ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 252, à Montpellier [Hérault];

A M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et les ouvrages à annoncer doivent être envoyés, francs de port, à la première de ces adresses.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche I.	Après la page	40.
II.		104.
III.		164.
IV.		244.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME QUINZIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55.

1824 ET 1825.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Considérations nouvelles sur la nature des courbes logarithmiques et exponentielles ;

Par M. Vincent, professeur de mathématiques au collége royal de Reims, ancien élève de l'école normale.

1. Tous les géomètres tombent d'accord que, construire géométriquement une équation à deux variables, c'est trouver tous les points d'un plan dont les coordonnées, mises à la place de ces variables, satisfont à l'équation proposée. Notre but principal, dans l'essai que l'on va lire, est de faire voir qu'après avoir ainsi posé le principe abstrait, on l'a souvent perdu de vue dans ses applications, et qu'en particulier les courbes dont les équations renferment des fonctions logarithmiques et exponentielles, outre les

branches qu'on leur connaît, en ont encore d'autres, d'une nature fort singulière, qui semblent avoir été absolument méconnues jusqu'ici. Nous aurons soin de tirer, chemin faisant, des résultats auxquels nous serons parvenus, toutes les diverses conséquences qui pourront intéresser la philosophie de la science, et notamment celles qui en résultent relativement à la nature des logarithmes des nombres négatifs.

2. Mais, avant d'entrer en matière, rappelons brièvement et complétons des notions connues, sur lesquelles ensuite nous aurons principalement besoin de nous appuyer.

Soit représentée par A la valeur arithmétique absolue de $a^{\frac{m}{n}}$ où m et n sont deux nombres entiers premiers entre eux, et a un nombre quelconque, positif ou négatif. Il est connu que $a^{\frac{m}{n}}$ a n valeurs différentes que l'on obtient en multipliant A par $(+1)^{\frac{m}{n}}$ ou par $(-1)^{\frac{m}{n}}$, suivant que a est positif ou négatif.

3. Supposons, en premier lieu $\frac{m}{n}>0$, a pouvant d'ailleurs être positif ou négatif. Si d'abord on le suppose positif, on obtiendra les n valeurs de $a^{\frac{m}{n}}$ en multipliant A par $(+1)^{\frac{m}{n}}$ dont on aura toutes les valeurs possibles en mettant successivement pour k les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$ dans la formule

$$\text{Cos.}\frac{2mk\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2nk\pi}{m}\ ;$$

ce qui donnera, en ne prenant que les restes de division de mk par n,

$$\text{Cos.}0+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}0=1\ ,$$

$$\text{Cos.}\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2\pi}{n}\ ;$$

$$\text{Cos.}\,\frac{4\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{4\pi}{n}\ ,$$

. . . .

$$\text{Cos.}\,\frac{2(n-1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2(n-1)\pi}{n}\ .$$

Si n est impair $(+1)^{\frac{m}{n}}$ n'aura que la seule valeur réelle $+1$; ce qui donnera pour $a^{\frac{m}{n}}$ la seule valeur réelle $+A$; mais, si n est un nombre pair, on aura en outre la valeur intermédiaire

$$\text{Cos.}\,\varpi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\varpi=-1\ ,$$

de sorte que $a^{\frac{m}{n}}$ aura une seconde valeur réelle $-A$.

4. Si présentement a est négatif, les n valeurs de $a^{\frac{m}{n}}$ s'obtiendront, comme nous l'avons dit, en multipliant A successivement par les n valeurs de $(-1)^{\frac{m}{n}}$, qu'on obtiendra, à leur tour, en mettant successivement pour k les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$ dans la formule

$$\text{Cos.}\,\frac{(2k+1)m\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{(2k+1)m\pi}{n}\ .$$

si m est un nombre pair, n sera nécessairement impair, et on aura, comme ci-dessus, la seule valeur réelle $+1$; ce qui donnera aussi pour $a^{\frac{m}{n}}$ la seule valeur réelle $+A$.

Mais, si m est impair, en ne tenant compte que des restes de division de $(2k+1)m$ par n, on aura cette série de valeurs

$$\text{Cos.}\,\frac{\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{\pi}{n}\ ,$$

$$\text{Cos.}\,\frac{3\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{3\pi}{n}\ ,$$

$$\text{Cos.}\,\frac{5\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{5\pi}{n}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{Cos.}\,\frac{(2n-1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{(2n-1)\pi}{n}\ .$$

Si alors n est un nombre pair, toutes ces valeurs, et par suite toutes celles de $a^{\frac{m}{n}}$ seront imaginaires; mais si, au contraire, n est impair, on rencontrera une valeur intermédiaire

$$\text{Cos.}\varpi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\varpi=-1\ ,$$

et $a^{\frac{m}{n}}$ aura alors une valeur réelle $-A$.

5. Si l'on supposait $\frac{m}{n}$ négatif, $a^{\frac{m}{n}}$ reviendrait à $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, dans lequel $\frac{m}{n}$ serait supposé positif, et en désignant par A sa valeur arithmétique absolue, on en conclurait toutes ses valeurs en la multipliant par $\frac{1}{(+1)^{\frac{m}{n}}}$ ou par $\frac{1}{(-1)^{\frac{m}{n}}}$, suivant le signe de a; or,

$$\frac{1}{(\pm1)^{\frac{m}{n}}}=\frac{(+1)^{\frac{m}{n}}}{(\pm1)^{\frac{m}{n}}}=\left(\frac{+1}{\pm1}\right)^{\frac{m}{n}}=(\pm1)^{\frac{m}{n}}\ ;$$

d'où l'on voit que nous retomberions de nouveau sur toutes les conséquences que nous a donnée la supposition de $\frac{m}{n}>0$.

En faisant $m=2m'$ ou $2m'+1$ suivant que m est pair ou impair, et faisant aussi, dans les mêmes circonstances, $n=2n'$ ou $2n'+1$, nous pourrons résumer tout ce qui précède ainsi qu'il suit : $a^{\frac{m}{n}}$, quel que soit le signe de $\frac{m}{n}$, donne pour

$$a>0 \text{ et } \begin{cases} \dfrac{m}{n}=\dfrac{2m'+1}{2n'} & \text{deux valeurs réelles de signes contraires } \pm A, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{m}{n}=\dfrac{2m'+1}{2n'+1} \\ \dfrac{m}{n}=\dfrac{2m'}{2n'+1} \end{array}\right\} & \text{une seule valeur réelle positive.} \ldots +A, \end{cases}$$

$$a<0 \text{ et } \begin{cases} \dfrac{m}{n}=\dfrac{2m'+1}{2n'} & \text{aucune valeur réelle,} \\ \dfrac{m}{n}=\dfrac{2m'+1}{2n'+1} & \text{une seule valeur réelle négative.} \ldots -A, \\ \dfrac{m}{n}=\dfrac{2m'}{2n'+1} & \text{une seule valeur réelle positive} \ldots +A. \end{cases}$$

6. Ces principes posés, entrons en matière. Convenons de représenter constamment par O l'origine des coordonnées, que nous supposerons rectangulaires, en plaçant les lettres X et Y sur les axes des x et des y, dans le sens positif, et les lettres X', Y' sur les mêmes axes, dans le sens négatif; de manière que l'angle XOY soit celui des coordonnées positives.

Proposons-nous d'abord de construire la logarithmique donnée par l'équation

$$y=a^x,$$

dans laquelle nous supposons a un nombre *positif*. Pour suivre plus aisément le cours de la courbe, partageons l'unité linéaire à laquelle les abscisses sont rapportées en $4q+2$ parties égales, q étant supposé un très-grand nombre entier, et faisons croître x, depuis o, par degrés égaux à $\frac{1}{4q+2}$, de telle sorte que ses valeurs consécutives soient les termes de cette progression

$$\frac{1}{4q+2},\ \frac{2}{4q+2},\ \frac{3}{4q+2},\ldots\ldots\ldots\frac{4p}{4q+2},\ \frac{4p+1}{4q+2},\ \frac{4p+2}{4q+2},\ \frac{4p+3}{4q+2},\ldots\ldots\ldots,$$

p étant aussi un nombre entier. On voit que les termes de rangs impairs sont tous de la forme $\frac{2m'+1}{2n'}$, et donne par conséquent (5) pour y deux valeurs réelles, ne différant l'une de l'autre que par le signe, tandis que ceux de rangs pairs, alternativement de la forme $\frac{2m'+1}{2n'+1}$ et de la forme $\frac{2m'}{2n'+1}$, donnent constamment pour y une seule valeur positive. Si nous remarquons d'ailleurs que rien ne limite la grandeur de q, ni conséquemment la petitesse de la différence $\frac{1}{4q+2}$ des valeurs consécutives de x, laquelle mesure en même temps la distance entre les ordonnées, nous en conclurons que la courbe a, du côté des y positives, une branche *continue*, dans le sens vulgaire de ce mot, et du côté des y négatives une seconde branche, symétrique à la première, par rapport à l'axe des x; mais cette seconde branche n'est pas continue comme la première; elle n'est composée que de points indéfiniment rapprochés, à la vérité, et tels que, quelque petite que soit la distance finie entre deux d'entre eux, on en pourra toujours trouver tant d'intermédiaires qu'on voudra; mais tels aussi qu'entre ces deux mêmes points on pourra concevoir tant d'ordonnées négatives qu'on voudra qui n'en rencontreront aucun; et telle sera, en particulier, la partie négative de l'axe des y, puisqu'en posant $x=0$, on a simplement $y=1$. Ces sortes de branches de courbes étant nouvelles, et essentiellement différentes des branches considérées jusqu'ici, nous sommes forcés de les désigner par une dénomination inusitée, et en conséquence nous dirons que ce sont des *branches pointillées*, et nous les représenterons par une suite de points très-rapprochés les uns des autres, comme on le voit (fig. 1). On sent fort bien d'ailleurs qu'une telle représentation est très-imparfaite, attendu que la discontinuité de ces branches ne saurait être perceptible à l'œil. Si donc on voulait représenter la courbe telle qu'elle paraît aux yeux, il faudrait simplement supposer qu'elle a pour équation $\pm y=a^x$.

La figure suppose qu'on a $a>1$; mais, si l'on avait $a<1$, on pourrait mettre l'équation sous la forme

$$y=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}=a'^{-x} \quad ,$$

où on aurait $a'>1$; il ne s'agirait donc simplement que de changer le sens des x, sans en changer la direction.

7. Si nous exécutons la même construction pour le cas où, dans l'équation

$$y=a^x \quad ,$$

la constante a est négative, comme alors les valeurs consécutives de x seront alternativement des quatre formes

$$\frac{2m'+1}{2n'} \,,\quad \frac{2m'+1}{2n'+1} \,,\quad \frac{2m'+1}{2n'} \,,\quad \frac{2m'}{2n'+1} \,,$$

il s'ensuit (5) que les ordonnées consécutives seront aussi, alternativement, *imaginaires*, *réelles négatives*, *imaginaires* et *réelles positives*. La courbe n'aura donc point alors de branche continue, mais deux branches symétriques par rapport à l'axe des x, composées l'une et l'autre de points isolés, mais tellement disposés qu'à un point de chacune des branches correspondra toujours une ordonnée imaginaire de l'autre. En particulier, il y aura un point sur l'axe des y, du côté positif de l'origine, tandis qu'il n'y en aura pas de son côté négatif. Les points de chaque branche seront donc deux fois plus éloignés les uns des autres, dans le sens des x que ceux de la branche pointillée du cas précédent. Voilà donc une seconde sorte de branches discontinues qu'il faut distinguer de la première sorte. Nous appellerons les branches discontinues de cette seconde sorte des *branches ponctuées* ; et nous en figurerons le cours par des points plus apparens et plus distans entre eux, comme on le voit (fig. 2). On sent fort bien d'ailleurs qu'en rigueur tout se passe encore ici pour les yeux comme si l'on avait construit l'équation $\pm y=a^x$.

8. Il importe de bien distinguer les points dont se composent les branches pointillées ou ponctuées des courbes de ce qu'on nomme en géométrie *points conjugués*. Il n'existe en effet pour ces derniers ni tangentes, ni normales, ni cercles osculateurs, ni développées ; tandis que les branches pointillées et ponctuées jouissent, à cet égard, dans tous les points réels de leur cours, des propriétés dont les branches continues jouissent dans toute leur étendue, et se trouvent ainsi soumises à toutes les conséquences de la loi de continuité. Il est facile de s'en convaincre, pour les branches pointillées, en considérant que, par des différentiations successives, on tire de l'équation $y=e^x$

$$\frac{dy}{dx}=e^x\,,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=e^x\,,\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=e^x\,,\ldots\ldots$$

d'où l'on voit que les valeurs réelles négatives de y donnent aussi lieu à des valeurs réelles négatives de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., égales, au signe près, pour chaque valeur de x, à celles des mêmes fonctions correspondant aux valeurs positives de y. Nous aurons au surplus l'occasion de revenir plus amplement sur ce sujet dans le cours du présent mémoire.

Nous observerons encore qu'en général, ni sur les branches pointillées, ni sur les branches ponctuées, les points ne se trouvent également espacés ; ce qui résulte évidemment de ce que leurs ordonnées sont équidistantes. L'élément d'une telle branche est donc d'autant moins *dense*, s'il est permis de s'exprimer ainsi, qu'il fait un angle plus aigu avec l'axe des y.

9. Les principes que nous venons d'exposer sont applicables, avec les modifications convenables, à toutes les courbes dont les équations contiennent des termes à exposans variables. Soit, par exemple, la *chaînette*. On sait que les tensions des divers élémens de la courbe sont représentées par les perpendiculaires abaissées de chacun de ces élémens sur une certaine droite horizontale située dans son plan, ou plutôt par les poids des portions d'une ligne de même pesanteur spécifique que le fil pesant suspendu, respectivement égales à ces perpendiculaires. On sait de plus qu'en prenant cette droite horizontale pour axe des x et l'axe même de la chaînette pour axe des y, les y positives étant comptées de bas en haut, et en prenant pour unité la distance du point le plus bas de la courbe à l'origine, son équation est

$$y=\tfrac{1}{2}(e^{+x}+e^{-x})\ ;$$

ce qui fait voir que chacune de ses ordonnées est la somme des ordonnées de deux logarithmiques qui auraient respectivement pour équations

$$y=e^{+x}\ , \qquad y=e^{-x}\ .$$

Or, chacune de ces logarithmiques a deux branches, l'une continue et l'autre pointillée. Faisant donc, tour à tour, entre chaque branche de l'une et les deux branches de l'autre les quatre seules combinaisons possibles, il en résultera quatre branches également représentées par l'équation de la chaînette, dont une seule continue et les trois autres pointillées (fig. 3). L'une de celles-ci est symétrique de la branche continue, par rapport à l'axe des x ; les deux autres, asymptotes des deux premières, se croisent perpendiculairement à l'origine où leurs tangentes divisent en deux parties égales les quatre angles des coordonnées. Chacune des branches pointillées pourrait d'ailleurs, à son tour, devenir continue, si l'on changeait le signe de l'un ou de l'autre des deux termes e^{+x} et e^{-x}, ou les signes de l'un et de l'autre à la fois ; de sorte que tout doit réellement se passer pour les yeux comme si l'on avait construit la quadruple équation

$$2y = \pm e^{+x} \pm e^{-x} .$$

L'équation plus générale

$$y = \tfrac{1}{2}\{(+a)^x + (+a)^{-x}\} ,$$

donne des résultats analogues. Mais chacune de ces deux-ci

$$y = \tfrac{1}{2}\{(-a)^x + (-a)^{-x}\} , \qquad (\text{fig. } 4)$$

$$y = \tfrac{1}{2}\{(-a)^x + (-a)^{-x}\} , \qquad (\text{fig. } 5)$$

ne donne que deux branches ponctuées, sans aucune branche pointillée ni continue.

10. La théorie ordinaire des points singuliers, telle que M. Poisson l'a exposée dans le XIV.e cahier du *Journal de l'école polytechnique*, n'est point, en général, applicable aux courbes transcendantes, excepté dans ce qui a rapport aux limites de la courbe, pour lesquelles on a $\frac{dy}{dx} = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = \infty$, et aux points d'inflexion qui font changer le signe du rayon de courbure et donnent par conséquent $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ou $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$. En effet, cette théorie suppose, pour ce qui est relatif aux points multiples, aux points de rebroussement, etc., que l'équation est débarrassée de

radicaux ; ce qui fait prendre au coefficient différentiel du premier ordre, en ces sortes de points, la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; or, les fonctions transcendantes qui, par la différentiation passent dans les coefficiens différentiels, sont en général susceptibles de plusieurs valeurs, et doivent par conséquent être assimilées aux radicaux. Il peut donc exister des points multiples pour lesquels le coefficient différentiel ne prenne pas la forme $\frac{0}{0}$.

Pour en donner un exemple bien simple, considérons deux logarithmiques ayant respectivement pour équations

$$y-1-e^x=0\,, \qquad y+1-e^x=0\,;$$

et multiplions ces deux équations membre à membre, il en résultera l'équation unique

$$y^2-2e^xy+e^{2x}-1=0\,,$$

représentant à la fois les deux courbes (fig. 6). Or, la branche pointillée de la première et la branche continue de la seconde passant toutes deux par l'origine, il en résulte un espèce de point multiple qui pourtant n'est point manifesté par le coefficient différentiel ; car, en différentiant et divisant par $y-e_x$, on a simplement $\frac{dy}{dx}=e^x$, fonction qui ne saurait prendre la forme $\frac{0}{0}$. On pourrait objecter, à la vérité, que la branche pointillée qui passe à l'origine n'y est pas réellement coupée, puisque ce point se trouve sur un espace vide ; mais on détruirait facilement cette objection en donnant une autre disposition aux deux courbes. En prenant, par exemple, celles dont les équations sont respectivement

$$y-a-e^x=0\,, \qquad y-e^x=0\,,$$

on verrait que les conséquences sont exactement les mêmes ; et, comme a est quelconque, il existe une infinité de manières de le déterminer qui feront tomber l'intersection sur un point réel.

N'ayant pas le dessein de présenter ici une théorie complète des courbes exponentielles ; mais seulement de donner une idée de la manière dont elles doivent être discutées d'après la considération du nombre de leurs branches, de la nature de chacune d'elles, du sens de sa courbure et des valeurs que peuvent prendre les coefficiens différentiels des deux premiers ordres ; nous nous bornerons à quelques exemples des plus simples.

11. Occupons-nous, en premier lieu, de la courbe donnée par l'équation

$$y=a^{\frac{1}{x}},$$

dans laquelle nous supposerons d'abord a positif et >1. Pour une valeur positive très-petite de x ; la valeur de y est très-grande et devient même infinie lorsque $x=+0$. A mesure que x augmente, y diminue ; elle devient égale à a lorsque $x=1$, et finit par devenir égale à 1, lorsque $x=\infty$. La courbe a donc un cours continu dans l'angle XOY (fig. 7) ; et elle a pour asymptotes d'une part l'axe des y et d'une autre une parallèle menée à l'axe des x à une distance 1 de l'origine. Mais, indépendamment des valeurs positives de y, on conçoit (6) qu'en donnant à $\frac{1}{x}$ des valeurs convenables, on trouvera pour y des valeurs négatives ne différant que par le signe des valeurs positives correspondantes, d'où résultera une branche pointillée symétrique à la branche continue, par rapport à l'axe des x.

Quant aux valeurs négatives de x, les plus petites donneront d'abord de très-petites valeurs positives de y, et $x=-0$ donnera $y=0$. A mesure que x croîtra négativement, y croîtra positivement et deviendra $\frac{1}{a}$, lorsqu'on aura $x=-1$. Mais y ne pourra croître indéfiniment, et tendra sans cesse vers la limite $+1$, qu'elle atteindra enfin lorsqu'on aura $x=-\infty$. Voilà donc une autre branche continue de la courbe, partant de l'origine et s'étendant indéfiniment dans l'angle YOX' de manière à avoir pour asymptote commune avec l'autre la parallèle à l'axe des x dont il a déjà été question ci-dessus. Il est clair d'ailleurs (6) qu'en choisissant convenablement les valeurs négatives de x, nous trouverons dans l'angle X'OY' une branche pointillée symétrique à celle-là, par rapport à l'axe des x.

La valeur $x=0$ donne, comme on a pu le remarquer, deux valeurs de y, l'une nulle et l'autre infinie. Cela tient à ce que zéro est la limite commune des quantités positives et des quantités négatives, d'où résulte $y=a^{\pm\frac{1}{0}}=a^{\mp\infty}$. Les deux branches continues peuvent, à la rigueur, être considérées comme se faisant suite l'une à l'autre, puisqu'elles proviennent d'une série continue de valeurs de x comprises entre l'infini positif et l'infini négatif, ou comme formant une seule branche qui se serait déchirée à l'origine des coordonnées. Il en est de même des deux branches pointillées. Cette espèce de points singuliers, qu'on ne rencontre pas dans les courbes algébriques, mériterait peut-être un nom particulier.

En différentiant deux fois l'équation proposée, on trouve

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}\,la\,, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=(1+2x)\frac{y}{x^4}\,la\,;$$

la caractéristique l désignant des logarithmes Népériens. Le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ devient nul quand $x=\pm\infty$, ainsi que cela doit être, puisque les quatre branches ont deux asymptotes communes, parallèles à l'axe des y. Lorsque $x=0$, il en résulte, comme on l'a vu, deux valeurs de y, l'une égale à $\pm\infty$ et l'autre nulle. La première donne $\frac{dy}{dx}=\infty$, ainsi que cela doit être, puisque l'axe des y est asymptote commune de deux branches ; quant à la seconde, elle donne $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Pour déterminer la véritable valeur de cette expression, observons que, d'après l'équation primitive de la courbe, $\frac{1}{x} = \frac{ly}{la}$, d'où $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(ly)^2}{la}$, fonction qui, comme on le sait, devient nulle lorsque $y=0$. Ainsi les deux branches qui concourent à l'origine ont en ce point l'axe des x pour tangente commune. Il y a donc là une sorte de point de rebroussement, formé de deux branches de nature différente.

Examinons présentement la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$, en y supposant simplement y positive, ce qui suffit, puisque tout est symétrique par rapport à l'axe des x. On voit que le signe de cette fonction ne dépendra que de celui du facteur $1+2x$. Or, il sera positif pour toutes les valeurs positives de x, d'où il suit que la branche située à droite de l'axe des y a constamment sa convexité tournée vers l'axe des x. Il en sera de même pour l'autre branche tant qu'on aura x négatif $< \frac{1}{2}$; mais à la limite $x = -\frac{1}{2}$, la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$ s'évanouit, et elle change de signe au-delà. Il y a donc une inflexion en ce point, pour lequel on a $y = \frac{1}{a^2}$ et $\frac{dy}{dx} = -\frac{4la}{a^2}$.

Si l'on suppose $a > 0$ mais < 1 en mettant l'équation sous la forme

$$y = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{-x}} = a'^{\frac{1}{-x}},$$

a' sera > 1, et il n'y aura plus d'autre différence avec le cas précédent que dans le changement de sens des x. Quant au cas où l'on supposerait a négatif, il conduirait à quatre branches de courbes ponctuées, mais dont le cours serait d'ailleurs le même que celui des branches continues et pointillées que nous venons de discuter.

12. Considérons actuellement la courbe dont l'équation est

$$y=x^x .$$

En faisant $x=0$ on a $y=1$, et il en est de même lorsqu'on fait $x=1$; mais si, par exemple, on fait $x=\frac{1}{2}$, on a $y=\frac{1}{2}\sqrt{2}<1$; et comme d'ailleurs, passé $x=1$, y croît indéfiniment avec x et devient infinie avec cette abscisse, il s'ensuit qu'une branche continue de la courbe partant de l'axe des y, à une distance 1 de l'origine, après être descendue vers l'axe des x (fig. 8) se relève ensuite, pour s'en écarter indéfiniment. Il est clair d'ailleurs que des valeurs de x choisies d'une manière convenable donneront naissance à une branche pointillée, symétrique avec la branche continue, par rapport à l'axe des x.

Si l'on suppose ensuite x négatif, certaines valeurs ne donneront pour y que des valeurs imaginaires, tandis que d'autres donneront, pour cette ordonnée, des valeurs réelles alternativement positives et négatives, lesquelles croîtront de $x=0$ à $x=-1$, et iront ensuite en décroissant indéfiniment. La branche continue et la branche pointillée se prolongent donc l'une et l'autre en deux branches ponctuées, symétriques comme elles, par rapport à l'axe des x, et ayant cet axe pour asymptote commune.

Cet exemple et le précédent sembleraient annoncer qu'il est permis d'étendre aux courbes transcendantes un principe qu'on avait cru jusqu'ici n'être applicable qu'aux seules courbes algébriques, savoir, qu'*une branche de courbe ne saurait s'arrêter brusquement, mais doit nécessairement se réunir à une autre branche de courbe.* Nous en rencontrerons d'autres exemples encore.

A cause de la symétrie que présente la courbe que nous discutons, par rapport à l'axe des x nous ne considérerons simplement, dans ce qui va suivre, que ce qui se passe dans la région des y positives.

Si l'on prend les différentielles première et seconde des deux membres de l'équation proposée, on trouve

$$y=x^x\ ,\qquad \frac{dy}{dx}=y\mathrm{l}.ex\ ,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=y\left\{(\mathrm{l}.ex)^2+\frac{1}{x}\right\}.$$

Les deux coefficiens différentiels paraissant devenir imaginaires pour toutes les valeurs négatives de x, ne sembleraient pas propres à discuter le cours des branches ponctuées ; mais on peut remarquer que la branche ponctuée située du côté des y positives deviendrait continue, sans changer de forme, si l'on prenait pour son équation $y=(-x)^x$, d'où

$$\frac{dy}{dx}=y\mathrm{l}(-ex)\ ,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=y\left\{[\mathrm{l}(-ex)]^2+\frac{1}{x}\right\};$$

fonctions de même forme que les précédentes et qui sont réelles précisément lorsque les premières sont imaginaires. Il en résulte que les premières formules peuvent être employées à la discussion des branches ponctuées, pourvu que l'on convienne de prendre les logarithmes des valeurs négatives de x comme si ces valeurs étaient positives. Cette observation est d'ailleurs parfaitement d'accord avec ce que nous avons déjà dit (6) qu'au lieu de l'équation $y=a^x$, on pouvait, dans la discussion, employer l'équation $\pm y=a^x$, quel que fût x ; ce qui revient évidemment à considérer x comme étant à la fois le logarithme de $+y$ et celui de $-y$, pour la base a. C'est, au surplus, un point sur lequel nous reviendrons plus loin.

Cela posé, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ devient nulle, 1.° quand $y=0$, ainsi que cela doit être, puisqu'alors $x=-\infty$ et que la branche ponctuée a OX′ pour asymptote. Elle devient encore nulle, 2.° lorsqu'on a $\mathrm{l}.ex=0$, d'où $x=\pm\frac{1}{e}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}=\pm ey$, ce qui indique un *minimum* pour la branche continue et un *maximum* pour la branche ponctuée qui en est le prolongement. La même fonction $\frac{dy}{dx}$ devient infinie lorsqu'on a $x=0$ d'où $y=\pm 1$, ce qui indique que l'une et l'autre branches à leur origine commune sur l'axe des y ont cet axe pour tangente. Si l'on a $x=\pm 1$ d'où $y=1$, la fonction $\frac{dy}{dx}=1$, c'est-à-dire qu'en ces points la tangente à la courbe fait un angle demi-droit avec les axes des coordonnées. Enfin $\frac{dy}{dx}$ devenant infinie lorsqu'on a, à la fois, $x=\infty$ et $y=\infty$, il s'ensuit qu'à mesure que x et y augmentent positivement, la branche continue tend sans cesse à devenir perpendiculaire à l'axe des x.

Quant à la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$, elle est positive pour toutes les valeurs négatives de x numériquement plus grande que l'unité ; ce qui indique que la branche ponctuée tourne sa convexité vers l'axe des x depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=-1$; elle devient nulle au point pour lequel on a $x=-1$ et $y=1$, ce qui indique une inflexion en ce point. Elle est en effet négative depuis $x=-1$ jusqu'à $x=0$, ce qui montre que, dans cet intervalle, c'est la concavité de la courbe qui est tournée vers l'axe des x. Elle devient infinie pour $x=0$, ce qui annonce un nouveau point d'inflexion sur l'axe des y, à l'endroit où la branche ponctuée devient continue (*). Enfin,

---

(*) Pour rendre manifeste la vérité de ces dernières assertions, remarquons d'abord que $x=-\frac{1}{e}$ fait prendre au facteur $(\text{l}.ex)^2+\frac{1}{x}$ la valeur $-e$, et que, si l'on donne à x une série de valeurs de la forme

$$x=-\frac{1}{e},\quad -\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}},\quad -\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}},\quad -\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}},\ldots\ldots -\frac{1}{e^{\frac{1}{m}}},\text{ ayant pour limite } -1\ ;$$

il en résultera pour les deux termes $(\text{l}.ex)^2$ et $\frac{1}{x}$, les deux séries de valeurs suivantes elle devient de nouveau et demeure positive pour toutes les valeurs positives de x ; ce qui fait voir que la branche continue est partout convexe vers l'axe des x.

13. Examinons encore la courbe dont l'équation est

$$y=x^{\frac{1}{x}}.$$

$(\text{l}.ex)^2=0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \left(\frac{3}{4}\right)^2,\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{m}\right)^2$, ayant pour limite $+1$;

$\frac{1}{x}=-e,\quad -e^{\frac{1}{2}},\quad -e^{\frac{1}{3}},\quad -e^{\frac{1}{4}},\ldots\ldots\ldots\ldots -e^{\frac{1}{m}}$, ayant pour limite -1.

Et que si, au contraire, on donne à x les valeurs suivantes

$x=-\frac{1}{e},\ -\frac{1}{e^2},\ -\frac{1}{e^3},\ -\frac{1}{e^4},\ldots\ldots -\frac{1}{e^m}$, ayant pour limite 0 ;

on aura d'abord

$(\text{l}.ex)^2=0,\quad 1,\quad 2^2,\quad 3^2,\ldots\ldots\ldots(m-1)^2$, ayant pour limite $+\infty$;

série dans laquelle le rapport de deux termes consécutifs a pour limite l'unité ; et ensuite

$\frac{1}{x}=-e,\quad -e^2,\quad -e^3,\quad -e^4,\ldots\ldots\ldots -e^m$, ayant pour limite $-\infty$;

série dans laquelle le rapport de deux termes consécutifs est e.

Il résulte de là que le signe de toute l'expression $(\text{l}.ex)^2+\frac{1}{x}$ ne dépend jamais que de celui du terme $\frac{1}{x}$, et que la limite de la même expression qui correspond à $x=0$ est aussi celle du terme $\frac{1}{x}$.

On prouvera encore ici, comme dans le cas précédent, que la courbe doit avoir quatre branches, savoir; une branche continue (fig. 9) dans l'angle des coordonnées positives, partant de l'origine, se prolongeant à l'infini et ayant une asymptote parallèle à l'axe des x, distante de cet axe d'une quantité égale à l'unité; ensuite une branche pointillée symétrique à celle-là, par rapport à l'axe des x; enfin deux branches ponctuées, symétriques l'une à l'autre par rapport à l'axe des x, situées dans la région des x négatifs, ayant d'une part l'axe des y pour asymptote commune, et ayant aussi d'une autre part pour asymptotes les prolongemens des asymptotes des deux premières branches. A raison donc de la symétrie, il nous suffira de considérer ce qui se passe dans la région des y positives.

