,\ p'_i\,,\ p''_i \\ p_{i'}\,,\ p'_{i'}\,,\ p''_{i'} \\ p_{i''}\,,\ p'_{i''}\,,\ p''_{i''} \end{array} \right\} \text{ en seront des points homologues ;}$$

et voilà pourquoi on les a appelés des *pôles de similitude.*

§. IX.

59. Soient C, C′ deux cercles tracés sur un même plan, et soit O un troisième cercle qui les touche tous deux en t et t', respectivement.

Supposons, en premier lieu, que ce troisième cercle touche les deux autres de la même manière, c'est-à-dire, qu'il les touche tous deux extérieurement, ou bien les enveloppe tous deux ou enfin en est lui-même enveloppé ; alors les points de contact t et t' seront (18), avec le centre d'' de similitude directe de C et C′, sur une même droite, axe de similitude des trois cercles.

Soient c, c', o les pôles respectifs de cet axe de similitude, par rapport à C, C′, O, ces pôles en seront des points homologues (56), d'où il suit que des droites parallèles, de direction quelconque, menées par ces trois points seront des lignes homologues des trois mêmes cercles, puisque passant par des points homologues, elles feront des angles égaux avec la ligne homologue commune tt'. Il en sera donc ainsi, en particulier, à l'égard des perpendiculaires conduites par ces trois points à la droite qui joint les centres de C et C'. Désignons respectivement ces perpendiculaires par cc, $c'c'$, oo.

D'abord (51) le point o étant le point de concours des tangentes menées à O par t et t', il s'ensuit (40) que ce point o est un point de l'axe radical de C et C', et qu'ainsi la droite oo n'est autre chose que cet axe radical lui-même, que nous avons désigné ci-dessus par R''.

Ensuite le point c étant, par rapport à C, le pôle de tt' qui passe par d''; il s'ensuit que la polaire de ce dernier point, relativement au même cercle, devra (54) passer par c; et comme elle doit d'ailleurs être perpendiculaire à la droite qui joint les centres de C et C', il s'ensuit qu'elle ne sera autre chose que la droite cc elle-même. On prouvera, par un semblable raisonnement, que $c'c'$ est également la polaire du point d'', par rapport au cercle C'. De sorte que cc et $c'c'$ sont les polaires de similitude directe de C et C', désignés ci-dessus par $P_{d''}$ et $P'_{d''}$.

Supposons, en second lieu, que le cercle O touche les cercles C et C' d'une manière différente, c'est-à-dire, qu'il touche l'un d'eux extérieurement, tandis qu'il enveloppe l'autre ou en est enveloppé; alors (18) les points de contact t et t' seront en ligne droite avec le centre de similitude inverse i'' des deux cercles C et C'. Soient encore c, c', o les pôles respectifs de cette droite par rapport à ces trois cercles, et soient menées par ces trois pôles les perpendiculaires cc, $c'c'$, oo à la droite qui joint leurs centres. On prouvera, comme ci-dessus, que oo est encore l'axe radical R'' des deux cercles C et C'; mais ici cc et $c'c'$ deviendront les polaires de similitude inverse $P_{i''}$ et $P'_{i''}$ des deux mêmes cercles. On a donc ce théorème dû à M. Durrande :

60. *L'axe radical de deux cercles est situé, par rapport à tout cercle qui les touche tous deux, de la même manière que le sont par rapport à ces deux cercles, leurs polaires de similitude de même dénomination;* savoir, leurs polaires de similitude *directe* ou leurs polaires de similitude *inverse*, suivant que le troisième cercle touche les deux autres de la *même manière* ou d'une *manière différente.*

61. Il résulte de là, en particulier, que *l'axe radical de deux cercles est semblablement situé soit par rapport à tous les cercles qui les touchent tous deux de la même manière, soit par rapport à tous les cercles qui les touchent tous deux d'une manière différente;* d'où il suit encore que *le centre de similitude de deux cercles qui en touchent deux autres est situé sur l'axe radical de ceux-ci;* savoir, leur centre de similitude *directe* ou leur centre de similitude *inverse*, suivant que les deux premiers cercles touchent les deux autres de la *même manière* ou d'une *manière différente.*

62. Soient présentement trois cercles C, C′, C″ touchés à la fois par un même cercle O; et supposons d'abord que ce dernier touche les trois autres de la même manière.

Parce que O touche C et C′ de la même manière, leur axe radical R″ sera situé par rapport à O (60) de la même manière que la polaire de similitude directe $P_{d''}$ le sera par rapport à C; et parce que O touche aussi C et C″ de la même manière, leur axe radical R′ sera situé par rapport à O de la même manière que le sera la polaire de similitude directe $P_{d'}$ par rapport à C; donc le centre radical r, intersection des deux droites R″ et R′, sera situé par rapport à O de la même manière que le sera par rapport à C l'intersection p_d de leurs homologues $P_{d'}$ et $P_{d''}$. On prouvera de la même manière que p'_d et p''_d sont respectivement situés par rapport à C′ et C″, comme r se trouve l'être par rapport à O; de sorte que p_d, p'_d, p''_d et r sont des points respectivement homologues de C, C′, C″ et O.

Supposons, en second lieu, que le cercle O touchant toujours

C′ et C″ de la même manière, touche C d'une manière différente; alors, ce cercle O touchant C et C′ d'une manière différente, leur axe radical R″ sera situé (60) par rapport à O comme la polaire de similitude inverse $P_{i''}$ le sera par rapport à C. Par une semblable raison, l'axe radical R′ sera situé par rapport à O comme le sera par rapport à C la polaire de similitude inverse $P_{i'}$; donc le centre radical r, intersection de R″ et R′ sera situé, par rapport à O, comme le sera par rapport à C le pôle de similitude p_i, intersection de leurs homologues $P_{i'}$ et $P_{i''}$. On prouvera de la même manière que p'_i et p''_i sont aussi situés par rapport à C′ et C″ respectivement, comme r se trouve l'être par rapport à O. De sorte que p_i, p'_i, p''_i et r seront des points homologues respectifs de C, C′, C″ et O.

Si C″ et C étaient les deux seuls cercles qui dussent être touchés de la même manière par O, ce seraient $p_{i'}$, $p'_{i'}$, $p''_{i'}$ et r qui seraient des points homologues respectifs de C, C′, C″ et O; et si les cercles qui doivent tous être touchés de la même manière par O étaient C et C′, ce seraient $p_{i''}$, $p'_{i''}$, $p''_{i''}$ et r qui seraient des points homologues respectifs de C, C′, C″ et O. On a donc ce théorème.

63. *Le centre radical de trois cercles est situé par rapport à un cercle qui les touche tous trois de la même manière que le sont, par rapport à ces trois cercles les pôles de l'un de leurs axes de similitude, pris respectivement par rapport à ces mêmes cercles*; savoir, les pôles de leur axe de similitude *directe*, si le quatrième cercle touche les trois autres de la *même manière*, et les pôles de l'un de leurs axes de similitude *inverse*, si ce quatrième cercle touche deux de ceux-là de la *même manière* et le troisième d'une *manière différente;* auquel cas il faudra choisir celui des trois axes de similitude inverse qui contient le centre de similitude directe de deux cercles qui doivent être touchés de la même manière par le quatrième.

64. Si l'on considère présentement que, lorsque deux figures sem-

blables sont semblablement situées (7), les droites qui joignent leurs points homologues en sont des lignes homologues qui (3) doivent passer par leur centre de similitude, et que (14) le point de contact de deux cercles qui se touchent en est un centre de similitude, on conclura de là le théorème que voici :

65. *Les droites qui joignent le centre radical de trois cercles aux pôles de l'un de leurs axes de similitude, relatifs à ces trois cercles, les coupent respectivement à leurs points de contact avec un quatrième cercle qui les touche tous trois*; savoir, à leurs points de contact avec un cercle qui les touche tous trois de la *même manière*, si l'axe de similitude dont il s'agit est un de leur axe de similitude *directe*, et à leurs points de contact avec un cercle qui touche deux d'entre eux de la *même manière*, et le troisième d'une *manière différente*, si au contraire l'axe de similitude dont il s'agit est un des axes de similitude *inverse*; et alors les deux cercles touchés de la même manière sont ceux qui ont leur centre de similitude directe sur cet axe.

On résoudra facilement, d'après cela, le problème suivant :

66. *PROBLÈME. Décrire un cercle qui en touche trois autres donnés sur un même plan ?*

Solution. Comme on sait faire passer une circonférence par trois points donnés, tout se réduit évidemment à construire les points de contact du cercle cherché avec le cercle donné.

Veut-on que le cercle cherché touche les trois cercles donnés de la même manière, on joindra leur centre radical aux pôles de leur axe de similitude directe, pris par rapport à ces trois cercles, par des droites, dont les intersections, respectives avec eux, détermineront leurs points de contact avec le cercle cherché.

Veut-on, au contraire, que le cercle cherché touche deux des cercles donnés de la même manière et le troisième d'une manière différente, il s'agira uniquement de substituer, dans la construction, à l'axe de similitude directe, celui des trois axes de similitude inverse qui contiendra le centre de similitude directe des deux cercles qui devront être touchés de la même manière par le cercle cherché.

Chaque construction donnera six points de contact, relatifs à deux cercles qui résoudront le problème; mais on parviendra aisément à distinguer les trois points de contact relatifs à un même cercle, en observant que les droites qui les joignent aux centres des cercles auxquels ils appartiennent respectivement, doivent concourir en un même point, centre du cercle cherché.

Tout amour propre d'auteur à part, cette construction, que nous avons donnée pour la première fois il y a plus de douze ans (*Mémoires de Turin* pour 1814), nous paraît de beaucoup préférable à toutes celles qu'antérieurement et postérieurement on a données du même problème.

§. X.

67. Considérons de nouveau deux cercles C, C′ touchés à la fois en t et t' par un troisième cercle O, et dont les points de contact sont en ligne droite avec le centre de similitude directe d'' ou le centre de similitude inverse i'' des deux cercles C et C′, suivant que le cercle O les touche de la même manière ou d'une manière différente.

Soient menées les tangentes communes en t et t' aux deux cercles C et C′ et au cercle O et soit o leur point de concours, situé sur l'axe radical de C et C′. De ce point comme centre et avec un rayon $ot=ot'$ soit décrit un quatrième cercle Ω; ce cercle coupera orthogonalement les deux premiers en t et t'; d'où il suit (44) que la longueur, soit de la tangente soit de la plus petite corde menée au cercle Ω par le point d'' ou par le point i'', en ligne droite avec t et t', sera constante, quelle que soit la situation du cercle O, pourvu seulement qu'il touche les deux autres C et C′; mais le quarré de cette tangente ou de la moitié de cette plus petite corde est égal au produit $d''t.d''t'$, ou au produit $i''t.i''t'$, suivant que c'est le point d'' ou le point i'' qui est en ligne droite avec les deux points t et t'; donc ce produit est aussi constant quel que soit le cercle tangent O. On a donc ce théorème (41):

68. *Si, par l'un des centres de similitude de deux cercles, on mène à ces deux cercles une sécante commune arbitraire, le produit des distances de ce centre aux intersections de la sécante avec les deux cercles sera constant, quelle que soit la direction de cette sécante*, pourvu que l'on choisisse ces points d'intersection de telle sorte que les rayons correspondans ne soient pas parallèles.

Ce produit constant est ce que M. Steiner appelle la *commune puissance* de deux cercles. Nous la dirons *directe* ou *inverse*, suivant la dénomination du centre de similitude auquel elle sera relative.

69. La droite tt' corde commune aux deux cercles O et Ω, en est aussi l'axe radical; puis donc que cette corde contient l'un des deux points d'' et i'', il s'ensuit que les tangentes ou les plus petites cordes menées par ce point d'' ou i'' aux deux cercles O et Ω sont de même longueur; puis donc qu'elles sont d'une longueur constante pour le cercle Ω, elles le seront également pour le cercle O; c'est-à-dire, en d'autres termes, que ce point d'' ou i'' en sera le centre radical commun;

Donc, si de ce point d'' ou i'' comme centre, et avec un rayon dont le quarré soit égal à la commune puissance des deux cercles C et C', on décrit un troisième cercle, ce cercle coupera orthogonalement tous les cercles qui toucheront à la fois les deux cercles C et C', pourvu qu'ils les touchent de la *même manière* ou d'une *manière différente*, suivant que la commune puissance dont il s'agira sera *directe* ou *inverse*.

70. Les deux cercles qui ont ainsi pour centres les centres de similitude de deux cercles donnés et dont les quarrés des rayons sont les communes puissances respectives de ces deux cercles, par rapport à ces deux points, cercles déjà considérés par M. Gaultier, sont ce que M. Steiner appelle les *cercles de commune puissance* de ces

deux-là ; chacun d'eux est dit *direct* ou *inverse*, suivant la dénomination de son centre.

§. XI.

71. Soient C, C′, C″ trois cercles non concentriques, tracés sur un même plan, et dont nous supposons les centres n'être pas en ligne droite. Soient respectivement d et i, d' et i', d'' et i'' les centres de similitude directe et inverse de C′ et C″, C″ et C, C et C′. On sait (15) que les trois points d, d', d'' appartiendront à une même droite D, les trois points d, i', i'' à une même droite I, les trois points d', i'', i à une même droite I′ et les trois points d'', i, i' à une même droite I″. Soient enfin Δ et Υ, Δ′ et Υ′, Δ″ et Υ″ les cercles de commune puissance directe et inverse de C′ et C″, C″ et C, C et C′.

Soit un cercle O touchant de la même manière les trois cercles C, C′, C″; ce cercle devra (69) être coupé orthogonalement par les trois cercles Δ, Δ′, Δ″; il les coupera donc lui-même orthogonalement; et conséquemment (43) ces derniers auront un axe radical commun, perpendiculaire à l'axe de similitude directe D des trois cercles C, C′, C″ et contenant le centre de O.

Supposons au contraire que O, touchant encore C′ et C″ de la même manière, touche C d'une manière différente; alors ce cercle devra (69) être coupé orthogonalement par les trois cercles Δ, Υ′, Υ″; il les coupera donc lui-même orthogonalement; et conséquemment (43) ces derniers auront un axe radical commun, perpendiculaire à l'axe de similitude inverse I des trois cercles C, C′, C″ et contenant le centre de O.

On prouvera d'une manière semblable que les trois cercles Δ′, Υ″, Υ ont un axe radical commun, perpendiculaire à l'axe de similitude inverse I′, contenant les centres des cercles qui touchent C″ et C de la même manière et C′ d'une manière différente; et que les trois cercles Δ″, Υ, Υ′ ont aussi un axe radical commun perpendiculaire à l'axe de similitude inverse I'', contenant les centres des cercles qui touchent C et C' de la même manière et C'' d'une manière différente. On a donc ce théorème :

72. *Les cercles de commune puissance directe de trois cercles tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, ont tous trois un même axe radical; et chacun d'eux a un même axe radical avec deux des cercles de commune puissance inverse de ces trois mêmes cercles, pris aussi successivement deux à deux ;* de manière que les six cercles de communes puissances de trois cercles donnés n'ont en tout que quatre axes radicaux, dont chacun appartient à trois d'entre eux.

Nous appellerons désormais ces quatre axes les *axes de commune puissance* de trois cercles donnés ; celui qui appartient aux trois cercles de commune puissance directe sera l'axe de commune puissance *directe* ; les trois autres seront les axes de commune puissance *inverse*.

73. Remarquons présentement que le cercle unique (37 et 38) radical commun des trois cercles donnés C, C', C'', doit être aussi coupé orthogonalement (67), tout comme le cercle qui les touche tous trois, par leurs cercles de commune puissance, d'où il suit que son centre, centre radical des trois cercles C, C', C'' doit se trouver à la fois sur les divers axes de commune puissance qui, de cette sorte, concourent tous quatre en ce point. De là résulte (71) ce théorème dû à M. Gaultier :

74. *Les centres des huit cercles qui touchent à la fois trois cercles donnés sont distribués, deux à deux, sur les perpendiculaires abaissées du centre radical de ces trois cercles sur les directions de leurs quatre axes de similitude.* La perpendiculaire sur l'axe de similitude *directe* contient les centres des deux cercles qui touchent de la même manière les trois cercles donnés. Chacune des autres contient les centres des deux cercles qui, touchant de la même manière les deux cercles dont le centre de similitude directe est

sur l'axe de similitude correspondant, touchent l'autre cercle d'une manière différente.

