SARRUS

Géométrie élémentaire. Note sur les axes, plans et centres radicaux

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 378-380
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__378_0>

GÉOMETRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur les axes, plans et centres radicaux ;

Par M. SARRUS, docteur agrégé ès sciences.

ON a pu voir en divers endroits de ce recueil, et notamment à la page 193 du XIII.e volume, de quelle importance sont aujourd'hui, dans la géométrie élémentaire, les propriétés des pôles, polaires et plans polaires, celles des centres, axes et plans de similitude et enfin celles des axes, plans et centres radicaux.

Les géomètres de l'école de Monge, en recourant à la géométrie à trois dimensions, sont parvenus à démontrer fort simplement et sans calcul les propriétés fondamentales des pôles, polaires et plans polaires, ainsi que celles des centres, axes et plans de similitude ; mais la chose est encore à faire à l'égard des axes, plans et centres radicaux. Il nous paraît qu'on peut y parvenir au moyen des considérations suivantes :

1.° Deux cercles égaux étant tracés sur un même plan, il est manifeste, ou tout au moins très-facile de démontrer, que la perpendiculaire indéfinie sur le milieu de la droite qui joint leurs centres, contient tous les points et les seuls points de leur plan desquels on puisse leur mener des tangentes de même longueur.

2.° On en conclut cette autre proposition, d'une évidence à peu près égale, que les points du plan perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les centres de deux sphères égales ont tous et ont exclusivement cette propriété que les tangentes menées de chacun d'eux aux deux sphères sont de même longueur.

3.° Soient présentement deux cercles inégaux, tracés sur un même plan, et soit P un des points de ce plan desquels on peut leur mener des tangentes de même longueur. On peut toujours considérer ces deux cercles comme les intersections de leur plan avec deux sphères d'un même rayon quelconque, pourvu que ce rayon ne soit pas moindre que celui du plus grand des deux cercles; et les tangentes menées du point P à ces deux cercles le seront aussi aux deux sphères.

4.° Donc (2) le point P est un des points du plan perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les centres des deux sphères; et par conséquent tous les points P du plan des deux cercles desquels on peut leur mener des tangentes de même longueur, appartiennent en même temps au plan perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les centres des deux sphères; donc tous ces points P sont à l'intersection des deux plans, et par conséquent sur une même droite. Il est aisé de voir d'ailleurs que cette droite est perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux cercles; ainsi, *tous les points du plan de deux cercles desquels on peut leur mener des tangentes de même longueur appartiennent a une droite indéfinie, perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres.* C'est cette droite qu'on appelle l'*axe radical* des deux cercles, et qu'on sait être leur tangente ou leur corde commune, dans le cas particulier où ces deux cercles se touchent ou se coupent.

5.° On conclut facilement de là que *tous les points de l'espace desquels on peut mener à deux sphères des tangentes de même longueur appartiennent à un plan indéfini, perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres.* C'est ce plan qu'on appelle le *plan radical* des deux sphères, et qu'on sait être leur plan tangent commun ou le plan de leur intersection, dans le cas particulier où les deux sphères se touchent ou se coupent.

6.° De ce qui vient d'être démontré (4) on conclut, sur-le-champ, que *les axes radicaux de trois cercles, tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, passent tous trois par un même point.* C'est ce point qu'on appelle le *centre radical* des trois cercles. C'est le seul point du plan de ces trois cercles duquel on puisse leur mener des tangentes de même longueur. On pourra donc, en faisant varier le troisième cercle, soit de grandeur soit de situation, soit de l'un et de l'autre à la fois, mais de manière qu'il coupe toujours les deux premiers, obtenir deux points de l'axe radical de ces deux-ci, et par suite cet axe radical lui-même, dans le cas où ces deux cercles n'auraient aucun point commun.

7.° De la proposition démontrée (5) on conclut facilement que *les plans radicaux de trois sphères prises successivement deux à deux, passent tous trois par une même droite perpendiculaire au plan qui joint leur centre.* C'est cette droite qu'on appelle l'*axe radical* des trois sphères. C'est le lieu des points de l'espace desquels on peut mener à ces trois sphères des tangentes de même longueur.

8.° Enfin on conclut de cette dernière proposition que *les axes radicaux de quatre sphères prises successivement trois à trois, passent tous quatre par un même point.* Ce point est ce qu'on appelle le *centre radical* des quatre sphères. C'est le seul point de l'espace duquel on puisse mener à ces quatre sphères des tangentes de même longueur.