D'abord, en faisant $x=+0$, on a $y=0^{+\infty}=0$; c'est-à-dire que la branche continue commence à l'origine des coordonnées. Cette branche passe ensuite par les deux points ($x=1$, $y=1$) et ($x=e$, $y=e^{\frac{1}{e}}$); et, lorsqu'on fait $x=+\infty$, on a $y=\infty^0$, c'est-à-dire $y=1$; car $\mathrm{l}.x^{\frac{1}{x}}$ ou $\frac{\mathrm{l}x}{x}$ a pour limite 0; d'où il suit que $x^{\frac{1}{x}}$ doit avoir pour limite l'unité. Cela indique l'asymptote parallèle à l'axe des x que nous avons annoncée ci-dessus.

Si nous faisons $x=-0$, nous aurons $y=0^{-\infty}=\infty$. La branche ponctuée a donc pour asymptote l'axe des y; elle passe ensuite par les points ($x=-1$, $y=1$) et ($x=-e$, $y=c^{-\frac{1}{e}}$), et donne, comme la branche continue, $y=1$ quand $x=-\infty$; ce qui annonce que l'asymptote de la branche continue lui est commune avec elle.

En prenant les différentielles successives des logarithmes des deux membres de l'équation, on obtient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2}\,\mathrm{l}\,\frac{e}{x}\,,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{x^4}\left\{\left(\mathrm{l}\,\frac{e}{x}\right)^2-x\,\mathrm{l}\,\frac{e^3}{x^2}\right\};$$

fonctions qui doivent être employées pour toutes les valeurs positives et négatives de x, de la manière qui a été expliquée ci-dessus (12).

Cela posé, la fonction $\frac{dy}{dx}$ prend la forme $\frac{o}{o}l\infty$ pour ($x=o$, $y=o$) et la forme $\frac{\infty}{o}l\infty$ pour ($x=o$, $y=\infty$). Ce dernier résultat, évidemment infini, indique que l'axe des y est asymptote de la branche ponctuée, à laquelle il correspond, comme on le savait déjà. Quant au premier, pour avoir sa véritable valeur, remarquons qu'en général la fonction $\frac{dy}{dx}$ peut être mise sous la forme $\frac{y(ly)^2}{(lx)^2}l\frac{e}{x}$, et que $l\frac{e}{x}=le-lx$, qui, à la limite, se réduit à $-lx$; d'où résulte, à cette même limite, $\frac{dy}{dx}=-y(ly)^2.\frac{1}{lx}$. Or, quand $y=o$, on a $y(ly)^2=o$ et $lx=\infty$; donc $\frac{dy}{dx}=o$; ainsi la branche continue touche l'axe des x à l'origine. Ce point offre donc analogue à celui que nous avons rencontré (fig. 7) et présente en outre, comme nous l'avons déjà remarqué (fig. 8), la circonstance d'un changement de nature de la courbe.

Pour $x=1$, on trouve $\frac{dy}{dx}=1$, c'est-à-dire qu'en cet endroit la tangente fait des angles demi-droits avec les deux axes, et passe en outre par l'origine, puisque $y=1$. Si l'on fait $x=e$, on a $\frac{dy}{dx}=o$, ce qui indique un *maximum*, comme on le vérifiera par la discussion de la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$. Enfin, si l'on fait $x=\infty$, d'où $y=1$, on a $\frac{dy}{dx}=o$, comme cela doit être, à cause de l'asymptote.

Considérons présentement les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui répondent aux diverses valeurs positives de x, en nous bornant toujours à la branche continue ou à y positive. Ces valeurs dépendent essentiellement de celles du facteur $\left(l\frac{e}{x}\right)^2 - xl\frac{e^3}{x^2}$; or, si l'on donne à x cette série de valeurs

$$x=1\,,\quad e^{-1}\,,\quad e^{-2}\,,\quad e^{-3}\,,\ \ldots\ldots\ e^{-m}\,,\qquad \text{Limite } 0\,.$$

Il en résultera

$$\left(l\frac{e}{x}\right)^2=1\,,\quad 2^2\,,\quad 3^2\,,\quad 4^2\,,\ \ldots\ (m+1)^2\,;\qquad \text{Limite } +\infty\,.$$

$$-xl.\frac{e^3}{x^2}=-3\,,\ -5e^{-1}\,,\ -7e^{-2}\,,\ -9e^{-3}\,,\ldots\ -(2m+3)e^{-m};\ \text{Limite } 0\,.$$

Les deux séries de valeurs devant être ajoutées terme à terme, il est facile d'en conclure que le facteur dont il est question sera positif depuis $x=0$ jusqu'à $x=e^{-1}$, et que, par conséquent, la courbe sera convexe vers l'axe des x entre ces deux limites. Le même facteur devenant négatif entre $x=e^{-1}$ et $x=1$, la courbe éprouvera une inflexion et deviendra concave vers l'axe des x. On pourrait même, en resserrant davantage les valeurs de x, déterminer la position de ce point d'inflexion d'une manière indéfiniment approchée, et prouver qu'il est unique entre ces mêmes limites.

Donnons encore à x les valeurs suivantes

$$x=1\,,\quad e\,,\quad e^2\,,\quad e^3\,,\quad e^4\,,\ \ldots\ldots\ e^m\,;\qquad \text{limite } +\infty\,.$$

Il en résultera

$$\left(l\frac{e}{x}\right)^2=1\,,\quad 0\,,\quad 1\,,\quad 2^2\,,\quad 3^2\,,\ \ldots\ldots\ (m-1)^2;\ \text{limite } +\infty\,.$$

$$-xl\frac{e^3}{x^2}=-3\,,\ -e\,,\ +e^2\,,\ +3e^3\,,\ +5e^4\,,\ldots+(2m-3)e^m;\ \text{limite } +\infty\,.$$

D'où on pourra conclure que la branche continue tourne encore sa concavité vers l'axe des x depuis $x=1$ jusqu'à $x=e$, mais qu'elle éprouve, entre $x=e$ et $x=e^2$, une seconde inflexion, dont il serait facile d'assigner le lieu d'une manière plus précise; après quoi elle redevient convexe vers l'axe des x, pour tout le reste de son cours.

Occupons-nous présentement de la branche ponctuée, à laquelle répondent les valeurs négatives de x. D'abord, en posant $x=-0$, d'où $y=\infty$, on a $\frac{dy}{dx}=\infty$, comme cela doit être, puisque l'axe des y est asymptote de cette branche. Si l'on fait $x=-1$ d'où $y=-1$ qu'on pourra changer en $+1$, à raison de la symétrie, on aura $\frac{dy}{dx}=\pm 1$; ce qui montre qu'en cet endroit la tangente fait un angle demi-droit avec les axes. A $x=-e$ répond $\frac{dy}{dx}=0$, ce qui dénote un *minimum*. Enfin, en faisant $x=-\infty$, on a $\frac{dy}{dx}=0$, ainsi que cela doit être, à cause de l'asymptote parallèle à l'axe des x.

Quant aux valeurs de la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui répondent à la branche ponctuée, en donnant à x, au signe près, les mêmes séries de valeurs que ci-dessus, le terme $\left(l\frac{e}{x}\right)^2$ conservera sa valeur et son signe, mais le terme $-xl\frac{e^3}{x^2}$ changera de signe sans changer de valeur absolue. Il faudra donc retrancher terme à terme les séries obtenues, au lieu de les ajouter; et l'on reconnaîtra ainsi facilement que la branche ponctuée, convexe vers l'axe des x depuis $x=0$ jusqu'à $x=-1$, demeure encore telle jusqu'à $x=-e$; mais qu'entre $x=-e$ et $x=-e^2$ elle a un point d'inflexion au-delà duquel elle demeure dans tout son cours concave vers l'axe des x.

14. Nous avons remarqué dans ce qui précède (12, 13) que, pour déduire de l'analise toutes les circonstances du cours des branches pointillées et ponctuées des courbes exponentielles, on était obligé de regarder comme réels les logarithmes des nombres négatifs. Or, on peut se demander naturellement si ces logarithmes sont en effet réels, ou si, en les supposant tels, on ne se livre pas à une hypothèse erronée. Ce qui a été dit au commencement de ce mémoire nous paraît offrir à cette question une réponse satisfaisante. Si, en effet, on appelle logarithme d'un nombre l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base du système pour avoir ce nombre ; et si l'on convient réciproquement de regarder tout nombre ainsi obtenu comme ayant cet exposant pour logarithme, on se trouvera contraint (2, 3, 4, 5) d'admettre comme incontestables les propositions suivantes :

I. *Dans tout système dont la base est positive, tout nombre positif a un logarithme réel. Quant aux nombres négatifs, ils se partagent en deux séries telles que chacun de ceux de l'une d'elles a un logarithme réel, le même qu'il aurait s'il était positif; tandis que ceux de l'autre série ont tous des logarithmes imaginaires.*

II. *Dans tout système dont la base est négative, il y a une moitié des nombres qui, avec quelque signe qu'on les prenne, ne sauraient avoir de logarithmes réels. L'autre moitié se partage encore en deux séries telles que ceux de l'une d'elles ont des logarithmes réels, lorsqu'on les prend positivement, et n'en ont pas quand on les prend négativement ; tandis qu'au contraire ceux de l'autre série ont des logarithmes réels, lorsqu'on les prend négativement, et n'en ont pas quand on les prend positivement.*

III. *Deux nombres de la même classe sont indéfiniment peu différens*; sans que pourtant on puisse dire qu'il y a continuité; puisqu'il existe entre eux un nombre de l'autre classe.

Ces propositions sont représentées graphiquement par les figures 1 et 2, dans lesquelles les ordonnées représentent les nombres et les abscisses leurs logarithmes.

L'obligation de circonscrire ce mémoire dans de justes bornes ne nous permet pas de nous occuper de la recherche des formules qui donnent tous les logarithmes d'un même nombre, tous les nombres correspondant à un même logarithme, les logarithmes des nombres imaginaires, les logarithmes des nombres, dans un système à base imaginaire, etc.; mais ce sont des objets sur lesquels nous pourrons revenir dans une autre occasion; et nous nous bornerons, pour le présent, à quelques développemens propres à mieux faire sentir encore l'exactitude des propositions que nous venons d'établir.

15. Nous ferons d'abord observer qu'on aurait tort de croire que la vérité ou la fausseté de ces propositions soit subordonnée à la définition qu'on voudra donner des logarithmes; et qu'une définition différente de celle de laquelle nous sommes partis, pût conduire à des conséquences différentes. Les mêmes conséquences se reproduisent encore, en effet, lorsque l'on veut, d'une manière plus élémentaire, considérer les logarithmes, comme les termes d'une progression par différences correspondant respectivement à ceux d'une progression par quotient, considérés comme nombres correspondans. Pour le prouver, désignons par a la base que, pour fixer les idées, nous supposerons positive et plus grande que l'unité, et formons le tableau des deux progressions fondamentales

Nombres	$0, \ldots a^{-m}, \ldots a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, a^3, \ldots a^m, \ldots +\infty,$
Logarithmes	$-\infty, \ldots -m, \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots m, \ldots +\infty.$

Pour en déduire les logarithmes de tous les nombres, on suppose que l'on insère un nombre indéfini i de moyen par quotiens entre les termes consécutifs de la première progression et un pareil nombre de moyens par différences entre leurs correspondans dans la seconde. Or, en représentant respectivement par q et d le quotient et la différence qui détermineront ces deux sortes de moyens, on aura

$$q=a^{\frac{1}{i+1}}\,,\qquad d=\frac{1}{i+1}\,;$$

or, si i est un nombre pair, il en résultera pour q une seule valeur réelle positive, tandis que, si au contraire ce nombre est impair, on aura pour q deux valeurs réelles, ne différant l'une de l'autre que par le signe. Si ensuite on suppose a négatif, les valeurs paires de i donneront pour q une seule valeur réelle négative et ses valeurs impaires des valeurs imaginaires, ce qui entraîne de nouveau les conséquences énoncées ci-dessus (14).

16. En admettant, comme on ne saurait guère s'y refuser, l'existence des deux classes de nombres que nous avons signalées (14), comment concilier la loi de continuité, telle qu'on l'entend ordinairement, avec la différence qui existe entre deux nombres consécutifs de la même classe, *différence plus petite que toute quantité assignable, et qui pourtant ne saurait être nulle ?* et que devient ce théorème universellement admis dans la théorie des limites : *deux grandeurs sont égales quand on peut prouver que leur différence est moindre que toute quantité assignable ?* que devient également la loi de continuité, s'il existe des courbes telles qu'entre deux ordonnées réelles, aussi rapprochées qu'on le voudra, on puisse en trouver non seulement une infinité d'autres tout aussi réelles, mais en outre une infinité d'autres imaginaires ? L'examen de toutes ces questions nous entraînerait dans des discussions métaphysiques qu'il n'appartient pas à notre sujet d'aborder. Nous nous bornons

à exposer des faits analitiques et géométriques qui nous paraissent incontestables, en abandonnant à de plus habiles le soin d'en déduire les conséquences.

17. Nous ne saurions toutefois dissimuler que certaines considérations sembleraient, au premier abord, indiquer la nécessité de considérer comme réels, sans aucune distinction, et respectivement égaux à ceux des nombres positifs, les logarithmes de tous les nombres négatifs. Par exemple, l'équation $y=a^x$, en y supposant a négatif, représente bien incontestablement une courbe à deux branches ponctuées, quelle que soit d'ailleurs la valeur numérique absolue de a. Or, on tire de cette équation

$$\frac{dy}{dx}=a^x.\mathrm{l}a\ , \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=a^x.(\mathrm{l}a)^2\ ,\ldots..$$

Si donc la valeur de a est de telle nature que son logarithme soit réel, la tangente, le cercle osculateur, la développée, l'aire de la courbe, etc., seront réels, comme si la courbe était continue. Mais, si la valeur de a ne lui permet pas d'admettre un logarithme réel, faudra-t-il en conclure que la tangente, le cercle osculateur, la développée, etc., n'existent pas ? c'est ce qu'il paraît difficile d'admettre, puisque les deux courbes sont identiquement de même nature, et que leur existence est indépendante de la théorie des logarithmes. Il semblerait donc que, quel que soit a, son logarithme doit être réputé réel. On ne serait pas fondé d'ailleurs à se retrancher sur la nature de la courbe, et à dire que les branches continues doivent seules avoir des tangentes réelles, des cercles osculateurs, etc.; car, si a était positif, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... seraient réels, et par conséquent la branche continue et la branche pointillée qui composent alors la courbe, seraient, sous ce rapport, exactement dans le même cas, comme nous l'avons déjà observé (8).

Les séries logarithmiques semblent conduire aux mêmes conséquences. Soit un nombre positif z, arbitrairement partagé en deux autres x et y, nous aurons

$$lz = l(x+y) = lx + l\left(1+\frac{y}{x}\right) = lx + \frac{1}{1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} + \frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4} + \ldots$$

Si ensuite nous changeons le signe de z, nous aurons

$$l(-z) = l(-x-y) = l(-x) + l\left(1+\frac{y}{x}\right) = l(-x) + \frac{1}{1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} + \frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4} + \ldots$$

On voit que les deux développemens ne diffèrent uniquement que par les termes lx et $l(-x)$. Or, on peut toujours prendre les deux nombres x et y de telle sorte que la série soit convergente et qu'en même temps x soit tel que $l(-x)$ soit réel; et alors on aura nécessairement $l(-z) = lz$, quel que soit z.

18. Quant aux considérations tirées des aires de l'hyperbole équilatère, considérations que Jean Bernouilli croyait propre à démontrer l'existence des logarithmes réels pour les nombres négatifs; il ne nous paraît pas que l'on puisse en tirer aucune conséquence fondée pour ou contre l'opinion que cet illustre géomètre cherchait à faire prévaloir.

Pour en faire sentir la raison, nous observerons d'abord que les variables doivent être considérées comme croissant constamment de l'infini négatif à l'infini positif, c'est-à-dire que les différentielles doivent être réputées positives, quels que soient les signes des variables elles-mêmes. Le principe contraire admis par un grand nombre de géomètres distingués, qui veulent que les signes des différentielles soient les mêmes que ceux des variables elles-mêmes, principe qui n'est d'ailleurs que de pure convention, se trouve en effet entraîner avec lui des inconvéniens de plus d'un genre. Par exemple, deux valeurs identiques de $\frac{dy}{dx}$ n'indiqueraient pas une même inclinaison pour tous les points du plan de la courbe, etc.

En second lieu, soit une intégrale indéfinie, telle que

$$\int dx f(x) = \varphi(x) + C\,;$$

on doit, pour des raisons analogues, sentir la nécessité de faire croître cette intégrale dans le même sens que les x; c'est-à-dire que, si $x=a$ et $y=b$ sont les deux limites entre lesquelles elle doit être prise, il sera nécessaire de la faire commencer à la plus petite des deux, c'est-à-dire, à celle dont la valeur approche le plus de l'infini négatif, et de la faire finir à la plus grande, ou à celle qui se trouve du côté de l'infini positif, quels que soient d'ailleurs les signes de a et b. Ainsi, en supposant $a<b$, l'intégrale définie sera $\varphi(b)-\varphi(a)$.

Ce principe étant admis, il en résulte que l'*aire d'une courbe est toujours de même signe que l'ordonnée.*

19. Cela posé, soit l'équation $x^m y^n = p^{mn}$, dans laquelle nous supposerons m, n, p positifs et de plus m et n entiers et premiers entre eux. La courbe représentée par cette équation sera du genre des hyperboles ; et, en supposant le cas particulier de m pair et n impair, elle ressemblera à celle qu'on voit (fig. 10). L'aire comprise entre l'arc de cette courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées correspondant aux deux abscisses a et b sera représentée par la formule

$$u=\int_a^b y\mathrm{d}x=\pm c\left(b^{\frac{n-m}{n}}-a^{\frac{n-m}{n}}\right),$$

en posant, pour abréger, $\frac{np^m}{n-m}=\pm c$, suivant que n est $>$ ou $<m$.

Présentement, il importe de distinguer deux cas, savoir; celui de $m<n$ et celui de $n>m$.

Si l'on a $m<n$, on a aussi $\frac{np^m}{n-m}=+c$. *L'origine naturelle* de l'intégrale est l'origine même des coordonnées, quel que soit le signe de x, c'est-à-dire que, dans l'intégrale indéfinie

$$\int y\mathrm{d}x=cx^{\frac{n-m}{n}}+\text{Const.},$$

en faisant la constante nulle, le terme $+cx^{\frac{n-m}{n}}$ représentera l'espace compris entre l'axe des y, correspondant à $x=0$, et l'ordonnée correspondant à l'abscisse quelconque $\pm x$, et que de plus ce terme se présentera avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que x sera positif ou négatif, comme il est facile de le vérifier, en prenant les intégrales $\int_{-x}^{0}$ et $\int_{0}^{+x}$. Il en résulte que, si l'on prend l'intégrale entre deux limites positives $x=+a$ et $x=+b$, ou entre deux limites négatives $x=-a'$, $y=-b'$, cette intégrale représentera toujours la différence entre les espaces YOQB et YOPA ou entre les espaces YOP′A′ et YOQ′B′. Si l'on voulait avoir l'aire comprise entre une limite négative $x=-a'$ et une limite positive $x=+b'$, il faudrait, d'après la règle connue, à raison de la valeur $y=\infty$ correspondant à $x=0$, faire deux intégrations, pour obtenir séparément $\int_{-a'}^{0}$ et $\int_{0}^{+b}$, et ajouter ensemble les résultats. On obtiendrait ainsi

$$\int_{-a'}^{+b} y\mathrm{d}x = c\left\{0^{\frac{n-m}{n}} - (-a')^{\frac{n-m}{n}}\right\} + c\left\{b^{\frac{n-m}{n}} - 0^{\frac{n-m}{n}}\right\} = c\left(b^{\frac{n-m}{n}} + a'^{\frac{n-m}{n}}\right);$$

d'où l'on voit (et c'est sur quoi nous désirons principalement fixer l'attention) qu'on aurait pu obtenir directement ce résultat par une seule intégration, prise depuis $x = -a'$ jusqu'à $x = +b$, sans avoir égard au passage de y par l'infini ; ce qui tient à la circonstance déjà indiquée que l'origine naturelle de l'intégrale se trouve au point zéro, quel que soit le signe de l'abscisse x ; les deux termes de cette intégrale représentant alors respectivement les espaces YOQB et YOP'A'.

Lorsqu'au contraire on a $n < m$ et par suite $\frac{np^m}{n-m} = -c$, l'origine naturelle de l'intégrale ne se trouve plus à l'origine des coordonnées ; elle est située sur l'axe des x, à l'infini négatif pour les abscisses négatives et à l'infini positif pour les abscisses positives, comme il est facile de le voir, en cherchant les conditions nécessaires pour que la constante soit nulle. Il résulte de là que l'intégrale

$$\int_{+a}^{+b} y\mathrm{d}x = -c\left(b^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}}\right) = c\left(a^{\frac{n-m}{n}} - b^{\frac{n-m}{n}}\right)$$

représente la différence des espaces APX et BQX, et que l'intégrale

$$\int_{-a'}^{-b'} y\mathrm{d}x = -c\left\{(-b')^{\frac{n-m}{n}} - (-a')^{\frac{n-m}{n}}\right\} = c\left(b'^{\frac{n-m}{n}} - a'^{\frac{n-m}{n}}\right)$$

représente la différence des espaces B'Q'X' et A'P'X' Il n'est donc plus possible alors d'obtenir l'intégrale $\int_{-a'}^{+b}$ par une seule intégration. On trouve, en effet, en se rapelant qu'on a $n<m$,

$$\int_{-a'}^{+b} y\,dx = \int_{-a'}^{0} y\,dx + \int_{0}^{+b} y\,dx = c\left(0^{\frac{n-m}{n}} - a'^{\frac{n-m}{n}}\right)$$

$$+c\left(0^{\frac{n-m}{n}} - b^{\frac{n-m}{n}}\right) = c\left(\infty - a'^{\frac{n-m}{n}} + \infty - b^{\frac{n-m}{n}}\right)$$

ou encore

$$\int_{-a'}^{+b} y\,dx = \text{YOX}' - \text{A}'\text{P}'\text{X}' + \text{YOX} - \text{BQX},$$

intégrale qui se réduirait à $-\text{A}'\text{P}'\text{X}' - \text{BQX}$, si l'on n'avait fait qu'une intégration.

Ce qui précède suppose que m est pair et n impair. Si l'on avait au contraire m impair et n pair les deux branches de la courbe se trouvant alors situées d'un même côté de l'axe des y, il y aurait à considérer, pour chaque abscisse, des aires correspondant aux deux branches de courbes, ce qui sortirait du sujet qui nous occupe. Mais, dans le cas de m et n tous deux impairs et inégaux, les mêmes observations se représenteraient; il arriverait seulement que la branche analogue à B'A'X' (fig. 10) serait située dans l'angle X'OY' (fig. 11); que toutes les aires qui s'y rapporteraient seraient négatives, et que conséquemment une intégrale prise entre une limite négative et une limite positive ne se composerait plus, comme précédemment, de la somme, mais de la différence arithmétique des aires partielles.

Il demeure donc suffisamment établi, par ce qui précède, que l'on ne peut obtenir une intégrale entre deux limites données par une seule intégration que dans le cas où l'origine naturelle de cette intégrale est la même pour les deux limites données.

20. Bien que dans le cas où $m=n$, dont nous n'avons pas parlé, l'intégrale soit une transcendante, ce principe lui est également applicable, si l'on pose alors $p=1$; en extrayant la racine du degré m des deux membres, l'équation se réduira à $xy=1$, et représentera (fig. 11) l'hyperbole équilatère du second degré, pour laquelle on aura

$$u=\int y\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{l}x+\mathrm{l}c\,.$$

Ici l'origine naturelle de l'intégrale est, pour le abscisses positives, au point pour lequel $x=1$, puisqu'en supposant nulle la constante $\mathrm{l}c$, il faut faire $x=1$ pour avoir $\mathrm{l}x=0$. Entre les limites $x=+a$ et $x=+b$, cette intégrale devient

$$\int_{+a}^{+b} y\,\mathrm{d}x=\mathrm{l}b-\mathrm{l}a=\mathrm{l}\,\frac{b}{a}\ ;$$

elle représente donc le logarithme du rapport des abscisses ; et elle est positive, parce qu'on a $b>a$. Pour les abscisses négatives, l'origine n'est plus au même point ; elle se trouve au point pour lequel on a $x=-1$. En effet, on peut mettre u sous la forme $\mathrm{l}.cx=\mathrm{l}.(-c)(-x)$, puis en posant $c=-c'$, $x=-x'$, sous la forme $\mathrm{l}.c'x'=\mathrm{l}x'+\mathrm{l}c'$. Alors x' représente la valeur absolue de l'abscisse ; et l'on voit qu'en supposant $\mathrm{l}c'=0$, il faudra avoir $x'=1$ pour que l'intégrale s'évanouisse. Entre les limites $x=-a'$ et $x=-b'$ ou $x'=a'$ et $x'=b'$, elle devient

$$\int_{-a'}^{-b'} y\,\mathrm{d}x=\mathrm{l}b'-\mathrm{l}a'=\mathrm{l}\,\frac{b'}{a'}\ .$$

Elle représente encore le logarithme du rapport des abscisses ; mais elle est négative, parce qu'on a $b'<a'$. Les aires positives de la branche AB représentent donc les logarithmes de tous les nombres positifs plus grands que 1, et les aires négatives de la branche A′B′ les logarithmes de tous les nombres positifs plus petits que 1. A l'égard des logarithmes des nombres négatifs, on les obtiendrait, à la vérité, en intégrant d'un seul coup entre deux limites telles que $x=-a'$ et $x=+b$, ce qui donnerait $\mathrm{l}b-\mathrm{l}(-a')=\mathrm{l}\left(-\frac{b}{a'}\right)$; le résultat serait la différence de deux aires partielles, l'une positive et l'autre négative; et il aurait la même valeur que si les deux limites eussent été de même signe; mais il paraît résulter de ce que nous avons dit ci-dessus qu'on ne saurait se permettre d'intégrer de cette manière.

A cause de $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{-\mathrm{d}x}{-x}$, ce qui permet de poser $u=\mathrm{l}(-x)+\mathrm{l}c$ aussi bien que $u=\mathrm{l}x+\mathrm{l}c$, on pourrait encore s'imaginer qu'on obtiendrait les logarithmes des nombres négatifs en mettant l'intégrale générale sous cette nouvelle forme; mais il est facile de se convaincre du contraire, en remarquant que l'intégrale définie, prise entre deux limites du même signe a et b, devient alors $\mathrm{l}(-b)-\mathrm{l}(-a)$ $=\mathrm{l}\frac{-b}{-a}=\mathrm{l}\frac{b}{a}$; ce qui reproduit exactement les mêmes résultats et conduit aux mêmes conséquences.

21. Quoi qu'il en soit, les considérations développées sous le n.° 17 nous paraissent reposer sur des inductions trop vagues pour infirmer les propositions énoncées dans le n.° 14. Il serait tout aussi naturel, et sans doute plus exact, d'une part, d'en conclure que les courbes ponctuées n'ont proprement ni tangentes ni cercle osculateur (ce qui n'a point lieu pour les courbes pointillées); et quant au développement que nous avons donné de $\mathrm{l}(-z)$, ce développement reposant sur l'hypothèse d'une continuité qui n'existe plus, il ne nous paraît pas qu'on en puisse déduire aucune conséquence

bien rigoureuse. Les objections que l'on pourrait tirer de ces diverses considérations, objections que nous n'avons pas cru devoir dissimuler, nous semblent donc devoir laisser dans toute leur force les principes posés n.° 14 qui nous paraissent d'ailleurs sans réplique, sur-tout si on les appuie de ce qui a été dit dans le n.° 15.

22. Il est nécessaire de conclure de ces mêmes principes que les courbes dont les équations renferment des fonctions logarithmiques sont également susceptibles d'avoir des branches pointillées ou ponctuées. Telle est, en particulier, la courbe dont l'équation est $y=\mathrm{l}x$. Cette courbe, en effet, en supposant qu'on prend a pour base, devient identique avec celle dont l'équation est $y=a^x$, (fig. 1 et 2) en y prenant x pour y, et réciproquement.

Soit encore la courbe ayant pour équation $y=\frac{x}{\mathrm{l}x}$, les logarithmes étant Népériens, on aura

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{l}\frac{x}{e}}{(\mathrm{l}x)^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{l}\frac{e^2}{x}}{x(\mathrm{l}x)^3}.$$

En employant le même mode de discussion que ci-dessus (11, 12, 13), on reconnaîtra que la courbe (fig. 12) a, 1.° une branche continue partant de l'origine et s'étendant indéfiniment dans l'angle XOY′, entre l'axe des y et une parallèle à cet axe qui lui sert d'asymptote et dont la distance à l'origine est égale à $+1$; 2.° une autre branche continue, située dans l'angle XOY, ayant la même asymptote en sens inverse d'une part, convexe vers l'axe des x depuis cette asymptote jusqu'au point d'inflexion ($x=e^2$, $y=\frac{1}{2}.e^2$) où elle fait avec l'axe des x un angle dont la tangente tabulaire est $\frac{1}{4}$, après avoir été parallèle au même axe au point ($x=e$, $y=e$); devenant au-delà du point d'inflexion concave vers cet axe, et lui redevenant parallèle pour le point ($x=\infty$, $y=\infty$) ; 3.° une branche pointillée , prolongement de la première branche continue , dans l'angle X′OY , symétrique , par rapport à l'axe des x, de celle qui lui serait symétrique par rapport à l'axe des y; 4.° enfin une autre branche pointillée dans l'angle X′OY′ , également symétrique par rapport à l'axe des x d'une branche qui serait symétrique, par rapport à l'axe des y , à la seconde branche continue.

Les résultats ne changeraient pas de nature quand bien même on supposerait une toute autre base logarithmique , pourvu qu'elle fût *positive* ; et , si elle était *négative* , les branches se changeraient en quatre branches ponctuées.

23. Dans les applications de la théorie des logarithmes au calcul des expressions numériques ou algébriques , on peut traiter de la même manière tous les nombres , tant positifs que négatifs ; et l'on doit prendre les logarithmes de ces derniers comme s'ils étaient positifs.

Pour le démontrer , il faut distinguer deux cas. Ou les logarithmes ne sont employés que comme un moyen abrégé de trouver la valeur numérique d'une expression donnée , ou bien l'emploi des logarithmes est indispensable pour parvenir à la valeur numérique d'une inconnue.

Supposons d'abord qu'on se trouve dans le premier de ces deux cas ; il résulte évidemment de ce que nous avons dit (14) que , si le nombre dont il s'agit est de ceux dont les logarithmes sont imaginaires , il suffira de l'augmenter ou de le diminuer d'une quantité indéfiniment petite , et conséquemment bien inférieure à la limite d'approximation qu'on peut se promettre du calcul par logarithmes , pour lui faire acquérir un logarithme réel positif ou négatif. Lorsqu'ensuite on sera parvenu à la fin du calcul , si le logarithme final est du genre de ceux auxquels il ne répond aucun nombre réel , il suffira également de l'augmenter ou de le diminuer d'une quantité bien inférieure à celles qu'on se permet de négliger dans ce mode de calcul, pour le faire répondre à deux nombres réels ne différant l'un de l'autre que par le signe. On n'aura donc plus d'embarras que sur le choix du signe du résultat, lequel devra être déterminé à l'avance, conformément à la nature des données et des opérations qu'on aura eu à leur faire subir. Si, par exemple, il s'agit d'un produit de facteurs, on prendra pour le nombre répondant au logarithme final le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le nombre des facteurs négatifs sera pair ou impair. S'il s'agit d'une puissance, on se règlera sur le signe de la racine et la nature de l'exposant qui pourront souvent conduire à rejeter comme faux le résultat obtenu. C'est, par exemple, ce qui arriverait, si l'on avait à calculer par logarithmes $(-9)^{\frac{1}{2}}$; le résultat ± 3 devrait être rejeté comme faux, à cause de la nature imaginaire de l'expression proposée.