P. S. Monge a démontré, dans son *Application de l'analyse à la géométrie*, que toute surface du second ordre pouvait être engendrée de deux manières différentes par un cercle variable de rayon dont le centre parcourt une droite et dont le plan demeure constamment parallèle à lui-même; d'où il a conclu que, par chacun des points d'une surface du second ordre, on peut toujours tracer deux cercles qui y soient entièrement situés; proposition qui a été admise sans contestation par tous les géomètres français.

Cependant, à la page 50 de la première livraison du Journal de M. Crelle, M. Steiner croit devoir signaler, comme faisant exception à cette loi, le paraboloïde hyperbolique, les cylindres hyperbolique et parabolique et le système de deux plans; et l'exception qu'il signale a été accueillie par MM. les Rédacteurs du *Bulletin universel* de M. le B.^{on} de Ferussac, dans leur numéro de janvier 1827, page 3. Si elle était fondée, il faudrait aussi y comprendre le cône et le cylindre droit et généralement toutes les surfaces de révolution du second ordre autres que la sphère, par chacun des points desquelles on ne peut tracer qu'un cercle unique qui y soit entièrement contenu. Il faudrait également excepter les sommets des cônes et les pôles des surfaces de révolution, par lesquels on ne saurait conduire aucun plan qui y détermine des sections circulaires.

Mais de telles exceptions sont-elles recevables? Nous ne le pensons pas. Monge, en énonçant son théorème, les avait sans doute aperçues tout aussi bien que nous; mais il n'a point aussi assigné de limites ni aux rayons des deux sections circulaires que l'on peut obtenir dans une surface du second ordre par chacun de ses points, ni à l'angle des plans des deux sections; d'où il résulte, à ce qu'il nous paraît, que ce serait mal entendre ce théorème, que ce serait lui ôter une partie de la généralité qui en fait le principal mérite que de ne pas admettre que ces grandeurs, comme toutes les grandeurs variables, peuvent, dans certains cas particuliers, devenir nulles, infinies ou indéterminées, ou, en d'autres termes, que les deux cercles peuvent dégénérer en des points ou des droites, qu'ils peuvent se confondre en un seul, ou qu'enfin ils peuvent être en nombre infini pour chaque point, comme il arrive dans la sphère. Or, le théorème ainsi entendu ne saurait souffrir aucune sorte d'exception.

On doit être d'autant plus surpris que M. Steiner ne l'ait pas entendu dans ce sens que précisément un des principaux avantages de ses belles constructions, pour les problèmes de contact, est de se plier sans effort aux cas où tous ou partie des cercles ou des sphères donnés deviennent des points, des droites ou des plans.

Nous n'ignorons pas qu'il est des géomètres qui ne souffrent qu'avec une sorte d'impatience qu'on se permette de considérer la ligne droite comme une portion de circonférence d'un rayon infini, et cela peut-être uniquement parce que les anciens n'ont pas usé de cette liberté; mais n'est-ce pas précisément à cette manière plus large d'envisager l'étendue géométrique que les modernes sont en partie redevables de leur supériorité dans la géométrie pure? Supériorité que les mêmes géométres pourront bien aussi leur contester; mais qui n'en demeurera pas moins un fait patent pour qui ne voudra pas se refuser à l'évidence.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de géométrie.

PROBLÈME. *Etant donnés, sur un même plan, trois cercles extérieurs les uns aux autres, décrire sur ce plan trois autres cercles, également extérieurs les uns aux autres, tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux des cercles donnés ?*

Solution. Soient C, C', C'' les trois cercles donnés.

Soient Δ, Δ', Δ'' respectivement, les cercles de commune puissance directe de C' et C'', C'' et C, C et C'.

Soient décrits trois autres cercles T, T', T'' touchant extérieurement le premier C, Δ', Δ'', le second C', Δ'', Δ et le troisième C'', Δ, Δ'; et soient respectivement t, t', t'' les points de contact de C et T, de C' et T', de C'' et T''.

Soient encore décrits trois nouveaux cercles U, U', U'', le premier passant par t et touchant extérieurement T' et T'', le second passant par t' et touchant extérieurement T'' et T, enfin le troisième passant par t'' et touchant extérieurement T et T'.

Soient enfin décrits trois cercles O, O', O'', touchant extérieurement, savoir, le premier les cercles U, C', C'', le second les cercles U', C'', C, et le troisième U'', C, C'; ces trois derniers se toucheront extérieurement deux à deux et résoudront ainsi le problème.

On propose de démontrer cette construction (*) ?

(*) M. Steiner donne cette construction sans la démontrer ; mais en annonçant que sa démonstration résulte uniquement des principes exposés dans son mémoire et que nous venons de faire connaître.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Démonstration du théorème de Taylor, pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes, avec la détermination de l'erreur que l'on commet lorsqu'on arrête la série donnée par ce théorème à l'un quelconque de ses termes ;

Par M. Ampère, de l'Académie royale des sciences de Paris, de celles d'Edimbourg, de Cambridge, de Genève, etc., Professeur au Collége de France et à l'Ecole polytechnique.

Pour développer

$$U=\mathrm{f}(x+g,\ y+h,\ z+k,\ ...)$$

en partant de

$$u=\mathrm{f}(x,y,z,.....)\ ,$$

il faut prendre une valeur intermédiaire

$$u'=\mathrm{f}(x+\alpha g,\ y+\alpha h,\ z+\alpha k,.....)$$

où α est compris entre o et 1. En faisant varier α entre ces limites, on voit qu'à la première, où $\alpha=0$, on a $u'=u$ et qu'à la seconde, où $\alpha=1$, on a $u'=U$.

Cela posé, si l'on considère la quantité

$$\frac{U-u'}{1-\alpha}=\frac{\mathrm{f}(x+g,y+h,z+k,\ldots..)-\mathrm{f}(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots..)}{1-\alpha},$$

qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand $\alpha=1$, on verra aisément que cette quantité ne peut, en général, devenir nulle ni infinie pour cette valeur de α ; car, d'après le théorème sur le rapport des accroissemens d'une variable indépendante et d'une de ses fonctions, on a

$$\frac{\mathrm{f}(x+g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots.)-\mathrm{f}(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots..)}{1-\alpha}$$

$$=g[\mathrm{f}'_x(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots..)+\eta_1],$$

$$\frac{\mathrm{f}(x+g,y+h,z+\alpha k,\ldots..)-\mathrm{f}(x+g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots...)}{1-\alpha}$$

$$=h[\mathrm{f}'_y(x+g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots..)+\eta_2],$$

$$\frac{\mathrm{f}(x+g,y+h,z+k,\ldots...)-\mathrm{f}(x+g,y+h,z+\alpha k,\ldots..)}{1-\alpha}$$

$$=k[\mathrm{f}'_z(x+g,y+h,z+\alpha k,\ldots...)+\eta_3],$$

. . . .

et par conséquent, en ajoutant et réduisant,

$$\frac{\mathrm{f}(x+g,y+h,z+k,\ldots..)-\mathrm{f}(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots..)}{1-\alpha}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} g\mathrm{f}'_x(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots..)\\ +h\mathrm{f}'_y(x+g,y+\alpha h,z+\alpha k,\ldots\ldots..)\\ +k\mathrm{f}'_z(x+g,y+h,z+\alpha k,\ldots\ldots...)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}+g\eta_1+h\eta_2+k\eta_3+\ldots...$$

Quand $\alpha=1$, les quantités π_1, π_2, π_3, ... deviennent nulles, avec les accroissemens $g-\alpha g$, $h-\alpha h$, $k-\alpha k$, ... et l'on a

$$\frac{U-u'}{1-\alpha}=\left\{\begin{array}{l} gf'_x(x+g,y+h,z+k,\ldots\ldots) \\ +hf'_y(x+g,y+h,z+k,\ldots\ldots) \\ +kf'_z(x+g,y+h,z+k,\ldots\ldots) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

qui, d'après le théorème cité, ne peut être, en général, ni nulle ni infinie. Ainsi la quantité

$$\frac{U-u'}{1-\alpha}$$

est une fonction de α qui ne devient ni o ni ∞ quand elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. En la désignant par P, nous aurons

$$\frac{U-u}{1-\alpha}=P\ , \quad \text{ou} \quad U=u'+(1-\alpha)P\ ;$$

U conservant la même valeur quelle que soit celle qu'on donne à α et u', et P variant avec α.

En différentiant successivement par rapport à α, on obtient cette suite d'équations

$$\frac{du'}{d\alpha}+(1-\alpha)\ \frac{dP}{d\alpha}-P=0\ ,$$

$$\frac{d^2u'}{d\alpha^2}+(1-\alpha)\ \frac{d^2P}{d\alpha^2}-2\ \frac{dP}{d\alpha}=0\ ,$$

$$\frac{d^3u'}{d\alpha^3}+(1-\alpha)\ \frac{d^3P}{d\alpha^2}-3\ \frac{d^2P}{d\alpha^2}=0\ ,$$

. . . .

$$\frac{d^n u'}{d\alpha^n}+(1-\alpha)\frac{d^n P}{d\alpha^n}-n\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}=0\,;$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}
P&=\frac{du'}{d\alpha}+\frac{1-\alpha}{1}\cdot\frac{dP}{d\alpha}\,,\\
\frac{dP}{d\alpha}&=\frac{1}{2}\,\frac{d^2u'}{d\alpha^2}+\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{d^2P}{d\alpha^2}\,,\\
\frac{d^2P}{d\alpha^2}&=\frac{1}{3}\,\frac{d^3u'}{d\alpha^3}+\frac{1-\alpha}{3}\cdot\frac{d^3P}{d\alpha^3}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}&=\frac{1}{n}\,\frac{d^nu'}{d\alpha^n}+\frac{1-\alpha}{n}\cdot\frac{d^nP}{d\alpha^n}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(A)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
U&=u'+(1-\alpha)P\\
&=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}\,\frac{du'}{d\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{1}\cdot\frac{dP}{d\alpha}\\
&=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}\,\frac{du'}{d\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\,\frac{d^2u'}{d\alpha^2}+\frac{(1-\alpha)^3}{1.2}\,\frac{d^2P}{d\alpha^2}\\
&=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}\,\frac{du'}{d\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\cdot\frac{d^2u'}{d\alpha^2}+\frac{(1-\alpha)^3}{1.2.3}\,\frac{d^3u'}{d\alpha^3}+\frac{(1-\alpha)^4}{1.2.3}\,\frac{d^3P}{d\alpha^3}\,,
\end{aligned}$$

et, en général

$$\left.\begin{aligned}U=u'&+\frac{(1-\alpha)}{1}\,\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha}\\&+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\,\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\alpha^2}\\&+\frac{(1-\alpha)^3}{1.2.3}\,\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}\alpha^3}\\&+\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{(1-\alpha)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}u'}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}\\&+\frac{(1-\alpha)^{n}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}\end{aligned}\right\}\text{(B)}$$

formule qui se continue indéfiniment, suivant la même loi ; car, en la supposant vérifiée pour tous les termes qui précèdent le reste $\frac{(1-\alpha)^n}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}$, il suffira d'y substituer au lieu de $\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}$ la valeur (A) pour obtenir

$$U=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}\,\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\,\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\alpha^2}+\frac{(1-\alpha)^3}{1.2.3}\,\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}\alpha^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(1-\alpha)^n}{1.2\ldots n}\,\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}\alpha^n}+\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{1.2\ldots\ldots n}\,\frac{\mathrm{d}^nP}{\mathrm{d}\alpha^n},$$

qui est la même formule pour un terme de plus ; en sorte qu'étant vraie pour n termes, elle l'est aussi pour $n+1$, puis, par la même raison, pour $n+2$ termes et ainsi de suite.

Comme nous n'avons fait varier que α, dans

$$u'=\mathrm{f}(x+\alpha g, y+\alpha h, z+\alpha k,\ldots),$$

pour en déduire

$$\frac{du'}{d\alpha}, \quad \frac{d^2u'}{d\alpha^2}, \quad \frac{d^3u'}{d\alpha^3}, \ldots\ldots \frac{d^nu'}{d\alpha^n},$$

et que cette fonction est composée en $x+\alpha g$, $y+\alpha h$, $z+\alpha k$, ... comme la fonction donnée u l'est en x, y, z, ...; il sera aisé de calculer ces dérivées successives par les règles ordinaires du calcul différentiel. En effet, en différentiant $u=f(x, y, z, \ldots)$ relativement à toutes les variables x, y, z, ... qui y sont contenues, en regardant à chaque différentiation successive, dx, dy, dz, ... comme des constantes ; on aura, pour ses différentielles des divers ordres, des fonctions de x, y, z, ... dx, dy, dz, ... qu'on pourra représenter par

$$du=f_1(x,y,z, \ldots\ldots dx, dy, dz),$$

$$d^2u=f_2(x,y,z, \ldots\ldots dx, dy, dz),$$

$$d^3u=f_3(x,y,z, \ldots\ldots dx, dy, dz),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

en se rappelant que dx, dy, dz, ... se trouvent à une seule dimension dans tous les termes de f_1, à deux dans tous les termes de f_2, à trois dans tous les termes de f_3 et ainsi de suite ; les fonctions de x, y, z, ... qui entrent dans les mêmes termes étant les dérivées partielles de u, qui ne sont susceptibles, en général, de devenir ni nulles ni infinies.

Cela posé, si l'on fait

$$x+\alpha g=x', \quad y+\alpha h=y', \quad z+\alpha k=z', \ldots, \ldots,$$

on aura

$$u'=f(x', y', z', \ldots\ldots\ldots\ldots),$$

$$du' = f_1(x', y', z', \ldots\ldots dx', dy', dz' \ldots\ldots),$$

$$d^2u' = f_2(x', y', z', \ldots\ldots dx', dy', dz' \ldots\ldots),$$

$$d^3u' = f_3(x', y', z', \ldots\ldots dx', dy', dz' \ldots\ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour avoir les valeurs de ces différentielles de u', quand on n'y fait varier que α, il suffira de substituer, dans les équations précédentes, les valeurs de dx', dy', dz', ... relatives à cette hypothèse, qui sont

$$dx' = g\,d\alpha, \quad dy' = h\,d\alpha, \quad dz' = k\,d\alpha, \ldots;$$

ce qui donne

$$\frac{du'}{d\alpha}\,d\alpha = f_1(z', y', z', \ldots\ldots g\,d\alpha, h\,d\alpha, k\,d\alpha, \ldots\ldots),$$

$$\frac{d^2u'}{d\alpha^2}\,d\alpha^2 = f_2(x', y', z', \ldots\ldots g\,d\alpha, h\,d\alpha, k\,d\alpha, \ldots),$$

$$\frac{d^3u'}{d\alpha^3}\,d\alpha^3 = f_3(x', y', z', \ldots\ldots g\,d\alpha, h\,d\alpha, k\,d\alpha, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le nombre des dimensions de $d\alpha$, dans les seconds membres étant le même que celui des dimensions de dx, dy, dz, ... dans les différentielles successives de u; c'est-à-dire, 1 pour la première, 2 pour la seconde, 3 pour la troisième et ainsi de suite; d'où il résulte que $d\alpha$ disparaîtra de ces seconds membres en divisant la première par $d\alpha$, la seconde par $d\alpha^2$, la troisième par $d\alpha^3$ et ainsi de suite, ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha} &= \mathrm{f}_1(x', y', z', \ldots\ldots g, h, k, \ldots\ldots\ldots) \ , \\
\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\alpha^2} &= \mathrm{f}_2(x', y', z', \ldots\ldots g, h, k, \ldots\ldots) \ , \\
\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}\alpha^3} &= \mathrm{f}_3(x', y', z', \ldots\ldots g, h, k, \ldots\ldots) \ , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ , \\
\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}\alpha^n} &= \mathrm{f}_n(x', y', z', \ldots\ldots g, h, k, \ldots\ldots\ldots) \ ,
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{C})$$

et conséquemment

$$U = u' + \frac{(1-\alpha)}{1}\mathrm{f}_1(x', y', z', \ldots g, h, k, \ldots) + \frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\mathrm{f}_2(x', y', z', \ldots g, h, k, \ldots)$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{(1-\alpha)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{f}_{n-1}(x', y', z', \ldots g, h, k, \ldots) + \frac{(1-\alpha)^n}{1.2\ldots(n-1)}\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}} \ .$$

Faisant alors $\alpha = 1$, il viendra

$$U = u + \frac{\mathrm{f}_1(x, y, z, \ldots g, h, k, \ldots\ldots)}{1} + \frac{\mathrm{f}_2(x, y, z, \ldots g, h, k, \ldots\ldots)}{1.2} + \ldots$$

$$+ \frac{\mathrm{f}^{n-1}(x, y, z, \ldots g, h, k, \ldots)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}(0) \ ;$$

en désignant par $\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}(0)$ ce que devient $\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}$, quand on y fait $\alpha = 0$.

