ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

Analise transcendante. Développement remarquable des racines et des logarithmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 294-295
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__294_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Développement remarquable des racines et des logarithmes;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

Soit posé

$$z=\frac{x^n}{x^n+1}\,,\ \text{d'où}\ x=\sqrt[n]{\frac{z}{1-z}}\,,\ \text{et}\ \sqrt[m]{x}=\sqrt[mn]{\frac{z}{1-z}}\,:$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt[m]{x}=\sqrt[mn]{z}\,.\,(1-z)^{-\frac{1}{mn}}\qquad(1)$$

En remarquant que $z=1-(1-z)$, on aura

$$\sqrt[mn]{z}=1-\frac{1}{mn}(1-z)-\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn-1}{2mn}(1-z)^2-\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn-1}{2mn}\cdot\frac{2mn-1}{3mn}(1-z)^3-\ldots$$

On a d'ailleurs

$$(1-z)^{-\frac{1}{mn}}=1+\frac{1}{mn}z+\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn+1}{2mn}z^2+\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn+1}{2mn}\cdot\frac{2mn+1}{3mn}z^3+\ldots$$

En substituant donc dans (1), et remettant ensuite pour z sa valeur en x, il viendra, quel que soit n,

$$\sqrt[m]{x}=\left\{\begin{array}{l}\left\{1-\frac{1}{mn}\left(\frac{1}{x^n+1}\right)-\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn-1}{2mn}\left(\frac{1}{x^n+1}\right)^2-\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn-1}{2mn}\cdot\frac{2mn-1}{3mn}\left(\frac{1}{x^n+1}\right)^3-\ldots\right\}\\ \times\left\{1+\frac{1}{mn}\left(\frac{x^n}{x^n+1}\right)+\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn+1}{2mn}\left(\frac{x^n}{x^n+1}\right)^2+\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn+1}{2mn}\cdot\frac{2mn+1}{3mn}\left(\frac{x^n}{x^n+1}\right)^3+\ldots\right\}\end{array}\right\}.$$

Si l'on prend pour n un nombre pair, les deux séries dont le produit compose le développement de $\sqrt[m]{x}$ seront constamment convergentes, quelque valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative qu'on donne à x.

On a aussi.

$$\text{Log.}x=\frac{1}{n}\left\{\text{Log}\,z-\text{Log.}(1-z)\right\}; \qquad (2)$$

mais on sait que

$$\text{Log.}z=-(1-z)-\tfrac{1}{2}(1-z)^2-\tfrac{1}{3}(1-z)^3-\tfrac{1}{4}(1-z)^4-\ldots\ldots,$$

$$-\text{Log.}(1-z)=z+\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{4}z^4+\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

substituant dans (2), et remettant ensuite pour z sa valeur en x, on aura, quel que soit n,

$$\text{Log}\,x=\frac{1}{n}\left\{\frac{x^n-1}{x^n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{2n}-1}{(x^n+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{3n}-1}{(x^n+1)^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{4n}-1}{(x^n+1)^4}+\ldots\right\};$$

série qui, lorsqu'on prendra pour n un nombre pair, aura le même avantage que le développement ci-dessus.

Si, en particulier, on y fait $n=2$, on retombera sur le développement déjà obtenu (tom. XIV, pag. 279).