Dans le cas où l'emploi des logarithmes est nécessaire pour obtenir la valeur de l'inconnue, on peut encore prendre les logarithmes des nombres négatifs comme si ces nombres étaient positifs, sauf ensuite à vérifier le résultat obtenu, qui souvent peut être fautif. Soient, par exemple, les équations

$$27^x=3\,, \qquad 9^x=-3\,,$$

on en tirera

$$x\mathrm{l}27=\mathrm{l}3\,, \qquad x\mathrm{l}9=\mathrm{l}(-3)\,;$$

d'où

$$x=\frac{\mathrm{l}3}{\mathrm{l}27}=\frac{1}{3}\,, \qquad x=\frac{\mathrm{l}(-3)}{\mathrm{l}9}=\frac{1}{2}\,;$$

et en effet

$$27^{\frac{1}{3}}=3\,, \qquad 9^{\frac{1}{2}}=\pm 3\,.$$

Mais, si l'on avait

$$8^x = -2 \qquad \text{d'où} \qquad x\,\mathrm{l}8 = \mathrm{l}(-2)\,,$$

on en tirerait

$$x = \frac{\mathrm{l}(-2)}{\mathrm{l}8} = \frac{\mathrm{l}2}{\mathrm{l}8} = \frac{1}{3}\,,$$

résultat faux, puisque

$$8^{\frac{1}{3}} = +2 \text{ et non } -2\,.$$

Le nombre cherché dans le dernier cas est donc imaginaire.

24. Il n'a été question, dans tout ce qui précède, que de courbes rapportées à des coordonnées rectangulaires. Les mêmes considérations s'appliqueraient également à d'autres systèmes de coordonnées, si les équations des courbes qui y seraient rapportées contenaient des fonctions transcendantes des variables. Telles est, en particulier, l'équation polaire $r = a^t$ de la spirale logarithmique, dans laquelle a représente un nombre constant, t l'angle que fait le rayon vecteur partant du pôle avec une droite fixe menée arbitrairement par ce même point, et r ce rayon vecteur. Si, en effet, on suppose d'abord a positif, les variables t et r se trouveront exactement dans le même cas que x et y dans le n.° 6. Il en résultera donc pour r une série continue de valeurs positives et une série discontinue de valeurs négatives. Or, les valeurs positives du rayon vecteur doivent être comptées du pôle vers l'extrémité de l'arc de cercle sur lequel se comptent les distances angulaires, tandis que ses valeurs négatives doivent être prises en sens contraire ; donc la spirale (fig. 13) aura une branche continue et une branche pointillée dont les spires s'envelopperont mutuellement. Mais, si la constante a était négative, ces

deux branches se trouveraient remplacées par deux branches ponctuées de même forme.

25. Des considérations analogues à celles qui viennent de nous occuper à l'égard des courbes planes sont évidemment applicables aux surfaces courbes qui peuvent être tantôt continues et tantôt discontinues, et qui, dans ce dernier cas, peuvent être formées tantôt de courbes continues ne se succédant pas consécutivement et tantôt de courbes pointillées ou ponctuées, et qui peuvent avoir aussi des nappes de ces différentes sortes à la fois. Ce que nous avons dit jusqu'ici fait assez comprendre comment on doit se conduire dans la discussion de ces sortes de surfaces; et, pour cette raison, nous croyons superflu de nous y arrêter. Les mêmes considérations pourraient également être appliquées aux courbes à double courbure.

26. Nous terminerons par observer que les courbes dont les équations renferment des fonctions circulaires des variables ont été jusqu'ici tout aussi incomplètement construites que celles qui viennent de nous occuper; ce qui tient, comme on peut déjà l'entrevoir, à ce que dans leur construction on a négligé d'avoir égard aux différens arcs auxquels répond, en général, une même ligne trigonométrique. Nous nous proposons de traiter ce sujet dans un autre mémoire où nous ferons connaître, en particulier, quelques propriétés de la cycloïde qui, dépendant de la multiplicité de ses branches, n'avaient pu encore être remarquées.

ARITHMÉTIQUE.

Démonstration élémentaire de la valeur infinie de la somme des inverses des nombres naturels ;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

Soit posée

$$z=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots.$$

$$x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots.$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\ldots.$$

nous aurons évidemment

$$x+y=z\,,\qquad 2y=z\,,$$

et par suite

$$x+y=2y \qquad \text{ou} \qquad x=y\,.$$

Mais, d'un autre côté, y n'étant autre chose que x, dans laquelle on a augmenté tous les dénominateurs d'une unité, si x, y, z avaient des valeurs finies, on devrait avoir

$$x>y\,.$$

Cette relation étant donc incompatible avec la précédente, il en faut conclure que x et y sont infinis, et que conséquemment leur somme z l'est aussi.

Il faudrait bien toutefois se garder de conclure de là que $x=y$ et que conséquemment

$$0=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots.$$

on n'a en effet $x=y$ qu'autant que ces deux infinies ne diffèrent que d'une quantité finie qui s'évanouit devant eux ; et c'est précisément ce qui arrive ici ; car, comme l'on sait,

$$\text{Log}.2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots.$$

de sorte qu'on a réellement

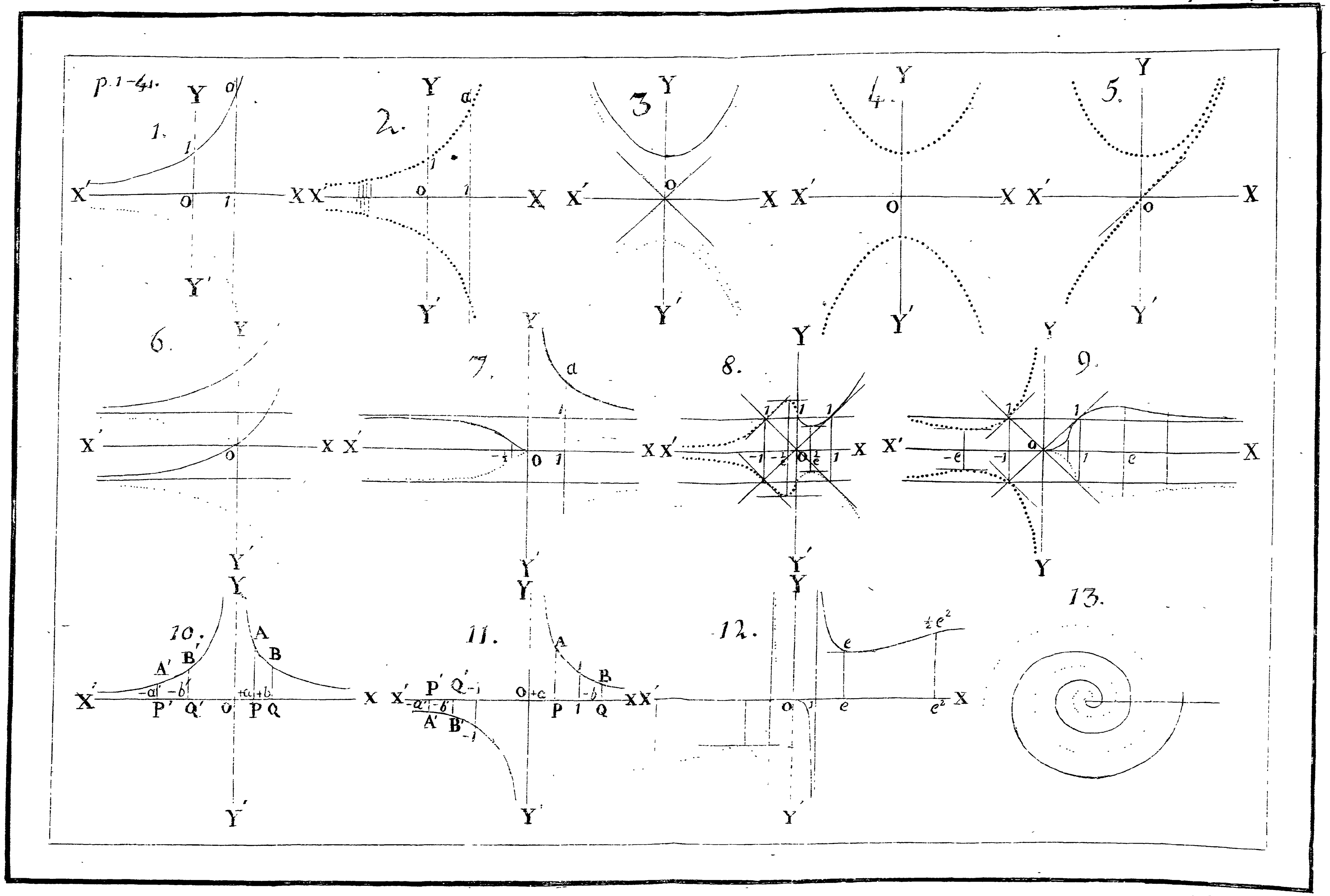
$$x-y=\text{Log}.2\,,\quad \text{et conséquemment}\quad x>y\,,$$

comme nous l'avions trouvé.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de situation.

De combien de manières m couleurs différentes les unes des autres peuvent-elles être appliquées sur les faces d'un polyèdre régulier ; m représentant tour à tour les nombres 4, 6, 8, 12, 20 ?



J. D. G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation linéaire du premier ordre à deux variables ;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

On se tromperait étrangement si l'on croyait avoir tout fait dans l'analise, lorsqu'on a trouvé une méthode propre à résoudre chacune des questions qui dépendent de ses procédés. Outre qu'en effet les divers chemins qui conduisent au même but peuvent fort bien n'être pas tous également aisés à parcourir ; il arrive souvent que, tandis que certaines méthodes sont exclusivement propres à l'objet particulier pour lequel elles ont été imaginées, d'autres, au contraire, semblent ouvrir devant elles une voie nouvelle, et être de nature à s'étendre à un grand nombre de recherches analogues.

Ces réflexions nous serviront d'excuse, si nous revenons ici un moment sur un sujet qui semble épuisé depuis long-temps, en indiquant, pour parvenir à l'intégration de l'équation linéaire du premier ordre entre deux variables, un procédé tout-à-fait nouveau, et qui nous paraît susceptible d'être étendu au-delà de cette application particulière.

Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx}=P_1y+Q_1\,, \qquad (1)$$

dans laquelle P_1 et Q_1 sont supposés des fonctions quelconques de x sans y. En la différentiant, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2}=P_1\frac{dy}{dx}+\frac{dP_1}{dx}y+\frac{dQ_1}{dx}\;;$$

ou, en mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur donnée par la proposée,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(P_1^2+\frac{dP_1}{dx}\right)y+\left(P_1Q_1+\frac{dQ_1}{dx}\right)\;;$$

de sorte qu'en posant

$$P_1^2+\frac{dP_1}{dx}=P_2\,, \qquad P_1Q_1+\frac{dQ_1}{dx}=Q_2\;;$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}=P_2y+Q_2\,,$$

où P_2 et Q_2 seront encore, comme dans (1), des fonctions de x sans y.

Il est clair, d'après cela, que, si l'on pose,

$$P_2^2+\frac{dP_2}{dx}=P_3\,, \qquad P_2Q_2+\frac{dQ_2}{dx}=Q_3\,,$$

on aura

$$\frac{d^3y}{dx^3}=P_3y+Q_3\,,$$

où P_3 et Q_3 seront toujours des fonctions de x sans y; de manière qu'en continuant ainsi, on aura, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = P_n y + Q_n, \qquad (2)$$

où P_n et Q_n seront encore des fonctions de x sans y, et n un nombre entier positif quelconque.

Si, dans cette dernière équation, on suppose $n=0$, elle deviendra

$$\frac{d^0 y}{dx^0} \quad \text{ou} \quad y = P_0 y + Q_0,$$

d'où

$$y = \frac{Q_0}{1-P_0}; \qquad (3)$$

d'où l'on voit que l'intégration de la proposée se réduit finalement à déterminer les deux fonctions P_0 et Q_0. Or, c'est là une chose très-facile, ainsi qu'on va le voir.

En différentiant l'équation (2), on a

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = P_n \frac{dy}{dx} + \frac{dP_n}{dx} y + \frac{dQ_n}{dx};$$

ou, en mettant dans le second membre pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur donnée par l'équation (1),

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \left(P_1 P_n + \frac{dP_n}{dx}\right) y + \left(Q_1 P_n + \frac{dQ_n}{dx}\right).$$

Faisant, dans cette dernière, $n=0$, elle deviendra

$$\frac{dy}{dx} = \left(P_1 P_0 + \frac{dP_0}{dx}\right) y + \left(Q_1 P_0 + \frac{dQ_0}{dx}\right).$$

Celle-ci devant être identique avec l'équation (1), on aura

$$P_1P_0+\frac{dP_0}{dx}=P_1\,, \qquad (4) \qquad Q_1P_0+\frac{dQ_0}{dx}=Q_1\,. \qquad (5)$$

La première de ces équations donne

$$\frac{dP_0}{1-P_0}=P_1dx\,,$$

d'où en intégrant

$$\text{Log.}\,\frac{1-P_0}{C}=-\int P_1dx\,,$$

C étant la constante ; c'est-à-dire,

$$1-P_0=Ce^{-\int P_1dx}\,. \qquad (6)$$

On tire ensuite de l'autre

$$dQ_0=Q_1(1-P_0)dx=CQ_1dx.e^{-\int P_1dx},$$

d'où, en intégrant,

$$Q_0=C\int e.^{-\int P_1dx}Q_1dx\,,$$

substituant enfin les valeurs de Q_0 et de $1-P_0$ dans la formule (3), on aura

$$y=\frac{\int e.^{-\int P_1dx}Q_1dx}{e^{-\int P_1dx}}=e.^{\int P_1dx}\int e.^{-\int P_1dx}Q_1dx\,,$$

c'est la formule connue dans laquelle, comme l'on voit, il ne faut point ajouter de constante à l'intégrale $\int P_1dx$, mais seulement à l'intégrale $\int e.^{-\int P_1dx}Q_1dx$.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème de M. LHUILIER, *énoncé dans la* Bibliothèque universelle (mars 1824, p. 169).

Par un ABONNÉ.

PROBLÈME. *Déterminer l'aire du polygone dont les sommets sont les pieds des perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés d'un polygone régulier donné, d'un point donné sur le plan de ce polygone ?*

Solution. Soient m le nombre des côtés du polygone régulier donné, et r le rayon du cercle circonscrit. Soit pris son centre pour origine des coordonnées rectangulaires, et faisons passer l'axe des x positifs par l'un quelconque de ses sommets. Les équations d'un sommet quelconque seront de la forme

$$x=r\text{Cos.}\frac{2n\pi}{m}\,, \qquad y=r\text{Sin.}\frac{2n\pi}{m}\,,$$

où n représente un nombre entier positif quelconque. On en conclura les équations du sommet qui suit immédiatement celui-là en y changeant n en $n+1$, ce qui donnera

$$x=r\text{Cos.}\frac{2(n+1)\pi}{m}\,, \qquad y=r\text{Sin.}\frac{2(n+1)\pi}{m}\,;$$

l'équation de la droite qui passera par ces deux points sera donc l'équation de l'un quelconque des côtés du polygone. Cette équation est

$$y-r\text{Sin.}\frac{2n\pi}{m}=\frac{\text{Sin.}\frac{2(n+1)\pi}{m}-\text{Sin.}\frac{2n\pi}{m}}{\text{Cos.}\frac{2(n+1)\pi}{m}-\text{Cos.}\frac{2n\pi}{m}}\left(x-r\text{Cos.}\frac{2n\pi}{m}\right);$$

et, en observant que $\frac{\text{Sin.}p-\text{Sin.}q}{\text{Cos.}p-\text{Cos.}q}=-\text{Cot.}\frac{1}{2}(p+q)$, on la réduira simplement à

$$y-r\text{Sin.}\frac{2n\pi}{m}=-\text{Cot.}\frac{(2n+1)\pi}{m}\left(x-r\text{Cos.}\frac{2n\pi}{m}\right),$$

ou bien

$$\left(x-r\text{Cos.}\frac{2n\pi}{m}\right)\text{Cos.}\frac{(2n+1)\pi}{m}+\left(y-r\text{Sin.}\frac{2n\pi}{m}\right)\text{Sin.}\frac{(2n+1)\pi}{m}=0,$$

ou en transposant

$$x\text{Cos.}\frac{(2n+1)\pi}{m}+y\text{Sin.}\frac{(2n+1)\pi}{m}=r\left\{\text{Cos.}\frac{2n\pi}{m}\text{Cos.}\frac{(2n+1)\pi}{m}+\text{Sin.}\frac{2n\pi}{m}\text{Sin.}\frac{(2n+1)\pi}{m}\right\}$$

ou enfin, en simplifiant,

$$x\text{Cos.}\frac{(2n+1)\pi}{m}+y\text{Sin.}\frac{(2n+1)\pi}{m}=r\text{Cos.}\frac{\pi}{m}. \qquad (1)$$

Soit k la distance du centre du polygone au point donné sur son plan, et soit α l'angle que fait cette distance k avec l'axe des x, les équations de ce point seront

$$x=k\text{Cos.}\alpha, \qquad y=k\text{Sin.}\alpha;$$

et l'équation de la perpendiculaire abaissée de ce même point sur la direction du côté dont nous venons de déterminer l'équation sera

$$(x-k\mathrm{Cos}.\alpha)\mathrm{Sin}.\frac{(2n+1)\varpi}{m}-(y-k\mathrm{Sin}.\alpha)\,\mathrm{Cos}.\frac{(2n+1)\varpi}{m}=0\,; \quad (2)$$

mais l'équation (1) peut être mise sous cette autre forme

$$(x-k\mathrm{Cos}.\alpha)\mathrm{Cos}.\frac{(2n+1)\varpi}{m}+(y-k\mathrm{Sin}.\alpha)\mathrm{Sin}.\frac{(2n+1)\varpi}{m}=r\mathrm{Cos}.\frac{\varpi}{m}-k\mathrm{Cos}.\left[\frac{(2n+1)\varpi}{m}-\alpha\right] (3)$$

En considérant les équations (2 et 3) comme les deux équations d'un même problème, x et y seront alors les coordonnées du pied de la perpendiculaire. On tire d'ailleurs de leur combinaison

$$x-k\mathrm{Cos}.\alpha=\left\{r\mathrm{Cos}.\frac{\varpi}{m}-k\mathrm{Cos}.\left[\frac{(2n+1)\varpi}{m}-\alpha\right]\right\}\mathrm{Cos}.\frac{(2n+1)\varpi}{m}\,,$$

$$y-k\mathrm{Sin}.\alpha=\left\{r\mathrm{Cos}.\frac{\varpi}{m}-k\mathrm{Cos}.\left[\frac{(2n+1)\varpi}{m}-\alpha\right]\right\}\mathrm{Sin}.\frac{(2n+1)\varpi}{m}\,;$$

d'où il est facile de conclure pour la longueur p de cette perpendiculaire

$$p=r\mathrm{Cos}.\frac{\varpi}{m}-k\mathrm{Cos}.\left[\frac{(2n+1)\varpi}{m}-\alpha\right].$$

Si l'on représente par p' la perpendiculaire qui précède immédiatement celle-là, on en conclura la longueur de celle de p en y changeant n en $n-1$, ce qui donnera

$$p'=r\mathrm{Cos}.\frac{\varpi}{m}-k\mathrm{Cos}.\left[\frac{(2n-1)\varpi}{m}-\alpha\right]\,;$$

on pourra ensuite mettre ces deux valeurs sous cette autre forme

$$p=r\mathrm{Cos}.\frac{\varpi}{m}-k\mathrm{Cos}.\left[\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)+\frac{\varpi}{m}\right],$$

$$p'=r\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}-k\text{Cos.}\left[\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)-\frac{\varpi}{m}\right].$$

Il est manifeste d'ailleurs que l'angle de ces deux perpendiculaires sera égal à l'angle extérieur ou encore à l'angle au centre du polygone donné, c'est-à-dire que cet angle sera égal à $\frac{2\varpi}{m}$; d'où il suit que ces perpendiculaires formeront avec la droite qui joint leurs pieds un triangle dont l'aire sera, suivant les principes connus, $\frac{1}{2}pp'\text{Sin.}\frac{2\varpi}{m}$. En mettant donc pour p et p' les valeurs ci-dessus, on obtiendra pour l'aire de ce triangle

$$\frac{1}{2}\left\{r\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}-k\text{Cos.}\left[\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)+\frac{\varpi}{m}\right]\right\}\left\{r\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}-k\text{Cos.}\left[\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)-\frac{\varpi}{m}\right]\right\}\text{Sin.}\frac{2\varpi}{m}$$

Le polygone dont l'aire est demandée sera composé de m triangles dont on déduira l'aire de cette expression, en y mettant tour à tour pour n tous les nombres naturels, depuis 0 jusqu'à $m-1$, inclusivement. On aura donc l'aire demandée en sommant l'expression ci-dessus depuis la première de ces deux limites jusqu'à la seconde.

Mais, pour faciliter cette sommation, remarquons d'abord que les deux facteurs qui suivent le coefficient $\frac{1}{2}$ peuvent être écrits ainsi

$$r\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}-k\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}\text{Cos.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)+k\text{Sin.}\frac{\varpi}{m}\text{Sin.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)$$

$$r\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}-k\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}\text{Cos.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)-k\text{Sin.}\frac{\varpi}{m}\text{Sin}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)$$

ce qui donne pour leur produit

$$\left\{r-k\mathrm{Cos.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)\right\}^2\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}-k^2\mathrm{Sin.}^2\frac{\varpi}{m}\,\mathrm{Sin.}^2\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)$$

ou en développant

$$r^2\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}-2kr\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\,\mathrm{Cos.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)+k^2\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\,\mathrm{Cos.}^2\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)-k^2\mathrm{Sin.}^2\frac{\varpi}{m}\,\mathrm{Sin.}^2\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)$$

mais on sait que $\mathrm{Cos.}^2t=\frac{1}{2}(1+\mathrm{Cos.}2t)$ et $\mathrm{Sin.}^2t=\frac{1}{2}(1-\mathrm{Cos.}2t)$; en conséquence, ce produit pourra être mis sous cette autre forme

$$r^2\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}-2kr\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\,\mathrm{Cos.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)$$

$$+\frac{1}{2}k^2\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\left\{1+\mathrm{Cos.}\left(\frac{4n\varpi}{m}-2\alpha\right)\right\}-\frac{1}{2}k^2\mathrm{Sin.}^2\frac{\varpi}{m}\left\{1-\mathrm{Cos.}\left(\frac{4n\varpi}{m}-2\alpha\right)\right\}$$

ce qui revient à

$$r^2\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}-2kr\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\,\mathrm{Cos.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)$$

$$+\frac{1}{2}k^2\left(\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}-\mathrm{Sin.}^2\frac{\varpi}{m}\right)+\frac{1}{2}k^2\mathrm{Cos.}\left(\frac{4n\varpi}{m}-2\alpha\right)$$

ou encore

$$r^2\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}+\frac{1}{2}k^2\mathrm{Cos.}\frac{2\varpi}{m}-2kr\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\,\mathrm{Cos.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)+\frac{1}{2}k^2\mathrm{Cos.}\left(\frac{4n\varpi}{m}-2\alpha\right),$$

ou enfin

$$\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}(r^2+k^2)\mathrm{Cos.}\frac{2\varpi}{m}-2kr\mathrm{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\,\mathrm{Cos.}\left(\frac{2n\varpi}{m}-\alpha\right)+\frac{1}{2}k^2\mathrm{Cos.}\left(\frac{4n\varpi}{m}-2\alpha\right).$$

Pour avoir l'aire du triangle, il faudra encore multiplier ce développement par $\frac{1}{2}\mathrm{Sin.}\frac{2\varpi}{m}$, ce qui donnera finalement

$$\tfrac{1}{4}\left\{r^2+(r^2+k^2)\text{Cos.}\frac{2\varpi}{m}\right\}\text{Sin.}\frac{2\varpi}{m}$$

$$-\tfrac{1}{4}k\left\{4r\text{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\text{Cos.}\left(\frac{2n\pi}{m}-\alpha\right)-k\text{Cos.}\left(\frac{4n\pi}{m}-2\alpha\right)\right\}.$$

Il résulte de là que l'aire cherchée du polygone sera

$$\tfrac{m}{4}\left\{r^2+(r^2+k^2)\text{Cos.}\frac{2\varpi}{m}\right\}\text{Sin.}\frac{2\varpi}{m}$$

$$-\tfrac{1}{4}k\left\{4r\text{Cos.}^2\frac{\pi}{m}\Sigma\text{Cos.}\left(\frac{2n\pi}{m}-\alpha\right)-k\Sigma\text{Cos.}\left(\frac{4n\pi}{m}-2\alpha\right)\right\};$$

les sommes étant prises depuis $n=0$ jusqu'à $n=m-1$.

Or, il est connu (*) que

$$\text{Cos.}a+\text{Cos.}(a+d)+\text{Cos.}(a+2d)+\ldots+\text{Cos.}[a+(m-1)d]=\frac{\text{Cos.}[a+\frac{1}{2}(m-1)d]\text{Sin.}\frac{1}{2}md}{\text{Sin.}\frac{1}{2}d}$$

Posant donc, 1.°

$$a=-\alpha\,,\qquad d=\frac{2\varpi}{m}\,,$$

il viendra

$$\Sigma\text{Cos.}\left(\frac{2n\pi}{m}-\alpha\right)=\frac{\text{Cos}\left[\frac{(m-1)\pi}{m}-\alpha\right]\text{Sin.}\varpi}{\text{Sin.}\frac{\varpi}{m}}=0\,.$$

Posant, en second lieu,

$$a=-2\alpha\,,\qquad d=\frac{4\varpi}{m}\,,$$

nous trouverons

(*) EULER, *Introd. in analy. inf.* (tom. I, chap. XIV, n.° 260).

$$\Sigma\text{Cos.}\left(\frac{4n\varpi}{m}-2\alpha\right)=\frac{\text{Cos.}\left[\frac{2(m-1)\pi}{m}-2\alpha\right]\text{Sin }2\varpi}{\text{Sin. }\frac{2\pi}{m}}=0\,.$$

En conséquence, l'aire du polygone se réduit simplement à

$$\frac{m}{4}\left\{r^2+(r^2+k^2)\text{Cos. }\frac{2\pi}{m}\right\}\text{Sin. }\frac{2\pi}{m}\,,$$

c'est-à-dire qu'elle sera tout-à-fait indépendante de α; d'où résulte ce théorème :

THÉORÈME. *Si de l'un quelconque des points du plan d'un polygone régulier on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, les droites qui joindront consécutivement les pieds de ces perpendiculaires formeront un nouveau polygone non régulier, inscrit au premier, dont l'aire ne dépendra uniquement que du rayon du cercle circonscrit au polygone primitif et de la distance de son centre au point d'où partent les perpendiculaires; de sorte que cette aire sera la même pour toutes les situations de ce point sur une même circonférence concentrique au polygone primitif.*

C'est en cela que consiste le théorème de M. Lhuilier que nous nous étions proposé de démontrer, et qu'on peut encore énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME. *Le lieu des points du plan d'un polygone régulier desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, l'aire du polygone qui a ses sommets aux pieds de ces perpendiculaires est constante et donnée, est une circonférence ayant même centre que le polygone régulier donné.*

Dans le cas particulier où $m=4$, c'est-à-dire lorsque le polygone donné est un quarré, à cause de Cos. $\frac{\varpi}{2}=0$ et de Sin. $\frac{\varpi}{2}=0$, l'aire du nouveau polygone se réduit à r^2, c'est-à-dire qu'alors cette aire est constamment moitié de celle du quarré donné, quelle que soit la situation du point de départ des perpendiculaires. M. Lhuilier regarde ce cas comme une exception tout-à-fait extraordinaire sous le point de vue logique ; mais nous ne saurions partager sa surprise à cet égard. Les exceptions de ce genre sont en effet très-fréquentes dans les sciences exactes ; et, lorsqu'on dit qu'une quantité est fonction de plusieurs autres, on veut seulement dire qu'elle ne dépend au plus que de celles-là, sans prétendre qu'elle dépende de toutes dans tous les cas. Le rayon du cercle des points de la circonférence duquel peuvent partir les perpendiculaires est déterminé, en général, pour un polygone à construire d'une aire donnée ; mais, dans un cas particulier, ce rayon devient indéterminé s'il n'est pas impossible, circonstance fort ordinaire dans les recherches mathématiques.

Que, par exemple, on demande de construire un quadrilatère dont les quatre côtés consécutifs soient a, b, c, d, le problème sera indéterminé, parce qu'en général il faut cinq conditions pour déterminer un quadrilatère ; mais si, pour en lever l'indétermination, on exige en outre que les deux diagonales du quadrilatère à construire se coupent à angles droits, on trouvera aisément qu'alors le problème n'est possible qu'autant qu'on a

$$a^2+d^2=b^2+c^2\ ,$$

et que, si les quatre côtés donnés satisfont à cette condition, le problème demeure indéterminé.

L'aire du polygone régulier donné est

$$\frac{m}{2}\,r^2\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{m}\ ;$$

mais, si l'on suppose $k=0$, le point de départ des perpendiculaires sera le centre même de ce polygone, et le second polygone sera le polygone régulier formé par les droites qui joignent les milieux des côtés consécutifs de celui-là. L'aire de ce second polygone se réduira alors à

$$\frac{m}{2}r^2\text{Cos.}^2\frac{\varpi}{m}\text{Sin.}\frac{2\varpi}{m},$$

comme on le trouverait d'ailleurs directement.

La distance k étant quelconque, plus m sera grand et plus le polygone régnlier donné tendra à devenir un cercle ; donc aussi l'autre polygone tendra de plus en plus à devenir une ligne courbe ; et il le deviendra en effet lorsque m sera infini ; mais, dans ce cas, on aura $\text{Cos.}\frac{2\varpi}{m}=1$ et $m\text{Sin.}\frac{2\varpi}{m}=m.\frac{2\varpi}{m}=2\varpi$; en conséquence, la surface terminée par cette courbe aura pour expression

$$\varpi r^2+\tfrac{1}{2}\varpi k^2,$$

c'est-à-dire qu'elle excèdera la surface du cercle donné d'une quantité égale à la moitié de la surface du cercle qui aurait k pour rayon. Cherchons l'équation de cette courbe.

Soit

$$x^2+y^2=r^2,$$

l'équation du cercle donné ; l'équation de la tangente en l'un quelconque (x', y') des points de sa circonférence sera

$$xx'+yy'=r^2, \qquad (1)$$

sous la condition

$$x'^2+y'^2=r^2. \qquad (2)$$

Si d'un point fixe (a, b) nous abaissons une perpendiculaire sur cette tangente, l'équation de cette perpendiculaire sera

$$(x-a)y'-(y-b)x'=0. \qquad (3)$$

Si donc nous éliminons x' et y' entre ces trois équations, l'équation résultante en x et y sera celle du lieu des pieds de toutes les perpendiculaires, c'est-à-dire, l'équation de la courbe cherchée.