On formera immédiatement les quantités

$$\mathrm{f}_1(x, y, z, \ldots g, h, k, \ldots) \ ,$$

$$f_2(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$f_{n-1}(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)\ ,$$

en calculant les différentielles successives de u, et en y remplaçant les différentielles $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, ... des variables indépendantes par les accroissemens finis g, h, k, ... des mêmes variables.

On sait, qu'on peut considérer, en général, la différentielle d'une fonction, non comme une quantité infiniment petite, mais comme la portion de l'accroissement de cette fonction dont les différens termes croissent proportionnellement aux accroissemens des variables indépendantes, et dont le rapport à l'accroissement total de la fonction ne diffère de l'unité que d'une quantité qui devient plus petite que toute grandeur donnée quand les accroissemens le deviennent eux-mêmes.

D'après cette définition, il est évident que la distinction à faire entre les différentielles et les accroissemens entiers n'a lieu qu'à l'égard des fonctions, et que, pour les variables indépendantes, ce sont ces accroissemens entiers qui satisfont aux conditions prescrites dans la définition et qui doivent être considérées comme les différentielles des variables indépendantes ; en sorte qu'alors $g=\mathrm{d}x$, $h=\mathrm{d}y$, $k=\mathrm{d}z$, ... ; d'où il suit que

$$f_1(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)=\mathrm{d}u\ ,$$

$$f_2(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)=\mathrm{d}^2u\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$f_{n-1}(x,y,z,\ldots g,h,k,\ldots)=\mathrm{d}^{n-1}u\ ;$$

au moyen de quoi la précédente formule peut être écrite ainsi :

$$U=u+\frac{\mathrm{d}u}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{1.2.3}+..+\frac{\mathrm{d}^{n-1}u}{1.2...(n-1)}+\frac{1}{1.2.3..(n-1)}\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}(0).$$

C'est sous cette forme qu'elle se trouve dans divers ouvrages, et en particulier dans ceux de M. Lacroix (*Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, 3.^{me} édition, page 56).

Le calcul différentiel fait donc connaître immédiatement la valeur de tous les termes qui, dans la formule

$$U=u+\frac{f_1(x,y,z,\,.....g,h,k,\,.....)}{1}+\frac{f_2(x,y,z,\,.....g,h,k,\,.....)}{1.2}+.......$$

$$....+\frac{f_{n-1}(x,y,z,\,.......g,h,k,\,.....)}{1.2.......(n-1)}+\frac{1}{1.2.....(n-1)}\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}(0),$$

précèdent le dernier $\frac{1}{1.2.....(n-1)}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}(0)$; mais celui-ci ne peut être calculé de la même manière, puisque $P=\frac{U-u'}{1-\alpha}$ contient U, qui est précisément la quantité inconnue dont on cherche la valeur. Il faut donc négliger ce dernier terme et se contenter de calculer les précédens qui donnent, en général, une valeur d'autant plus approchée de U que le nombre de ces termes est plus grand.

Mais, si l'on ne peut pas déterminer la valeur de $\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}(0)$, on peut du moins, par le calcul différentiel, assigner immédiatement deux limites entre lesquelles cette quantité, c'est-à-dire, l'erreur que l'on commet en négligeant ce terme est nécessairement comprise.

Il faut partir, pour cela, d'un théorème connu, savoir : que, si $v=\mathrm{F}(x)$ est une fonction de x et que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ soit toujours de même signe, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, la fonction

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

aura aussi le même signe. Posant

$$v=F(\alpha)=\left(C-\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}\right)(1-\alpha)^n,$$

C sera une constante qu'on déterminera de manière à donner les limites cherchées. Prenant ensuite, pour les deux limites a et b, $\alpha=0$, $\alpha=1$, en sorte que $b-a=1$, on aura $F(b)=0$, puisque le premier terme $C(1-\alpha)^n$ de $F(b)$ s'évanouit quand $\alpha=1$, et qu'en vertu de l'équation (B) on a pour le second

$$\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(1-\alpha)^n=1.2.3\ldots(n-1)(U-u')-2.3.4\ldots(n-1)\frac{du'}{d\alpha}(1-\alpha)$$

$$-3.4.5\ldots\ldots(n-1)\frac{d^2u'}{d\alpha^2}(1-\alpha)^2-\ldots\ldots-\frac{d^{n-1}u'}{d\alpha^{n-1}}(1-\alpha)^{n-1},$$

qui s'évanouit aussi, pour la même valeur de α, parce qu'elle donne $u'=U$ et que les quantités $\frac{du'}{d\alpha}$, $\frac{d^2u'}{d\alpha^2}$, ... $\frac{d^{n-1}u}{d\alpha^{n-1}}$, ne peuvent, en général, devenir infinies pour $\alpha=1$. On a ensuite, pour $\alpha=0$,

$$F(a)=F(0)=C-\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0);$$

donc

$$\frac{F(b)-F(a)}{a-b}=\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0),$$

d'ailleurs, d'après les équations (A) et (C),

$$\frac{dv}{d\alpha}=n\left(\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}-C\right)(1-\alpha)^{n-1}-\frac{d^nP}{d\alpha^n}(1-\alpha)^n$$

$$=\left\{n\,\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}-\frac{d^nP}{d\alpha^n}(1-\alpha)-nC\right\}(1-\alpha)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{d^nu'}{d\alpha^n}-C\right)(1-\alpha)^{n-1}=\{f_n(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots)-C\}(1-\alpha)^{n-1}.$$

Si donc on prend alternativement pour nC la plus grande et la plus petite valeur que prend

$$f_n(x',y',z',\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)$$

calculée immédiatement par n différentiations,

depuis $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, ... ;
jusqu'a $x'=x+g$, $y'=y+h$, $z'=z+k$, ... ;

c'est-à-dire, depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=1$, et qu'on désigne ces deux valeurs par M et m, $\frac{dv}{d\alpha}$ sera constamment négatif, dans cet intervalle, quand on prendra $C=\frac{M}{n}$, et toujours positif, dans le même intervalle, quand on fera $C=\frac{m}{n}$; on aura donc, en vertu du théorème que nous venons de citer,

$$\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)-\frac{M}{n} \text{ négatif et } \frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)-\frac{m}{n} \text{ positif ;}$$

d'où il suit que $\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur que peut prendre $\frac{f_n(x,y,z,\ldots\ldots)}{n}$ dans le même intervalle, et que l'erreur que l'on commet en négligeant

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0),$$

dans la formule trouvée plus haut, est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de

$$\frac{f_n(x,y,z,\ldots\ldots)}{n},$$

lorsqu'on y donne à x, y, z, ... toutes les valeurs comprises entre x et $x+g$, y et $y+h$, z et $z+k$, ...

En admettant, comme cela a nécessairement lieu pour toute fonction continue, que $f_n(x,y,z,\ldots\ldots)$ croisse par degrés insensibles, avec $x,y,z,\ldots\ldots$, il est évident que, pour de certaines valeurs de $x,y,z,\ldots\ldots$, comprises entre ces limites, elle prendra une valeur égale à $\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)$; et, comme en désignant par ξ, η, ζ, ... des nombres indéterminés, compris entre 0 et 1, on peut toujours représenter cette valeur par

$$\frac{f(x+\xi g, y+\eta h, z+\varrho k, \ldots\ldots g,h,k, \ldots\ldots)}{n};$$

on aura exactement

$$f(x+g,y+h,z+k,\ldots\ldots)=f(x,y,z,\ldots\ldots)+\frac{f_1(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1}$$

$$+\frac{f_2(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{f_{n-1}(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}$$

$$+\frac{f_n(x+\xi g,y+\eta h,z+\varrho k,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

dont le dernier terme est précisément ce que devient le premier

$$\frac{f_n(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

de ceux qu'on supprime, quand on arrête la série au terme précédent, lorsqu'on y substitue $x+\xi g$, $y+\eta h$, $z+\zeta k$, ... au lieu de x, y, z, ...

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Applications de la théorie des centres de moyennes distances ;

Par M. C. C. Gérono.

On sait que le principe fondamental de la théorie des centres de moyennes distances consiste en ce que des points $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ étant donnés dans l'espace au nombre de n, et des grandeurs homogènes en même nombre $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ répondant respectivement à chacun d'eux ; il existe toujours dans l'espace un point et un seul point P, tel que le produit de sa distance à quelque plan que ce puisse être par la somme $m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots+m_n$ est égal à la somme des produits respectifs par $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ des distances des points $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ au même plan.

On sait encore que, si Π est un point pris arbitrairement dans l'espace, on aura

$$m_1.\overline{\Pi P_1}^2+m_2.\overline{\Pi P_2}^2+m_3.\overline{\Pi P_3}^2+\ldots\ldots+m_n.\overline{\Pi P_n}^2=(m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots+m_n).\overline{\Pi P}^2$$

$$+m_1.\overline{PP_1}^2+m_2.\overline{PP_2}^2+m_3.\overline{PP_3}^2+\ldots\ldots+m_n\overline{PP_n}^2 .$$

M. Lhuilier, de Genève, qui s'est spécialement occupé de cette théorie, en a fait des applications très-curieuses ; mais il n'a pas considéré celles de ces applications auxquelles peut donner naissance l'indétermination des multiplicateurs $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$; indétermination qui permet de déplacer à volonté dans l'espace, le centre P des moyennes distances. Nous nous proposons de montrer ici, par un petit nombre d'exemples, le parti qu'on peut tirer en géométrie de cette considération.

I. Soient les quatre points donnés, les quatre sommets A, B, C, D, d'un tétraèdre et les multiplicateurs correspondans a, b, c, d, respectivement proportionnels aux aires des faces opposées. Comme on obtient également le volume du tétraèdre soit en multipliant le tiers de l'aire d'une face par sa distance au sommet opposé, soit en multipliant ce tiers de la somme des aires des faces par le rayon de la sphère inscrite, il s'ensuit que ce centre sera ici le centre des moyennes distances.

Si donc on se rappelle le procédé général au moyen duquel on détermine le centre des moyennes distances de plusieurs points, on parviendra, pour la détermination du centre de la sphère inscrite au tétraèdre dont il s'agit, au procédé que voici : Soit coupée l'arête CD, au point E, de telle sorte que les segmens EC, ED, soient proportionnels aux aires des faces ACB, ADB. Soit coupée BE, au point F, de telle sorte que les deux segmens FE et FB soient entre eux comme l'aire ACD est à la somme d'aires ACB+ADB ; enfin soit coupée AF en G, de telle sorte que les deux segmens GF et GA soient entre eux comme l'aire BCD est à la somme d'aires BAC+CAD+DAB ; et le point G ainsi déterminé sera le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Ou encore, plus symétriquement : Soient coupées AB en E, de telle sorte que les deux segmens EA et EB soient entre eux comme les aires des faces CAD et CBD, et CD en F, de telle sorte que les deux segmens FC et FD soient entre eux comme les aires des faces ACB et ADB. Soit enfin coupée EF en G, de telle sorte que les deux segmens GE et GF soient entre eux comme la somme d'aires ACB+ADB est à la somme d'aires CAD+CBD ; et le point G sera de nouveau le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Tout cela revient à dire que *le centre de la sphère inscrite à* *un tétraèdre est le même que le centre commun de gravité de quatre masses proportionnelles aux aires de ses faces, placées respectivement aux sommets opposés.*

II. Soit une sphère concentrique à la sphère inscrite au tétraèdre, décrite d'un rayon arbitraire, et soit P un point pris arbitrairement sur la surface de cette sphère; on aura, par l'équation fondamentale rapportée ci-dessus,

$$\overline{PA}^2.BCD+\overline{PB}^2.CDA+\overline{PC}^2.DAB+\overline{PD}^2ABC$$

$$=\overline{PG}^2(ABC+BCD+CDA+DAB)+\overline{GA}^2.BCD+\overline{GB}^2.CDA+\overline{GC}^2.DAB+\overline{GD}^2.ABC \quad ;$$

c'est-à-dire, la somme des produits des aires des faces d'un tétraèdre par les quarrés des distances des sommets opposés à l'un quelconque des points de la surface d'une sphère concentrique à la sphère inscrite est une quantité constante, égale au produit de l'aire du tétraèdre par le quarré du rayon de cette dernière sphère, augmenté de la somme des produits des aires des faces par les quarrés des distances des sommets opposés au centre de cette même sphère.

III. Soient pris, sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère gauche ABCD, des points E, F, G, H, de telle sorte qu'on ait

$$AE.BF.CG.DH=AH.DG.CF.BE \quad ;$$

les quatre points E, F, G, H seront ainsi dans un même plan. En effet, on pourra toujours déterminer quatre quantités a, b, c, d, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{AE}{BE}=\frac{b}{a}\ , \quad \frac{BF}{CF}=\frac{c}{b}\ , \quad \frac{CG}{DG}=\frac{d}{c}\ , \quad \frac{DH}{AH}=\frac{a}{d}\ ;$$

alors les points E, F, G, H seront respectivement les centres de moyennes distances des systèmes

$$(A,B,a,b)\ ,\quad (B,C,b,c)\ ,\quad (C,D,c,d)\ ,\quad (D,A,d,a)\ ;$$

le centre du système (A, B, C, D, a, b, c, d) devra donc se trouver à la fois sur les deux droites EG, FH ; d'où il suit que ces droites se couperont en quelque point K et seront ainsi dans un même plan.

La proposition 16 du V.ᵉ livre des Élémens de M. Legendre n'est, comme l'on voit, qu'un cas très-particulier de ce théorème.

On sait que, lorsque les quatre côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère gauche touchent en E, F, G, H, une même surface du second ordre, on a la relation

$$AE.BF.CG.DH=AH.DG.CF.BE\ ;$$

donc aussi alors les quatre points de contact E, F, G, H, sont situés dans un même plan.

IV. Lorsque quatre points A, B, C, D, sont dans un même plan, il est toujours possible de déterminer les quantités a, b, c, de telle sorte que le dernier D soit le centre des moyennes distances du système (A, B, C, a, b, c) des trois autres ; on a alors, en vertu de l'équation fondamentale,

$$\overline{AB}^2.b+\overline{AC}^2.c=\overline{AD}^2(a+b+c)+\overline{DA}^2.a+\overline{DB}^2.b+\overline{DC}^2.c\ ,$$

$$\overline{BC}^2.c+\overline{BA}^2.a=\overline{BD}^2(a+b+c)+\overline{DA}^2.a+\overline{DB}^2.b+\overline{DC}^2.c\ ,$$

$$\overline{CA}^2.a+\overline{CB}^2.b=\overline{CD}^2(a+b+c)+\overline{DA}^2.a+\overline{DB}^2.b+\overline{DC}^2.c\ .$$

En éliminant, entre ces trois équations, deux quelconques des troi quantités a, b, c, la troisième disparaîtra d'elle-même et on parviendra à l'équation de condition

$$4\overline{AD}^2.\overline{BD}^2.\overline{CD}^2+(\overline{DA}^2+\overline{DC}^2-\overline{AC}^2)(\overline{DC}^2+\overline{DB}^2-\overline{BC}^2)(\overline{DB}^2+\overline{DA}^2-\overline{AB}^2)$$

$$-\overline{AD}^2(\overline{DB}^2+\overline{DC}^2-\overline{BC}^2)^2-\overline{BD}^2(\overline{DA}^2+\overline{DC}^2-\overline{AC}^2)^2-\overline{CD}^2(\overline{DA}^2+\overline{DB}^2-\overline{AB}^2)^2=0\ ;$$

équation qui exprime la relation entre les six distances qui séparent deux à deux quatre points d'un même plan. On parviendrait, avec la même facilité et sans l'intervention des quantités linéo-angulaires, à la relation entre les dix distances qui séparent deux à deux cinq points donnés dans l'espace.