On tire des équations (1) et (3), par l'élimination alternative de y' et x'

$$\{x(x-a)+y(y-b)\}x'=r^2(x-a) \;,$$

$$\{x(x-a)+y(y-b)\}y'=r^2(y-b) \;;$$

prenant la somme des quarrés de ces dernières, en ayant égard à l'équation (2) et divisant ensuite par r^2, on aura pour l'équation de la courbe dont il s'agit

$$\{x(x-a)+y(y-b)\}=r^2\{(x-a)^2+(y-b)^2\} \;.$$

Cette équation est celle de *la courbe décrite par le sommet d'un angle droit mobile dont l'un des côtés est constamment tangent à un cercle, tandis que l'autre passe constamment par un point fixe pris sur le plan de ce cercle.*

La solution que nous avons donnée du problème est sans doute fort différente de celle de M. Lhuilier, à en juger du moins par la manière dont ce géomètre a coutme de procéder dans ses divers ouvrages. Il y aura sans doute mis plus d'art et de finesse que nous, et aura par suite été plus brief. Mais nous pensons que notre solution n'en sera pas pour cela moins utile, précisément parce que c'est pour ainsi dire une solution *terre-à-terre*. Il importe en effet que les commençans se persuadent bien que, si beaucoup d'habitude et de sagacité peuvent être nécessaires pour traiter une question de mathématiques avec élégance et brièveté, l'analise algébrique met néanmoins aux mains des hommes les plus ordinaires toutes les ressources nécessaires pour arriver d'une manière plus ou moins rapide, et pour ainsi dire mécanique, à la solution de tous les problèmes qui peuvent être proposés. Et, comme nous ne saurions nous promettre d'avoir toujours l'esprit convenablement disposé au moment même où nous avons besoin de résoudre un problème, le plus grand service que puissent nous rendre les sciences est de nous faire devenir machines par rapport à la plupart des objets dont nous avons à nous occuper; d'autant que, comme l'a dit un écrivain philosophe, les machines ont sur l'intelligence le précieux avantage de n'éprouver ni distraction ni lassitude.

M. Lhuilier observe, avec beaucoup de raison, que ce n'est point savoir la science que de savoir simplement démontrer et résoudre les théorèmes et les problèmes qui se trouvent traités dans l'auteur qu'on a étudié, et qu'il est nécessaire que les jeunes-gens s'exercent ensuite à aller d'eux-mêmes. C'est pourtant une chose tout-à-fait négligée dans la plupart des écoles publiques, et dont même on ne s'occupait nulle part il y a moins de quarante ans. Cela tient à ce que le plus souvent on confie l'enseignement à des hommes qui ont tout juste le degré d'intelligence nécessaire pour comprendre les auteurs qu'ils enseignent. Ce fâcheux état de choses ne pourra aller, au surplus, qu'en empirant, tant qu'on ne travaillera pas à former d'habiles professeurs; et on en trouvera peu de tels à former aussi long-temps qu'on n'environnera pas les fonctions de l'enseignement d'une considération qui y attire des hommes capables et les dédommage des avantages qu'ils pourraient obtenir dans les autres carrières de la vie civile.

Lyon, le 17 mai 1824.

TRIGONOMÉTRIE.

Discussion des formules qui donnent les sinus et cosinus de la moitié d'un angle en fonction soit du cosinus soit du sinus de cet angle ;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

On sait que, quel que soit un angle x, on a

$$2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}x=1-\text{Cos.}x\,, \qquad 2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}x=1+\text{Cos.}x\,;$$

d'où on tire

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\,, \qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\,.$$

Il sera facile de lever l'ambiguïté qui résulte des doubles signes de ces formules au moyen des remarques suivantes :

1.° Si x est compris entre $4n\varpi$ et $(4n+1)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi$ et $2n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$, et conséquemment on devra avoir

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\,, \qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\,.$$

2.° Si x est compris entre $(4n+1)\varpi$ et $(4n+2)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$ et $2n\varpi+\varpi$, et conséquemment on devra avoir

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\ .$$

3.° Si x est compris entre $(4n+2)\varpi$ et $(4n+3)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi+\varpi$ et $2n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$ et conséquemment on devra avoir

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\ .$$

4.° Enfin, si x est compris entre $(4n+3)\varpi$ et $(4n+4)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{3}{4}\varpi$ et $2(n+1)\varpi$, et conséquemment on devra avoir

$$\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}x=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\ .$$

Mais, comme l'observe M. Legendre, dans sa trigonométrie, au lieu d'avoir le sinus et le cosinus de la moitié d'un angle en fonction du cosinus de cet angle, on peut désirer de les obtenir immédiatement en fonction de son sinus. On y parviendrait d'abord facilement en substituant dans les formules ci-dessus la valeur

$$\text{Cos.}x=\pm\sqrt{1-\text{Sin.}^2x}\ ,$$

et discutant ensuite, comme ci-dessus, les signes du second radical qui doivent répondre à chaque cas; mais on doit éviter autant qu'on le peut dans les formules les radicaux superposés, attendu l'obligation qu'ils imposent d'extraire les premières racines avec beaucoup plus de chiffres décimaux qu'on n'en a besoin dans le résultat final; et ces radicaux superposés peuvent, dans la question qui nous occupe, être facilement évités.

On a en effet, quel que soit x,

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}x=1\ ,$$

$$2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\text{Sin.}x\ .$$

Prenant tour à tour la somme et la différence de ces deux équations, on aura

$$(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x)^2=1+\text{Sin.}x\ ,\quad (\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x)^2=1-\text{Sin.}x\ ,$$

d'où on conclura

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{1+\text{Sin.}x}\ ,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{1-\text{Sin.}x}\ ;$$

équations qui donneront immédiatement, par addition et soustraction, les valeurs de $\text{Sin.}\frac{1}{2}x$ et $\text{Cos.}\frac{1}{2}x$, dès qu'on aura levé l'ambiguité qui résulte des doubles signes de leurs seconds membres.

Et remarquons bien que, dans le cas actuel, la discussion de ces signes est d'une toute autre importance qu'elle ne l'était dans le cas précédent. Alors, en effet, en la négligeant, nous aurions du moins obtenu les valeurs absolues de $\text{Sin.}\frac{1}{2}x$ et de $\text{Cos.}\frac{1}{2}x$, et nous n'aurions été exposés au plus qu'à une erreur de signe qui quelquefois n'est d'aucune importance, tandis qu'ici, où les valeurs de $\text{Sin.}\frac{1}{2}x$ et $\text{Cos.}\frac{1}{2}x$ doivent se composer de deux termes radicaux, une méprise sur les signes de ces radicaux pourrait entraîner une erreur tant sur la valeur absolue que sur le signe de la quantité cherchée. Examinons donc quels doivent être les signes de ces radicaux dans les différens cas.

1.° Si x est compris entre $4n\varpi$ et $4n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi$ et $2n\varpi+\frac{1}{4}\varpi$; $\text{Sin.}\frac{1}{2}x$ et $\text{Cos.}\frac{1}{2}x$ seront donc tous deux positifs; mais on aura $\text{Cos.}\frac{1}{2}x>\text{Sin.}\frac{1}{2}x$; d'où il suit qu'il faudra prendre

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

2.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi+\frac{1}{4}\varpi$ et $2n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$; Sin $\frac{1}{2}x$ et Cos. $\frac{1}{2}x$ seront donc encore positifs ; mais, comme on aura alors Sin. $\frac{1}{2}x>$ Cos. $\frac{1}{2}x$, il faudra prendre

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

3.° Si x est compris entre $4n\varpi+\varpi$ et $4n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$ et $2n\varpi+\frac{3}{4}\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ demeurera toujours positif ; mais Cos. $\frac{1}{2}x$ sera négatif et moindre que lui, abstraction faite de son signe ; on aura donc

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

4.° Si x se trouve compris entre $4n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$ et $4n\varpi+2\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi+\frac{3}{4}\varpi$ et $2n\varpi+\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ sera encore positif et Cos. $\frac{1}{2}x$ négatif ; mais, comme ce dernier sera plus grand, abstraction faite de son signe, que le premier, il faudra prendre

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

5.° Si x est compris entre $4n\varpi+2\varpi$ et $4n\varpi+\frac{5}{2}\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $4n\varpi+\varpi$ et $4n\varpi+\frac{5}{4}\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ et Cos. $\frac{1}{2}x$ seront alors tous deux négatifs ; mais, abstraction faite des signes, Sin. $\frac{1}{2}x$ sera le plus petit des deux ; de sorte qu'on aura

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

6.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{5}{2}\varpi$ et $4n\varpi+3\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{5}{4}\varpi$ et $2n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ et Cos. $\frac{1}{2}x$ demeureront encore tous deux négatifs ; mais, abstraction faite des signes, ce sera alors Sin. $\frac{1}{2}x$ qui sera le plus grand ; on devra donc écrire

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x-\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

7.° Si x est compris entre $4n\varpi+3\varpi$ et $4n\varpi+\frac{7}{2}\varpi$, $\frac{1}{2}\varpi$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$ et $2n\varpi+\frac{7}{4}\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ demeurera donc toujours négatif ; mais Cos. $\frac{1}{2}x$ redeviendra positif, et sera le plus petit des deux, abstraction faite de son signe ; il faudra donc écrire

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}x-\text{Cos.}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

8.° Si enfin x est compris entre $4n\varpi+\frac{7}{2}\varpi$ et $(4n+2)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{7}{4}\varpi$ et $(2n+1)\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ sera encore négatif et Cos. $\frac{1}{2}x$ positif ; mais, abstraction faite des signes, ce dernier deviendra le plus grand ; de sorte qu'on devra avoir

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

De toute cette discussion résultent, en résumé, les conséquences suivantes :

1.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$, on aura

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,;$$

et par suite

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{1+\text{Sin.}x}+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right),$$

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{1+\text{Sin.}x}-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right).$$

2.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\frac{5}{2}\varpi$, on aura

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,;$$

et par suite

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\text{Sin.}x}+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right),$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\text{Sin.}x}-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right).$$

3.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{5}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\frac{7}{2}\varpi$, on aura

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}x\tfrac{1}{2}-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,,$$

et par suite

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\text{Sin.}x}-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right),$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\text{Sin.}x}+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right).$$

4.° Si enfin x est compris entre $4n\varpi+\frac{7}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\frac{9}{2}\varpi$, on aura

$$\text{Sin}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,;$$

et par suite

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{1+\text{Sin.}x}-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right),$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{1+\text{Sin.}x}+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right).$$

M. Legendre donne uniquement ces dernières formules, et les donne comme générales ; mais il suffit, pour s'assurer qu'elles ne le sont pas, d'y faire $x=\varpi$. Sa méprise paraît venir en partie de ce qu'au lieu de chercher directement ces formules, ainsi que nous venons de le faire, il s'est contenté de les vérifier par l'élévation au quarré, ce qui conduit à un résultat pareil à celui que donnerait le deuxième cas.

Nous ne disons rien du cas où l'angle x serait négatif, attendu que les relations entre les sinus et cosinus de deux angles qui ne diffèrent que par le signe sont assez connues.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de géométrie énoncé à la page 120 *du XIII.e volume des* Annales ;

Par M. Gergonne.

Avant de résoudre le problème proposé, nous nous occuperons d'abord du suivant, qui est pour la géométrie plane ce qu'est l'autre pour la géométrie de l'espace.

PROBLÈME. Une des propriétés du cercle est que les tangentes aux extrémités de chacune de ses cordes font des angles égaux avec elle ; mais cette propriété pourrait fort bien n'être pas exclusive au cercle. On propose donc d'examiner si elle ne conviendrait pas à d'autres courbes planes, et de donner, dans le cas de l'affirmative, l'équation générale de ces courbes ?

Ou, en d'autres termes,

PROBLÈME. Quelle est l'équation la plus générale des courbes planes dans lesquelles les tangentes aux deux extrémités de leurs cordes se coupent sur la perpendiculaire au milieu de ces cordes ?

Solution. Prenons respectivement pour axes des x et des y la tangente et la normale en un point quelconque de la courbe cherchée, lequel point sera conséquemment l'origine des coordonnées; et soit (x', y') un autre point quelconque de cette courbe. La corde qui joindra ces deux points aura pour équation

$$y=\frac{y'}{x'}x\ ;$$

la tangente à l'une de ses extrémités sera l'axe des x lui-même, et la tangente à son autre extrémité aura pour équation

$$y-y'=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}(x-x')\ . \qquad (1)$$

Quant à la perpendiculaire sur le milieu de la corde, son équation sera

$$y-\tfrac{1}{2}y'=-\frac{x'}{y'}(x-\tfrac{1}{2}x')\ ; \qquad (2)$$

et il faudra que cette tangente et cette perpendiculaire coupent l'axe des x au même point. Il faudra donc qu'en faisant $y=0$, dans les équations (1, 2), on en tire la même valeur pour x. Or, elles deviennent ainsi

$$y'\mathrm{d}x'+(x-x')\mathrm{d}y'=0\ ; \qquad y'^2-x'(2x-x')=0\ ;$$

éliminant donc x entre elles, et supprimant ensuite les accens, désormais superflus, on obtiendra pour l'équation différentielle des courbes cherchées

$$(x^2-y^2)\mathrm{d}y=2xy\mathrm{d}x\ ,$$

ou bien

$$(x^2+y^2)\mathrm{d}y=2y(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\ ,$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\ ,$$

d'où

$$x^2+y^2=2Cy\ ,$$

équation commune à tous les cercles qui touchent l'axe des x à l'origine.

On peut donc définir indistinctement le cercle *une courbe telle que les tangentes aux extrémités de ses cordes font des angles égaux avec elles*, ou *une courbe telle que les tangentes aux extrémités de ses cordes se coupent sur les perpendiculaires à leurs milieux;* ce qui rentre à peu près dans ce qui a été démontré géométriquement (tom. XIV, pag. 316).

PROBLÈME. Quelle est l'équation la plus générale des surfaces courbes dans lesquelles les plans tangens aux deux extrémités de leurs cordes se coupent sur le plan perpendiculaire au milieu de ces cordes?

Solution. Prenons respectivement pour plan des xy et pour axe des z le plan tangent et la normale en un point quelconque de la surface cherchée, lequel point sera conséquemment l'origine des coordonnées rectangulaires; et soit $(x',\ y',\ z')$ un autre point quelconque de cette surface. La corde qui joindra ces deux points aura pour ses équations

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}\ ;$$

le plan tangent à l'une de ses extrémités sera le plan des xy lui-même, et le plan tangent à son autre extrémité aura pour équation

$$z-z'=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}(x-x')+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}(y-y')\ , \qquad (1)$$

quant au plan perpendiculaire sur le milieu de la corde, son équation sera

$$z-\tfrac{1}{2}z'=-\frac{x'}{z'}(x-\tfrac{1}{2}x')-\frac{y'}{z'}(y-\tfrac{1}{2}y')\ ; \qquad (2)$$

et il faudra que ce plan tangent et ce plan perpendiculaire coupent le plan des xy suivant la même droite. Il faudra donc qu'en faisant $z=0$, dans les équations (1, 2), on en tire des équations en x et y qui expriment la même droite. Or, ces équations sont

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}x+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}y=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}x'+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}y'-z'\ ,$$

$$2x'x+2y'y=x'^2+y'^2+z'^2\ .$$

On devra donc avoir

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}}{\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}x'+\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}y'-z'}=\frac{2x'}{x'^2+y'^2+z'^2}\ ,$$

$$\frac{\frac{dz'}{dy'}}{\frac{dz'}{dx'}x'+\frac{dz'}{dy'}y'-z'}=\frac{2y'}{x'^2+y'^2+z'^2};$$

c'est-à-dire, en chassant les dénominateurs et supprimant les accens désormais superflus

$$(y^2+z^2-x^2)\frac{dz}{dx}-2xy\frac{dz}{dy}=-2xz,$$

$$(x^2+z^2-y^2)\frac{dz}{dy}-2xy\frac{dz}{dx}=-2yz;$$

équations d'où on tirera

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2xz}{x^2+y^2-z^2}, \qquad \frac{dz}{dy}=\frac{2yz}{x^2+y^2-z^2};$$

puis donc qu'on a

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy,$$

l'équation différentielle totale de la surface cherchée sera

$$dz=\frac{2z(xdx+ydy)}{x^2+y^2-z^2},$$

c'est-à-dire,

$$(x^2+y^2+z^2)dz=2z(xdx+ydy+zdz).$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\ ;$$

d'où, en intégrant,

$$x^2+y^2+z^2=2Cz\ ,$$

équation commune à toutes les sphères qui touchent le plan des xy à l'origine.

On peut donc définir la sphère *une surface telle que les tangentes aux extrémités de ses cordes se coupent sur les plans perpendiculaires à leurs milieux* ; ce qui rentre à peu près dans ce qui a été démontré géométriquement (tom. XIV, pag. 317).

PROBLÈME. Une des propriétés de la sphère est que les plans tangens aux extrémités de ses cordes font des angles égaux avec elles ; mais on conçoit que cette propriété pourrait fort bien n'être pas exclusive à la sphère. On propose donc d'examiner si elle ne conviendrait pas à d'autres surfaces courbes, et de donner, dans le cas de l'affirmative, l'équation générale de ces surfaces ? (*)

Solution. Tout étant supposé ici comme dans le précédent problème, il faudra exprimer que la corde fait des angles égaux tant avec le plan tangent qu'avec le plan des xy ; égalant donc entre eux les sinus de ces angles, nous aurons

$$\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{z'-x'\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}-y'\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)\left\{1+\left(\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}\right)^2\right\}}}\ ;$$

(*) C'est proprement là la question qui a été proposée.

ou en simplifiant, chassant les dénominateurs, quarrant et supprimant les accens désormais superflus

$$z^2\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}=\left(z-x\frac{dz}{dx}-y\frac{dz}{dy}\right)^2.$$

Telle est donc l'équation différentielle partielle commune à toutes les surfaces demandées; équation qu'il s'agirait d'intégrer pour avoir la solution complète du problème.

Solution du premier des trois problèmes de géométrie énoncés à la page 308 du présent volume ;

Par M. STEIN, professeur au gymnase de Trève, ancien élève de l'école polytechnique.

PROBLÈME. *Quel est le lieu des points du plan d'un triangle desquels menant des droites à ses sommets, puis, par ces mêmes sommets respectivement, des perpendiculaires à ces droites, ces perpendiculaires forment, par leur rencontre, un triangle circonscrit équivalant à un carré donné ?*

Solution. Soit k^2 l'aire du carré donné.

Soit rapporté le triangle donné à deux axes rectangulaires quelconques, et soit alors (x, y) le point dont on cherche le lieu.

Soient en outre (a, b), (a', b'), (a'', b'') les trois sommets du triangle donné, et (X, Y), (X', Y'), (X'', Y'') les sommets respectivement opposés du triangle variable de figure et de situation dont l'aire doit être constante.

Ce dernier triangle excède le premier de trois autres triangles ayant respectivement pour bases les trois côtés de celui-ci et ayant pour sommets les sommets de l'autre.

Considérons, en particulier, celui dont le sommet est en (X, Y), son aire est, comme l'on sait,

$$\tfrac{1}{2}\{(b'-b'')X-(a'-a'')Y+(a'b''-b'a'')\} .$$

Mais, parce que les droites qui vont du point (X, Y) aux points (a', b'), (a'', b'') sont respectivement perpendiculaires à celles qui vont du point (x, y) aux deux mêmes points, on doit avoir, par les théories connues,

$$1+\frac{y-b'}{x-a'}\cdot\frac{Y-b'}{X-a'}=0, \qquad 1+\frac{y-b''}{x-a''}\cdot\frac{Y-b''}{X-a''}=0,$$

c'est-à-dire,

$$(x-a')X+(y-b')Y=a'(x-a')+b'(y-b'),$$

$$(x-a'')X+(y-b'')Y=a''(x-a'')+b''(y-b'');$$

d'où

$$X=\frac{(y-b'')\{a'(x-a')+b'(y-b')\}-(y-b')\{a''(x-a'')+b''(y-b'')\}}{(b'-b'')x-(a'-a'')y+(a'b''-b'a'')},$$

$$Y=\frac{(x-a')\{a''(x-a'')+b''(y-b'')\}-(x-a'')\{a'(x-a')+b'(y-b')\}}{(b'-b'')x-(a'-a'')y+(a'b''-b'a'')}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de l'aire du triangle dont il s'agit, elle devient, en réduisant et décomposant,

$$\frac{\{(a'-a'')(x-a')+(b'-b'')(y-b')\}\{(a'-a'')(x-a'')+(b'-b'')(y-b'')\}}{2\{(b'-b'')x-(a'-a'')y+(a'b''-b'a'')\}}.$$

Par un simple mouvement d'accens, on trouvera, pour les aires des deux autres triangles excédans

$$\frac{\{(a''-a)(x-a'')+(b''-b)(y-b'')\}\{(a''-a)(x-a)+(b''-b)(y-b)\}}{2\{(b''-b)x-(a''-a)y+(a''b-b''a)\}},$$

$$\frac{\{(a-a')(x-a)+(b-b')(y-b)\}\{(a-a')(x-a')+(b-b')(y-b')\}}{2\{(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')\}}\ ;$$

d'un autre côté, l'aire du triangle donné est

$$\tfrac{1}{2}\{(a'b''-b'a'')+(a''b-b''a)+(ab'-ba')\}\ ;$$

en égalant donc à k^2 la somme de ces quatre expressions, on obtiendra l'équation de la courbe cherchée.

Présentement, pour simplifier un peu nos résultats, plaçons l'origine au sommet (a'', b'') du triangle donné, en laissant d'ailleurs toujours aux axes une direction arbitraire, afin de ne pas trop sacrifier la symétrie à la simplicité. En désignant par c, c' les deux côtés qui concourent à ce sommet et par α'' l'angle compris, on aura, comme l'on sait,

$$a''=0\ ,\quad a^2-b^2+c'^2\ ,\quad ab'-ba'=cc'\mathrm{Sin}.\alpha''\ ,$$

$$b''=0\ ,\quad a'^2+b'^2+c^2\ ,\quad aa'+bb'=cc'\mathrm{Cos}.\alpha''\ ;$$

en conséquence l'équation de la courbe sera

$$\left.\begin{array}{l} cc'\mathrm{Sin}.\alpha''+\dfrac{(a'x+b'y)(a'x+b'y-c^2)}{b'x-a'y}-\dfrac{(ax+by)(ax+by-c'^2)}{bx-ay} \\ +\dfrac{\{(a-a')x+(b-b')y-c'(c'-c\mathrm{Cos}.\alpha'')\}\{(a-a')x+(b-b')y+c(c-c'\mathrm{Cos}.\alpha'')\}}{(b-b')x-(a-a')y+cc'\mathrm{Sin}.\alpha''} \end{array}\right\}=2k^2.$$

En réduisant tout le premier membre en une seule fraction, et ayant toujours égard aux relations ci-dessus, on trouve finalement

$$\frac{\{cc'(x^2+y^2)\text{Sin.}\alpha''+c^2(bx-ay)-c'^2(b'x-a'y)\}^2}{(bx-ay)(b'x-a'y)\{(b-b')x-(a-a')y+cc'\text{Sin.}\alpha''\}}=2k^2\ ;$$

le lieu cherché du point (x, y) est donc une ligne du quatrième ordre.

Il est aisé de voir que cette courbe passe par l'origine ; et, comme cette origine est un quelconque des sommets du triangle donné, il s'ensuit qu'elle doit passer par les trois sommets de ce triangle et qu'elle doit conséquemment lui être circonscrite. Cette circonstance, au surplus, était facile à prévoir. En prenant, en effet, un des sommets pour le point (x, y), la direction de l'une des trois droites qui doivent concourir à former le triangle dont l'aire doit être égale à k^2 demeurera indéterminée ; d'où il suit qu'on pourra toujours prendre cette direction telle que la condition soit remplie.

Il est même facile de voir que la courbe passera deux fois par chaque sommet, puisque les termes les moins élevés de son équation sont de deux dimensions en x et y. En ne conservant que ces seuls termes, l'équation résultante du second degré sera donc l'équation des deux tangentes à la courbe à l'origine. Cette équation est

$$\{c^2(bx-ay)-c'^2(b'x-a'y)\}^2=2cc'k^2(bx-ay)(b'x-a'y)\text{Sin.}\alpha''.$$

On doit observer que, comme géométriquement parlant, une surface n'est proprement susceptible d'aucun signe, k^2 peut être pris indistinctement en plus ou en moins ; de sorte qu'il y a proprement deux lignes du quatrième ordre, l'une et l'autre circonscrites au triangle donné, dont les points satisfont aux conditions du problème.

Si, au lieu de demander que les perpendiculaires menées par les sommets du triangle donné aux droites qui vont du point (x, y) à ces mêmes sommets interceptent un triangle équivalant à un carré donné, on exigeait que ces perpendiculaires concourussent en un même point, il suffirait, pour plier l'équation générale à cette circonstance, d'y supposer $k^2=0$. Elle deviendrait alors simplement

$$cc'(x^2+y^2)\mathrm{Sin}.\alpha''+c^2(bx-ay)-c'^2(b'x-a'y)=0\ ,$$

équation qui appartient à un cercle; et, comme alors la courbe ne cesse pas de passer par les trois sommets du triangle donné, il s'ensuit que cette courbe n'est autre chose, dans ce cas, que le cercle circonscrit à ce triangle, comme on pourrait d'ailleurs s'en assurer directement. On peut aussi s'assurer bien facilement par des considérations purement géométriques qu'en effet *si, de l'un quelconque des points de la circonférence circonscrite à un triangle, on mène des droites à ses sommets, les perpendiculaires menées respectivement à ces droites par ces mêmes sommets concourront en un autre point de cette circonférence, diamétralement opposé au premier.*

Si, au contraire, on exigeait que l'aire k^2 fut infinie, il serait nécessaire et il suffirait pour cela que l'un quelconque des facteurs du dénominateur du premier membre de l'équation fût nul; mais ces facteurs, égalés à zéro, ne sont autre chose que les équations des trois côtés du triangle donné; donc, pour que l'aire constante cherchée soit infinie, il est nécessaire et il suffit que le point (x', y') soit pris sur la direction de l'un des côtés du triangle donné; ce qui est d'ailleurs manifeste, puisqu'alors deux des côtés du triangle circonscrit seraient parallèles, et qu'ils ne peuvent l'être que dans ce seul cas.

Considérons encore le cas où l'aire du triangle donné serait nulle, c'est-à-dire, le cas où les trois points $(a\,,\,b)$, $(a'\,,\,b')$, $(a''\,,\,b'')$ appartiendraient à une même ligne droite ; mais, pour plus de symétrie, recourons à nos premières formules. En supposant ces trois points sur l'axe des x, nous aurons $b=0$, $b'=0$, $b''=0$, et les aires de nos trois triangles excédans deviendront

$$-\frac{(a'-a'')(x-a')(x-a'')}{2y}\,,$$

$$-\frac{(a''-a)(x-a'')(x-a)}{2y}\,,$$

$$-\frac{(a-a')(x-a)(x-a')}{2y}\,,$$

et, comme d'un autre côté l'aire du triangle donné est nulle, l'équation du lieu cherché sera simplement

$$(a'-a'')(x-a'(x-a'')+(a''-a)(x-a'')(x-a)+(a-a')(x-a)(x-a')+2k^2y=0\;;$$

équation qui se réduit à

$$2k^2y+a'a''(a'-a'')+a''a(a''-a)+aa'(a-a')=0\,,$$

ou encore à

$$2k^2y=(a-a')(a'-a'')(a''-a)\;;$$

dans laquelle $a-a'$, $a'-a''$, $a''-a$ ne sont autre chose que les distances entre les trois points donnés pris deux à deux.

Ainsi, *les points du plan d'une droite desquels menant des droites à trois points fixes pris sur cette dernière droite, et* *ensuite respectivement par ces trois mêmes points fixes des perpendiculaires à ces droites, ces perpendiculaires interceptent entre elles un triangle équivalant à un carré donné, sont les points d'une parallèle indéfinie à la droite qui contient les trois points fixes. La distance de cette parallèle à la droite sur laquelle les trois points fixes sont situés est la moitié du quotient de la division du produit des distances deux à deux entre les trois points fixes par l'aire du carré donné.*

Il faut encore se rappeler ici qu'à cause du double signe dont k^2 est susceptible, la parallèle à la droite qui contient les trois points fixes peut être indistinctement menée de côté ou d'autre de cette droite.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. ON demande à quelle courbe sont tangentes les cordes d'une section conique qui a un centre, menées de telle sorte que les droites qui joignent leurs extrémités au centre de la courbe, forment avec elles des triangles rectangles dont ces mêmes cordes sont les hypothénuses ?

II. Les propriétés caractéristiques de la sphère sont, 1.° que toutes celles de ses cordes qui passent par un certain point fixe y ont leur milieu ; 2.° que ces cordes sont toutes d'une même longueur. Les surfaces qui jouissent de la première de ces deux propriétés sont les surfaces qui ont un centre, et dont il est facile d'obtenir l'équation générale. On propose de donner également l'équation la plus générale des surfaces qui jouissent de la dernière propriété sans jouir de la première ?

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Examen de quelques tentatives de théorie des parallèles ;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique.

Malgré l'inutilité des efforts de ceux qui se sont occupés de démontrer la théorie des parallèles, sans autre secours que celui des axiomes d'Euclide, le XI.me seul excepté, on ne cesse de voir éclore de nouvelles tentatives pour parvenir à ce but.

I. C'est ainsi que M. Legendre, qui semblait enfin avoir reconnu comme tout-à-fait insurmontable la difficulté dont il s'agit, y est cependant revenu de nouveau, dans la douzième édition de ses *Élémens de géométrie*, et a même annoncé dans sa préface, d'une manière très-positive, qu'il était parvenu à établir la théorie des parallèles sans aucun postulat nouveau. Examinons, en suivant pas à pas les raisonnemens de cet habile géomètre, si son assertion est fondée.

Soit ABC un triangle quelconque (fig. 1) dont AC soit le plus grand côté, prolongé au-delà de son extrémité C, vers P, P′, P″,...... Soit I le milieu du côté BC. Menons la droite AI, prolongée jusqu'en K de manière que AK=AC. Soient pris en outre sur AC, AI′=AI et I′P=AI′, et menons les droites KI′ et KP. Les triangles AKI′, KI′P seront respectivement égaux aux triangles

ACI, BIA, et par suite la somme des angles du triangle total AKP sera la même que celle des angles du triangle total ABC. D'autre part, AC étant, par hypothèse, plus grand que AB, on aura aussi $AK > KP$, d'où $Ang.KPA > Ang.KAP$, ou bien $Ang.BAI > Ang.IAC$, ce qui prouve que l'angle KAP est plus petit que $\frac{1}{2}$BAC. On doit remarquer, en outre, que AP est le plus grand côté du triangle AKP.

Cela posé, construisons un triangle AK′P′ qui soit par rapport au triangle AKP ce qu'est celui-ci par rapport au triangle ABC ; la somme des trois angles de ce nouveau triangle sera encore égale à la somme des trois angles du triangle primitif, et l'angle K′AP′ sera moindre que le quart de l'angle BAC.

En continuant donc ainsi, les angles en A formeront une suite décroissant plus rapidement que ne le fait la progression 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,......, tandis que la somme des angles du triangle restera constamment la même. Or, la limite de l'angle A est évidemment égale à zéro. « A cette limite, le point K, K′, K″,..... viendra se » placer sur AP′ ; la somme des angles du triangle se réduira » donc au dernier des angles AKP, AK′P′, AK″P″,...... lequel, » dans cette position, vaudra deux angles droits ; donc la somme » des angles du triangle primitif doit aussi avoir été égale à deux » angles droits ».

Sans doute il n'y a aucune objection à faire contre tout ce qui précède le passage que nous avons marqué de guillemets ; mais voyons s'il en est de même de celui-ci. Ce qu'il contient repose essentiellement sur ce principe d'une apparente évidence, que, « lorsque la limite d'un angle A est zéro (fig. 2), la limite de » la distance au côté AC d'un point quelconque B du côté AB » est aussi égale à zéro » ; ce qui revient à dire qu'à la limite « le point B tombera sur AC ». Or, il est facile de prouver que ce principe ne saurait être admis.

En effet, divisons l'angle BAC (fig. 3) successivement en deux, quatre, huit,....... parties égales par des droites AB′, AB″,.......

abaissons la perpendiculaire BC sur AC; prenons $CC'=AB$; élevons la perpendiculaire $C'B'$; prenons $C'C''=AB'$; élevons la perpendiculaire $C''B''$; et ainsi de suite. Il est facile de démontrer que, quelque loin que l'on pousse l'opération, on aura constamment $BC=B'C'=B'C''=\ldots\ldots$ Ainsi, dans cette construction, tandis que la limite des angles BAC, $B'AC'$, $B''AC''$,...... est zéro, comme ci-dessus, loin que le point B vienne, à cette limite, tomber sur AC, il demeure au contraire à une distance constante de cette droite.

Il serait facile, au surplus, d'imaginer une construction dans laquelle le décroissement des angles BAC, $B'AC'$, $B''AC''$,...... serait plus rapide que celui des termes de la progression 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,..... et où cependant le point B s'éloignerait sans cesse de AC, ou en demeurerait à une distance constante ou du moins en resterait à une distance plus grande qu'une longueur finie donnée.

Il faut donc conclure de là que cette démonstration ne saurait être admise qu'autant qu'on aurait prouvé que les distances des points K, K', K'',..... à la droite AC (fig. 1) ont zéro pour limite, ce que probablement on ne pourrait faire sans s'appuyer sur des principes qui supposeraient la théorie des parallèles déjà établie.

Cette démonstration semble devoir même être jugée inférieure à beaucoup d'autres, en ce que celles-ci n'ont au moins que le défaut de reposer sur des principes vrais, mais non démontrés; tandis que celle-là s'appuie sur une proposition d'une fausseté manifeste.

II. L'essai de démonstration publié par un anonyme, à la page 269 du précédent volume des *Annales*, est entaché d'un défaut qui s'aperçoit au premier coup-d'œil; elle suppose qu'*un cercle peut toujours être circonscrit à un triangle isocèle, quel qu'il soit*; proposition vraie sans doute; mais qui suppose que les perpendiculaires sur les milieux des côtés égaux d'un angle quelconque doivent nécessairement se couper ; ce qui rentre au fond dans l'axiome XI d'Euclide, qui se trouve ainsi invoqué, mais non évité (*).

III. A la fin de la démonstration que nous venons de mentionner, on en rappelle une autre insérée dans le III.e volume des *Annales* (pag. 353). Quoique nous ne l'ayons pas actuellement sous les yeux, nous nous rappelons fort bien qu'elle revient en substance au raisonnement que voici :

Soient BD, une perpendiculaire et AC une oblique à une même droite AB (fig. 4); de manière que l'angle CAB soit aigu. Si l'on nie que AC suffisamment prolongée rencontre BD, toujours sera-t-on contraint d'admettre que l'on peut conduire par le point A, dans l'angle CAB, tant d'obliques qu'on voudra qui rencontrent BD, puisque, pour les obtenir, il n'est question que de prendre sur BD tant de points M, N, P,...... qu'on voudra, et de les joindre au point A par des droites. Il faudra donc admettre dès-lors que, parmi celles-ci, il en est une dernière faisant avec AB un angle aigu plus grand que ceux que font avec la même droite les obliques AM, AN, AP,...... Or, quelle que puisse être cette dernière, rien n'empêche de prolonger BD au-delà du point où elle la rencontre, de prendre un point sur son prolongement et de le joindre au point A par une nouvelle oblique qui ainsi ren-

(*) Plusieurs de nos correspondans nous ont fait la même observation qu'au surplus nous nous étions faite à nous-même auparavant. Nous n'avons pas cru néanmoins devoir négliger cette tentative parce qu'elle offrait une idée nouvelle, dont quelques géomètres pouvaient tirer un heureux parti : celle de considérer deux parallèles comme limites de deux arcs concentriques, et qu'ensuite nous espérions que l'auteur, sur notre observation, parviendrait peut-être à corriger le vice de sa théorie. Il l'a bien tenté, en effet, mais il n'y a qu'imparfaitement réussi.

J. D. G.

contrera encore BD et fera avec AB un angle aigu plus grand que celui qu'on avait supposé le plus grand de tous ceux que faisaient avec cette droite les obliques qui, partant du point A, rencontraient BD; donc, ajoute-t-on, la supposition d'une dernière oblique rencontrant BD ne saurait être admise; d'où il suit que toutes les obliques partant du point A rencontrent cette droite; que par conséquent la perpendiculaire est la seule qui ne la rencontre pas, et qu'ainsi, par un même point A, pris hors d'une droite BD, on ne saurait lui mener qu'une seule parallèle.

Nous croyons nous rappeler qu'en donnant cette démonstration on a observé que M. Legendre y avait objecté que, pour qu'elle fût concluante, il aurait fallu prouver que *la dernière oblique sécante ne rencontrait pas la perpendiculaire à l'infini.*

Il ne paraît pas qu'on ait regardé cette objection comme sérieuse, et cependant elle détruit absolument le raisonnement que nous venons de rappeler, ainsi que nous allons le faire voir.

Supposons, en effet, qu'en prenant les parties BM, MN, NP,..... égales entre elles, les angles MAB, NAM, PAN,........ forment une suite convergente dont la somme ait une limite moindre que l'angle droit, égale à l'angle aigu CAB, par exemple. Il est évident qu'alors toute oblique située au-dessous de CA, quelque voisine qu'elle en puisse être d'ailleurs, rencontrera BD, tandis qu'au contraire aucune oblique au-delà de cette droite ne pourra jouir d'une pareille propriété. En ce cas, CA serait réellement la dernière coupante, et elle irait rencontrer BD à l'infini; il serait donc alors absolument faux d'appliquer le raisonnement cité pour prouver qu'une oblique AZ, moins inclinée que AC, doit rencontrer BD.

Il est donc vrai de dire que rien ne sera prouvé tant qu'on n'aura pas établi que la dernière des obliques qui rencontre BD la rencontre à une distance finie du point B, ce qu'on sent bien être impossible.

Sans qu'il soit nécessaire d'éclaircir l'objection de M. Legendre par d'autres hypothèses, il suffira, pour en faire ressortir toute la force, de remarquer que, si l'on suppose que le point A devienne le centre d'une hyperbole, le point B un de ses sommets, BD la moitié de l'une de ses branches et AC son asymptote; le raisonnement ci-dessus, appliqué mot à mot, ne tendra à rien moins qu'à prouver que cette asymptote rencontre la courbe (*).

Voilà donc encore trois démonstrations qui, à notre avis, n'en sont point (**). Quel est le but de tous ces efforts? Est-ce de nous

(*) C'est aussi la remarque que faisait récemment M. Querret, dans une lettre qu'il nous écrivait sur ce sujet.

(**) On en pourrait citer bien d'autres, et même très-récentes, pour la plupart, parmi lesquelles nous nous bornerons à mentionner, 1.° celle de M. Reinhard Müller, publiée à Marbourg, en 40 pages in-4.°, avec deux planches, en 1822; 2.° celle de M. D. Huber publiée à Bâle, aussi en 40 pages in-4.°, avec une seule planche, en 1823; 3.° celle de M. C. Hauff, publiée à Francfort, en 86 pages, grand in-4.°, avec planches, même année, et qui renferme la critique de beaucoup d'autres; 4.° de M. Metternich, présenté à l'académie des sciences de Paris, en mai 1823; 5.° celle enfin qui a été dernièrement présentée à la même académie, par M. Foex.

On doit aussi comprendre, parmi les tentatives de ce genre, la démonstration de l'égalité de la somme des trois angles d'un triangle à deux angles droits fondée sur l'algorithme fonctionnel. M. Legendre avait considéré long-temps ce genre de démonstration comme le seul qui ne fût sujet à aucune objection; mais l'article publié à la page 161 du X.e volume du présent recueil semblerait prouver que les démonstrations de ce genre ne sont pas moins vulnérables que les autres.

M. Stein ne s'explique pas sur les démonstrations qui consistent à considérer l'angle, avec Bertrand, de Genève, comme une portion de surface indéfinie ainsi qu'on l'a fait à la page 356 du III.e volume de ce recueil. Quelque éloignées des idées reçues que ces démonstrations puissent paraître aux yeux de quelques personnes, c'est peut-être encore celles de toutes qui méritent d'occuper le premier rang.

Quelqu'un nous observait dernièrement à ce sujet que, la définition de Bertrand admise, rien n'était, en particulier, si facile que de démontrer rendre plus certains des propriétés des parallèles ? Non pas probablement. Que si l'on a en vue de purger les élémens de géométrie de tout postulat, on en est encore bien loin ; car la géométrie d'Euclide, en particulier, en renferme beaucoup d'autres qu'à la vérité ce géomètre n'a pas énoncés, mais qu'il n'a pas moins tacitement admis. Dans un tel état de choses, ce qu'on pourrait faire de mieux serait, ce nous semble, d'admettre quelque nouvel axiome, bien clair et bien fécond, et de le choisir tel qu'on pût s'en servir pour rendre à la fois les traités élémentaires plus courts et plus méthodiques (*).

Il est vrai que, pour la parfaite exécution d'un tel dessein, on se trouverait peut-être contraint d'abandonner totalement la marche d'Euclide, ce qui ne laisserait pas que de scandaliser beaucoup de gens qui lui ont voué une admiration absolue, sans faire entrer aucunement en compte, dans le sentiment qu'ils portent à ce géo-

---

cette proposition : *deux parallèles font avec une troisième droite des angles correspondans égaux.* Car, soient deux parallèles MN et PQ coupées en E et F (fig. 5) par une troisième droite AB. Il est d'abord manifeste que l'angle AEN ne saurait être plus grand que l'angle AFQ, puisqu'il y est entièrement contenu. Il ne saurait donc non plus être plus grand que l'opposé au sommet PFB de ce dernier, qui conséquemment ne saurait être plus petit que AEN, ou son opposé au sommet MEF ; cet angle PFB ne saurait non plus être plus grand que MEF, puisqu'il y est entièrement contenu. Il faut donc que ces deux derniers angles soient égaux.

(*) M. de Maizières, ancien professeur à Versailles, voudrait qu'on introduisît comme axiome, dans les élémens, le principe de similitude ; et c'est une idée qui avait déjà été mise en avant par Carnot. Il est certain que l'admission d'un tel principe épargnerait bien du travail ; mais il est douteux que, même en le présentant sous un point de vue aussi simple que l'a fait M. Poncelet, on parvienne à le rendre parfaitement intelligible pour des commençans.

J. D. G.

mètre, l'époque où il a écrit et les difficultés qui accompagnent toujours une première création (*)

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de deux théorèmes de géométrie, desquels on peut déduire, comme cas particulier, le théorème de M. Hamett, mentionné aux pages 334 et 374 du précédent volume;

Par MM. Querret et Gergonne.

Théorème de M. Querret.

Si aux deux extrémités A, B de la base AB d'un triangle quelconque ACB (fig. 6), on élève respectivement à ses deux autres côtés CA, CB, vers son sommet, des perpendiculaires AP,

(*) La superstition est poussée à un tel point chez quelques-uns que nous ne doutons pas que si, ayant à écrire des élémens de géométrie, on leur mettait en mains une démontration bien courte et bien rigoureuse du *Postulatum XI* d'Euclide, ils ne s'abstinssent de l'employer, de peur de faire ainsi, d'une manière indirecte, la censure de l'objet de leur culte. Il est pourtant certain que ce *Postulatum XI*, sans démonstration, rapproché de la *Proposition XXVII*, soigneusement démontrée, bien qu'incomparablement plus évidente, présente une disparate tout-à-fait choquante, et nous osons croire, pour l'honneur d'Euclide, que c'est ainsi qu'il en pensait lui-même; que ce n'est qu'après beaucoup de tentatives infructueuses, que ce n'est qu'en désespoir

BQ qui leur soient proportionnelles, et qu'on mène ensuite les droites AQ et BP ; ces deux droites se couperont sur la perpendiculaire CC′ abaissée du sommet C du triangle sur la direction de sa base.

Démonstration. Soient faits

$$\frac{AC}{AP}=\frac{BC}{BQ}=m\ ,$$

et soient abaissées, des points P et Q, des perpendiculaires PM et QN sur la direction de AB. Les triangles rectangles AMP, BNQ, respectivement semblables aux triangles rectangles CC′A, CC′B donneront

$$PM=\frac{C'A}{m}\ ,\qquad QN=\frac{C'B}{m}\ ;$$

$$AM=\frac{CC'}{m}\ ,\qquad BN=\frac{CC'}{m}\ .$$

Cela posé, soient respectivement X et Y les points où la droite CC′ est coupée par les droites AQ et BP ; les triangles rectangles ANQ, BMP, respectivement semblables aux triangles rectangles AC′X, BC′Y, donneront

$$AN:QN::AC':C'X=\frac{AC'\times QN}{AN}=\frac{AC'\times\dfrac{BC'}{m}}{AB+\dfrac{CC'}{m}}=\frac{AC'\times BC'}{m.AB+CC'}\ ,$$

---

de cause, et pour ne point priver ses contemporains d'un ouvrage recommandable à tant d'autres titres, qu'il s'est résigné à ranger au nombre des axiomes une proposition qu'il avait vainement tenté de démontrer.

J. D. G.

$$\text{BM}:\text{PM}::\text{BC}':\text{C}'\text{Y}=\frac{\text{BC}'\times\text{PM}}{\text{BM}}=\frac{\text{BC}'\times\frac{\text{AC}'}{m}}{\text{AB}+\frac{\text{CC}'}{m}}=\frac{\text{AC}'\times\text{BC}'}{m.\text{AB}+\text{CC}'}\ ;$$

donc $\text{C}'\text{X}=\text{C}'\text{Y}$, comme nous l'avions annoncé.

Si l'on suppose $m=1$ et le triangle rectangle en C, on retombe sur le théorème de M. Hamett, démontré dans le précédent volume, par MM. Gergonne et B. D. C.; mais ce qui précède fait voir que la propriété remarquée par M. Hamett n'est pas particulière au triangle rectangle, et qu'elle n'exige pas même que les figures construites sur deux de ses côtés soient des carrés, mais seulement des rectangles semblables et semblablement situés.

Si l'on suppose m négatif, on trouve

$$\text{C}'\text{X}=\text{C}'\text{Y}=-\frac{\text{AC}'\times\text{BC}'}{m.\text{AB}-\text{CC}'}\ .$$

Ce résultat répond au cas où les perpendiculaires, au lieu d'être menées du même côté de la base que le sommet C, seraient menées du côté opposé; alors les droites AQ et BP se couperaient sur le prolongement de CC′ au-delà du point C′, tant qu'on aurait $m.\text{AB}>\text{CC}'$; elles seraient parallèles, si l'on avait $m.\text{AB}=\text{CC}'$; enfin, leur point d'intersection repasserait de l'autre côté de AB, si l'on avait $m.\text{AB}<\text{CC}'$.

Si l'on suppose $m=0$, ce qui revient à supposer AP et BQ d'une longueur infinie, et conséquemment BP et AQ parallèles à ces deux droites, et comme telles respectivement perpendiculaires à CA et CB, la même propriété subsiste encore; ce qui démontre que *les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois au même point.* On a alors.

$$C'X=C'Y=\frac{AC'\times BC'}{CC'},$$

résultat auquel, au surplus, il serait facile de parvenir directement dans ce cas.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que cette dernière propriété convient également au triangle sphérique; et qu'en désignant par I le point d'intersection des trois arcs perpendiculaires (fig. 7) on a

$$Tang.C'I=\frac{Sin.AC'\times Sin.BC'}{Cos.AB\times Tang.CC'};$$

expression qui coïncide avec la précédente lorsque, le triangle sphérique ACB restant fini, le rayon de la sphère devient infini. Cette propriété du triangle sphérique peut être aussi bien simplement déduite de l'équation

$$Sin.AC'\times Sin.BA'\times Sin.CB'=Sin.AB'\times Sin.CA'\times Sin.BC',$$

qui a lieu entre les segmens formés sur les côtés, par les arcs de grands cercles menés d'un même point aux trois sommets (*Géométrie de position*, pag. 300, n.° 248).

On voit, par ce qui précède, que la perpendiculaire CC′ abaissée du sommet C d'un triangle (fig. 6) sur la direction de sa base est le lieu des intersections des droites AQ et BP qui interceptent sur les perpendiculaires AP et BQ aux deux autres côtés des parties respectivement proportionnelles aux longueurs de ces mêmes côtés (*).

(*) M. Querret, dans sa lettre d'envoi, observe avec raison, 1.° qu'à la page 350 du précédent volume, nous avons omis d'observer que les quatre équations dont il s'agit en cet endroit avaient été déjà résolues, d'une manière à peu près pareille, par M. Cauchy, dans le chapitre V de son *Cours d'analise*, page 103; 2.° que c'est par erreur que M. Bouvier a

Théorème de M. Gergonne.

Si, par les extrémités A, B de la base AB d'un triangle quelconque ACB (fig. 8), on mène vers son sommet des droites de longueur arbitraire AP et BQ, respectivement parallèles aux côtés CB et CA; que par les points P et Q on mène, parallèlement à BQ et AP, des droites concourant en D; les trois droites AQ, BP et DC concourront en un même point.

Démonstration. Nous démontrerons ce théorème à l'aide de la géométrie analitique, parce que c'est ainsi qu'après en avoir pressenti la vérité, nous nous le sommes démontré à nous-même, et parce qu'à tout prendre, cette forme de démonstration en vaut bien une autre.

Soient faits $CA=a$, $CB=b$, $AP=q$, $BQ=p$. Soit pris l'angle ACB pour angle des coordonnées positives, de manière que l'axe des x soit dirigé suivant CA, et l'axe des y suivant CB; les équations des divers points que nous venons de considérer seront

$$\text{Pour C}\begin{cases}x=0\,,\\ y=0\,;\end{cases}\text{Pour A}\begin{cases}x=a\,.\\ y=0\,;\end{cases}\text{Pour B}\begin{cases}x=0\,,\\ y=b\,;\end{cases}\text{Pour P}\begin{cases}x=a\,,\\ y=-q\,;\end{cases}\text{Pour Q}\begin{cases}x=-p\,,\\ y=b\,,\end{cases}\text{Pour D}\begin{cases}x=-p\,,\\ y=-q\,.\end{cases}$$

---

avancé à la page 147 du même volume, que personne avant lui n'avait découvert la loi de la série qui donne la longueur de la tangente en fonction de l'arc correspondant, attendu que ce sujet a été traité, avec tous les développemens désirables par M. Lacroix, dans son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2.e édition, tom. I, pages 254—257, n.os 90—93. Nous nous empressons de réparer ces omissions et ces erreurs, que nous eussions mieux fait de signaler en leur lieu, en mentionnant ici les remarques de M. Querret.

J. D. G.

Les équations des trois droites AQ , BP , CD seront conséquemment

Pour AQ , $(a+p)y+b(x-a)=0$,

Pour BP , $(b+q)x+a(y-b)=0$,

Pour CD , $py-qx=0$.

Or, en prenant la différence des deux premières, on tombe sur la troisième ; donc chacune de ces équations est comportée par les deux autres ; et par conséquent elles expriment trois droites concourant au même point.

Et comme , en variant à volonté les signes de p et q , il en irait encore de même , il en faut conclure que les droites AP et BQ peuvent être indistinctement menées de côté ou d'autre de la base du triangle , sans que le théorème cesse pour cela d'avoir lieu.

Pour passer de là au théorème de M. Hamett, il suffira de supposer , 1.° que le triangle est rectangle en C ; 2.° que l'on a pris les longueurs arbitraires $p=b$ et $q=a$.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Constructions approchées du problème de la duplication du cube ;

Par M. Mayor, de Pétersbourg.

Communiquée au Rédacteur des *Annales* par M. Bouvier.

Les deux constructions du problème de la duplication du cube que j'ai l'honneur de vous transmettre font le sujet d'un opuscule que le hasard a fait tomber entre mes mains, il y a environ un an. L'auteur, qui apparemment fait de la géométrie expérimentale, les donne comme éxactes. Bien certain à l'avance qu'elles ne pouvaient l'être, j'ai voulu voir au moins à quel point elles étaient approchées, et j'ai trouvé qu'elles donnaient, en proportion de leur simplicité, une approximation assez satisfaisante pour mériter d'être connues.

Première construction.

Soit $AB=a$ (fig. 9) le côté du cube donné, et soit x le côté du cube double. Sur $EB=3AB$ comme diamètre, soit décrit une circonférence. Soit mené le diamètre FG, perpendiculaire au premier. Par son extrémité G et par le point A, soit menée une corde se terminant en H ; on aura sensiblement $x=AH$.

En effet, on déduit aisément de cette construction $x=a\frac{2\sqrt{10}}{5}$, et sa véritable valeur devrait être $x=a\sqrt[3]{2}$; or, on a

$$\frac{2\sqrt{10}}{5}<1,26492\ ,$$

$$\sqrt[3]{2}>1,25992\ ,$$

donc

$$\frac{2\sqrt{10}}{5}-\sqrt[3]{2}<0,00500\ ,$$

c'est-à-dire que AH ne diffère pas en plus de la véritable longueur du côté du cube double de la moitié d'un centième, de AB.

Deuxième construction.

Soit encore $AB=a$ (fig. 10) le côté du cube donné et x le côté du cube double. Sur $AC=2AB$ décrivez un cercle. Portez le rayon de C en D et de D en E. Tirez la corde CE, sur laquelle du point D vous abaisserez la perpendiculaire DF. Portez CF sur CA de C en G. Tirez une corde de C au milieu K de DE et élevez au point G à AC une perpendiculaire rencontrant cette corde en L. Menez enfin AL et BK se coupant en H; et vous aurez sensiblement $x=AH$.

En effet, on déduit aisément de cette construction

$$x=a\,.\,\frac{\sqrt{226+24\sqrt{3}}}{13}\ ,$$

or, on a

$$\sqrt[3]{2}<1,25993\ ,$$

$$x>1,25828\ ,$$

donc

$$\sqrt[3]{2}-x<0{,}00165\ ;$$

d'où l'on voit que la différence en moins de AH avec la véritable longueur du cube double est environ six fois plus petite que la centième partie de AB.

Si au triple de la dernière valeur approchée de AH, savoir, 3,77484, on ajoute la première 1,26492, et qu'on prenne le quart de la somme 5,03976, on aura 1,25994 qui ne diffère guère que d'un cinquante millième de la véritable longueur du côté du cube double de celui dont le côté est AB (*).

(*) Ceux de nos lecteurs pour qui ces constructions approchées, dont la première idée paraît due à Viète, peuvent offrir quelque intérêt, trouveront, à la page 245 du VIII.e volume des *Annales*, quelques rectifications approchées de la circonférence ; ils trouveront aussi, à la page 200 du X.e volume, une construction approchée du problème de la trisection de l'angle, et à la page 242 du même volume, une construction approchée du problème de la duplication du cube.

La recherche de ces sortes de constructions pourrait, au surplus, être assujettie à des procédés généraux. On sait, en effet, que toute la difficulté des problèmes qui dépendent d'une géométrie élevée tient à ce que les formules qui donnent les valeurs des inconnues renferment des radicaux de degrés plus ou moins élevés, tandis que nous ne savons construire, avec la règle et le compas, que les radicaux du second degré. Tout se réduirait donc à savoir approximativement substituer à ces radicaux des radicaux du second degré, et avec quel degré d'approximation on voudrait. Or, c'est là une chose toujours possible, comme on va le voir.

Soit la formule

$$x=\sqrt[m]{a}=(a)^{\frac{1}{m}}=(a)^{\frac{p}{mp}}\ ,$$

dans laquelle nous supposons m un nombre premier impair et où p peut être un nombre quelconque. Si nous supposons que ce nombre p soit très-grand, nous pourrons poser approximativement

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la division de la ligne droite en parties égales ;

Par M. GERGONNE.

ON démontre, dans tous les traités élémentaires de géométrie, que *deux droites issues d'un même point sont coupées en parties proportionnelles par des parallèles ;* mais on n'y démontre pas formellement que *deux parallèles sont coupées proportionnellement*

$$x=(a)^{\frac{p\pm1}{mp\pm1}},$$

et disposer ensuite de ce nombre indéterminé p de manière que $mp\pm1$ soit une puissance de 2 ; soit 2^n cette puissance, on aura ainsi

$$x=(a)^{\frac{p\pm1}{2^n}}=\sqrt[2^n]{a^{p\pm1}},$$

qui se construira sans d'autre difficulté que la longueur des opérations.

Si l'on a, par exemple, comme dans la duplication du cube,

$$x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}=a(2)^{\frac{1}{3}},$$

en prenant $p=11$ et les signes inférieurs ; à l'exposant $\frac{1}{3}=\frac{11}{33}$ on pourra substituer $\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$ qui n'en diffère que de $\frac{1}{48}$, et l'on aura ainsi sensiblement *par des droites issues d'un même point* ; bien que cette dernière proposition semble être du même ordre d'importance que la première.

L'une et l'autre propositions offrent des méthodes également simples en théorie pour *diviser une droite en parties égales*, ou, plus généralement, pour *diviser une droite en parties qui soient entre elles comme des longueurs ou comme des nombres donnés*, mais ces méthodes diffèrent en ce que celle qu'on déduit de la première exige quelquefois qu'on mène un grand nombre de parallèles à une droite donnée, tandis que celle qu'on déduit de la seconde n'en exige qu'une seule ; ce qui assure incontestablement à celle-ci la supériorité. Aussi est-ce constamment elle que nous employons pour notre usage et que nous conseillons à autrui.

Nous pensions qu'un procédé si simple devait être universellement connu des géomètres, et pour cette raison nous n'avions jamais songé à le signaler. Mais nous venons de rencontrer, dans la *Bibliothèque universelle* (mai 1824, pag. 1), un article de M. A. VORUZ, ministre, et principal du collége de Moudon, dans lequel l'auteur, qui paraît avoir été frappé comme nous des inconvéniens de la méthode ordinaire, mais qui apparemment ne connaît pas celle que nous venons de recommander, en indique une autre qui n'exige absolument aucun tracé de parallèles. Mais cet avantage nous paraît plus que compensé par la complication du procédé, fort curieux d'ailleurs, et par les difficultés qu'en présente la démonstration, ainsi qu'on en pourra juger tout à l'heure.

$$x=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{4a^2+a^2}}}},$$

valeur facile à construire ; mais un heureux hasard sert souvent beaucoup mieux que les méthodes générales.

J. D. G.

Mais ce qui nous a sur-tout frappé, c'est qu'un procédé tout pareil nous a été indiqué verbalement et sans conséquence par M. Sarrus, il y a déjà plusieurs années. Il y avait été conduit en considérant que les droites qui vont des sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés se coupent au tiers de leur longueur; qu'on peut très-bien, une de ces trois droites étant donnée, construire le triangle de telle sorte que l'une des extrémités de cette droite se trouve au milieu de l'un de ses côtés et qu'on connaisse le milieu de l'un des deux autres côtés. En joignant donc ce milieu au sommet opposé par une droite, cette droite coupait la droite donnée au tiers de sa longueur.

Il ne s'agissait donc plus, pour généraliser cette construction, que d'examiner de quelle manière se coupent des droites qui, partant de deux sommets d'un triangle, coupent les côtés opposés, non pas en deux parties égales, mais en raison donnée quelconque, et voici le résultat qu'obtint M. Sarrus.

Soit un angle ASA′ (fig. 11) dont les côtés SA, SA′ soient coupés respectivement en B′ et B, de manière qu'on ait

$$\frac{B'S}{B'A}=\frac{m}{n}\,, \qquad \frac{BS}{BA'}=\frac{p}{q}\,,$$

m, n, p, q étant des nombres entiers quelconques; en menant les droites AB, A′B′, se coupant en C, on aura

$$\frac{CA}{CB}=\frac{n(p+q)}{mq}\,, \qquad \frac{CA'}{CB'}=\frac{q(m+n)}{np}\,.$$

Comme il y a là beaucoup plus d'arbitraires que n'en exige l'objet que nous avons en vue, nous poserons $q=p$, ce qui donnera simplement

$$\frac{CA}{CB}=\frac{2n}{m}\,.$$

Cela posé, soit AB une droite donnée de longueur. Soit menée par le point A, dans une direction arbitraire, une autre droite sur laquelle soient portées, à partir du point A, n ouvertures de compas égales et arbitraires, se terminant en S. Soit menée SB et soit prolongée cette droite au-delà de B en A′ d'une quantité égale à elle-même. Si alors on mène des droites du point A′ aux $n-1$ points intermédiaires, à partir de A, il est aisé de conclure de la dernière formule qu'en appelant généralement C le point où ces droites coupent AB, on aura successivement pour la valeur de $\frac{CA}{CB}$,

$$\frac{2}{n-1},\ \frac{4}{n-2},\ \frac{6}{n-3},\ \frac{8}{n-4},\ldots\ldots\ldots,\ \frac{2(n-3)}{3},\ \frac{n-2}{1},\ \frac{2(n-1)}{1}.$$

Si $n=2$, la seule valeur de $\frac{CA}{CB}$ sera $\frac{2}{1}$, ce qui rentre dans la division d'une droite en trois parties égales.

Si $n=3$, les deux valeurs de ce rapport seront $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{1}$, ce qui rentre dans la division d'une droite en deux ou en cinq parties égales.

Si $n=4$, les trois valeurs du même rapport seront $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{6}{1}$, ce qui pourra servir à diviser une droite indifféremment en 5, 3 et 7 parties égales.

Si $n=5$, les quatre valeurs de ce rapport seront $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{8}{1}$, ce qui pourra servir indistinctement à diviser une droite en 3, 7, 4 et 9 parties égales.

En prenant $n=6$, les cinq valeurs du même rapport seront $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{10}{1}$, ce qui suffira pour diviser une droite en 7, 2, 3, 5, 11 parties égales.

Et ainsi de suite.

QUESTIONS RESOLUES.

Demonstration du dernier des théorèmes énoncés à la page 392 du XIV.^e volume des Annales ;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique,

Et M. Querret, ancien chef d'institution.

Théorème. *Soit un polygone plan quelconque, dont les sommets consécutifs soient* A, B, C,....... L, M, N; *et soient respectivement* A′, B′, C′,...... L′, M′, N′ *les milieux des côtés consécutifs* AB, BC, CD,....... LM, MN, NA. *Soient en outre* d, e, f,..... l, m, n *les milieux respectifs des diagonales* BD, BE, BF,..... BL, BM, BN.

Par les points d, e, f,...... l, m, n, A′ *soient menées des parallèles à une droite fixe, de direction arbitraire. Soient menées ensuite* B′C′, *coupant la première de ces parallèles en* d′, *puis* D′d′, *coupant la seconde en* e′, *ensuite* E′e′, *coupant la troisième en* f′, *et ainsi du reste, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à mener* N′n′, *coupant en* a′ *la parallèle conduite par* A′. *Si alors, entre les parallèles à la droite fixe, conduites par* A *et* B, *prises pour directions de côtés opposés, on construit un parallélogramme, dont les deux autres côtés opposés, de direction d'ailleurs arbi-*

traire, passent par A′ et a′, ce parallélogramme sera équivalent au polygone proposé (*).

Démonstration. Pour rendre la démonstration de ce théorème plus intelligible, nous la renfermerons dans la résolution des deux problèmes suivans :

PROBLÈME I. Étant donné un pentagone composé d'un parallélogramme et d'un triangle qui ont un côté commun, transformer ce pentagone en un parallélogramme équivalent dont un côté soit un quelconque des deux autres côtés du triangle, et dont le côté adjacent soit dirigé suivant le côté du parallélogramme primitif adjacent à ce même côté du triangle ?