Ces exemples suffisent pour montrer le parti qu'on peut tirer de l'indétermination des coefficiens dans les formules relatives à la théorie des centres de moyennes distances. On en pourra déduire ainsi, en particulier, toute la théorie des transversales.

Paris, le 10 janvier 1827.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de l'un des deux problèmes de Géométrie énoncés à la page 232 du XVI.e volume des Annales ;

Par M. Bobillier, professeur de Mathématiques à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

PROBLÈME. *On a construit, sur deux des faces d'un angle dièdre, deux triangles tels que les points de concours des directions de leurs côtés correspondans sont situés tous trois sur l'arête de l'angle dièdre et conséquemment en ligne droite ; d'où il résulte que, quelle que soit d'ailleurs l'ouverture de cet angle, les droites qui joignent les sommets correspondans des deux triangles concourent toutes trois en un même point. On suppose que, l'une des faces de l'angle dièdre restant fixe dans l'espace ainsi que son arête, son autre face tourne sur cette arête, comme sur une charnière, en entraînant avec elle le point dont il s'agit, et l'on demande quelle ligne ce point décrira dans l'espace?*

Solution. En ne considérant uniquement que deux côtés correspondans des deux triangles, on peut réduire le problème à cet énoncé plus simple.

Sur l'une des faces d'un angle dièdre, on a pris arbitrairement deux points A, A′, en ligne droite avec un point P de son arête. Sur son autre face, on a pris aussi arbitrairement deux points B, B′, en ligne droite avec ce même point P; d'où il résulte que, quelle que soit l'ouverture de l'angle dièdre, les quatre points A, A′, B, B′, sont constamment dans un même plan contenant le point P, et que conséquemment les droites AB et A′B′ concourent constamment en un point C″.

On suppose que, la face de l'angle dièdre qui contient les points A et A′, ainsi que son arête demeurant fixes, son autre face tourne sur cette arête, comme sur une charnière, et on demande quelle ligne le point C″ décrira dans ce mouvement?

Des points B et B′, soient abaissées sur l'arête de l'angle dièdre les perpendiculaires BC et B′C′. Soient menées les droites AC et A′C′, concourant en B″; et soit enfin menée B″C″.

Les points mobiles B, B′ décrivent évidemment dans le mouvement deux cercles ayant respectivement pour centres les points C et C′ et pour rayons CB et C′B′; de sorte que ces cercles, dont les plans sont parallèles et tous deux perpendiculaires à l'arête de l'angle dièdre, ont cette arête pour axe commun.

Les droites mobiles AB et A′B′, qui passent constamment par les points fixes A et A′ et par les points mobiles B et B′ des circonférences des deux cercles, sont les génératrices des deux surfaces coniques du second ordre, dont les sommets sont en A et A′ et dont ces deux circonférences sont des sections respectives; et comme le point mobile C″ est à la fois sur ces deux génératrices AB et A′B′, il s'ensuit que ce point décrit dans l'espace la commune section de ces deux surfaces coniques. Il ne s'agit donc plus que d'assigner la nature de cette section.

Les deux triangles variables ABC et A′B′C′ sont tels que les droites AA′, BB′, CC′, qui joignent leurs sommets correspondans concourent en un même point fixe P; d'où il suit que les points de concours A″, B″, C″, de leurs côtés correspondans BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′, doivent appartenir à une même droite; mais les deux côtés

BC et $B'C'$, sont parallèles ou concourent à l'infini ; d'où il suit que le point A'', de concours des trois droites BC, $B'C'$, $B''C''$, doit être infiniment éloigné, ou, en d'autres termes, que la droite mobile $B''C''$ doit être constamment parallèle aux deux autres droites mobiles BC et $B'C'$ et, comme elles, constamment perpendiculaire à l'arête CC' de l'angle dièdre ; puis donc que cette droite mobile passe constamment par le point fixe B'', elle doit être constamment dans le plan conduit par ce point fixe B'' perpendiculairement à cette arête ; le point C'' de cette droite doit donc être aussi constamment dans ce plan.

Mais nous avons vu que ce point mobile C'' décrivait dans l'espace l'intersection des deux surfaces coniques ; cette intersection est donc une courbe plane dont le plan est perpendiculaire à l'arête de l'angle dièdre ; ou plutôt l'intersection de ces deux surfaces, lieu du point mobile C'' n'est autre que l'intersection de l'une ou de l'autre avec le plan conduit par le point B'', perpendiculairement à l'arête de l'angle dièdre.

Or, il est connu que, dans une surface conique du second ordre, toute section plane parallèle à une section circulaire est également une section circulaire, et qu'en outre les centres des deux cercles sont en ligne droite avec le sommet ; puis donc que le plan de la commune section des deux surfaces coniques est parallèle à ceux des sections circulaires dont les centres sont C et C' et les rayons CB et CB', il s'ensuit que cette commune section, lieu du point mobile C'', est un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'arête CC' de l'angle dièdre. En outre, son centre devant être à la fois sur AC et sur $A'C'$, ce centre ne sera autre chose que le point B'' de concours de ces deux droites.

Quant au rayon de ce cercle, on le déterminera facilement en cherchant la situation du point C'' de sa circonférence, pour le cas particulier où la face mobile de l'angle dièdre est rabattue sur sa face fixe.

On démontrera d'une manière semblable que le point c d'intersection des droites AB′ et A′B, décrit aussi dans l'espace une circonférence dont le centre est à l'intersection b des deux droites AC′ et A′C, et dont le plan est, comme celui de la première, perpendiculaire à l'arête de l'angle dièdre.

Démonstration du théorème de statique énoncé à la page 199 du présent volume;

Par M. Bobillier, professeur de mathématiques à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne,

Et M. Lenthéric, professeur de mathématiques et de physique au Collége royal de Montpellier.

Théorème. Soient A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... A_nB_n *des droites représentant en intensité et en direction des forces appliquées respectivement à des points quelconques* A_1, A_2, A_3, ... A_n, *invariablement liés entre eux, mais d'ailleurs parfaitement libre dans l'espace. Soient* PD_1, PD_2, PD_3, ... PD_n, *des droites respectivement parallèles et égales à celles-là, conduites par un même point quelconque* P *de l'espace. Soient* PG_1, PG_2, PG_3, ... PG_n d'*autres droites, respectivement perpendiculaires aux plans des triangles* PA_1B_1, PA_2B_2, PA_3B_3, ... PA_nB_n, *et proportionnelles à leurs surfaces. Soient enfin* Δ *le centre des moyennes distances des points* D_1, D_2, D_3, ... D_n *et* Γ *le centre des moyennes distances des points* G_1, G_2, G_3, ... G_n.

1.° *Pour qu'il y ait équilibre entre les forces dont il s'agit, il est nécessaire et il suffit qu'on ait à la fois,*

$$P\Delta=0\,,\qquad P\Gamma=0\,,$$

ou, en d'autres termes, que le point P *soit le centre commun des moyennes distances tant du système des points* D_1, D_2, D_3, ... D_n *que du système des points* G_1, G_2, G_3, ... G_n

2.° *Lorsqu'aucune de ces conditions n'étant remplie, l'angle* $\Delta P\Gamma$ *n'est pas droit, les forces du système ont deux résultantes, situées dans des plans différens.*

3.° *Si, au contraire, l'angle* $\Delta P\Gamma$ *est droit, elles admettent une résultante unique, parallèle à* $P\Delta$ *et représentée en intensité par* $n.P\Delta$.

4.° *Si, en particulier,* $P\Gamma=0$, *cette résultante unique se confond avec* $P\Delta$.

5.° *Si, au contraire, on a seulement* $P\Delta=0$, *les forces du système se réduisent à un couple.*

Démonstration. Désignons respectivement pour abréger, par P_1, P_2, P_3, ... P_n les forces A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... A_nB_n. Par le point P, que nous supposons invariablement lié au système, imaginons deux forces égales et parallèles à P_1, mais directement opposées, deux forces égales et parallèles à P_2, mais directement opposés et ainsi de suite, jusqu'à la dernière P_n. Nous aurons ainsi des forces égales et parallèles à celles du système et agissant dans le même sens qu'elles, appliquées en P, et se réduisant conséquemment à une force unique passant par ce point, si toutefois elles ne se font pas équilibre et n couples P_1—P_1, P_2—P_2, P_3—P_3, ... P_n—P_n; et il n'y aura rien de changé à l'état du système. Les forces appliquées au point P seront représentées en intensité et en direction par PD_1, PD_2, PD_3, ... PD_n, d'où il suit que, si Δ est le centre des moyennes distances des points D_1, D_2, D_3, ... D_n, leur résultante sera représentée en intensité par $n.\mathrm{P}\Delta$ et dirigée suivant $\mathrm{P}\Delta$ (*).

Les axes des couples seront des droites respectivement perpendiculaires à leurs plans, c'est-à-dire, aux plans des triangles $\mathrm{PA_1B_1}$, $\mathrm{PA_2B_2}$, $\mathrm{PA_3B_3}$, ... $\mathrm{PA}_n\mathrm{B}_n$ et proportionnels à leurs momens ou énergies; ces axes seront donc représentés, en grandeur et en direction, par $\mathrm{PG_1}$, $\mathrm{PG_2}$, $\mathrm{PG_3}$, ... PG_n; car ces droites, d'après l'énoncé, sont respectivement perpendiculaires aux plans des triangles $\mathrm{PA_1B_1}$, $\mathrm{PA_2B_2}$, $\mathrm{PA_3B_3}$, ... $\mathrm{PA}_n\mathrm{B}_n$, qui sont les mêmes que ceux des couples et proportionnelles aux aires de ces triangles, lesquelles aires sont respectivement moitiés des rectangles qui expriment l'énergie des couples.

Or, il est connu, par la théorie que M. Poinsot a développée dans sa Statique, que la composition des couples dont les bras de leviers ont une extrémité commune s'opère en composant leurs axes comme si c'était autant de forces. Or, ces axes étant ici $\mathrm{PG_1}$, $\mathrm{PG_2}$, $\mathrm{PG_3}$, ... PG_n et Γ étant supposés le centre des moyennes distances des points $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{G_2}$, $\mathrm{G_3}$, ... G_n, il s'ensuit que l'axe du couple résultant sera dirigé suivant $\mathrm{P}\Gamma$ et représenté en longueur par $n.\mathrm{P}\Gamma$.

Ainsi, tout le système dont il s'agit peut être réduit à une force dirigée suivant $\mathrm{P}\Delta$ et représentée en intensité par $n.\mathrm{P}\Delta$ et à un couple dont l'axe, dirigé suivant $\mathrm{P}\Gamma$, aura pour longueur $n.\mathrm{P}\Gamma$.

Cela posé, veut-on 1.° que le système soit en équilibre ? Il sera nécessaire et il suffira pour cela que la résultante $n.\mathrm{P}\Delta$ et le couple $n.\mathrm{P}\Gamma$ soient séparément nuls; ce qui donnera, comme l'annonce le théorème,

$$\mathrm{P}\Delta=0\,, \qquad \mathrm{P}\Gamma=0\,.$$

2.° Lorsque ces deux conditions ne seront point remplies l'une

(*) *Annales*, tom. XVI, pag. 30.

et l'autre, le système ne sera point en équilibre, mais PΔ et PΓ n'étant ni nuls ni perpendiculaires l'un à l'autre, la force n.PΔ ne sera point dans le plan du couple; et en la composant avec celle des deux forces de ce couple qui passe par le point P, il en résultera une force unique qui ne sera point dans le plan de ce couple et qui conséquemment ne pourra être comprise dans un même plan avec l'autre force de ce couple et ne pourra, par suite, être composée avec elle en une force unique, de sorte que le système aura deux résultantes.

3.° Si, au contraire l'angle ΔPΓ est droit, la force n.PΔ, située alors dans le plan du couple, pourra se composer, avec la force du couple qui passe par le point P, en une force unique située dans ce plan, mais qui ne sera point parallèle à l'autre force du couple, ou du moins ne lui sera point égale; de manière qu'elle pourra se composer avec elle en une seule force, à laquelle se réduira alors tout le système.

4.° Si PΓ seul est nul, le couple est nul aussi, et la résultante unique du système se réduit à n.PΔ, dirigée suivant PΔ.

5.° Si enfin c'est PΔ seul qui est nul, il ne reste plus que le couple auquel se réduit alors tout le système (*).

Le théorème que nous venons de démontrer conduit aux conditions d'équilibre d'un système libre de forme invariable, et aux conséquences qu'on a coutume d'en déduire, d'une manière fort simple. Soient conduits, par le point P, trois axes rectangulaires, faisons

$$A_1B_1=P' \,, \quad A_2B_2=P'' \,, \quad A_3B_3=P''' \,, \ \ldots..$$

(*) Ce qu'on vient de lire appartient en commun à MM. Lenthéric et Bobillier : ce qui suit appartient uniquement à M. Bobillier.

J. D. G

soient α', β', γ', α'', β'', γ'', α''', β''', γ''', ... les angles de ces droites avec les axes des x des y et des z ; soient encore (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), ... les points A_1, A_2, A_3, ... Soient enfin D, E, F les coordonnées du point Δ, G, H; K celles du point Γ, d, e, f les angles que forme $P\Delta$ avec les axes des coordonnées ; et g, h, k les angles que forme $P\Gamma$ avec les mêmes axes.

Nous aurons d'abord

$$\left.\begin{array}{ll}
P\Delta=\sqrt{D^2+E^2+F^2}\,, & P\Gamma=\sqrt{G^2+H^2+K^2}\,, \\[2ex]
\text{Cos.}d=\dfrac{D}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}\,, & \text{Cos.}g=\dfrac{G}{\sqrt{G^2+H^2+K^2}}\,, \\[2ex]
\text{Cos}\,e=\dfrac{E}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}\,, & \text{Cos.}h=\dfrac{H}{\sqrt{G^2+H^2+K^2}}\,, \\[2ex]
\text{Cos}f=\dfrac{F}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}\,, & \text{Cos.}k=\dfrac{K}{\sqrt{G^2+H^2+K^2}}\,.
\end{array}\right\}\quad(1)$$

Les coordonnées des points D_1, D_2, D_3, ... ne seront autre chose que les projections sur les trois axes des droites PD_1, PD_2, PD_3, ... et seront conséquemment exprimées par

$$\begin{array}{lll}
P'\text{Cos.}\alpha'\,, & P'\text{Cos.}\beta'\,, & P'\text{Cos.}\gamma'\,, \\[1.5ex]
P''\text{Cos.}\alpha''\,, & P''\text{Cos}\,\beta''\,, & P''\text{Cos.}\beta''\,, \\[1.5ex]
P'''\text{Cos.}\alpha'''\,, & P'''\text{Cos.}\beta'''\,, & P'''\text{Cos.}\beta'''\,, \\[1.5ex]
\ldots\ldots\ldots\,; & \ldots\ldots\ldots\,; & \ldots\ldots\ldots\,;
\end{array}$$

et on aura de plus, par la définition du point Δ

$$\left.\begin{array}{l} nD = P'\text{Cos}.\alpha' + P''\text{Cos}.\alpha'' + P'''\text{Cos}.\alpha''' + \ldots \\ nE = P'\text{Cos}.\beta' + P''\text{Cos}.\beta'' + P'''\text{Cos}\,\beta''' + \ldots \\ nF = P'\text{Cos}.\gamma' + P''\text{Cos}.\gamma'' + P'''\text{Cos}.\gamma''' + \ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

Si l'on désigne par t', u', v', respectivement les inclinaisons du plan du triangle PA_1B_1 sur les plans des yz, des zx et des xy, $180^\circ - t'$, $180^\circ - u'$, $180^\circ - v'$ seront les angles de la droite PG_1 avec les trois axes; et les coordonnées du point G_1 seront exprimées par $-PA_1B_1\text{Cos}\,t'$, $-PA_1B_1\text{Cos}.u'$, $-PA_1B_1\text{Cos}.v$, c'est-à-dire, par les projections du triangle PA_1B_1 sur les plans coordonnés, prises en signes contraires.