Solution. Soit le pentagone ηBEDθ (fig. 12) formé du parallélogramme B$\eta\theta$D et du triangle BED, ayant le côté BD commun, et proposons-nous de transformer ce pentagone en un parallélogramme dont BE soit un des côtés et dont un autre côté soit dirigé suivant Bη.

Pour cela, par le milieu D′ du côté DE et le milieu d' du côté $\eta\theta$ du pentagone soit menée une droite concourant en e' avec la parallèle à Bη et Dθ menée par le milieu e du côté BE. Alors, en menant par e' une parallèle à BE, rencontrant respectivement Bη et la parallèle menée à cette droite par le point E en δ et ε, le parallélogramme B$\delta\varepsilon$E sera le parallélogramme demandé, équivalent au pentagone ηBEDθ.

Démonstration. Soit menée la droite D′e, terminée en α et β à la rencontre des prolongemens de ηB et θD. Par le point D′ et par le milieu d de Bd soit menée une droite coupant Eε en μ, ee' en ζ et Bδ en γ; soit enfin menée dd', coupant $\alpha\beta$ en λ.

Parce que D′ et e sont les milieux respectifs de ED et EB,

(*) Ce théorème est dû à M. Ch. Sturm.

J. D. G.

la droite $\alpha\beta$ est parallèle à BD, et par conséquent le quadrilatère D$\alpha\beta$B est un parallélogramme. Ce parallélogramme est équivalent au triangle BED, puisqu'il a même base BD et une hauteur moitié de la sienne.

Parce que D$'$ et d sont les milieux respectifs de DE et BD, la droite D$'\gamma$ est parallèle à EB, et par conséquent le quadrilatère B$\gamma\mu$E est un parallélogramme. Ce parallélogramme est aussi équivalent au triangle BED, puisqu'il a même base BE et une hauteur moitié de la sienne.

Les deux parallélogrammes D$\alpha\beta$B et B$\gamma\mu$E se trouvant ainsi équivalens à un même triangle sont aussi équivalens entre eux, et la figure $\gamma\delta\varepsilon\mu$ est aussi un parallélogramme.

Les deux parallélogrammes γBEμ et $\gamma\delta\varepsilon\mu$ étant compris entre les mêmes parallèles sont entre eux dans le rapport de leurs bases Eμ et $\mu\varepsilon$, ou dans le rapport de $e\zeta$ à $\zeta e'$, ou encore, à cause des parallèles, dans le rapport de λd à dd'.

Les deux parallélogrammes B$\beta\alpha$D et B$\eta\theta$D étant compris entre les mêmes parallèles, sont entre eux dans le rapport de leurs bases αD et Dθ, ou, ce qui revient au même, dans le rapport de λd à dd'.

Donc, à cause du rapport commun de λd à dd', les deux parallélogrammes γBEμ et $\gamma\delta\varepsilon\mu$ sont entre eux respectivement comme les deux parallélogrammes B$\beta\alpha$D et B$\eta\theta$D; puis donc que γBEμ et B$\beta\alpha$D sont équivalens entre eux et au triangle BED, les deux parallélogrammes $\gamma\delta\varepsilon\mu$ et B$\eta\theta$D doivent aussi être équivalens.

Donc le parallélogramme total B$\delta\varepsilon$E doit être équivalent au parallélogramme total $\beta\eta\theta\alpha$; mais ce dernier est équivalent au pentagone proposé ηBEDθ; donc le premier doit aussi lui être équivalent.

PROBLÈME II. Transformer un polygone rectiligne donné quelconque en un parallélogramme équivalent qui ait pour un de ses côtés un quelconque des côtés du polygone, et dont les deux côtés adjacens à celui-là soient parallèles à une droite donnée ?

Solution. Soient A, B, C, D, E, ... (fig. 13) les sommets consécutifs du polygone proposé, et supposons qu'il soit question de le transformer en un parallélogramme équivalent dont AB soit un des côtés et dont un autre côté se terminant en B soit parallèle à une droite donnée.

Soit menée la droite indéfinie Bη, parallèle à la droite donnée. Joignons les milieux respectifs B′, C′ des côtés BC, CD par une droite se terminant en η à Bη et en θ à sa parallèle conduite par D; le parallélogramme B$\eta\vartheta$D sera équivalent au triangle BCD. Représentons ce parallélogramme par *P*.

En lui ajoutant le triangle BED, on formera le pentagone ηBEDθ que l'on pourra (*Problème I*) transformer en un nouveau parallélogramme ayant BE pour un de ses côtés et un autre côté dirigé suivant Bη; désignons ce nouveau parallélogramme par *Q*.

En lui ajoutant le triangle BFE, on formera un second pentagone que l'on pourra également (*Problème I*) transformer en un parallélogramme ayant BF pour un de ses côtés, et un autre dirigé suivant Bη.

En continuant de la même manière, on sera finalement conduit à construire un parallélogramme équivalant au polygone proposé, ayant AB pour un de ses côtés, et un autre côté dirigé suivant Bη, ainsi qu'il était requis.

Remarque. C'est à justifier cette construction que se réduit le théorème proposé, lequel se trouve ainsi démontré par ce qui précède.

Démonstration des quatre théorèmes sur l'hyperbole énoncés à la page 268 du précédent volume;

Par MM. Ch. Sturm, Vecten et Querret.

Théorème I. Les sécantes menées de l'un quelconque des points d'une hyperbole à deux points fixes pris sur la courbe interceptent toujours, sur l'une ou sur l'autre asymptote, des longueurs cons-

tantes et égales à la longueur interceptée sur la même asymptote entre la sécante menée par les deux points fixes et la tangente à l'un d'eux.

Démonstration. Soient M, M′ (fig. 14) deux points fixes pris sur la courbe, et Z un autre point arbitraire de la même courbe. Soient menées les sécantes ZM, ZM′ et MM′, rencontrant respectivement l'une des asymptotes en X, X′ et A et l'autre en Y, Y′ et B. Soit encore menée, par l'un quelconque M des deux points fixes, une tangente à la courbe, coupant la première asymptote en D et la seconde en E; tout se réduit à démontrer que $XX'=DA$, quel que soit le point Z.

Pour cela, menons, par les points M, M′ et Z, des parallèles à la première asymptote, rencontrant respectivement la seconde en H, H′ et U, et des parallèles à la seconde, rencontrant respectivement la première en G, G′ et T; et soit O le centre de la courbe.

Par une propriété très-connue de l'hyperbole, on aura $ZY=MX$, $ZY'=M'X'$, $MB=M'A$, $MD=ME$, d'où il suit que les triangles ZYU, ZY′U, MBH et MEH, déjà respectivement semblables aux triangles XMG, X′M′G′, AM′G′ et DMG leur seront, en outre, respectivement égaux; de sorte qu'on aura

$$OT=UZ=GX=G'X'\,,\qquad OG=HM=G'A=GD\,.$$

On aura, en conséquence,

$$XX'=OX'-OX=(OG'+G'X')-(OG+GX)=OG'-OG=GG'\,,$$

$$DA=OA-OD=(OG'+G'A)-(OG+GD)=OG'-OG=GG'\,;$$

donc, en effet, $XX'=DA$; et par conséquent XX' est constant, quelle que soit la situation du point Z sur la courbe.

M. Vecten observe que ce théorème n'est, pour ainsi dire, qu'un renversement du problème résolu analitiquement par M. C. G., à la page 26 du précédent volume ; aussi, est-ce, en effet, en cherchant à résoudre ce même problème par des considérations purement géométriques que M. Sturm y est parvenu. M. Vecten remarque encore que M. Brianchon, dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre* (art. LXVII), a fait voir comment, au moyen de la propriété de l'hexagone inscrit à une section conique, on pouvait démontrer la première partie du théorème ; mais il s'est contenté d'énoncer la seconde, qui en est en effet une conséquence nécessaire.

THÉORÈME II. Toute corde d'une hyperbole divise en deux parties égales la portion de l'une ou de l'autre asymptote comprise entre les tangentes à ses deux extrémités.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence manifeste du précédent. Il en résulte, en effet, que la partie d'une asymptote comprise entre la corde et la tangente à l'une de ses extrémités doit être égale à la portion de la même asymptote comprise entre cette même corde et la tangente à son autre extrémité.

M. Vecten remarque que ce théorème fait le sujet de l'art. LXVIII de l'ouvrage déjà cité de M. Brianchon, où il l'énonce comme une conséquence de l'art. LXVII ; mais qu'il peut être aussi directement démontré par des considérations analogues à celles qui conduisent à la démonstration du premier, sans le faire dépendre de celui-ci.

THÉORÈME III. Si, sur une corde d'une hyperbole, considérée comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés soient respectivement parallèles aux deux asymptotes de la courbe ; l'autre diagonale de ce parallélogramme, prolongée s'il est nécessaire, passera par le centre de cette courbe.

Démonstration. Soit MM′ (fig. 15) une corde d'une hyperbole sur laquelle, comme diagonale, soit construit le parallélogramme MN′M′N, dont les côtés opposés soient respectivement parallèles aux deux asymptotes de la courbe, dont nous supposons le centre en O. Soient G, G′ les points où les directions des côtés opposés MN,

$N'M'$ rencontrent l'asymptote qui ne leur est pas parallèle ; et soient H, H' les points où les deux autres côtés $N'M$, $M'N$ rencontrent l'autre asymptote. Par une propriété connue de l'hyperbole, on aura

$$MH \times MG = M'H' \times M'G' ;$$

ou bien

$$OG \times N'G' = OG' \times NG ,$$

ou encore

$$\frac{N'G'}{NG} = \frac{OG'}{OG} ,$$

ce qui prouve que les trois point N, N', O sont en ligne droite.

M. Sturm, à qui on doit aussi ce théorème, observe qu'on en peut déduire la solution du problème où *étant donnés trois points d'une hyperbole et des parallèles à ses deux asymptotes, on demande de construire le centre de la courbe, et par suite ces asymptotes elles-mêmes ?*

Ayant, en effet, trois points de la courbe et des parallèles aux deux asymptotes, on a, par là même, deux cordes sur lesquelles, comme diagonales, on peut construire des parallélogrammes de la nature de celui dont il vient d'être question ci-dessus ; et, comme les secondes diagonales de ces parallélogrammes doivent (*Théorème III*) passer par le centre de la courbe, ce centre se trouvera déterminé par leur intersection.

Les deux cordes qui joignent un des points donnés sur la courbe aux deux autres peuvent être choisies de trois manières différentes ; mais, comme le problème est évidemment déterminé, quel que soit le choix qu'on en fera, on trouvera toujours le même centre. C'est cette considération qui a conduit M. Sturm au quatrième théorème qui se trouve ainsi suffisamment démontré par ce qui précède, et qu'il nous suffira conséquemment d'énoncer.

THÉORÈME IV. Si, sur les trois côtés d'un triangle, pris tour à tour comme diagonales, on construit des parallélogrammes, dont *les côtés soient parallèles à deux droites données, les trois autres diagonales de ces parallélogrammes concourront en un même point, lequel sera le centre d'une hyperbole qui, étant circonscrite au triangle, aurait ses asymptotes parallèles aux deux droites données.*

Ce théorème appartient, au surplus, à la géométrie élémentaire, et peut être facilement démontré, sans rien emprunter à la géométrie des courbes, comme l'ont fait voir MM. Querret et Vecten.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

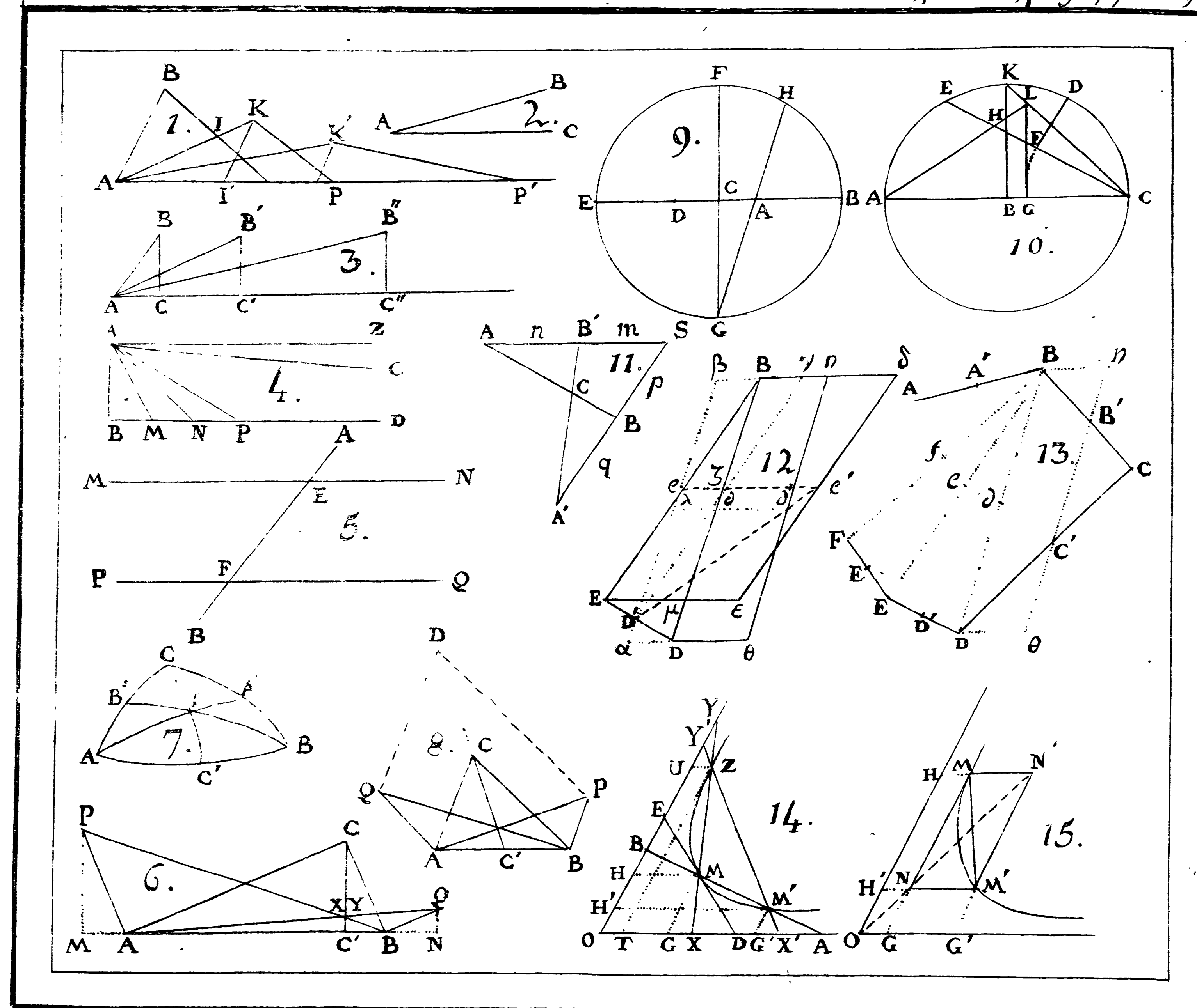
I. A un même icosaèdre régulier donné on peut inscrire une infinité de dodécaèdres réguliers. On demande, 1.° quel sera, sur les faces de l'icosaèdre, le lieu des sommets de tous ces dodécaèdres; 2.° quelle sera la surface gauche à laquelle appartiendront leurs arètes; 3.° enfin, à quelle surface courbe leurs faces seront toutes tangentes?

II. A un même dodécaèdre régulier donné on peut inscrire une infinité d'icosaèdres réguliers. On demande, 1.° quel sera, sur les faces du dodécaèdre, le lieu des sommets de tous ces icosaèdres; 2.° quelle sera la surface gauche à laquelle appartiendront leurs arètes; 3.° enfin à quelle surface courbe leurs faces seront toutes tangentes?

III. A un même icosaèdre régulier donné on peut circonscrire une infinité de dodécaèdres réguliers. On demande, 1.° à quelle courbe à double courbure appartiendront les sommets de tous ces dodécaèdres; 2.° à quelle surface gauche appartiendront leurs arètes; enfin, à quelle surface conique leurs faces seront toutes tangentes?

IV. A un même dodécaèdre régulier donné on peut circonscrire une infinité d'icosaèdres réguliers. On demande, 1.° à quelle courbe à double courbure appartiendront les sommets de tous ces icosaèdres; 2.° à quelle surface gauche appartiendront leurs arètes; 3.° enfin, à quelle surface conique leurs faces seront toutes tangentes?

Tom. XV, plan II, pag 77 - 109



J. D. G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Dissertation sur la théorie des logarithmes;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique (*).

En réfléchissant sur les résultats obtenus par M. Bouvier, à la page 275 du précédent volume des *Annales*, il nous a paru que ces résultats pouvaient être plus facilement et peut-être même plus rigoureusement déduits de la définition ordinaire des logarithmes. C'est ce que nous nous proposons de faire voir ici. Nous présenterons ensuite au lecteur quelques réflexions sur la nature des logarithmes.

1. Soit e la base des logarithmes de Néper; en posant $e^x=y$, x sera ce qu'on appelle le logarithme népérien de y. Cherchons quelles valeurs de x peuvent correspondre à une même valeur réelle de y, et réciproquement quelles valeurs de y peuvent répondre à une même valeur réelle de x.

(*) Nous croyons devoir prévenir nos lecteurs qu'au 10 juillet dernier, le mémoire de M. Vincent, imprimé au commencement du présent volume, était encore entre nos mains, et que l'article que l'on va lire nous a été adressé de Trèves, sous la date du 8 du même mois.

J. D. G.

Il est d'abord facile de voir qu'à une même valeur réelle de y ne saurait répondre qu'une seule valeur réelle de x, puisque deux puissances différentes de e ne sauraient être égales entre elles. Désignons par r cette valeur réelle, et représentons par $z\sqrt{-1}$ la quantité inconnue qui doit lui être ajoutée pour avoir toutes les autres ; nous aurons ainsi

$$e^{r+z\sqrt{-1}}=e^r.e^{z\sqrt{-1}}=y,$$

d'où, à cause de $e^r=y$, nous conclurons

$$e^{z\sqrt{-1}}=1.$$

Mais, d'un autre côté, on sait que

$$e^{z\sqrt{-1}}=\text{Cos}.z+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.z\ ;$$

donc z sera donné par l'équation

$$\text{Cos}.z+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.z=1\ ,$$

d'où l'on tire $\text{Cos}.z=1$, $\text{Sin}.z=0$; ce qui revient à $z=2p\varpi$, p étant un nombre entier positif quelconque. On a donc, en général,

$$e^{r+2p\varpi\sqrt{-1}}=y\ ,\quad \text{d'où}\quad \text{Log}\,y=r+2p\varpi\sqrt{-1}\ . \qquad (1)$$

Pour avoir le logarithme de $-y$, nous poserons semblablement

$$e^{r+z\sqrt{-1}}=-y,$$

r étant toujours, comme ci-dessus, le logarithme réel de $+y$; il viendra ainsi, en simplifiant

$$e^{z\sqrt{-1}}=-1,$$

ou bien

$$\text{Cos.}z+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}z=-1,$$

d'où $\text{Cos.}z=-1$, $\text{Sin.}z=0$, ce qui donne $z=(2p'+1)\varpi$, et par suite

$$e^{r+(2p'+1)\varpi\sqrt{-1}}=-y, \text{ d'où } \text{Log.}(-y)=r+(2p'+1)\varpi\sqrt{-1}. \quad (2)$$

2. Lorsqu'au contraire on demande quelles peuvent être les diverses valeurs de y qui répondent à une même valeur réelle de x, on doit essentiellement distinguer trois cas; savoir : celui où x est un nombre entier; celui où x est un nombre fractionnaire; et enfin celui où x est un nombre irrationnel.

Dans le premier cas, il est manifeste que la puissance e^x ou y ne saurait avoir qu'une seule valeur. Ainsi, le logarithme entier, positif ou négatif x ne saurait répondre qu'à un seul nombre y.

Si x est fractionnaire, en désignant par k son dénominateur, e^x aura, comme l'on sait, k valeurs différentes, dont une réelle positive. Représentant celle-ci par R, on aura en général $e^x=R\sqrt[k]{1}$, c'est-à-dire,

$$e^x \text{ ou } y=R\left(\text{Cos.}\frac{2p\varpi}{k}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2p\varpi}{k}\right).$$

Si enfin l'on suppose x irrationnel, cela reviendra à supposer k infini; et y aura autant de valeurs différentes qu'en aura $R\sqrt[k]{1}$, lorsque k est infini. Or, quelque grand que soit k, l'expression $\text{Cos.}\frac{2p\varpi}{k}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2p\varpi}{k}$ aura toujours k valeurs différentes, depuis $\text{Cos.}\frac{2\varpi}{k}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2\varpi}{k}$ jusqu'à $\text{Cos.}2\varpi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}2\varpi$ ou zéro, où les arcs forment la suite ascendante

$$\frac{2\varpi}{k}\,,\quad \frac{4\varpi}{k}\,,\quad \frac{6\varpi}{k}\,,\ldots\ldots\ldots \frac{2(k-1)\varpi}{k}\,,\quad 2\varpi\,.$$

Si l'on fait croître k indéfiniment, les termes de cette série se rapprocheront sans cesse les uns des autres, en conservant toujours la même limite supérieure 2ϖ, tandis que la limite inférieure $\frac{2\varpi}{k}$ descendra continuellement vers zéro. Enfin, k devenant infini, la suite deviendra continue, et sa limite inférieure sera tout-à-fait nulle ; donc, dans ce cas, les arcs pourront avoir toutes les valeurs possibles entre o et 2ϖ. On en devra conclure qu'une expression quelconque de la forme $\mathrm{Cos}.u+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.u$ représente, quelque valeur réelle et positive qu'on donne à u, une des racines d'un degré infini de l'unité. L'unité a donc une infinité de racines d'un degré infini ; ce qui nous prouve qu'à un même logarithme irrationnel doivent répondre une infinité de nombres différens.

3. Examinons présentement de plus près la question des logarithmes des nombres négatifs. En nous appuyant sur ce qui vient d'être exposé ci-dessus, nous serons conduits à établir, comme autant de vérités incontestables,

1.° Que, lorsque Log.y est un nombre entier, le nombre négatif $-y$ ne saurait être compris parmi ceux qui correspondent à ce logarithme, puisqu'il ne peut alors y correspondre aucun nombre autre que y ;

2.° Que, lorsque Log.y est fractionnaire et de dénominateur impair, le nombre $-y$ ne saurait davantage correspondre à ce logarithme ;

3.° Que, lorsque Log.y est fractionnaire de dénominateur pair, il répond également aux deux nombres $+y$ et $-y$;

4.° Qu'enfin la même chose a également lieu lorsque Log.y est irrationnel, puisque rien n'empêche de supposer pair le dénominateur alors infini (*).

4. En résumant ce que nous venons de dire, on voit qu'il est nécessaire de bien distinguer les trois cas où le logarithme est entier, fractionnaire ou irrationnel ; et que, dans le second cas, il faut encore considérer séparément la fraction dont le dénominateur est pair de celle dont le dénominateur est impair. On pourrait néanmoins faire disparaître ces différences en modifiant convenablement la définition. En disant que le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever e pour avoir ce nombre, il suffirait d'ajouter que l'on est convenu de donner à tous les logarithmes un dénominateur infini. Il y aurait, pour motiver cette addition à la définition ordinaire, beaucoup de raisons déduites de la nature même du calcul des exposans fractionnaires, et sur lesquelles nous pourrons revenir dans une autre occasion.

5. Quoi qu'il en soit, nous passerons présentement à ce qui nous paraît le plus important dans le sujet qui nous occupe.

Nous venons de voir que, dans certains cas, Log$y$ peut être égal à Log.$(-y)$. Cependant, nous avons trouvé plus haut

$$\text{Log.}y=r+2p\varpi\sqrt{-1}\,, \qquad \text{Log.}(-y)=r(2p'+1)\varpi\sqrt{-1}\,,$$

valeurs qui, dans aucun cas, ne sauraient coïncider. Il faut donc ou que ces formules ne soient point exactes, ou que nos raison-

---

(*) Mais rien n'empêche non plus de supposer ce dénominateur impair, et alors la conclusion deviendra fausse. C'est ici exactement le cas de la somme de la suite infinie $1-1+1-1+1-\ldots\ldots$ qui est 0 ou 1, suivant qu'on suppose l'infini pair ou impair, et qui pourtant n'est réellement ni l'un ni l'autre.

J. D. G.

nemens (1, 2) soient erronés (*). Or, il ne sera pas difficile de voir que l'erreur réside dans nos formules. En effet, après avoir posé l'équation

$$e^{r+z\sqrt{-1}}=y\ ,$$

à cause de $e^r=y$, nous en avons conclu

$$e^{z\sqrt{-1}}=1\ .$$

A la vérité, il n'y a aucun doute qu'en divisant $e^{r+z\sqrt{-1}}$ par e^r, on ne doive obtenir pour quotient $e^{z\sqrt{-1}}$; mais il faut observer que, si e^r peut admettre plusieurs valeurs différentes, il ne suffira pas de diviser $e^{r+z\sqrt{-1}}$ par une seule de ces valeurs, pour obtenir celle de $e^{z\sqrt{-1}}$, et qu'il faudra alors diviser $e^{r+z\sqrt{-1}}$ successivement par toutes les valeurs que e^r peut admettre, pour être certain d'obtenir toutes celles dont $e^{z\sqrt{-1}}$ est susceptible. Si donc r est une fraction dont k soit le dénominateur, ce ne sera pas par y mais bien par

$$y\left(\text{Cos.}\,\frac{2p\varpi}{k}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2p\varpi}{k}\right)$$

qu'il faudra diviser les deux membres de l'équation

$$e^{r+z\sqrt{-1}}=y$$

(*) On a lieu d'être surpris que M. Bouvier, qui a donné les mêmes formules, ne se soit pas aperçu de la contradiction qu'elles présentent, et ait conclu généralement que les logarithmes des nombres sont toujours les mêmes, quels que soient les signes de ces nombres.

(*Note de M. Stein.*)

pour obtenir la valeur complète de $e^{z\sqrt{-1}}$. Par suite de cette remarque, on n'aura pas, comme ci-dessus, $\mathrm{Cos}.z+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.z=1$, mais

$$\mathrm{Cos}.z+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.z=\mathrm{Cos}.\frac{2p\pi}{k}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.\frac{2p\pi}{k}\ ;$$

d'où

$$z=2m\varpi-\frac{2p\pi}{k}\ ;$$

donc

$$\mathrm{Log}.y=r+\left(2m-\frac{2p}{k}\right)\varpi\sqrt{-1}\ .$$

On trouvera par un raisonnement analogue,

$$\mathrm{Log}.(-y)=r+\left(2m'+1-\frac{2p'}{k}\right)\varpi\sqrt{-1}\ .$$

Si présentement k est un nombre pair, que nous représenterons par $2n$, nous aurons

$$\mathrm{Log}.y=r+\left(2m-\frac{p}{n}\right)\varpi\sqrt{-1}\ ,$$

$$\mathrm{Log}.(-y)=r+\left(2m'+1-\frac{p'}{n}\right)\varpi\sqrt{-1}\ ;$$

et, dans le cas présent, on verra facilement que, pour une valeur quelconque de $\mathrm{Log}.y$, il en existe toujours une de $\mathrm{Log}.(-y)$ qui coïncide avec elle.

Si ensuite k est un nombre impair, en le représentant par $2n+1$, nous aurons

$$\mathrm{Log}.y=r+\left(2m-\frac{2p}{2n+1}\right)\varpi\sqrt{-1}\ ,$$

$$\mathrm{Log}.(-y)=r+\left(2m'+1-\frac{2p'}{2n+1}\right)\varpi\sqrt{-1}\ ;$$

et ici, quelques valeurs entières et positives qu'on attribue à m, m', p, p', n, on ne parviendra jamais à faire coïncider les deux expressions.

Nous voilà donc conduits de nouveau à cette conclusion que $\text{Log.}(-y)$ est ou n'est pas le même que $\text{Log.}y$, suivant que le dénominateur k de ce logarithme est pair ou impair.

On voit donc, par ce qui précède, que les formules

$$\text{Log}\,y=r+2p\varpi\sqrt{-1}\;,\qquad \text{Log.}(-y)=r+(2p'+1)\varpi\sqrt{-1}$$

ne sont point générales, et ne sauraient être appliquées qu'au seul cas où le logarithme réel de y est un nombre entier ; dans tout autre cas, il faut écrire

$$\text{Log.}y=r+\left(2m-\frac{2p}{k}\right)\varpi\sqrt{-1}\;,$$

$$\text{Log.}(-y)=r+\left(m'+1-\frac{2p'}{k}\right)\varpi\sqrt{-1}\;,$$

k étant le dénominateur du logarithme réel de y.

6. Nous ferons, en terminant, une observation qui se présente pour ainsi dire d'elle-même : c'est que, lorsqu'on veut raisonner sur un logarithme développé en série, soit sous la forme ordinaire, soit sous toute autre, il ne suffit pas d'écrire

$$\text{Log.}y=\frac{y-1}{1}-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\ldots\ldots\,;$$

mais qu'il est nécessaire d'ajouter au développement l'une ou l'autre quantité

$$\left(2m-\frac{2p}{k}\right)\varpi\sqrt{-1}\;,\qquad \left(2m+1-\frac{2p}{k}\right)\varpi\sqrt{-1}\;,$$

suivant que y est un nombre positif ou négatif (*).

(*) Une remarque analogue nous avait déjà été faite par M. Querret, à l'occasion de la formule de M. Bouvier. *J. D. G.*

DYNAMIQUE.

Note sur la proportionnalité des forces aux vitesses ;

Par M. QUERRET, ancien chef d'institution.

Extrait d'une lettre au Rédacteur des Annales.

. . . .
. . . .

En examinant la démonstration, déjà extrêmement simple, donnée par M. le capitaine Fauquier, de la proportionnalité des forces aux vitesses (*), il m'a semblé, Monsieur, qu'elle pouvait être simplifiée encore en la présentant comme il suit :

Soient V la vitesse due au mouvement de la terre et F la force ; on aura, en général,

$$V=\varphi(F) ;$$

ainsi, en décomposant la force F en trois forces rectangulaires a, b, c, et représentant respectivement par x, y, z les composantes de la vitesse suivant leurs directions, on aura

$$x=\varphi(a) , \quad y=\varphi(b) , \quad z=\varphi(c) .$$

Supposons présentement le mobile sollicité par une force F',

(*) Voyez tom. XIV, pag. 370.

J. D. G.

étrangère au mouvement de la terre, et dont les composantes, suivant les mêmes directions que celles de F, soient respectivement a', b', c'; ce mobile sera donc sollicité suivant les axes par les forces $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$; ainsi les composantes de ces vitesses totales suivant ces mêmes axes seront

$$\varphi(a+a')\,,\qquad \varphi(b+b')\,,\qquad \varphi(c+c')\,;$$

de sorte que, par exemple, en désignant par x' l'accroissement de la vitesse x dû à la force F', on aura

$$x+x'=\varphi(a+a')=\varphi(a)+\varphi'(a)\frac{a'}{1}+\varphi''(a)\frac{a'^2}{1.2}+\ldots..\,;$$

puis donc que $x=\varphi(a)$, on tirera de là

$$x'=\varphi'(a)\frac{a'}{1}+\varphi''(a)\frac{a'^2}{1.2}+\varphi'''(a)\frac{a'^3}{1.2.3}+\ldots..\,;$$

Cela posé, en admettant que la vitesse relative doit être indépendante du mouvement de la terre, et que cette condition exige que, le second membre étant indépendant de a, les coefficiens des puissances de a' en soient aussi indépendans ou soient constans, on aura $\varphi'(a)=k$, k étant une constante. De là on déduira $\varphi''(a)=0$, $\varphi'''(a)=0$, ...; ce qui réduira l'équation ci-dessus à $x'=ka'$. On aura pareillement $y'=kb'$, $z'=kb'$; d'où on conclura, comme M. Fauquier, que *si une force* f *imprime à un mobile une vitesse* v, *on aura, en général*, v$=$kf, k *étant une constante.*

Agréez, etc.