Pour déterminer l'aire de la projection du triangle PA_1B_1 sur le plan des xy, on remarquera que la projection de la base A_1B_1 est $P'\text{Sin}.\gamma'$ et que l'équation de cette projection est

$$y - y' = \frac{\text{Cos}.\beta'}{\text{Cos}.\alpha'}(x - x')\ ;$$

sa hauteur est égale à

$$\frac{-y'\text{Cos}.\alpha' + x'\text{Cos}.\beta'}{\sqrt{\text{Cos}.^2\alpha' + \text{Cos}.^2\beta'}}\ ;$$

ou, à cause de la relation $\text{Cos}.^2\alpha' + \text{Cos}.^2\beta' + \text{Cos}.^2\gamma' = 1$,

$$-\frac{y'\text{Cos}.\alpha' - x'\text{Cos}.\beta'}{\text{Sin}\,\gamma'}\ ;$$

conséquemment, la coordonnée z du point G_1 sera

$$\tfrac{1}{2}P'(y'\text{Cos.}\alpha-x'\text{Cos.}\beta')$$

et on trouvera de même, pour les coordonnées x et y du même point

$$\tfrac{1}{2}P'(z'\text{Cos}\,\beta'-y'\text{Cos.}\alpha')\ ,\qquad \tfrac{1}{2}P'(x'\text{Cos.}\gamma'-z'\text{Cos.}\alpha')\ ,$$

les coordonnées des points G_2, G_3, ... auront des valeurs analogues; d'où il suit qu'on aura, d'après la définition du point Γ,

$$\left.\begin{aligned}2nG&=P'(z'\text{Cos.}\beta'-y'\text{Cos.}\gamma')+P''(z''\text{Cos.}\beta''-y''\text{Cos.}\gamma'')+\ldots\ldots\\2nH&=P'(x'\text{Cos.}\gamma'-z'\text{Cos.}\alpha')+P''(x''\text{Cos.}\gamma''-z''\text{Cos.}\alpha'')+\ldots\ldots\\2nK&=P'(y'\text{Cos.}\alpha'-x'\text{Cos.}\beta')+P''(y''\text{Cos.}\alpha''-x''\text{Cos.}\beta'')+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Présentement, désignons respectivement par X, Y, Z, T, U, V les seconds membres des équations (2) et (3); elles deviendront ainsi

$$nD=X\ ,\qquad nE=Y\ ,\qquad nF=Z\ ,$$

$$2nG=T\ ,\qquad 2nH=U\ ,\qquad 2nK=V\ ;$$

tirant de là les valeurs de D, E, F, G, H, K, pour les substituer dans les équations (1), on aura

$$n.\text{P}\Delta=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\ ,\qquad 2n.\text{P}\Gamma=\sqrt{T^2+U^2+V^2}\ ,$$

$$\text{Cos}\,d=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\ ,\qquad \text{Cos.}g=\frac{T}{\sqrt{T^2+U^2+V^2}}\ ,$$

$$\text{Cos}.e=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\,,\qquad \text{Cos}.h=\frac{U}{\sqrt{T^2+U^2+V^2}}\,,$$

$$\text{Cos}.f=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\,,\qquad \text{Cos}.k=\frac{V}{\sqrt{T^2+U^2+V^2}}\,;$$

formules au moyen desquelles on peut déterminer les intensités et directions tant de la résultante que du couple résultant, en fonction des intensités des composantes, des coordonnées de leurs points d'application et des quantités angulaires qui en déterminent la direction.

Les équations de condition qui correspondent aux différens cas du théorème proposé se déduisent facilement de ces formules.

1.° Les équations $P\Delta=0$, $P\Gamma=0$, nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système donnent

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=0\,;\qquad \sqrt{T^2+U^2+V^2}=0\,,$$

équations qui entraînent les suivantes :

$$X=0\,,\qquad Y=0\,,\qquad Z=0\,,$$

$$T=0\,,\qquad U=0\,,\qquad V=0\,.\quad (*)$$

2.° Pour exprimer que l'angle $\Delta P\Gamma$ est droit, et que, par suite,

(*) On trouve à la page 14 du VIII.[e] volume du présent recueil, pour parvenir aux équations d'équilibre, une méthode très-simple et très-symétrique, indépendante de théorie des couples ou de tout autre auxiliaire.

J. D. G.

le système est réductible à une force unique, on a l'équation

$$\text{Cos}.d\,\text{Cos}.g+\text{Cos}.e\,\text{Cos}.h+\text{Cos}.f\,\text{Cos}.k=0$$

qui devient, en substituant

$$TX+UY+VZ=0\,; \qquad (4)$$

3.° Pour exprimer qu'on a seulement $P\Gamma=0$, ou que le système a une résultante unique, passant par l'origine des coordonnées, on aura l'équation unique

$$\sqrt{T^2+U^2+V^2}=0\,,$$

d'où résultent ces trois-ci

$$T=0\,,\qquad U=0\,,\qquad V=0\,,$$

4.° Enfin, pour exprimer que le système se réduit à un couple, il faudra écrire seulement $P\Delta=0$, ou bien

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=0\,,$$

qui donne

$$X=0\,,\qquad Y=0\,,\qquad Z=0\,,$$

On peut remarquer que, dans ce dernier cas, la relation (4) est satisfaite, bien qu'alors il n'y ait pas une résultante unique. C'est, au surplus, le seul cas où elle puisse donner une fausse indication.

5.° Enfin, dans toutes les autres hypothèses qu'on voudra faire sur les six quantités T, U, V, X, Y, Z, le système pourra seulement se réduire à deux forces, non composables en une seule.

Si toutes les forces du système sont parallèles, les droites PD_1, PD_2, PD_3, ... se confondront entre elles et avec $P\Delta$ et en outre PG_1, PG_2, PG_3, ..., étant perpendiculaires à $P\Delta$, se trouveront dans un plan perpendiculaire à cette droite. Le point Γ sera donc aussi dans ce plan; d'où il suit que l'angle $\Delta P\Gamma$ sera droit; il y aura donc une résultante unique, pourvu toutefois que l'on n'ait pas $P\Delta = o$.

Si toutes les forces du système sont situées dans un même plan: en prenant pour le point P un quelconque des points de ce plan, les droites PD_1, PD_2, PD_3, ..., ainsi que le point Δ, s'y trouveront aussi; en outre, les droites PG_1, PG_2, PG_3, ... perpendiculaires à ce plan, se confondront en une seule qui contiendra le point Γ; l'angle $\Delta P\Gamma$ sera donc encore droit; de sorte que, sauf le cas de $P\Delta = o$, il y aura une résultante unique.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie.

DEUX lignes du second ordre, tracées sur les deux faces d'un angle dièdre variable, de telle sorte que l'arête de cet angle en soit une corde commune, réelle ou idéale, déterminent, quelle que soit d'ailleurs l'ouverture de l'angle dièdre, deux surfaces coniques du second ordre, dont elles sont les intersections. On suppose que, l'une des faces de l'angle dièdre ainsi que son arête restant fixes, son autre face tourne sur cette arête comme sur une charnière, et on demande quelles lignes les sommets des deux surfaces coniques décriront dans l'espace?

DEUX surfaces coniques du second ordre qui ont un angle dièdre circonscrit commun, réel ou idéal, déterminent, quelle que soit la distance entre leurs sommets, sur l'arête de cet angle, deux lignes planes du second ordre qui en sont les intersections. On suppose que, l'une des deux surfaces coniques restant fixe, ainsi que l'angle dièdre circonscrit commun, l'autre surface conique se meut parallèlement à elle-même de manière à être toujours inscrite à l'angle dièdre, et on demande à quelle surface les plans des deux courbes d'intersection seront constamment tangens?

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Recherches sur les développantes des courbes tracées sur la surface d'un cône droit;

Par M. VALLÈS, élève à l'Ecole royale des ponts et chaussées.

(*Extrait d'une lettre au Rédacteur des* Annales).

LA recherche de la développante de la spirale conique, que vous avez bien voulu, Monsieur, insérer à la page 159 du présent volume, exige d'assez longs calculs, dont on vient heureusement à bout au moyen de quelques artifices qui les abrègent considérablement. J'ai eu occasion de revenir dernièrement sur ce sujet, et je me suis aperçu que les calculs qui se trouvent dans l'endroit cité sont susceptibles des mêmes abréviations, quelle que soit l'espèce de courbe qu'on suppose tracée sur le cône; en sorte qu'on obtient des formules générales à l'aide desquelles on peut représenter les développantes de toutes les courbes coniques possibles. Ces formules sont en outre très-propres à conduire à la solution du problème inverse, qui consiste à trouver la courbe conique, lorsque la développante est donnée; elles fournissent ainsi une solution très-simple du dernier des deux problèmes proposés en l'endroit cité. Je profiterai de cette circonstance pour corriger une erreur que j'avais commise à la fin de mon premier calcul, et qui rend fautive l'équation (15).

Soit toujours une courbe quelconque tracée sur la surface d'un cône droit et rapportée à son axe comme axe des z et à un plan perpendiculaire à cet axe comme plan des xy. Soit (t, u, v) un des points de la courbe et soit α l'angle générateur du cône, on aura d'abord

$$t^2+u^2=v^2\text{Tang.}^2\alpha\,. \qquad (1)$$

Si r est le rayon vecteur de la projection du point (t, u, v) sur le plan des xy, et que θ soit l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des x, on aura en outre

$$\theta=\mathrm{f}(r)$$

la fonction f dépendant de la nature arbitraire de la courbe tracée sur le cône. Or, on a

$$\theta=\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{u}{t}\right) \qquad \text{et } r=\sqrt{t^2+u^2}\;;$$

donc

$$\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{u}{t}\right)=\mathrm{f}(\sqrt{t^2+u^2})=\mathrm{f}(v\text{Tang.}\alpha)\;; \qquad (2)$$

et les équations (1) et (2) seront celles d'une courbe quelconque, tracées sur la surface conique. On en tirera très-facilement

$$\left.\begin{array}{l} t=v\text{Tang.}\alpha\text{Cos.}[\mathrm{f}(v\text{Tang.}\alpha)]\;, \\ u=v\text{Tang.}\alpha\text{Sin.}[\mathrm{f}(v\text{Tang.}\alpha)]\;; \end{array}\right\} \quad (3)$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dt}{dv}=\{\text{Cos.}[\mathrm{f}(v\text{Tang.}\alpha)]-v\mathrm{f}'(v\text{Tang.}\alpha).\text{Sin.}[\mathrm{f}(v\text{Tang.}\alpha)]\}\text{Tang.}\alpha\,, \\ \dfrac{du}{dv}=\{\text{Sin.}[\mathrm{f}(v\text{Tang.}\alpha)]+v\mathrm{f}'(v\text{Tang.}\alpha).\text{Cos.}[\mathrm{f}(v\text{Tang.}\alpha)]\}\text{Tang.}\alpha\,. \end{array}\right\} (4)$$

Présentement (x, y, z) étant un quelconque des points de la tangente à la courbe conique au point (t, u, v), on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{x-t}{z-v}=\frac{x-v\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(\mathrm{Tang.}\alpha)].\mathrm{Tang.}\alpha}{z-v}\ ,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{y-u}{z-v}=\frac{y-v\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)].\mathrm{Tang}\,\alpha}{z-v}\ .\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

En égalant ces valeurs aux précédentes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}x=\{z\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]-v(z-v)\mathrm{f}'(v\mathrm{Tang}\,\alpha)\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]\}\mathrm{Tang.}\alpha\ ,\\ y=\{z\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]+v(z-v)\mathrm{f}'(v\mathrm{Tang.}\alpha)\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang}\,\alpha)]\}\mathrm{Tang.}\alpha\ .\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Si l'on fait la somme des quarrés de ces valeurs, on trouvera

$$x^2+y^2=\{z^2+v^2(z-v)^2\mathrm{f}'^2(v\mathrm{Tang.}\alpha)\}\mathrm{Tang.}^2\alpha\ ,$$

ou bien

$$v(z-v)\mathrm{f}'(v\mathrm{Tang.}\alpha)\mathrm{Tang.}\alpha=\pm\sqrt{x^2+y^2-z^2\mathrm{Tang.}^2\alpha}\ ;\quad(7)$$

et telle est l'équation qui donnera la valeur de v, quand x, y, z seront donnés.

En faisant ensuite la somme des produits respectifs des équations (6) par $\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]$ et $\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang}\,\alpha)]$ on trouvera

$$\frac{x}{z\mathrm{Tang.}\alpha}\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]+\frac{y}{z\mathrm{Tang.}\alpha}\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]=1\ .\quad(8)$$

Cette équation, après la substitution de la valeur de v donnée par l'équation (7), sera celle de la surface développable lieu des tangentes à la courbe conique.

Pour connaître l'intersection de cette surface avec le plan des xy, on fera $z=0$ dans les équations (7) et (8), ce qui donnera

$$v^2\mathrm{f}'(v\mathrm{Tang.}\alpha)\mathrm{Tang.}\alpha=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\qquad x\mathrm{Cos.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]+y\mathrm{Sin.}[\mathrm{f}(v\mathrm{Tang.}\alpha)]=0\ ;$$

ou bien, en passant aux coordonnées polaires,

$$r=v^2\mathrm{f}'(v\,\mathrm{Tang}.\alpha)\mathrm{Tang}.\alpha\;,\qquad \theta=\mathrm{f}(v\,\mathrm{Tang}.\alpha)\;.$$

En différentiant la seconde et y mettant pour $\mathrm{f}'(v\,\mathrm{Tang}.\alpha)$ sa valeur, donnée par la première, on aura

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{r}=\frac{\mathrm{d}v}{v^2\,\mathrm{Tang}.\alpha}\;,\quad \text{d'où}\quad \int\frac{\mathrm{d}\theta}{r}=-\frac{1}{v\,\mathrm{Tang}.\alpha}\;;$$

de sorte que l'équation polaire cherchée sera

$$\theta=\mathrm{f}\left(-\frac{1}{\int\frac{\mathrm{d}\theta}{r}}\right)\;.$$

Si, par exemple, on suppose

$$\mathrm{f}(v\,\mathrm{Tang}.\alpha)=\frac{v\,\mathrm{Tang}.\alpha}{a}$$

on aura

$$\theta=-\frac{1}{a\int\frac{\mathrm{d}\theta}{r}}\qquad \text{d'où}\qquad a\theta\int\frac{\mathrm{d}\theta}{r}+1=0\;;$$

puis en différentiant, divisant par $\mathrm{d}\theta$ et éliminant $\int\frac{\mathrm{d}\theta}{r}$

$$r=a\theta^2\;.$$

C'est en effet le résultat (12) trouvé à la page 163, pour ce cas particulier.

Pour avoir la seconde équation de la développante, on prendra la somme des quarrés des équations (4) ce qui donnera

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2=\{1+v^2\mathrm{f}'^2(v\,\mathrm{Tang}.\alpha)\}\mathrm{Tang}.^2\alpha\;,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}=\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)}\ ,$$

et

$$s=\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\int\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)}.\mathrm{d}v\ ;$$

arc qu'il faudra toujours prendre positivement, puisqu'il ne s'agit ici que de sa valeur absolue.

On a aussi

$$s=\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2+(z-v)^2}=(z-v)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}=\frac{z-v}{\mathrm{Cos.}\alpha}\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)}\ ;$$

et cet arc, comme le précédent, devra aussi être pris positivement. Mais c'est ce qu'on ne ferait pas si, comme dans mon premier calcul, on laissait subsister $+(z-v)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}$. En effet, si s augmente en même temps que v, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}$ sera positif; mais alors z sera moindre que v et $(z-v)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}$ sera négatif; il faudra donc, dans ce cas, pour prendre cette quantité positivement, la faire précéder du signe *moins*. Si, au contraire, v diminue quand s augmente, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}$ sera négatif et $z-v$ positif; il faudra donc encore le signe *moins* dans ce cas; de sorte que notre deuxième équation sera réellement

$$z=v-\frac{\int\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang}\,\alpha)}.\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha f'^2(v\,\mathrm{Tang}\,\alpha)}}\ , \qquad (9)$$

Les équations (8) et (9) sont donc, après la substitution de la valeur de v tirée de l'équation (7), celles de la développante cherchée.

Si présentement on donne les deux équations de la développante, la seule chose à chercher sera la forme de la fonction f, et on y parviendra en éliminant x, y, z entre les deux équations données et les équations (8) et (9). Il restera une équation en v et $\mathrm{f}(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)$ de laquelle on tirera la valeur de cette dernière quantité.