La Motte, près St-Mâlo, le 10 juin 1824.

GEOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration élémentaire de la propriété de minimum *dont jouissent le périmètre du carré et la surface du cube, parmi les parallélogrammes rectangles de même surface, et les parallélipipèdes rectangles de même volume ;*

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

I. Soit t le côté d'un carré donné, sa surface sera t^2 et son périmètre $4t$.

Si l'on nie que ce périmètre soit *minimum* entre ceux des rectangles de même surface, il faudra admettre qu'il existe un rectangle équivalent au carré donné ayant un périmètre moindre que le sien. Soient x, y les deux dimensions de ce rectangle, sa surface sera xy et son périmètre $2(x+y)$; et l'on devra avoir

$$xy=t^2\,, \qquad 2(x+y)<4t\,.$$

En vertu de $xy=t^2$, si x et y sont inégaux, ils ne pourront être ni tous deux plus grands ni tous deux plus petits que t ; d'un autre côté, l'un d'eux ne pourra être égal à t, puisqu'alors l'autre devrait l'être aussi ; il faudra donc que l'un soit plus grand et l'autre plus petit que t. Si donc on suppose $x>y$, on devra avoir $x>t$, et l'on pourra poser $x=pt$, p étant >1.

Cette valeur de x, substituée dans l'équation, donnera $y=\frac{t}{p}$; substituant ensuite les valeurs de x et y dans l'inégalité, elle deviendra, en divisant par $2t$, chassant le dénominateur et transposant,

$$p^2-2p+1<0\,, \qquad \text{ou} \qquad (p-1)^2<0\,;$$

conclusion absurde qui prouve la vérité de la proposition que nous voulions démontrer.

Il est facile d'en conclure qu'à l'inverse de tous les rectangles de même périmètre le carré a le *maximum* de surface; car, en admettant que la surface d'un certain rectangle R pût excéder celle d'un carré C de même périmètre; on n'aurait qu'à construire un rectangle R′ semblable à R et équivalent à C; et ce rectangle se trouverait d'un moindre périmètre que C, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

II. Soit t l'arète d'un cube donné; son volume sera t^3 et sa surface $6t^2$.

Si l'on nie que cette surface soit *minimum* parmi celles des parallélipipèdes rectangles équivalens au cube dont il s'agit, il faudra admettre qu'il existe un parallélipipède rectangle, équivalant au cube donné, ayant une surface moindre que la sienne. Soient x, y, z les trois dimensions de ce parallélipipède; son volume sera xyz et sa surface $2(xy+xz+yz)$; et l'on devra avoir

$$xyz=t^3\,, \qquad 2(xy+xz+yz)<6t^2\,.$$

En vertu de $xyz=t^3$, si, comme on le suppose, les trois quantités x, y, z ne sont pas égales entre elles et conséquemment à t, il y en aura au moins une plus grande et une autre plus petite que t. En effet, on n'en saurait d'abord supposer deux égales à t, puisqu'alors la troisième devrait l'être aussi; et si l'on en supposait une seule égale à t, on retomberait dans le cas discuté ci-dessus, et conséquemment des deux restantes, l'une devrait être plus grande et l'autre plus petite que t. On voit d'ailleurs que l'on ne saurait les supposer ni toutes trois plus grandes ni toutes trois plus petites que t. Enfin, si l'on en supposait deux plus grandes que t, la troisième, par compensation, devrait être plus petite; et si, au contraire, on en supposait deux plus petites, la troisième, par compensation, devrait être plus grande.

Soient donc

$$x>t\,, \qquad y<t\,;$$

nous pourrons poser

$$x=pt\,, \qquad y=\frac{t}{q}\,,$$

p et q étant des nombres plus grands que l'unité.

Ces valeurs, substituées dans l'équation, donneront $z=\frac{qt}{p}$; substituant ensuite les valeurs de x, y, z dans l'inégalité, elle deviendra, en divisant par $2t^2$,

$$\frac{p}{q}+q+\frac{1}{p}<3\,,$$

ou, en chassant les dénominateurs et transposant,

$$p^2+pq^2+q-3pq<0\,,$$

ou encore

$$(p-q)^2+q(p-1)(q-1)<0\,;$$

conclusion absurde, qui prouve la vérité de la proposition que nous avons annoncée.

Il est facile d'en conclure qu'à l'inverse de tous les parallélipipèdes rectangles de même surface le cube a le *minimum* de volume; car, en admettant que le volume d'un certain parallélipipède rectangle P pût excéder celui d'un cube C de même surface ; on n'aurait qu'à construire un parallélipipède rectangle P′, semblable à P et équivalent à C ; et ce parallélipipède se trouverait d'une moindre surface que C, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

M. Lhuilier, dans son ouvrage *De relatione mutuâ capacitatis*, etc., a démontré le même théorème, tant géométriquement qu'algébriquement ; mais, comme il le déduit d'un autre plus général, sa démonstration est naturellement beaucoup plus longue et plus compliquée ; aussi n'a-t-elle aucun rapport avec celle-ci.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Solution d'un paradoxe que présentent les équations du deuxième degré ;

Par un Abonné.

Soit l'équation

$$ax^2+bx+c=0\ , \qquad (1)$$

on en tire, comme l'on sait,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (*)\ . \qquad (2)$$

(*) La manière la plus correcte de parvenir à ce résultat semble être la suivante : en multipliant l'équation (1) par $4a$, et transposant, elle devient

Si l'on suppose $a=0$, l'équation (1) se réduit à

$$bx+c=0\,, \qquad \text{qui donne} \qquad x=-\frac{c}{b}\,,$$

et la formule (2) donne

$$x=\frac{-b\pm b}{0}\,,$$

ce qui donne ces deux valeurs $x=\frac{0}{0}$ et $x=\infty$; et il s'agit d'expliquer l'origine de ces deux valeurs, et pourquoi elles ne sont ni l'une ni l'autre celle qui doit répondre à ce cas.

$$4a^2x^2+4abx=-4ac\,;$$

puis, en ajoutant b^2 à chaque membre,

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac\,,$$

d'où

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}\,,$$

équation qui, résolue par rapport à x, donne le résultat (2).

Nous faisons cette observation, parce que nous avons quelquefois vu tourmenter de pauvres jeunes-gens dans des examens, en leur interdisant la faculté de diviser ou de multiplier par a avant de résoudre l'équation, apparemment pour les rendre systématiquement maladroits.

Nous ne voyons pas non plus trop bien pourquoi on est dans l'usage de mettre cette formule sous la forme

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\,;$$

à moins cependant que ce ne soit pour la rendre un peu plus embarrassante à écrire et pour donner un peu plus de travail au calculateur, dans le cas des applications numériques, lorsque ni b ni c ne sont divisibles par a.

J. D. G.

Pour cela, remarquons d'abord que la supposition de $a=0$ ne fait nécessairement évanouir le terme ax^2 qu'autant qu'on suppose tacitement que x est une quantité finie ; car, si l'on pose à la fois $a=0$ et $x=\infty$, loin qu'alors le terme ax^2 devienne nécessairement nul, il pourra avoir alors une valeur infinie.

Si l'on rejette cette valeur, il ne reste plus que la valeur $x=\frac{0}{0}$, qui renferme bien implicitement la valeur $x=-\frac{c}{b}$; et si l'on nous demande pourquoi elle prend cette sorte de masque, nous répondrons que les formules analitiques ne pouvant jamais se trouver en défaut, il faut nécessairement qu'il en soit ainsi *toutes les fois qu'on emploie à la recherche d'une inconnue un procédé susceptible de donner pour cette inconnue plus ou moins de valeurs qu'elle n'en doit réellement avoir*, puisque l'analise n'a aucune raison pour *exclure* ou *admettre* quelques-unes de ces valeurs de préférence à d'autres.

Pour faire éclore la valeur $x=-\frac{c}{b}$ de la formule (2), on a communément recours au développement du radical en série : c'est à peu près employer une machine à vapeur à haute pression pour soulever une mouche. On parvient de suite au but en multipliant les deux termes de la fraction valeur de x par $-b\mp\sqrt{b^2-4ac}$; elle devient ainsi

$$x=\frac{2c}{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}\ (*)\ ;$$

et alors en posant $a=0$, on obtient de suite

$$x=\infty\,, \qquad x=-\frac{c}{b}\,,$$

comme cela doit être.

(*) On obtient immédiatement les valeurs de x sous cette forme, en divisant l'équation (1) par x^2, résolvant l'équation résultante par rapport à $\frac{1}{x}$, et concluant ensuite la valeur de x. J. D. G.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur l'intégration d'une classe particulière d'équations ;

Par M. J. L. Woisard, professeur aux écoles d'artillerie.

Soit une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\mathrm{F}(x-M,y-N)=0\ , \qquad (1)$$

dans laquelle M et N sont supposées des fonctions de p ou $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; si ces fonctions sont telles qu'on ait

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\right)=p\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\right), \qquad (2)$$

l'intégration pourra être exécutée avec la plus grande facilité, ainsi qu'on va le voir.

En différentiant la proposée, elle prendra la forme

$$G\mathrm{d}x+H\mathrm{d}y-G\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p-H\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=0\ ; \qquad (3)$$

G et H étant des fonctions de $x-M$ et $y-N$. Remplaçant dans cette équation $\mathrm{d}y$ par $p\mathrm{d}x$ et $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}$ par $p\,\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}$, elle deviendra

$$(G+Hp)\mathrm{d}x-(G+Hp)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=0,$$

ou bien

$$(G+Hp)\left(\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p\right)=0;$$

équation qui est satisfaite en posant

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p,$$

d'où

$$x=M+a. \qquad (4)$$

Si, dans la même équation (3), on met pour $\mathrm{d}x$ sa valeur $\frac{\mathrm{d}y}{p}$, et pour $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}$ sa valeur $\frac{1}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}$, elle deviendra

$$(G+Hp)\mathrm{d}y-(G+Hp)\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=0.$$

ou bien

$$(G+Hp)\left(\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p\right)=0;$$

équation qui est satisfaite en posant

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p,$$

d'où

$$y=N+b; \qquad (5)$$

donc l'intégrale complète de l'équation (1) résultera de l'élimination de p entre les équations (4) et (5). Cette équation renfermera deux constantes arbitraires a et b; mais elles n'équivaudront réellement qu'à une seule ; car, en mettant pour x et y dans l'équation (1) les valeurs données par les équations (4) et (5), on obtient, entre ces deux constantes, l'équation de relation

$$F(a\,,\,b)=0\ .$$

Soit prise, pour exemple, l'équation

$$y-p^2=\text{Log.}(x-2p)\ ,$$

dans laquelle les fonctions p^2 et $2p$ satisfont à la condition que nous avons supposé avoir lieu. Pour en avoir l'intégrale, il suffira d'éliminer p entre les deux équations

$$x=2p+a\ , \qquad y=p^2+b\ ,$$

ce qui donnera

$$4(y-b)=(x-a)^2\ ;$$

équation dans laquelle les deux constantes a et b seront liées par la relation $b=\text{Log.}a$; de sorte qu'on pourra écrire

$$4(y-\text{Log.}a)=(x-a)^2\ ,$$

comme on peut d'ailleurs le vérifier par la différentiation et l'élimination de a (*).

La classe d'équations que nous venons de considérer comprend toutes celles dont l'intégrale complète représente une suite de courbes égales et parallèles.

Metz, 16 juin 1824.

(*) Ce problème est l'inverse de celui qui a été traité à la page 294 du précédent volume.

J. D. G.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de dynamique, et réflexions sur le problème de situation proposés à la page 380 *du VIII.*e *volume des* Annales ;

Par M. Tédenat, recteur honoraire, correspondant de l'académie royale des sciences.

Au Rédacteur des *Annales* ;

Mon cher Professeur,

Il est dans votre recueil un assez grand nombre de *questions proposées* qui sont demeurées jusqu'ici sans solution ; soit que vos lecteurs, trop superficiellement peut-être, les aient jugées de peu d'intérêt, soit qu'ils les aient trouvées trop difficiles, comme il arrive en effet pour quelques-uns, soit encore qu'ils n'en aient obtenu que des solutions trop compliquées et trop peu élégantes pour mériter d'être mises au jour. Il n'en est pas en effet de celui qui publie un recueil de problèmes de son choix comme de celui qui traite des problèmes qui lui sont indiqués. Le premier peut, en effet, s'essayer sur un très-grand nombre, et faire ensuite parade de sa sagacité, en ne mettant en lumière que ceux d'entre eux de la solution desquels il a lieu d'être pleinement satisfait, tandis que l'autre, dont la tâche est tracée, se trouve dans une position beaucoup moins favorable.

En examinant, en particulier, les trois questions proposées à la fin de votre VIII.e volume, et qui sont du nombre de celles qui sont demeurées sans solution, il m'a paru que les deux premières pouvaient facilement être ramenées à d'autres sur la solution desquelles les traités élémentaires de mécanique ne laissent plus aujourd'hui rien à désirer ; et quant à la troisième, elle ne semble abordable que dans un seul cas où elle est extrêmement facile. Je consigne ici mes réflexions sur ces trois questions, sans aucune prétention, et telles exactement qu'elles se sont offertes à mon esprit.

Je vais d'abord ramener le premier des deux problèmes de dynamique à un énoncé un peu plus général qui, sans le compliquer davantage, le rendra d'un aspect plus élégant, et en fera dépendre la solution de calculs tout-à-fait symétriques.

PROBLÈME I. Un point, sollicité par une force accélératrice, constante ou variable, tant d'intensité que de direction, est assujetti à se mouvoir librement sur une droite indéfinie ; cette droite elle-même est assujettie à se mouvoir sur deux courbes fixes, de manière à avoir constamment les deux mêmes points de sa direction sur ces courbes ; on demande, d'après ces conditions, d'assigner les circonstances du mouvement du point dont il s'agit.

Solution. Soit k l'intervalle entre les points de la droite mobile qui doivent se trouver constamment sur les deux courbes fixes. Si l'on conçoit que de l'un quelconque des points de la première de ces deux courbes pris pour centre, et avec le rayon k, on décrive une sphère, cette sphère coupera généralement la seconde courbe en deux points au moins dont les rayons indiqueront les directions que pourra prendre la droite mobile, lorsqu'elle passera par le point ainsi choisi sur la première courbe ; et, comme il en ira de même pour tous les autres points pris sur cette courbe, il s'ensuit que toutes les situations que pourra prendre dans l'espace la droite que le point mobile est assujetti à parcourir appartiendront à une certaine surface gauche, ayant deux nappes au moins qui se couperont suivant cette courbe ; et, comme on peut prendre la seconde courbe pour la première et *vice versâ*, on peut dire que toutes les situatious possibles de la droite que le mobile est assujetti à parcourir sont comprises dans une surface gauche à deux nappes au moins se coupant suivant les deux courbes fixes. Il est évident en outre que toute droite tracée sur l'une ou l'autre nappes peut être réputée une des positions de la droite mobile ; et puisque le point mobile peut avoir une situation quelconque sur cette droite, il s'ensuit que ce point peut, d'après les conditions du mouvement, occuper une place quelconque sur l'une ou l'autre nappes, et ne saurait se trouver hors d'elles.

Tout l'effet de l'appareil qui maîtrise le mouvement du point que nous considérons se réduit donc à le contraindre à ne pas abandonner une surface courbe tout-à-fait déterminée, sur laquelle d'ailleurs il peut se mouvoir librement, de telle sorte que cette surface courbe peut être subtituée à l'appareil dont il s'agit, sans que les circonstances du mouvement en éprouvent la moindre altération. Le problème se trouve donc ainsi ramené à celui du mouvement d'un point sur une surface déterminée ; problème dont la solution est familière à tous ceux qui ont cultivé la mécanique rationnelle.

Quant à la recherche de l'équation de la surface gauche sur laquelle le mobile est assujetti à se mouvoir, elle ne présente que des difficultés ordinaires de calcul. En désignant en effet par (x, y, z) un quelconque des points de la droite mobile, par (x', y', z'), (x'', y'', z'') les points communs à cette droite et aux deux courbes fixes sur lesquelles elle repose, on aura d'abord

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2=k^2,$$

$$\frac{x-x'}{x'-x''}=\frac{y-y'}{y'-y''}=\frac{z-z'}{z'-z''}\;.$$

On pourra ensuite supposer que les équations données des deux courbes fixes sont

$$\left\{\begin{array}{l} M'=0\,, \\ N'=0\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} M''=0\,, \\ N''=0\,; \end{array}\right.$$

M', N' étant des fonctions données de x', y', z'; et M'', N'' des fonctions également données de x'', y'', z''. Eliminant donc les *six* quantités x', y', z', x'', y'', z'' entre ces *sept* équations, l'équation résultante en x, y, z sera celle de la surface demandée.

Si les courbes fixes données étaient deux courbes planes situées dans un même plan, ce plan serait évidemment la surface sur laquelle le point mobile serait assujetti à se mouvoir; et les lois de son mouvement se trouveraient indépendantes de la nature de ces deux courbes.

Si, dans ce cas particulier, la force accélératrice était constante d'intensité et de direction, on se trouverait ramené à la théorie ordinaire du mouvement des graves sur les plans inclinés.

Et si, en outre, cette force accélératrice constante était située dans le plan même que le point mobile est assujetti à parcourir, le problème reviendrait à celui de la chute libre des corps pesans dans l'espace.

PROBLÈME II. Donner la théorie du mouvement du pendule simple d'une longueur variable et fonction de l'angle que fait sa direction avec la verticale, en supposant d'ailleurs le point de suspension fixe?

Solution. Soit u la longueur que se trouve avoir le pendule, lorsque sa direction fait un angle t avec la verticale; on devra avoir $u=\varphi(t)$, φ désignant une fonction donnée quelconque. Cette équation sera évidemment l'équation polaire de la courbe que le mobile fixé à l'extrémité inférieure du pendule sera contraint de décrire, et les variations que ce pendule éprouvera dans sa longueur n'auront d'autre effet que de lui faire parcourir cette courbe qui pourra le remplacer, par rapport au mobile, sans que les circonstances de son mouvement en soient aucunement altérées. Le problème se trouve donc ramené à la recherche des circonstances du mouvement d'un point matériel pesant le long d'une courbe plane dont le plan est vertical, c'est-à-dire, à un problème complètement traité dans tous les ouvrages élémentaires.

PROBLÈME III. On a fait des sections dans un polyèdre régulier, par des plans indéfinis, perpendiculaires sur les milieux de toutes ses arètes. On a opéré de la même manière sur tous les corps résultant de cette première décomposition, et ainsi de suite indéfiniment. On demande, pour chacun des cinq polyèdres réguliers, quels seront, après un nombre quelconque de semblables opérations, le nombre et la nature de parties résultantes ?

Réflexions. La solution de ce problème se présente pour ainsi dire d'elle-même pour l'hexaèdre, attendu qu'on obtient constamment des hexaèdres, et qu'à chaque opération on en obtient un nombre huit fois plus grand ; de sorte qu'après un nombre x d'opérations le nombre des hexaèdres obtenus est 8^x.

Mais le problème semble tout-à-fait inabordable pour tous les autres polyèdres réguliers, attendu que, dès la première opération, on cesse d'obtenir des polyèdres réguliers. Pour le tétraèdre, par exemple, une première opération donne vingt-quatre tétraèdres partiels, égaux entre eux ; mais ces tétraèdres ne sont plus réguliers et une seconde opération les décompose en portions si peu régulières qu'il devient déjà très-difficile d'en assigner le nombre et la nature ; et l'on conçoit qu'il en serait de même, à plus forte raison, pour les opérations subséquentes. Ce serait bien pire encore s'il s'agissait des autres polyèdres différens du cube.

Ce serait vainement qu'on tenterait de rendre le problème plus traitable en assujettissant les plans coupant à des conditions différentes. Si, par exemple, on exigeait que ces plans passassent par les milieux des arètes des divers sommets du polyèdre, on tirerait du tétraèdre quatre autres tétraèdres réguliers comme lui, plus un octaèdre également régulier; mais, en opérant de la même manière sur cet octaèdre, on en obtiendrait six pyramides quadrangulaires, plus un corps terminé par six carrés et par huit triangles équilatéraux; la même opération faite sur le cube conduirait de prime abord à ce même corps et à huit tétraèdres non réguliers.

Si l'on voulait assujettir les plans coupans à être parallèles aux faces opposées et à passer en outre par le centre du polyèdre, ce qui rentrerait pour le cube dans le cas proposé; on exclurait d'abord le tétraèdre, où il n'y a point de faces opposées. Or, en opérant sur l'octaèdre, une première opération donnerait six octaèdres et huit tétraèdres, tous réguliers; et, à raison de ces tétraèdres, l'opération ne pourrait plus se poursuivre.

On concevra facilement toute la difficulté du problème en considérant qu'il a son analogue pour les polygones réguliers, où il semblerait devoir être incomparablement plus facile; et que pourtant, le carré excepté qui donne pour résultat 4^x, on ne voit pas trop comment on pourrait le résoudre généralement pour tout autre polygone.

Agréez, etc.

St-Geniez, le 5 juin 1824.

Démonstration des deux théorèmes de statique énoncés à la page 391 du XIV.e volume des Annales;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique;

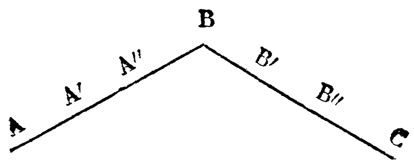
Et M. Querret, ancien chef d'institution.

THÉORÈME I. *Si des masses égales, placées d'abord arbitrairement sur les directions des côtés d'un polygone rectiligne fermé quel-*

conque, plan ou gauche, parcourent simultanément et dans le même sens, sur ces directions, des longueurs respectivement proportionnelles à celles de ces mêmes côtés, leur centre commun de gravité demeurera immobile.

THÉORÈME II. Si des masses proportionnelles aux longueurs des côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, placées d'abord arbitrairement sur les directions respectives de ces mêmes côtés, y parcourent simultanément dans le même sens des longueurs égales, leur centre commun de gravité demeurera immobile.

Démonstration. Concevons que, dans une situation quelconque de ces masses, on décompose chacune d'elles en deux autres placées aux extrémités du côté sur la direction duquel elle se trouve située; le système se trouvera ainsi transformé en un système de masses en même nombre, et de même valeur totale, appliquées aux sommets du polygone; et tout consiste à faire voir qu'en quelque situation des masses primitives que l'on opère cette transformation, les nouvelles masses placées aux sommets du polygone seront toujours les mêmes.



Soient A, B, C, trois sommets consécutifs quelconques du polygone; soient, pour une époque quelconque, A′, B′ les situations simultanées de deux masses sur les directions respectives AB, BC; et soient, pour une autre époque A″, B″, les situations de ces mêmes masses sur les mêmes directions.

1.° Si nous supposons d'abord ces masses égales, en désignant l'une d'elles par P; si l'on décompose tour à tour celle qui est placée en A′ en deux autres placées en A et B, et celle qui est placée en B′ en deux autres placées en B et C, les deux masses placées en B en vertu de cette double décomposition auront respectivement pour expression

$$P.\frac{AA'}{AB}, \qquad P.\frac{B'C}{BC},$$

et pourront conséquemment être remplacées par la masse unique

$$P\left(\frac{AA'}{AB}+\frac{B'C}{BC}\right),$$

appliquée au même point B. Si, lorsque ces deux masses seront parvenues en A″ et B″, on opère une semblable décomposition, la masse unique appliquée en B aura pour expression

$$P\left(\frac{AA''}{AB}+\frac{B''C}{BC}\right),$$

c'est-à-dire,

$$P\left\{\left(\frac{AA'}{AB}+\frac{B'C}{BC}\right)+\left(\frac{A'A''}{AB}-\frac{B'B''}{BC}\right)\right\};$$

mais, par hypothèse,

$$\frac{A'A''}{AB}=\frac{B'B''}{BC};$$

donc cette masse aura simplement pour expression

$$P\left(\frac{AA'}{AB}+\frac{B'C}{BC}\right);$$

c'est-à-dire qu'elle sera la même que dans le premier cas, ce qui démontre le premier des deux théorèmes énoncés.

2.° Si nous supposons, en second lieu, les masses inégales, en les représentant respectivement par P et Q, la masse unique appliquée en B sera, en vertu de la première décomposition

$$P,\frac{AA'}{AB}+Q.\frac{B'C}{BC};$$

et, en vertu de la seconde,

$$P.\frac{AA''}{AB}+Q.\frac{B''C}{BC}\ .$$

Cette dernière expression revient à

$$P.\frac{AA'}{AB}+Q.\frac{B'C}{BC}+P.\frac{A'A''}{AB}-Q.\frac{B'B''}{BC}\ ;$$

mais, par hypothèse,

$$\frac{P}{Q}=\frac{AB}{BC}\,,\quad \text{et}\quad A'A''=B'B''\,;$$

donc

$$\frac{P.A'A''}{Q'.B'B''}=\frac{AB}{BC}\,,$$

ou bien

$$P.\frac{A'A''}{AB}=Q.\frac{B'B''}{BC}\,,$$

donc, à la seconde époque, la masse appliquée en B aura simplement pour expression

$$P.\frac{AA'}{AB}+Q.\frac{B'C}{BC}\,,$$

c'est-à-dire qu'elle sera encore la même qu'à la première époque, ce qui démontre le dernier des deux théorèmes énoncés.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. ENTRE tous les arcs de cercles de même longueur et de différens rayons, quel est celui qui comprend la plus grande surface entre lui et sa corde ?

II. Entre toutes les calottes sphériques de même surface et de différens rayons, quelle est celle qui comprend le plus grand volume entre elle et le plan du cercle qui lui sert de base ?

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration des propriétés des quadrilatères à la fois inscriptibles et circonscriptibles au cercle ;

Par M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Marseille.

Les principales propriétés des quadrilatères inscrits ou circonscrits au cercle sont connues depuis long-temps : mais quelques-unes seulement ont été introduites dans les traités élémentaires de géométrie. Les autres se trouvent reléguées dans quelques ouvrages particuliers que consultent rarement ceux qui ne font pas une étude spéciale de la géométrie ; et il en résulte que la connaissance de ces dernières propriétés n'est pas assez généralement répandue. Ces propriétés peuvent pourtant être assez simplement démontrées, en y appliquant, comme je l'ai déjà fait, dans quelques articles des *Annales*, les principes sur les contacts des cercles ; principes qui m'ont toujours paru d'un facile secours dans toutes les recherches de ce genre.

Je me propose de compléter ici ce que j'ai déjà publié sur cette matière, en présentant la démonstration des propriétés des quadrilatères qui sont à la fois inscrits à un cercle et circonscrits à un autre, propriétés dont la découverte est due à M. Poncelet, qui les a fait connaître dans son *Traité des propriétés projectives des figures* (pag. 283 et 360) ; et elles ne sont pas la partie la moins curieuse de l'excellent ouvrage de ce géomètre.

Si je me permets de revenir sur un sujet déjà traité par M. Poncelet, ce n'est, certes, pas que j'aie la prétention de faire mieux que lui; mais, comme les démonstrations qu'il donne des propositions dont il va être question reposent sur des considérations qui n'ont point encore obtenu et pourront même ne pas obtenir de long-temps encore l'assentiment universel des géomètres, j'ai pensé faire une chose agréable à ceux qui ne connaissent pas encore les propriétés dont il s'agit, ou qui ne les croiraient pas suffisamment établies par les doctrines particulières à ce savant estimable, en les leur démontrant ici par les principes rigoureux de l'ancienne géométrie; persuadé que M. Poncelet lui-même me pardonnera volontiers une excursion sur son domaine qui n'a d'autre but que de répandre davantage, en les rendant plus accessibles, les découvertes dont il a enrichi la géométrie.

Les considérations employées par M. Poncelet, et qui ne paraissent pas de nature à satisfaire pleinement les amateurs zélés de la géométrie Euclidienne, sont, d'une part, celles qu'il déduit de la loi de continuité, et d'une autre, celles qui se rapportent aux droites variables de situation considérées comme s'éloignant à l'infini de certains points ou de certaines autres droites.

On a vu, par le rapport de M. Cauchy à l'Institut, sur l'ouvrage de M. Poncelet, ce que pense cet habile professeur du principe de continuité, qu'il regarde seulement comme une forte induction et comme une méthode de recherche. M. Poncelet lui-même n'a pu le considérer autrement, puisqu'il ne l'a proprement démontré nulle part. Ainsi, tant que ce principe n'aura pas reçu la sanction qu'une démonstration rigoureuse peut seule lui faire acquérir, les géomètres, jaloux de conserver à la science cette antique prérogative de certitude qui la caractérise, rejetteront ces principes métaphysiques qui, après avoir bouleversé toutes les sciences où ils se sont introduits, ne manqueraient pas de porter le désordre dans celle qui a traversé les siècles sans recevoir aucune atteinte.

En accordant à M. Poncelet que son principe de continuité par...

empreindre de son caractère tous les faits géométriques connus, on n'en sera pas moins fondé à lui en demander la démonstration ; et je ne la crois pas facile à donner, précisément parce que ce principe érigé en loi n'est pas une propriété positive, susceptible de tel ou tel genre de démonstration, mais bien plutôt le résumé général d'une multitude de faits connus, lequel, par sa trop grande généralité même, me semble devoir se dérober à tous les efforts que l'on voudrait faire dans la vue de le démontrer.

Ce que je viens de dire semble pouvoir être également appliqué à un autre genre de considération dont l'auteur fait aussi un usage très-fréquent, et qui consiste à supposer que des droites passent à l'infini. Ce principe, comme le précédent, employé avec trop de précipitation, semblerait de nature à légitimer beaucoup d'erreurs ; et c'en est assez pour que ceux qui attachent encore quelque prix à l'ancienne manière de procéder en géométrie répugnent à en faire usage.

Ce n'est pas pourtant que je pense qu'on ne puisse démontrer rigoureusement les propositions dont la géométrie se compose qu'en s'astreingnant à suivre servilement la marche tracée par les anciens. Ce que j'ai dit ailleurs de la manière large dont je voudrais que l'on traitât présentement la géométrie pure semble devoir me justifier suffisamment de ce reproche. Mais je ne pense pas non plus qu'il doive être permis de s'écarter aussi essentiellement de cette marche qu'a tenté de le faire l'estimable auteur du *Traité des propriétés projectives*.

Mon but étant de compléter la théorie élémentaire des propriétés des quadrilatères inscrits et circonscrits au cercle, j'ai pensé qu'il convenait d'abord d'offrir un résumé de ces propriétés, en rassemblant ici tout ce qu'on a trouvé de plus intéressant sur cette matière.

Les propriétés les plus élémentaires du quadrilatère inscrit au cercle, démontrées dans les élémens, sont les suivantes :

THÉORÈME I. Dans tout quadrilatère inscrit au cercle, la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autres.

Et réciproquement, tout quadrilatère dans lequel les sommes d'angles opposés sont égales est par là même inscriptible au cercle.

THÉORÈME II. Dans tout quadrilatère inscrit au cercle, le rectangle des segmens de l'une des diagonales est égal au rectangle des segmens de l'autre diagonale.

Et réciproquement, tout quadrilatère dans lequel les rectangles des segmens des deux diagonales sont égaux est par là même inscriptible au cercle.

THÉORÈME III. Dans tout quadrilatère inscrit, le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés.