Si l'on donne seulement l'équation d'une surface sur laquelle la développante doit être située; il faudra alors, comme précédemment, trouver la forme de la fonction f et ensuite la seconde équation de la courbe. C'est ce à quoi on parviendra en éliminant x, y, z entre les équations (7), (8), (9) et celle de la surface donnée. Il restera une équation de laquelle on tirera la valeur de $\mathrm{f}(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)$. Cette valeur étant connue, on la substituera dans l'équation (7) qu'on résoudra alors par rapport à v; et, en mettant pour v sa valeur ainsi obtenue dans l'équation (8), on aura l'équation de la courbe cherchée.

Faisons l'application de ceci au cas où l'on demande que la développante se trouve sur un plan conduit par le sommet du cône perpendiculairement à son axe. L'équation de cette surface étant $z=0$, l'élimination de x, y, z se réduit à celle de z entre $z=0$ et l'équation (9); en sorte que l'équation finale sera

$$v-\frac{\int\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha\,\mathrm{f}'^2(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)}\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2\mathrm{Sin.}^2\alpha\,\mathrm{f}'^2(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)}}=0\,.$$

Or, en général, quand on a

$$v-\frac{\int\psi(v).\mathrm{d}v}{\psi(v)}=0\,,$$

on en tire $\psi'(v)=0$, d'où $\psi(v)=\mathrm{Const.}$ On aura donc, dans le cas présent

$$v\,\mathrm{f}'(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)=\frac{1}{D}\quad\text{et}\quad \mathrm{f}(v\,\mathrm{Tang.}\alpha)=\frac{1}{D}\,\mathrm{Log.}\,\frac{v}{a}\;;$$

la projection de la courbe tracée sur le cône aura donc pour équation polaire

$$D\theta=\text{Log.}\,\frac{r}{a}\ ;$$

et c'est en effet le résultat trouvé à la page 169.

L'équation de la courbe décrite par l'extrémité du fil est, dans ce cas, celle de la courbe suivant laquelle la surface développable engendrée par ce fil rencontre le plan des xy; on aura donc, pour l'équation polaire de cette courbe,

$$\theta=\frac{1}{D}\,\text{Log.}\left(-\frac{1}{a\text{Tang.}\alpha\int\frac{d\theta}{r}}\right)\ ;$$

d'où on conclut, en différentiant

$$Dd\theta=-a\text{Tang.}\alpha\int\frac{d\theta}{r}\cdot\frac{1}{a\text{Tang.}\alpha}\cdot\frac{\frac{d\theta}{r}}{\left(\int\frac{d\theta}{r}\right)^2}=\frac{\frac{d\theta}{r}}{\int\frac{d\theta}{r}}\ ,$$

ou bien

$$-D=\frac{1}{r\int\frac{d\theta}{r}}\ , \qquad \text{et} \qquad -\int\frac{d\theta}{r}=\frac{1}{Dr}\ ;$$

puis, en différentiant de nouveau,

$$d\theta=\frac{1}{D}\,\frac{dr}{r}\ ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$D\theta=\text{Log.}\,\frac{r}{b}\ ;$$

équation d'une autre spirale logarithmique, comme on l'avait déjà trouvé à la page 171.

Je pense, Monsieur, que ce moyen de parvenir au but vous semblera assez curieux à connaître. Il a d'ailleurs cet avantage qu'il permet de résoudre, par des formules construites une fois pour toutes, toutes les questions de ce genre, et qu'il peut ainsi éviter de longs calculs, lorsqu'on s'occupe de ce genre de recherches.

Agréez, etc.

COMBINAISONS.

Recherche directe des formules de combinaisons nécessaires, pour le développement d'une puissance d'un binome,

Par M. Gergonne.

Rien ne serait mieux sans doute que de consacrer à la théorie des permutations et combinaisons, dans les traités élémentaires d'algèbre, un article à part d'une étendue proportionnée à l'importance de cette théorie, et dans lequel on pourrait traiter beaucoup d'autres questions que celles qui sont strictement nécessaires pour le développement des puissances d'un binôme. Toutefois, comme on peut fort bien ne vouloir établir que ces dernières seulement, je vais présenter ici un mode de raisonnement qui y conduit directement et qui me paraît assez simple. Il en existe beaucoup d'autres sans doute, et j'en ai moi-même donné de diverses sortes dans le présent recueil; mais la théorie des combinaisons étant une théorie très-délicate et assez difficile à bien saisir par les commençans, il est commode de la présenter sous diverses formes, afin de la rendre plus facilement accessible aux diverses tournures d'esprit que souvent un même raisonnement ne frappe pas d'une manière uniforme.

PROBLÈME. Parmi des choses en nombre m, *toutes différentes les unes des autres, de combien de manières en peut-on choisir un nombre* n ?

Solution. D'abord, si l'on ne veut choisir qu'une seule chose, on le pourra évidemment d'autant de manières qu'il y a de choses; c'est-à-dire de m manières. Ecrivons $\frac{m}{1}$.

Si l'on veut choisir deux choses, le choix de la première étant fait, on pourra évidemment choisir la seconde de $m-1$ manières; de sorte que, si l'on choisissait, tour-à-tour, chacune des m choses pour la première, le nombre des combinaisons deux à deux seraient $m(m-1)$. Mais il est clair qu'en procédant ainsi, chaque combinaison se trouverait répétée deux fois; car, en supposant que les choses combinées fussent des lettres, la combinaison ab, par exemple, proviendrait également de la combinaison de a avec b et de celle de b avec a. Donc, le nombre des combinaisons possibles de m choses deux à deux est simplement $\frac{m(m-1)}{2}$. Ecrivons $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}$.

Si l'on demande combien, parmi ces diverses combinaisons deux à deux, il s'en trouve qui ne renferment pas une certaine lettre, a par exemple, il est manifeste qu'il s'y en trouvera autant qu'on pourra faire de combinaisons deux à deux avec les $m-1$ lettres restantes. On aura donc la réponse à cette question, en changeant m en $m-1$, dans la formule que nous venons d'obtenir, ce qui donnera $\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}$.

Passons aux combinaisons trois à trois. Une lettre quelconque étant choisie pour première, on pourra la combiner avec toutes les combinaisons deux à deux où elle n'entre pas, lesquelles, comme nous venons de le voir, sont au nomdre de $\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}$. Si l'on en fait de même tour-à-tour, pour chacune des m lettres, on obtiendra un nombre de combinaisons de trois lettres exprimées par $m.\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}$. Mais il est aisé de voir que chaque combinaison y sera repétée trois fois; puisque, par exemple, la combinaison abc aura été produite par la combinaison de a avec bc, par celle de b avec ac et par celle de c avec ab; donc le nombre des manières différentes de choisir trois choses parmi des choses en nombre m, toutes différentes les unes des autres, est seulement $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}$.

Rien ne s'oppose à ce qu'on poursuive ces raisonnemens aussi loin qu'on voudra; et si l'on se bornait à se laisser guider par l'analogie, les résultats $\frac{m}{1}$, $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}$, $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}$, déjà obtenus feraient assez connaître que le nombre des combinaisons possibles et distinctes n à n de m choses, toutes différentes les unes des autres, doit être exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdots\frac{m-n+1}{n}.$$

Mais, afin qu'il n'y ait point d'induction dans tout ceci, admettons que cette loi hypothétique ait été vérifiée pour les combinaisons de m choses $n-1$ à $n-1$, et que conséquemment on ait trouvé, pour ce nombre de combinaisons,

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+2}{n-1},$$

pour savoir combien, parmi ces combinaisons, il y en a qui ne renferment pas une certaine lettre, a par exemple; il faudra, comme ci-dessus, changer, dans cette formule, m en $m-1$; ce qui donnera

$$\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n-1}. \qquad (A)$$

Qu'il soit question présentement d'opérer des combinaisons n à n, en adoptant une lettre quelconque pour première lettre, on pourra la combiner avec toutes les combinaisons de $n-1$ lettres qui ne la contiennent pas; ce qui en produira un nombre (A). Si l'on en fait de même, tour-à-tour, pour chacune des m lettres, on obtiendra un nombre total de combinaisons égal à m fois (A); mais il est clair que, de cette sorte, chaque combinaison aura été répétée n fois; car, par exemple, la combinaison $abc.....gh$ aura été obtenue en combinant

a avec $bc........gh$,

b avec $ac........gh$,

c avec $ab........gh$,

. . . . ,

g avec $abc.......h$,

h avec $abc........g$;

donc, pour obtenir le nombre des combinaisons réellement différentes de nos m lettres n à n, il faudra multiplier seulement le nombre (A) par $\frac{m}{n}$, ce qui donnera

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n},$$

comme nous l'avions d'abord soupçonné. Il demeure donc établi, par ce qui précède, que, si la loi d'abord entrevue se soutient pour les combinaisons de $n-1$ lettres, elle aura lieu également pour les combinaisons de n lettres; d'où il suit que cette loi est générale.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 200 *du présent volume ;*

Par M. Bobillier, professeur de mathématiques à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Avant de nous occuper de la démonstration des propriétés des surfaces du second ordre qui doivent faire le sujet principal de cet article, arrêtons-nous un moment à la démonstration de la propriété analogue des lignes du second ordre.

Soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\ , \qquad (1)$$

l'équation d'une surface quelconque du second ordre, rapportée à des axes quelconques. On sait que l'équation de sa tangente, par un quelconque (x',y') des points de son périmètre est

$$(Ax'+Cy'+D)x+(By'+Cx'+E)y+(Dx'+Ey'+F)=0\ . \quad (2)$$

Si donc, supposant le point (x',y') indéterminé sur la courbe, on veut que cette tangente passe par l'origine, il faudra poser

$$Dx'+Ey'+F=0\ ; \qquad (3)$$

équation qui, combinée avec

$$Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+2Dx'+2Ey'+F=0 \ , \qquad (4)$$

qui exprime que le point (x', y') est sur cette courbe, fera connaître les coordonnées des points de contact des deux tangentes issues de l'origine. Mais, au lieu de recourir au calcul, il reviendra au même de construire les lignes exprimées par les équations (3) et (4), lesquelles donneront par leurs intersections les points cherchés. La première de ces lignes n'est autre chose que la courbe dont il s'agit; d'où il suit que l'autre, qui est une ligne droite, est la droite qui joint les points de contact cherchés, c'est-à-dire, la corde de contact de l'angle circonscrit qui a son sommet à l'origine, ou, en d'autres termes, la polaire de l'origine. Il est donc établi, par ce qui précède, que la polaire de l'origine, par rapport à la courbe (1), a pour équation

$$Dx+Ey+F=0 \ . \qquad (5)$$

Supposons présentement que cette courbe soit indéterminée, mais assujettie néanmoins à passer par quatre points donnés; on exprimera cette condition par *quatre* équations linéaires entre les *six* coefficiens A, B, C, D, E, F, qui entreront dans tous leurs termes, et desquelles conséquemment on pourra obtenir les valeurs de *quatre* d'entre eux, en fonction linéaire des *deux* restans; qui entreront aussi dans tous les termes de ces fonctions. En choisissant, par exemple D et E pour ces deux-là, on aura

$$F=\alpha D+\beta E \ ,$$

α et β étant des quantités constantes, fonctions des coordonnées des quatre points donnés. En substituant cette valeur dans l'équation (5) de la polaire de l'origine, cette équation deviendra

$$Dx+Ey+D\alpha+E\beta=0\ ,$$

ou bien

$$D(x+\alpha)+E(y+\beta)=0\ .$$

Or, on satisfait à cette équation, quels que soient D et E, en posant

$$x=-\alpha\ , \qquad y=-\beta\ ;$$

ce sont donc là les coordonnées d'un point fixe par lequel passe constamment la polaire de l'origine, quelle que soit d'ailleurs celle des courbes, passant par les quatre points dont il s'agit, à laquelle cette polaire est relative. En observant donc qu'ici l'origine des coordonnées est un quelconque des points du plan de ces courbes, on obtiendra ce théorème :

THÉORÈME I. Les polaires d'un même point d'un plan, relatives à toutes les lignes du second ordre qui passent par les quatre mêmes points de ce plan, concourent toutes en un même point.

Et de là, par la théorie des polaires réciproques,

THÉORÈME II. Les pôles d'une même droite tracée sur un plan, relatifs à toutes les lignes du second ordre qui touchent les quatre mêmes droites tracées sur ce plan, appartiennent tous à une même droite.

Si l'on suppose que la première droite s'éloigne à l'infini, son pôle relatif à chacune des courbes dont il s'agit, ne sera autre chose que le centre de cette courbe ; ce qui donnera ce troisième théorème ;

THÉORÈME III. Les centres de toutes les lignes du second ordre qui touchent les quatre mêmes droites appartiennent tous à une même droite (*).

(*) Il a été démontré (*Annales*, tom. XII, pag. 109 et tom. XIV, pag.

Soit une surface du second ordre rapportée à deux axes quelconques et donnée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0\ . \quad (1)$$

On sait que son plan tangent, par un quelconque (x', y', z') de ses points, a pour équation

$$\left.\begin{array}{l}(Ax'+Ez'+Fy'+G)x\\+(By'+Fx'+Dz'+H)y\\+(Cz'+Dy'+Ex'+K)z\end{array}\right\}+(Gx'+Hy'+Kz'+L)=0\ . \quad (2)$$

Si donc, en supposant le point (x', y', z') indéterminé sur la surface, on veut que ce plan tangent passe par l'origine, il faudra écrire

$$Gx'+Hy'+Kz'+L=0\ , \qquad (3)$$

équation qui, combinée avec l'équation

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dy'z'+2Ez'x'+2Fx'y'+2Gx'+2Hy'+2Kz'+L=0\ , \ (4)$$

qui exprime que le point (x', y', z') est sur la surface, fera connaître tous les points de contact, en nombre infini, pour lesquels cette condition se trouve remplie. Ces points seront également les points de contact de la surface (1) avec la surface conique circonscrite qui aurait son sommet à l'origine; or, comme leurs coordonnées devront toutes satisfaire à l'équation (3) qui n'est que du premier degré, il s'ensuit qu'ils sont tous dans le plan exprimé par cette équation. Il est donc établi par là que la courbe de contact

---

309) que cette droite, passe par les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes.

d'une surface du second ordre avec la surface conique circonscrite est une courbe plane ; c'est le plan de cette courbe que l'on appelle le plan polaire du sommet du cône ; et l'on voit d'après cela que l'équation du plan polaire de l'origine est

$$Gx+Hy+Kz+L=0 \,. \qquad (5)$$

Supposons présentement que la surface du second ordre dont il s'agit soit indéterminée, mais assujettie néanmoins à passer par sept points donnés dans l'espace. On exprimera cette condition par *sept* équations linéaires, entre les *dix* coefficiens A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, qui entreront dans tous leurs termes et desquelles conséquemment on pourra obtenir les valeurs de *sept* d'entre elles, en fonction linéaire des *trois* restantes, qui entreront aussi dans tous les termes de ces fonctions. En choisissant, par exemple G, H, K pour ces trois-là, on aura

$$L=\alpha G+\beta H+\gamma K \,,$$

α, β, γ étant des quantités constantes, fonctions des coordonnées des sept points donnés. En substituant cette valeur dans l'équation (5) de la polaire de l'origine, cette équation deviendra

$$Gx+Hy+Kz+G\alpha+H\beta+K\gamma=0 \,,$$

ou bien

$$G(x+\alpha)+H(y+\beta)+K(z+\gamma)=0 \,.$$

Or, on satisfait à cette équation, quels que soient G, H, K, en posant

$$x=-\alpha \,, \quad y=-\beta \,, \quad z=-\gamma \,;$$

ce sont donc là les coordonnées d'un point fixe, par lequel passent constamment les plans polaires de l'origine, quelle que soit d'ailleurs celle des surfaces courbes passant par les sept points donnés à laquelle ce plan polaire est relatif. En observant donc qu'ici l'origine est un quelconque des points de l'espace, on obtiendra ce théorème.

THÉORÈME IV. Les plans polaires d'un même point de l'espace, relatifs à toutes les surfaces du second ordre qui passent par les sept mêmes points, concourent tous en un même point de l'espace.

Et de là, par la théorie des polaires réciproques.

THÉORÈME V. Les pôles d'un même plan, relatifs à toutes les surfaces du second ordre qui touchent les sept mêmes plans, sont tous compris dans un même plan.

Si l'on suppose que le premier des plans dont il s'agit soit infiniment éloigné, son pôle, relatif à chacune des surfaces dont il s'agit, ne sera autre chose que le centre de cette surface; ce qui donnera ce troisième théorème.

THÉORÈME VI. Les centres des surfaces du second ordre qui touchent à la fois les sept mêmes plans donnés sont tous compris dans un même plan (*).

Soient tant de surfaces du second ordre qu'on voudra passant toutes par les huit mêmes points; parce qu'elles passent toutes par les sept premiers, les plans polaires d'un même point de l'espace relatifs à toutes ces surfaces devront (*Théorème IV*) tous concourir en un même point; et, parce qu'elles passent toutes par les sept derniers, ces mêmes plans polaires devront tous concourir en un autre point; donc ils devront tous se couper suivant la droite qui joindra ces deux points; on a donc ce théorème.

THÉORÈME VII. Les plans polaires d'un même point de l'espace, relatifs à toutes les surfaces du seconde ordre qui passent

(*) Il serait intéressant de savoir comment ce plan est situé par rapport aux sept plans dont il s'agit.

J. D. G.

par les huit mêmes points, se coupent tous suivant une même droite.

Et de là, par la théorie des polaires réciproques

THÉORÈME VIII. *Les pôles d'un même plan, relatifs à toutes les surfaces du second ordre qui touchent les huit mêmes plans, appartiennent tous à une même droite.*

Si l'on suppose que le premier des plans dont il s'agit soit infiniment éloigné, ses pôles relatifs aux diverses surfaces dont il s'agit ne seront autre chose que leurs centres; et le théorème se changera dans celui qui suit :

THÉORÈME IX. *Les centres de toutes les surfaces du second ordre qui touchent à la fois les huit mêmes plans appartiennent tous à une même droite* (*).

Démonstration du premier des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 283 du présent volume ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Montpellier.

Soient a, b, c trois longueurs quelconques, en posant

$$b-c=a'\,,$$
$$c-a=b'\,,$$
$$a-b=c'\,;$$

on aura évidemment

(*) Il serait également curieux de savoir comment cette droite est située par rapport aux huit plans.

J. D. G.

$$a'+b'+c'=0\,, \qquad (1)$$

$$aa'+bb'+cc'=0\,. \qquad (2)$$

Si A, B, C sont trois angles quelconques et qu'on pose

$$B-C=A'\,,$$

$$C-A=B'\,,$$

$$A-B=C'\,;$$

on aura pareillement

$$A'+B'+C'=0\,, \qquad (3)$$

$$AA'+BB'+CC'=0\,. \qquad (4)$$

L'équation (3) donne tour-à-tour

$$\left.\begin{array}{l} -B'-C'=A'=B-C\,, \\ -C'-A'=B'=C-A\,, \\ -A'-B'=C'=A-B\,; \end{array}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{array}{l} C-C'=B+B'\,, \\ A-A'=C+C'\,, \\ B-B'=A+A'\,; \end{array}\right.$$

et par conséquent

$$\mathrm{Cos.}(C-C')=\mathrm{Cos.}(B+B')\,, \qquad \mathrm{Sin.}(B+B')=\mathrm{Sin.}(C-C')\,,$$

$$\mathrm{Cos.}(A-A')=\mathrm{Cos.}(C+C')\,, \qquad \mathrm{Sin.}(C+C')=\mathrm{Sin.}(A-A')\,,$$

$$\mathrm{Cos.}(B-B')=\mathrm{Cos.}(A+A')\,, \qquad \mathrm{Sin.}(A+A')=\mathrm{Sin.}(B-B')\,;$$

d'où en ajoutant et transposant

$$(A+A')+(B+B')+(C+C')-(A-A')-(B-B')-(C-C')=0\,; \quad (5)$$

$$\mathrm{Cos.}(A-A')+\mathrm{Cos.}(B-B')+\mathrm{Cos.}(C-C')-\mathrm{Cos.}(A+A')-\mathrm{Cos.}(B+B')-\mathrm{Cos.}(C+C')=0\,, \qquad (6)$$

$$\mathrm{Sin.}(A+A')+\mathrm{Sin.}(B+B')+\mathrm{Sin.}(C+C')-\mathrm{Sin.}(A-A')-\mathrm{Sin.}(B-B')-\mathrm{Sin.}(C-C')=0\,. \qquad (7)$$

En vertu des formules connues

$$2\mathrm{Sin.}x\mathrm{Sin.}y=\mathrm{Cos.}(x-y)-\mathrm{Cos.}(x+y)\,,$$

$$2\mathrm{Cos.}x\mathrm{Sin.}y=\mathrm{Sin.}(x+y)-\mathrm{Sin.}(x-y)\,,$$

on a

$$2\mathrm{Sin.}A\mathrm{Sin.}A'=\mathrm{Cos}\,(A-A')-\mathrm{Cos.}(A+A')\,,$$

$$2\mathrm{Sin.}B\mathrm{Sin.}B'=\mathrm{Cos.}(B-B')-\mathrm{Cos.}(B+B')\,,$$

$$2\mathrm{Sin.}C\mathrm{Sin.}C'=\mathrm{Cos.}(C-C')-\mathrm{Cos.}(C+C')\,;$$

$$2\mathrm{Cos.}A\mathrm{Sin.}A'=\mathrm{Sin.}(A+A')-\mathrm{Sin.}(A-A')\,,$$

$$2\mathrm{Cos.}B\mathrm{Sin.}B'=\mathrm{Sin.}(B+B')-\mathrm{Sin.}(B-B')\,,$$

$$2\mathrm{Cos.}C\mathrm{Sin.}C'=\mathrm{Sin.}(C+C')-\mathrm{Sin.}(C-C')\,.$$

Ajoutant membre à membre les équations de chacune des deux séries, en ayant égard aux équations (6) et (7), et divisant par *deux*, il viendra

$$\mathrm{Sin.}A\mathrm{Sin.}A'+\mathrm{Sin.}B\mathrm{Sin.}B'+\mathrm{Sin.}C\mathrm{Sin.}C'=0\,, \qquad (8)$$

$$\mathrm{Cos.}A\mathrm{Sin.}A'+\mathrm{Cos.}B\mathrm{Sin.B}'+\mathrm{Cos.}C\mathrm{Sin.}C=0\,. \qquad (9)$$

En prenant, tour-à-tour, la somme des produits respectifs de ces deux dernières équations, d'abord par $+\mathrm{Sin.}X$ et $+\mathrm{Cos.}X$, puis $+\mathrm{Cos.}X$ et $-\mathrm{Sin.}X$, on aura, quel que soit l'angle X,

$$\text{Cos.}(A-X)\text{Sin.}A'+\text{Cos}(B-X)\text{Sin.}B'+\text{Cos.}(C-X)\text{Sin.}C'=0\,, \quad (10)$$

$$\text{Sin}(A-X)\text{Sin.}A'+\text{Sin.}(B-X)\text{Sin.}B'+\text{Sin.}(C-X)\text{Sin.}C'=0\,. \quad (11)$$

Cela posé, soient a, b, c trois rayons vecteurs d'une planète ou d'une comète, et A, B, C les angles que font leurs directions respectives avec une droite tracée arbitrairement dans leur plan, par le centre du soleil. Soient X l'angle que fait la ligne des apsides avec la même droite, p le paramètre de l'orbite et λ le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, <1 pour l'ellipse, $=1$ pour la parabole, et >1 pour l'hyperbole ; on aura

$$\left.\begin{array}{l} 2a[1+\lambda\text{Cos}(A-X)]=p\,, \\ 2b[1+\lambda\text{Cos.}(B-X)]=p\,, \\ 2c[1+\lambda\text{Cos.}(C-B)]=p\,. \end{array}\right\} \quad (12)$$

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $bc\text{Sin.}A'$, $ca\text{Sin.}B'$, $ab\text{Sin.}C'$, et ayant égard à l'équation (10), il viendra

$$2abc(\text{Sin.}A'+\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C')=(bc\text{Sin.}A'+ca\text{Sin.}B'+ab\text{Sin.}C')p\,,$$

d'où

$$p=2.\frac{\text{Sin.}A'+\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C'}{\frac{\text{Sin.}A'}{a}+\frac{\text{Sin.}B'}{b}+\frac{\text{Sin.}C'}{c}}\,. \quad (13)$$

En prenant la somme des produits des trois mêmes équations respectivement par a', b', c' et ayant égard aux relations (1) et (2) il viendra, en divisant par 2λ

$$aa'\text{Cos}(A-X)+bb'\text{Cos.}(B-X)+cc'\text{Cos.}(C-X)=0\ ,$$

ou bien en développant

$$(aa'\text{Cos.}A+bb'\text{Cos.}B+cc'\text{Cos.}C)\text{Cos.}X+(aa'\text{Sin.}A+bb'\text{Sin.}B+cc'\text{Sin.}C)\text{Sin.}X=0\ ;$$

d'où

$$\text{Tang.}X=-\frac{aa'\text{Cos.}A+bb'\text{Cos.}B+cc'\text{Cos.}C}{aa'\text{Sin.}A+bb'\text{Sin.}B+cc'\text{Sin.}C}\ . \qquad (14)$$

La première des équations (12) donne

$$\lambda=\frac{p-2a}{2a\text{Cos.}(A-X)}\ ;$$

mais de la valeur de Tang. X on conclut aisément

$$\text{Sin.}X=-\frac{aa'\text{Cos.}A+bb'\text{Cos.}B+cc'\text{Cos.}C}{\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2+2bb'cc'\text{Cos.}A'+2cc'aa'\text{Cos.}B'+2aa'bb'\text{Cos.}C'}},$$

$$\text{Cos.}X=+\frac{aa\text{Sin.}A+bb'\text{Sin.}B+cc'\text{Sin.}C}{\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+c'^2c'^2+2bb'cc'\text{Cos.}A'+2cc'aa'\text{Cos.}B'+2aa'bb'\text{Cos.}C'}}\ ;$$

et par suite

$$\text{Cos.}A\text{Cos.}X+\text{Sin.}A\text{Sin.}X=\text{Cos.}(A-X)$$

$$=\frac{cc'\text{Sin.}B'-bb'\text{Sin.}C'}{\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2+2bb'cc'\text{Cos.}A'+2cc'aa'\text{Cos.}B'+2aa'bb'\text{Cos.}C'}}\ .$$

D'un autre côté la formule (13) donne

$$p-2a=-2a.\ \frac{cc'\text{Sin.}B'-bb'\text{Sin.}C'}{bc\text{Sin.}A'+ca\text{Sin.}B'+ab\text{Sin.}C'}\ ;$$

substituant ces valeurs dans celle de λ, il viendra

$$\lambda=-\frac{\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2+2bb'cc'\text{Cos}\,A'+2cc'aa'\text{Cos}\,B'+2aa'bb'\text{Cos}.C'}}{bc\text{Sin}.A'+ca\text{Sin}.B'+ab\text{Sin}.C'}\,. \quad (15)$$

Ainsi, trois rayons vecteurs étant donnés de grandeur et de situation, on en pourra déduire, par des calculs très-symétriques, la grandeur et la situation de l'orbite.

Ces diverses formules sont connues depuis long-temps (*) ; mais il ne paraît pas qu'on ait remarqué encore qu'elles ne sont que des cas particuliers d'autres formules plus générales que nous allons faire connaître.

Soient a, b, c, d, ... p, q, r, s des longueurs quelconques *en nombre impair* ; posons

$$b-c+d-\ldots\ldots-q+r-s=a'\,,$$

$$c-d+e-\ldots\ldots-r+s-a=b'\,,$$

$$d-e+f-\ldots\ldots-s+a-b=c'\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r-s+a-\ldots\ldots-m+n-p=q'\,,$$

$$s-a+b-\ldots\ldots-n+p-q=r'\,,$$

$$a-b+c-\ldots\ldots-p+q-r=s'\,;$$

il en résultera

(*) Voy. *Annales*, tom. IV, pag. 197.

J. D. G.

$$a'+b'+c'+\dots\dots+q'+r'+s'=0\ , \qquad (1)$$

$$aa'+bb'+cc'+\dots\dots+qq'+rr'+ss'=0\ . \qquad (2)$$

On aura aussi

$$\left.\begin{array}{l}
a-a'=a-b+c-\dots\dots+q-r+s=s+s' \\
b-b'=b-c+d-\dots\dots+r-s+a=a+a'\ , \\
c-c'=c-d+e-\dots\dots+s-a+b=b+b'\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ , \\
q-q'=q-r+s-\dots\dots+m-n+p=p+p'\ , \\
r-r'=r-s+a-\dots\dots+n-p+q=q+q'\ , \\
s-s'=s-a+b-\dots\dots+p-q+r=r+r'\ ,
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

d'où en ajoutant et transposant

$$(a+a')+(b+b')+\dots+(r+r')+(s+s')-(a-a')-(b-b')-\dots-(r-r')-(s-s')=0\ . \quad (4)$$

Si A, B, C, D, ... P, Q, R, S sont des angles *en nombre impair*, en posant

$$B-C+D-\dots\dots-Q+R-S=A'\ ,$$

$$C-D+E-\dots\dots-R+S-A=B'\ ,$$

$$D-E+F-\dots\dots-S+A-B=C'\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R-S+A-\dots\dots-M+N-P=Q'\ ,$$

$$S-A+B-\ldots\ldots-N+P-Q=R' ,$$

$$A-B+C-\ldots\ldots-P+Q-R=S' ;$$

on aura de même

$$A'+B'+C'+\ldots\ldots+Q'+R'+S'=0 , \qquad (5)$$

$$AA'+BB'+CC'+\ldots\ldots+QQ'+RR'+SS'=0 , \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} A-A'=S+S' , \\ B-B'=A+A' , \\ C-C'=B+B' , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q-Q'=P+P' , \\ R-R'=Q+Q' , \\ S-S'=R+R' , \end{array}\right\} \qquad (7)$$

$$(A+A')+(B+B')+\ldots+(R+R')+(S+S')-(A-A')-(B-B')-\ldots-(R-R')-(S-S')=0 . \qquad (8)$$

Des équations (7) on conclura encore

$$\mathrm{Cos.}(A-A')=\mathrm{Cos.}(S+S') , \qquad \mathrm{Sin}(A-A')=\mathrm{Sin.}(S+S') ,$$

$$\mathrm{Cos.}(B-B')=\mathrm{Cos.}(A+A') , \qquad \mathrm{Sin.}(B-B')=\mathrm{Sin.}(A+A') ,$$

$$\mathrm{Cos.}(C-C')=\mathrm{Cos.}(B+B') , \qquad \mathrm{Sin.}(C-C')=\mathrm{Sin.}(B+B') ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{Cos.}(Q-Q')=\text{Cos.}(P+P')\,,\qquad \text{Sin.}(Q-Q')=\text{Sin.}(P+P')\,,$$

$$\text{Cos}\,(R-R')=\text{Cos}\,(Q+Q')\,.\qquad \text{Sin.}(R-R')=\text{Sin.}(Q+Q')\,,$$

$$\text{Cos.}(S-S')=\text{Cos.}(R+R')\,,\qquad \text{Sin.}(S-S')=\text{Sin.}(R+R')\,;$$

Ajoutant les équations dans les deux séries et transposant, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,(A-A')+\text{Cos.}(B-B')+\text{Cos.}(C-C')+\ldots+\text{Cos.}(Q-Q')+\text{Cos.}(R-R')+\text{Cos.}(S-S')\\ -\text{Cos.}(A+A')-\text{Cos.}(B+B')-\text{Cos.}(C+C')-\ldots-\text{Cos.}(Q+Q')-\text{Cos.}(R+R')-\text{Cos.}(S+S')\end{array}\right\}=0\,.\quad(9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}(A+A')+\text{Sin.}(B+B)+\text{Sin.}(C+C')+\ldots+\text{Sin.}(Q+Q')+\text{Sin.}(R+R')+\text{Sin.}(S+S')\\ -\text{Sin.}(A-A')-\text{Sin.}(B-B')-\text{Sin.}(C-C')-\ldots-\text{Sin.}(Q-Q')-\text{Sin.}(R-R')-\text{Sin.}(S-S')\end{array}\right\}=0\,.\quad(10)$$

En faisant toujours usage des deux théorèmes

$$2\text{Sin.}x\text{Sin}\,y=\text{Cos.}(x-y)-\text{Cos.}(x+y)\,,$$

$$2\text{Cos.}x\text{Sin.}y=\text{Sin.}(x+y)-\text{Sin.}(x-y)\,,$$

on trouvera

$$2\text{Sin.}A\text{Sin.}A'=\text{Cos.}(A-A')-\text{Cos.}(A+A')\,,$$

$$2\text{Sin.}B\text{Sin.}B'=\text{Cos.}(B-B')-\text{Cos.}(B+B')\,,$$

$$2\text{Sin.}C\text{Sin.}C'=\text{Cos.}(C-C')-\text{Cos.}(C+C')\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\text{Sin.}Q\text{Sin.}Q'=\text{Cos.}(Q-Q')-\text{Cos.}(Q+Q')\,,$$

$$2\text{Sin.}R\text{Sin.}R'=\text{Cos}\,(R-R')-\text{Cos.}(R+R')\,;$$

$$2\text{Sin.}S\,\text{Sin.}S'=\text{Cos.}(S-S')-\text{Cos.}(S+S')\,;$$

$$2\mathrm{Cos}.A\mathrm{Sin}.A'=\mathrm{Sin}.(A+A')-\mathrm{Sin}\,(A-A')\ ,$$

$$2\mathrm{Cos}\,B\mathrm{Sin}\,B'=\mathrm{Sin}.(B+B')-\mathrm{Sin}.(B-B')\ ,$$

$$2\mathrm{Cos}.C\mathrm{Sin}.C'=\mathrm{Sin}.(C+C')-\mathrm{Sin}\,(C-C')\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$2\mathrm{Cos}.Q\mathrm{Sin}.Q'=\mathrm{Sin}.(Q+Q')-\mathrm{Sin}\,(Q-Q')\ ,$$

$$2\mathrm{Cos}.R\mathrm{Sin}.R'=\mathrm{Sin}\,(R+R')-\mathrm{Sin}\,(R-R')\ ,$$

$$2\mathrm{Cos}.S\mathrm{Sin}.S'=\mathrm{Sin}\,(S+S')-\mathrm{Sin}.\,(S-S')\ .$$

Prenant les sommes d'équations dans les deux séries, et ayant égard aux équations (9) et (10), il viendra en divisant par *deux*

$$\mathrm{Sin}.A\mathrm{Sin}.A'+\mathrm{Sin}.B'\mathrm{Sin}.B'+\mathrm{Sin}.C\mathrm{Sin}.C'+\ldots+\mathrm{Sin}.Q\mathrm{Sin}.Q'+\mathrm{Sin}.R\mathrm{Sin}.R'+\mathrm{Sin}.S\mathrm{Sin}.S'=0\ , \quad (11)$$

$$\mathrm{Cos}.A\mathrm{Sin}.A'+\mathrm{Cos}.B\mathrm{Sin}.B'+\mathrm{Cos}\,C\mathrm{Sin}.C'+\ldots+\mathrm{Cos}.Q\mathrm{Sin}.Q'+\mathrm{Cos}.R\mathrm{Sin}.R'+\mathrm{Cos}.S\mathrm{Sin}.S'=0, \quad (12)$$

Si l'on prend la somme des produits respectifs de ces deux équations d'abord par $+\mathrm{Sin}.X$ et $+\mathrm{Cos}.X$, puis par $+\mathrm{Cos}.X$ et $-\mathrm{Sin}.X$, on aura, quel que soit l'angle X,

$$\mathrm{Cos}.(A-X)\mathrm{Sin}.A'+\mathrm{Cos}(B-X)\mathrm{Sin}.B'+\ldots\ldots+\mathrm{Cos}.(R-X)\mathrm{Sin}.R'+\mathrm{Cos}.(S-X)\mathrm{Sin}.S'=0\ , \quad (13)$$

$$\mathrm{Sin}.(A-X)\mathrm{Sin}.A'+\mathrm{Sin}.(B-X)\mathrm{Sin}.B'+\ldots\ldots+\mathrm{Sin}.(R-X)\mathrm{Sin}.R'+\mathrm{Sin}.(S-X)\mathrm{Sin}.S'=0\ , \quad (14)$$

Cela posé, admettons que a, b, c, ... q, r, s soient des rayons vecteurs d'une planète ou d'une comète, et que A, B, C, ... Q, R, S soient les angles qu'ils forment respectivement avec une droite menée arbitrairement dans leur plan, par le centre du soleil. Soient X l'angle que fait la ligne des apsides avec la même droite, p le paramètre de l'orbite et λ le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, <1 pour l'ellipse, $=1$ pour la parabole et >1 pour l'hyperbole, on aura

$$\left.\begin{array}{l}2a[1+\lambda\text{Cos.}(A-X)]=p\ ,\\ 2b[1+\lambda\text{Cos.}(B-X)]=p\ ,\\ 2c[1+\lambda\text{Cos.}(C-X)]=p\ ,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\\ 2q[1+\lambda\text{Cos.}(Q-X)]=p\ ,\\ 2r[1+\lambda\text{Cos.}(R-X)]=p\ ,\\ 2s[1+\lambda\text{Cos.}(S-X)]=p\ .\end{array}\right\}\ (15)$$

Si l'on prend d'abord la somme des produits respectifs de ces équations par $bc....rs\text{Sin.}A'$, $cd....sa\text{Sin.}B'$, $de.....ab\text{Sin.}C'$, ..., rs ..... $np\text{Sin.}Q'$, $sa.....pq\text{Sin.}R'$, $ab......qr\text{Sin.}S'$, en ayant égard à l'équation (13), il viendra

$$2abc.....qrs(\text{Sin.}A'+\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C'+......+\text{Sin.}Q'\text{Sin.}R'+\text{Sin.}S')$$
$$=(bc....rs\text{Sin.}A'+cd....sa\text{Sin.}B'+.......+sa.....pq\text{Sin.}R'+ab....qr\text{Sin.}S')p\ ;$$

d'où

$$p=2.\frac{\text{Sin.}A'+\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C'+.............+\text{Sin.}Q'+\text{Sin.}R'+\text{Sin.}S'}{\frac{\text{Sin.}A'}{a}+\frac{\text{Sin.}B'}{b}+\frac{\text{Sin.}C'}{c}+.....+\frac{\text{Sin.}Q'}{q}+\frac{\text{Sin.}R'}{r}+\frac{\text{Sin.}S'}{s}}\ .\quad (16)$$

Si l'on prend la somme des produits respectifs des mêmes équations par a', b', c', ... q', r', s', en ayant égard aux équations (1) et (2), il viendra, en divisant par 2λ,

$$aa'\text{Cos.}(A-X)+bb'\text{Cos.}(B-X)+.....+rr'\text{Cos.}(R-X)+ss'\text{Cos.}(S-X)=0\ ;$$

ou bien, en développant

$$\left.\begin{array}{r}(aa'\text{Cos.}A+bb'\text{Cos.}B+....+rr'\text{Cos.}R+ss'\text{Cos.}S)\text{Cos.}X\\ +(aa'\text{Sin.}A+bb'\text{Sin.}B+......+rr'\text{Sin.}R+ss'\text{Sin.}S)\text{Sin.}X\end{array}\right\}=0\ ;$$

d'où

$$\text{Tang.}X=-\frac{aa'\text{Cos.}A+bb'\text{Cos.}B+\ldots\ldots+rr'\text{Cos.}R+ss'\text{Cos.}S}{aa'\text{Sin.}A+bb'\text{Sin.}B+\ldots\ldots+rr'\text{Sin.}R+ss'\text{Sin.}S}\ . \qquad (17)$$

Les valeurs de p et X étant déterminées par les formules (16) et (17), on en conclura celle de λ à l'aide de l'une quelconque des équations (15).

Si l'on borne le nombre des rayons vecteurs donnés à cinq seulement, la formule (16) deviendra exactement celle qui a été proposée à démontrer à la page 283 du présent volume, et qu'on voit ainsi appartenir à l'hyperbole et à la parabole tout aussi bien qu'à l'ellipse.

Démonstration du dernier des deux théorèmes de géométrie énoncé à la page 283 du présent volume ;

Par MM. LENTHÉRIC, professeur au Collége royal de Montpellier,

VALLÈS, élève à l'Ecole royale des ponts et chaussées.

Et BOBILLIER, professeur à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

LA démonstration de ce théorème est évidemment contenue dans la solution du problème suivant :

PROBLÈME. Quel est le lieu des intersections des ordonnées d'une ellipse avec les perpendiculaires menées de son centre sur les tangentes aux extrémités de ces ordonnées.

Solution L'équation d'une ellipse, rapportée à ses diamètres principaux étant

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ , \qquad (1)$$

l'équation de la tangente au point (x', y') de son périmètre sera

$$b^2x'x+a^2y'y=a^2b^2\ , \qquad (2)$$

avec la condition

$$b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2\ . \qquad (3)$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée du centre sur la direction de cette tangente sera donc

$$b^2x'y-a^2y'x=0\ ; \qquad (4)$$

mais l'équation de l'ordonnée du point de contact est

$$x-x'=0\ ; \qquad (5)$$

on obtiendra donc l'équation du lieu de l'intersection de cette perpendiculaire et de cette ordonnée en éliminant les deux paramètres x', y' entre les équations (3), (4), (5).

Les deux dernières donnent

$$x'=x\ , \qquad y'=\frac{b^2}{a^2}y\ ;$$

valeurs qui, substituées dans la première, donnent

$$a^2x^2+b^2y^2=a^4\ , \qquad (6)$$

ou bien

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^2x^2+a^2y^2=\left(\frac{a^2}{b}\right)^2a^2\ ;$$

équation d'une nouvelle ellipse qui a le diamètre principal $2a$ commun avec la première, et dont l'autre diamètre $2\frac{a^2}{b}$ est une troisième proportionnelle aux diamètres $2b$ et $2a$ de la première. On a donc ce théorème, qui est précisément celui qu'il s'agissait de démontrer :

THÉORÈME. Si deux ellipses ont un diamètre principal commun, moyen proportionnel entre leurs diamètres principaux non communs, toute sécante commune, perpendiculaire au diamètre commun, sera coupée par la perpendiculaire conduite, par le centre com-

mun, à la tangente en un des points où cette sécante coupe l'une quelconque des deux ellipses, en un point qui appartiendra à l'autre.

M. Vallès observe qu'on pourrait démontrer ce théorème d'une manière purement géométrique, en considérant l'ellipse comme la projection orthogonale d'un cercle, ainsi que M. Ferriot en a usé en divers endroits du présent recueil.

Nous observerons à notre tour que si, dans les équations (1) et (6) on change b en $b\sqrt{-1}$, elles deviendront

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\ , \qquad a^2x^2-b^2y^2=a^4\ ;$$

ce qui prouve que la même propriété existe pour deux hyperboles qui ont un axe transverse commun, moyen proportionnel entre leurs axes fictifs.

Il est aisé de voir que la même propriété aura également lieu soit pour deux sphéroïdes de révolution soit pour deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, qui auront même équateur, dont le rayon sera moyen proportionnel entre les longueurs de leurs diamètres principaux perpendiculaires au plan de cet équateur. C'est-à-dire que si, pour un même point quelconque de l'une des surfaces, on mène un plan tangent et une perpendiculaire au plan de l'équateur, cette perpendiculaire sera coupée par la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, en un point de l'autre surface.

M. Vallès a pris occasion de là pour chercher le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une ellipse sur ses tangentes. L'équation de ce lieu est évidemment le résultat de l'élimination des deux paramètres x', y' entre les trois équations (2), (3), (4). De la première et de la dernière on tire

$$x'=\frac{a^2x}{x^2+y^2}\ ; \qquad y'=\frac{b^2y}{x^2+y^2}\ ;$$

d'où, en substituant dans la seconde,

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2\ .$$

En changeant b en $b\sqrt{-1}$, on aura résolu le même problème pour l'hyperbole.

On peut de même se proposer d'assigner le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une ellipsoïde sur ses plans tangens. En supposant l'équation de l'ellipsoïde en coordonnées rectangulaires

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2\ , \qquad (1)$$

l'équation de son plan tangent en (x', y', z') sera

$$b^2c^2x'x+c^2a^2y'y+a^2b^2z'z=a^2b^2c^2\ , \qquad (2)$$

avec la condition

$$b^2c^2x'^2+c^2a^2y'^2+a^2b^2z'^2=a^2b^2c^2\ . \qquad (3)$$

La perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan tangent sera donnée par la double équation

$$a^2\frac{x}{x'}=b^2\frac{y}{y'}=c^2\frac{z}{z'}\ , \qquad (4)$$

qui combinée avec (2) donnera

$$x'=\frac{a^2x}{x^2+y^2+z^2}\ , \quad y'=\frac{b^2y}{x^2+y^2+z^2}\ , \quad z'=\frac{c^2z}{x^2+y^2+z^2}\ ;$$

d'où en substituant dans (3)

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\ .$$

On obtiendrait des résultats analogues pour les hyperboloïdes.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de géométrie.

DIVISER géométriquement le quart de la circonférence en trois arcs dont les cosinus soient entre eux dans le rapport de trois longueurs données ?

FIN DU DIX-SEPTIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le XVII.e volume des Annales.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

ASTRONOMIE.

COMBINAISONS.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES ET SURFACES.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION (*).

(*) On comprend ici, sous le titre de *Géométrie de situation*, toute cette partie de la géométrie qui ne dépend ni des rapports d'angles ni des rapports de longueur et dont la *géométrie de la règle* n'est qu'une faible partie.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

GNOMONIQUE.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

OPTIQUE.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

STATIQUE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

ERRATA

Pour le dix-septième volume des Annales.

PAGE 10, ligne 14 — placez une virgule après le mot *inverse.*

Page 15, ligne 5 de la note — après le mot *réflecteur*, ajoutez : *et d'un rayon trois fois moindre.*

Page 20, ligne 7 — *de la caustique;* lisez : *de l'arc de la caustique.*

Page 25, ligne 3 — *d'un cercle*; lisez : *d'un cercle mobile.*

Page 32, *ajoutez à la fin de la note* : voyez aussi l'article de la page 238 du précédent volume.

Page 36, ligne 5, en remontant — $n.^{ieme}$; lisez : $m.^{ieme}$

Page 68, ligne 3, en remontant — changez le signe — en signe =.

Page 131, ligne 14 — t^2; lisez : t^3.

Page 147, ligne première de la note — onclura*: lisez*: conclura.

Page 149, ligne 2 — annoncé; *lisez* : énoncé.

Page 150, ligne 8 — le nombre; *lisez* : la moitié du nombre.

Page 156, ligne 1.re — transportez la virgule avant Mk^2.

Page 231, ligne 10, colonne de gauche — aulan; *lisez :* autant.

Même page — supprimez les n.os 10, qui font double emploi avec les n.os 5.

Page 255, ligne 8, en remontant — *mettez une virgule après le mot* commune.

Page 264, — *mettez en note* :

A la page 289 de notre II.e volume, nous avons déterminé directement le centre de gravité de l'aire d'un triangle et celui du volume d'un tétraèdre, sans recourir aux infiniment petits.

Page 332, à la fin du 1.er alinéa — *mettez en note* :

Cela rentre dans le théorème démontré à la page 317 de notre IIIe volume.

Page 380, — Les dénominateurs des valeurs de y' et de z' doivent être pareils à celui de la valeur de x'.

SUPPLÉMENT

A l'Errata *du XVI.e volume.*

Page 9, ligne 5, en remontant — $z+c$; lisez: $z-c$.

Page 10, équation (Q') — $(c-c'$; lisez: $(c-c')$.

Page 13, ligne 16 — placez une virgule après *si*.

Page 315, après le théorème — *mettez en note*.

Donc la surface développable qui touche une autre surface courbe suivant une de ses sections planes est toujours circonscriptible à une surface d'un ordre inférieur.

Page 319, après le théorème — *mettez en note*:

Donc les tangentes menées à une courbe plane, par ses intersections avec une droite quelconque, sont tangentes à une ligne d'un ordre inférieur.

Page 327, ligne 2, en remontant — en; *lisez*: et.