THÉORÈME IV. Dans tout quadrilatère inscrit, les diagonales sont entre elles comme les sommes des rectangles des côtés qui partent de leurs extrémités.

A ces propriétés on peut encore ajouter les propriétés des quadrilatères inscrits à diagonales orthogonales découvertes par Archimède, et étendues à la sphère par Carnot.

THÉORÈME V. Dans tout quadrilatère inscrit, à diagonales orthogonales, 1.° *la somme des carrés des quatre côtés est double du carré du diamètre;* 2.° *la somme des carrés des quatre segmens des diagonales est égale au carré du diamètre;* 3.° *enfin, la somme des carrés des deux diagonales est égale au carré du diamètre, moins le quadruple du carré de la distance de leur point de concours au centre du cercle.*

Passons actuellement aux propriétés des quadrilatères circonscrits.

THÉORÈME VI. Dans tout quadrilatère circonscrit au cercle, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.

Et réciproquement, tout quadrilatère dans lequel les sommes de côtés opposés sont égales est circonscriptible au cercle.

Je me suis occupé de cette réciproque à la page 49 du VI.ᵉ volume des *Annales*, et j'ai fait voir (page 50, *note*) comment elle pouvait être démontrée par la théorie des contacts des cercles.

THÉORÈME VII. Dans tout quadrilatère circonscrit, la somme de deux angles opposés quelconques est égale à la somme des angles opposés aux sommets formés par les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés; pourvu que l'on prenne ceux qui regardent les deux angles restans du quadrilatère.

Ce théorème, dont la démonstration est fort simple, est dû à M. Poncelet. (*Propriétés projectives*, pag. 284).

THÉORÈME VIII. Dans tout quadrilatère circonscrit, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle.

Ce beau théorème est dû à Newton; mais il n'avait pas encore été démontré, pour le cercle en particulier, d'une manière élémentaire. Je l'ai démontré par la théorie des contacts (*Annales*, tom. XIV, pag. 309).

Si l'on considère deux quadrilatères dont l'un soit inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, et qui soient en outre inscrits l'un à l'autre, on aura le théorème suivant, que j'ai aussi démontré par la théorie des contacts (*Annales*, tom. XIII, pag. 305, et tom. XIV, pag. 43.

THÉORÈME IX. Si deux quadrilatères sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit, 1.° les diagonales des deux quadrilatères se couperont toutes quatre au même point; 2.° les points de concours des directions des côtés opposés des deux quadrilatères appartiendront tous quatre à une même ligne droite; 3.° le point de concours des quatre diagonales sera le pôle de la droite qui contiendra les points de concours des directions des côtés opposés.

Occupons-nous présentement des propriétés des quadrilatères à la fois inscriptibles et circonscriptibles au cercle et que nous avons annoncé avoir ici principalement en vue.

Soient O et I (fig. 1) les centres des deux cercles, et ABCD un quadrilatère à la fois inscrit au premier et circonscrit au dernier, de manière que ses côtés consécutifs AB, BC, CD, DA touchent ce dernier en E, F, G, H. Soient menées EF, FG, GH, HE, formant un nouveau quadrilatère inscrit au cercle I. Les diagonales AC, BD, EG, FH des deux quadrilatères se couperont toutes quatre en un même point P (*Théor. IX*). En outre, les trois droites AD, BC et EG concourront en un même point M, les trois droites AB, DC et HF en un même point N, les trois droites EF, HG et AC en un même point R, et enfin les trois droites EH, FG et BD en un même point S, et les quatre points M, N, R, S appartiendront à une même ligne droite dont le point P sera le pôle.

Désignons par r le rayon du cercle inscrit, par R le rayon du cercle circonscrit, et par a, b, c, d respectivement, les tangentes AE=AH, BF=BE, CG=CF, DH=DG.

THÉORÈME X. Dans tout quadrilatère à la fois inscrit à un cercle et circonscrit à un autre, les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés du quadrilatère avec le cercle inscrit divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux diagonales, et sont par conséquent perpendiculaires l'une à l'autre.

Démonstration. En effet, le quadrilatère ABCD étant inscrit au cercle O, les deux angles CAD, CBD sont égaux comme inscrits au même arc. Les deux angles AHF, BFH sont aussi égaux, comme formés par une même corde FH et les tangentes à ses deux extrémités. Donc les deux triangles APH et BPF sont équiangles ; d'où il suit que *Ang*.APH=*Ang*.BPF ; mais on a *Ang*.BPF =*Ang*.DPH, comme opposés au sommet ; donc *Ang*.APH=*Ang*.DPH ; donc la droite PH divise en deux parties égales l'angle APD ; et on prouvera, d'une manière semblable, que la droite PE divise en deux parties égales l'angle APB; donc les deux droites EG et FH, qui divisent en deux parties égales les angles adjacens APB et APD, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

THÉORÈME XI. Réciproquement, si, dans un quadrilatère circonscrit au cercle, les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés sont perpendiculaires l'une à l'autre, ce quadrilatère sera inscriptible à un autre cercle.

Démonstration. En effet, dans les deux quadrilatères AEPH, CFPG, les angles en P sont égaux comme droits; de plus, il est aisé de voir que les angles E et H du premier sont les supplémens respectifs des angles G et F du second; donc leurs angles A et C sont aussi supplément l'un de l'autre; ce qui prouve que le quadrilatère ABCD, déjà circonscrit à un cercle, est inscriptible à un autre cercle.

THÉORÈME XII. Dans tout quadrilatère à la fois inscrit à un cercle et circonscrit à un autre, les centres des deux cercles et le point de concours des diagonales appartiennent tous trois à une même ligne droite.

Démonstration. En effet, le point P étant le pôle commun de la droite MN, par rapport aux deux cercles, leurs centres O et I doivent se trouver tous deux sur la perpendiculaire PQ abaissée de ce point sur cette droite.

THÉORÈME XIII. Dans tout quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible, les distances des sommets au point de concours des diagonales sont proportionnelles aux tangentes menées de ces sommets au cercle inscrit et terminées à ce cercle. Les diagonales de ce même quadrilatère sont proportionnelles aux sommes de tangentes menées de leurs extrémités au même cercle.

Démonstration. En effet, le triangle APB, dans lequel la droite PE divise l'angle APB en deux parties égales donne PA : PB :: EA : EB :: $a:b$. Les triangles BPC, CPD, DPA donnent, pour les mêmes raisons, $PB:PB::b:c$, $PC:PD::c:d$ et $PD:PA::d:a$; d'où on conclut

$$PA:PB:PC:PD::a:b:c:d\ .$$

De cette suite de rapports égaux, on conclut ensuite sans difficulté

$$AC:BD::a+c:b+d\ .$$

THÉORÈME XIV. *Dans tout quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible, le produit des tangentes menées de deux sommets opposés et terminées à leurs points de contact est constant et égal au carré du rayon du cercle inscrit.*

Démonstration. En effet, menons les droites AI, BI, CI, DI, des sommets du quadrilatère au centre du cercle inscrit, et les rayons IE, IF, IG, IH, aux points de contact des côtés de ce quadrilatère; les deux triangles AIE, CIF seront semblables. En effet, ils sont d'abord rectangles, l'un en E et l'autre en F; de plus, leurs angles en A et C sont les moitiés des angles de même dénomination du quadrilatère; et, puisque ces derniers sont supplément l'un de l'autre, les autres seront complément l'un de l'autre. On aura donc $Ang.AIE=Ang.ICF$ et $Ang.IAE=Ang.CIF$. Ces deux triangles semblables donnent ainsi $AF:IE::IF:CF$ ou $a:r::r:c$, d'où $ac=r^2$. On trouverait pareillement $bd=r^2$; ainsi

$$ac=bd=r^2\ ,$$

Ce théorème, assez remarquable, n'était point encore connu.

Corollaire I. Le quadrilatère ABCD étant inscrit au cercle, on doit avoir $AC\times BD=AB\times CD+AD\times BC=(a+b)(c+b)+(a+d)(b+c)$ $=ac+ad+bc+bd+ab+ac+bd+cd=(ab+bc+cd+ad)+4r^2$ $=(a+c)(b+d)+4r^2$.

II. On a aussi $AC:BD::(a+c):(b+d)$. De là on tire

$$\overline{AC}^2=\frac{(a+c)\{(a+c)(b+d)+4r^2\}}{b+d}\ , \quad \overline{BD}^2=\frac{(b+d)\{(a+c)(b+d)+4r^2\}}{a+c}\ .$$

III. On a encore

$$AP:BP:CP:DP:AC:BD::a:b:c:d:(a+c):(b+d)\ ,$$

d'où l'on tire

$$\overline{AP}^2=\frac{a^2\{(a+c)(b+d)+4r^2\}}{(a+c)(b+d)}\ , \quad \overline{BP}^2=\frac{b^2\{(a+c)(b+d)+4r^2\}}{(a+c)(b+d)}\ ,$$

$$\overline{CP}^2=\frac{c^2\{(a+c)(b+d)+4r^2\}}{(a+c)(b+d)}\ , \quad \overline{DP}^2=\frac{d^2\{(a+c)(b+d)+4r^2\}}{(a+c)(b+d)}\ .$$

IV. Du centre O du cercle circonscrit abaissons des perpendiculaires OK et OL sur les diagonales AC et BD du quadrilatère ; les points K et L seront les milieux de ces diagonales ; et la droite KL qui les joint passera (*Théor. VIII*) par le centre I du cercle inscrit. Le quadrilatère OLPK, ayant deux angles droits opposés K et L, sera inscriptible (*Théor. I*) ; et l'on aura par conséquent (*Théor. II*) $IO\times IP=IK\times IL$.

Cela posé, on aura, d'après un théorème d'Euler $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{KL}^2$ ou bien $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{IK}^2+8IK\times IL=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d+a)^2$. Mais on tire des triangles AIC, BID

$$2\overline{IK}^2=\overline{AI}^2+\overline{CI}^2-\frac{\overline{AB}^2}{2}\ , \qquad 2\overline{IL}^2=\overline{BI}^2+\overline{DI}^2-\frac{\overline{BD}^2}{2}\ ;$$

substituant donc, il viendra

$$2(\overline{AI}^2+\overline{BI}^2+\overline{CI}^2+\overline{DI}^2)+8IK\times IL=(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(a+c)(b+d)\ ;$$

substituant enfin pour $\overline{AI}^2$, $\overline{BI}^2$, $\overline{CI}^2$, $\overline{DI}^2$ leurs valeurs respectives

a^2+r^2, b^2+r^2, c^2+r^2, d^2+r^2, il viendra, toutes réductions faites,

$$4\mathrm{IK}\times\mathrm{IL}=(a+c)(b+d)-4r^2.$$

V. Le triangle AIP donne $\overline{\mathrm{IP}}^2=\overline{\mathrm{AI}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2-2\mathrm{AI}\times\mathrm{AP}\,Cos.\mathrm{IAP}$. Le triangle AIC donne d'ailleurs

$$Cos.\mathrm{IAC}=\frac{\overline{\mathrm{AI}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CI}}^2}{2\mathrm{AI}\times\mathrm{AC}};$$

donc

$$\overline{\mathrm{IP}}^2=\overline{\mathrm{AI}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2-\mathrm{AP}.\frac{\overline{\mathrm{AI}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CI}}^2}{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AI}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2-\mathrm{AP}\times\mathrm{AC}-\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AC}}(\overline{\mathrm{AI}}^2-\overline{\mathrm{CI}}^2)$$

substituant donc pour $\overline{\mathrm{AI}}^2$, $\overline{\mathrm{AP}}^2$, $\mathrm{AP}\times\mathrm{AC}$, $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AC}}$, CI, leurs valeurs, il viendra

$$\overline{\mathrm{IP}}^2=a^2+r^2+\frac{a^2\{(a+c)(b+p)+4r^2\}}{(a+c)(b+d)}-\frac{a(a+c)\{(a+c)(b+d)+4r^2\}}{(a+c)(b+d)}-\frac{a(a^2-c^2)}{a+c};$$

ou bien

$$\overline{\mathrm{IP}}^2=2r^2-\frac{r^2\{(a+c)(b+d)+4r^2\}}{(a+c)(b+d)}=r^2-\frac{4r^4}{(a+c)(b+d)};$$

d'où

$$(a+c)(b+d)=\frac{4r^4}{r^2-\overline{\mathrm{IP}}^2};$$

donc

$$\mathrm{IK}\times\mathrm{IL}=\frac{r^2.\overline{\mathrm{IP}}^2}{r^2-\overline{\mathrm{IP}}^2};$$

donc aussi

$$\mathrm{OI}=\frac{r^2.\mathrm{IP}}{r^2-\overline{\mathrm{IP}}^2}.$$

THÉORÈME XV. Les quadrilatères circonscrits à un même cercle de telle sorte que leurs diagonales se coupent au même point, et qu'en outre les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés soient rectangulaires, sont tous inscriptibles à un même cercle.

Démonstration. En effet, les quadrilatères étant tels qu'il vient d'être dit, il résulte du *Théorème XI* que ces quadrilatères sont inscriptibles, chacun en particulier, et du *Théorème XII* que les centres des cercles circonscrits sont sur la droite IP qui passe par le centre du cercle inscrit et par le point où concourent toutes les diagonales. Il résulte enfin de tout ce que nous venons de prouver que la distance du centre de chacun des cercles circonscrits au centre du cercle inscrit est $\frac{r^2 \times IP}{r^2 - \overline{IP}^2}$, et que, par conséquent, cette distance est constante ; d'où il suit d'abord que les centres des cercles circonscrits se confondent tous au point O de IP tel que $OI = \frac{r^2 \times IP}{r^2 - \overline{IP}^2}$. Mais le point P devant être le pôle d'une même droite, relativement au cercle I et à chacun de ces cercles circonscrits, et ce point étant déjà le pôle de la droite MN relativement au cercle I, on aura aussi $OP \times OQ = R^2$; donc, puisque le point O est le même pour tous ces cercles, OP et OQ étant constans, tous ces cercles auront le même centre et le même rayon, et conséquemment tous nos quadrilatères seront inscrits à un même cercle.

THÉORÈME XVI. Si un quadrilatère est à la fois inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle, il y aura une infinité d'autres quadrilatères qui seront aussi inscrits au premier cercle et circonscrits au second, dont les diagonales passeront toutes par un même point, et dont les points de concours des directions des côtés opposés seront sur une même droite, polaire de ce point par rapport à l'un et à l'autre cercles.

Démonstration. En effet, par le point de concours des diagonales de notre quadrilatère, menons deux cordes orthogonales quelconques du cercle inscrit, et circonscrivons à ce cercle un quadrilatère dont les points de contact soient les extrémités de ces cordes ; il résulte du précédent théorème que ce quadrilatère et le premier devront être inscrits au même cercle ; mais le premier est déjà inscrit à un cercle, auquel le second devra conséquemment être aussi inscrit ; il y aura donc une infinité d'autres quadrilatères jouissant de la même propriété que le premier.

Je dis de plus que tous ces quadrilatères que l'on circonscrirait au cercle auquel est circonscrit le premier, en prenant trois de ses sommets sur la circonférence du cercle auquel celui-là est inscrit, se trouverait également inscrit à ce cercle. Cela est évident, par ce qui vient d'être dit plus haut.

Considérant présentement, en particulier, deux des quadrilatères en nombre infini qui peuvent être à la fois inscrits à l'un de nos cercles et circonscrits à l'autre, les points de concours des diagonales de l'un et de l'autre doivent coïncider. En effet, chacun de ces points doit être le pôle d'une même droite relativement aux deux cercles; ils doivent donc être situés tous deux sur la droite OI qui joint leurs centres. Soient P l'un de ces points et Q le pied de la perpendiculaire OI à la polaire de P; on aura, relativement au cercle inscrit, $IP \times IQ = r^2$, et relativement au cercle circonscrit $OP \times OQ = R^2$ ou $(OI+IP) \times (OI+IQ) = R^2$, d'où $\overline{OI}^2 + OI(IP+IQ) = R^2 - r^2$, et $IP+IQ = \frac{R^2 - r^2 - \overline{OI}^2}{OI}$. Le rectangle des deux droites IP et IQ est donc donné, ainsi que leur somme; ces deux droites sont donc données elles-mêmes; la situation du point P est donc constante sur la droite OI; ce point est donc commun à toutes les diagonales, ainsi que nous l'avions annoncé.

PROBLÈME. Deux cercles étant donnés de grandeur, quelle doit être la distance entre leurs centres pour qu'un même quadrilatère puisse à la fois être circonscrit au plus petit et inscrit au plus grand?

Solution. Soient R le rayon du plus grand cercle, r le rayon du plus petit, et x la distance cherchée entre leurs centres qui résout le problème.

Supposons les deux cercles disposés l'un par rapport à l'autre de la manière que l'exige le problème; comme alors une des diagonales du quadrilatère pourra être prise arbitrairement, nous pourrons prendre pour cette diagonale le diamètre du cercle circonscrit qui contient le centre de l'inscrit. Soit donc AC ce diamètre (fig. 2) et B un troisième sommet ; et soient menées sur BA et BC les perpendiculaires IE et IF. On aura AE$=a$, CF$=c$, IE$=$IF$=r$, AI$=R+x$, CI$=R-x$, et par suite

$$ac=r^2\,,\qquad a^2=(R+x)^2-r^2\,,\qquad c^2=(R-x)^2-r^2\,,$$

d'où

$$a^2-c^2=4Rx\,,\qquad a^2+c^2=2x^2+2(R^2-r^2)\;;$$

ajoutant et retranchant tour à tour à cette dernière équation, l'équation $2ac=2r^2$, il viendra

$$(a+c)^2=2x^2+2R^2\,,$$

$$(a-c)^2=2x^2+2(R^2-2r^2)\;;$$

d'où, en multipliant,

$$(a^2-c^2)^2=4\{x^4+(R^2-2r^2)x^2+R^2(R^2-2r^2)\}\,.$$

Mais on a, d'un autre côté,

$$(a^2-c^2)^2=4Rx\;;$$

égalant donc ces deux valeurs, transposant et réduisant, on aura finalement

$$x^4-2(R^2+r^2)x^2+R^2(R^2-2r^2)=0\;;$$

d'où

$$x=\sqrt{R^2+r^2\pm r\sqrt{4R^2+r^2}}\,.$$

On levera l'ambiguïté du signe en observant que lorsque $R^2=2r^2$ la valeur de x doit être nulle, ce qui prouve que c'est le signe inférieur qui doit être admis.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'une propriété du quadrilatère complet ;

Par M. Vecten, licencié ès sciences,

Théorème. Si, par les sommets du triangle formé par la rencontre deux à deux des trois diagonales d'un quadrilatère complet, on mène des parallèles aux côtés respectivement opposés, ces parallèles formeront un nouveau triangle circonscrit au premier, dont chaque côté aura quatre intersections avec les côtés du quadrilatère dont il s'agit, ce qui fera douze intersections en tout.

Or, il arrivera que ces douze points, déjà distribués trois à trois sur les quatre côtés du quadrilatère proposé seront aussi distribués trois à trois sur les quatre côtés d'un autre quadrilatère différent de celui-là.

Ceux de ces douze points qui se trouveront de nouveau en ligne droite trois à trois seront ceux où les côtés du triangle formé par trois quelconques des côtés du quadrilatère proposé seront coupés par les parallèles aux trois côtés du triangle des diagonales de ce même quadrilatère.

Démonstration. Soient AEC, BCD, EFD, AFB (fig. 3) les quatre côtés d'un quadrilatère complet, ayant pour ses trois diagonales AD, BE, CF, formant par leur rencontre le triangle GHK. Soit circonscrit à ce triangle le triangle PQR dont les côtés soient respectivement parallèles aux siens ; ces côtés, par leur rencontre avec ceux du quadrilatère, détermineront douze points ; et il s'agit de démontrer que ces douze points, déjà distribués trois à trois sur les quatre côtés du quadrilatère proposé, le seront aussi trois à trois sur les quatre côtés d'un nouveau quadrilatère différent de celui-là.

Pour bien faire comprendre quels sont ceux de ces douze points que nous devons démontrer être en ligne droite, remarquons qu'en prenant trois à trois les quatre côtés de notre quadrilatère, on obtient quatre triangles ABC, CDE, BDF, AEF, tous inscrits au triangle GHK ; en prenant le mot inscrit dans le sens le plus large ; c'est-à-dire, tous tels que les trois sommets se trouvent situés sur les directions de ses côtés. Or, pour chaque triangle, les trois points qu'il faut démontrer être en ligne droite sont ceux où ses côtés sont coupés par ceux des côtés du triangle PQR qui se trouvent parallèles à ceux du triangle GHK qui contiennent les sommets opposés. Ainsi, en particulier, pour le triangle ABC, par exemple, les points en ligne droite seront

Le point a, intersection de BC, opposé à A, situé sur HK, avec sa parallèle QR,

Le point b, intersection de CA, opposé à B, situé sur KG, avec sa parallèle RP,

Le point c, intersection de AB, opposé à C, situé sur GH, avec sa parallèle PQ;

et il nous suffira même de démontrer la proposition pour ces trois points.

Pour cela, rappelons d'abord que, dans tout quadrilatère complet, chacune des trois diagonales est coupée par les deux autres en parties proportionnelles, ce qui donne

$$\frac{AH}{AK}=\frac{DH}{DK}, \quad \frac{BK}{BG}=\frac{EK}{EG}, \quad \frac{CG}{CH}=\frac{FG}{FH};$$

mais, si l'on mène les droites PA, QB, RC, coupant respectivement QR, RP, PQ en T, U, V, à cause des parallèles, on aura

$$\frac{AH}{AK}=\frac{TR}{TQ}, \quad \frac{BK}{BG}=\frac{UP}{UR}, \quad \frac{CG}{CH}=\frac{VQ}{VP};$$

donc, en comparant

$$\frac{DH}{DK}=\frac{TR}{TQ}, \quad \frac{EK}{EG}=\frac{UP}{UR}, \quad \frac{FG}{FH}=\frac{VQ}{VP};$$

et, par suite,

$$\frac{DH.EK.FG}{DK.EG.FH}=\frac{TR.UP.VQ}{TQ.UR.VP};$$

mais, en considérant la droite DFE comme transversale du triangle GHK, on voit que le premier membre de cette dernière équation doit être égal à l'unité ; donc son second membre est aussi égal à l'unité, d'où l'on conclut, par les théories connues, que les trois droites PA, QB, RC doivent concourir en un même point L, et que conséquemment les trois intersections de QR et BC, RP et CA, PQ et AB, doivent appartenir à une même ligne droite.

Corollaire. Il résulte de ce qui précède que, si l'on joint le sommet P du triangle PQR opposé à QR parallèle à la diagonale AD, aux deux extrémités A et D de cette diagonale, par les droites PA et PD, ces droites contiendront les deux extrémités A′, D′ de la diagonale correspondante du nouveau quadrilatère complet sur lequel nos douze points se trouvent distribués. Il en sera de même des droites menées des sommets Q et R aux deux extrémités des deux autres diagonales du quadrilatère primitif, comme on le voit dans la figure.

En effet, dans les deux triangles $eb'd$ et $fc'd'$, les droites ef, $b'c'$, dd', qui joignent les sommets deux à deux, concourent, par ce qui précède, en un même point a', d'où il suit que les points P, A, A′ d'intersection des directions des côtés respectivement opposés à ces sommets doivent appartenir à une même ligne droite ; et on en démontrerait autant pour les autres points de la figure qui se trouvent dans les mêmes circonstances.

Remarque. Nous avons démontré plus haut que les droites PA, QB, RC concourent en un même point L, et nous aurions démontré de la même manière que les droites PA, QE, RF concourent en un même point O; d'où il suit que la droite PA contient les deux points O et L; mais il résulte du corollaire qui vient d'être démontré que cette droite contient aussi le point A′; donc les cinq points A, A′, P, O, L appartiennent à une même ligne droite; et on en démontrerait autant de chacun des cinq autres systèmes de cinq points placés, dans la figure, dans les mêmes circonstances que ces cinq là.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Sur quelques cas de développement des fonctions, et en particulier sur le développement des puissances fractionnaires des sinus et cosinus;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique.

§. I.

Sur le développement des puissances fractionnaires d'un binôme.

D'après les principes connus, on a

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}.b+\frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}a^{\frac{m}{n}-1}.b^2+\ldots\ldots$$

Mais on sait que $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ doit avoir n valeurs distinctes; donc le développement ci-dessus, ne donnant qu'une seule de ces valeurs, n'est pas complet, c'est-à-dire, qu'il n'exprime pas la valeur complète de la fonction $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ (*).

(*) En écrivant

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}\frac{b^2}{a^2}+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}.\frac{m-2n}{3n}\frac{b^3}{a^3}+\ldots\right);$$

D'un autre côté, on sait que la fonction $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ ne saurait admettre plus de n valeurs distinctes, d'où on doit conclure que toute équation de la forme

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}=\mathrm{f}(a\,,\,b\,,\,m\,,\,n)\ ,$$

où la fonction $\mathrm{f}(a\,,\,b\,,\,m\,,\,n)$ admet n valeurs différentes et se trouve telle que

$$\{\mathrm{f}(a\,,\,b\,,\,m\,,\,n)\}^n=(a+b)^m\ ,$$

donne toutes les valeurs possibles ou, en d'autres termes, la valeur complète de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$.

Cela posé, désignons par D le développement ci-dessus ; en observant que

$$\sqrt[n]{1}=\text{Cos.}\frac{2p\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2p\pi}{n}\ ,$$

p étant un nombre entier quelconque, on pourra écrire

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}=\left(\text{Cos.}\frac{2p\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2p\pi}{n}\right)D\ ;$$

équation qui sera vraie quel que soit le nombre entier positif p. Et comme alors son second membre, comme le premier, admettra n valeurs différentes, ce second membre sera le développement complet de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ (*).

---

ne pourrait-on pas dire que le développement est complété par le facteur $a^{\frac{m}{n}}$, susceptible, comme $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, de n valeurs différentes ?

J. D. G.

(*) En mettant D, comme nous l'avons fait tout à l'heure, sous la forme

Toutes les fois donc qu'on voudra raisonner sur le développement de la fonction $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, il faudra employer le développement complet

$$\left(\text{Cos.}\frac{2p\varpi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2p\varpi}{n}\right)D\,,$$

et non pas sa valeur particulière D.

§. II.

Sur le développement des puissances fractionnaires des sinus et cosinus.

1. Les considérations exposées dans le précédent §., bien qu'extrêmement simples, paraissent de nature à faire évanouir toutes les difficultés que présentent les développemens de

$$2^{\frac{m}{n}}\,\text{Sin.}^{\frac{m}{n}}x\,,\qquad 2^{\frac{m}{n}}\,\text{Cos.}^{\frac{m}{n}}x\,;$$

et même à montrer comment ces difficultés, qui ont tant occupé les géomètres depuis quelques années (*), se seraient pour ainsi

---

$$D=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\ldots\right)$$

il faudra ne prendre pour $a^{\frac{m}{n}}$ que sa valeur arithmétique absolue, sans quoi les n valeurs de ce facteur, combinées avec les n valeurs de $\text{Cos.}\frac{2p\varpi}{n}+\sqrt{-1}\frac{\text{Sin.}2p\varpi}{n}$, donneraient pour le développement de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ plus de valeurs qu'il n'en comporte.

J. D. G.

(*) Voyez *Annales*, tom. XIII, pages 94 et 213. M. Poinsot, dans un *Mémoire sur l'analise des sections angulaires*, lu à l'académie royale des sciences de Paris, le 19 mai 1823, s'est aussi occupé de cette question.

J. D. G.

dire évanouïes d'elles-mêmes, ou plutôt ne se seraient point présentées, si l'on avait raisonné avec la rigueur convenable.

En effet, suivant le procédé indiqué par M. Lacroix (*Trait. de cal. diff. et intég.*, tom. III, pag. 609), posons

$$\operatorname{Cos.}^{\frac{m}{n}} x = \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)^{\frac{m}{n}};$$

mais ayons soin, en développant le second membre suivant la formule du binôme, d'employer l'expression complète, telle que nous l'avons trouvée §. I. Après être repassé des exponentielles aux fonctions circulaires, nous trouverons

$$2^{\frac{m}{n}} \operatorname{Cos.}^{\frac{m}{n}} x = \left(\operatorname{Cos.} \frac{2p\varpi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{Sin.} \frac{2p\varpi}{n}\right) \left\{\begin{array}{l} \operatorname{Cos.} \frac{m}{n} x + \frac{m}{n} \operatorname{Cos.} \left(\frac{m}{n} - 2\right) x + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \operatorname{Cos.} \left(\frac{m}{n} - 4\right) x + \ldots \\ \quad + \sqrt{-1} \left\{ \operatorname{Sin.} \frac{m}{n} x + \frac{m}{n} \operatorname{Sin.} \left(\frac{m}{n} - 2\right) x + \ldots \right\} \end{array}\right.$$

Cette expression est nécessairement complète; c'est-à-dire qu'elle donne toutes les n valeurs différentes de la fonction $2^{\frac{m}{n}} \operatorname{Cos.}^{\frac{m}{n}} x$. Il est très-facile de la vérifier pour des cas particuliers, ainsi que l'a fait M. Poisson pour la formule complète qu'il a donnée ; mais cela n'est point nécessaire, puisqu'il ne saurait y avoir de doute sur son exactitude.

2. Rien de plus facile maintenant que de trouver la valeur de p qu'il faudra prendre pour obtenir une racine déterminée de l'expression $2^{\frac{m}{n}} \operatorname{Cos.}^{\frac{m}{n}} x$. En effet, posons, pour abréger,

$$P = \operatorname{Cos.} \frac{m}{n} x + \frac{m}{n} \operatorname{Cos.} \left(\frac{m}{n} - 2\right) x + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \operatorname{Cos} \left(\frac{m}{n} - 4\right) x + \ldots\ldots$$

$$Q = \operatorname{Sin.} \frac{m}{n} x + \frac{m}{n} \operatorname{Sin.} \left(\frac{m}{n} - 2\right) x + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \operatorname{Sin.} \left(\frac{m}{n} - 4\right) x + \ldots\ldots$$

soit en outre désignée par R la racine réelle positive de $2^{\frac{m}{n}}.\text{Cos.}\frac{m}{n}x$; l'équation ci-dessus pourra être écrite ainsi

$$R\left(\text{Cos.}\frac{2p'\varpi}{n}+\sqrt{-1}\text{Sin.}\frac{2p'\varpi}{n}\right)=\left(\text{Cos.}\frac{2p\varpi}{n}+\sqrt{-1}\text{Sin.}\frac{2p\varpi}{n}\right)(P+\sqrt{-1}Q)$$

p' représentant un nombre entier quelconque, généralement différent de p. Effectuant de part et d'autre les opérations indiquées et posant, pour abréger,

$$\frac{2p\varpi}{n}=k, \qquad \frac{2p'\varpi}{n}=k',$$

il viendra

$$R\text{Cos.}k'+\sqrt{-1}R\text{Sin }k'=P\text{Cos.}k-Q\text{Sin }k+\sqrt{-1}(P\text{Sin.}k+Q\text{Cos.}k) ;$$

d'où, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires (*),

$$R\text{Cos.}k'=P\text{Cos.}k-Q\text{Sin.}k , \qquad (1)$$

$$R\text{Sin.}k'=P\text{Sin.}k+Q\text{Cos.}k . \qquad (2)$$

(*) Nous placerons ici une remarque qui nous paraît importante : c'est qu'ayant une équation de la forme $a=b+c\sqrt{-1}$, on ne doit pas en conclure trop légèrement $a=b$, $c=0$, lorsque ces quantités sont des séries. On sait en effet qu'une valeur imaginaire peut être développée en une série de termes réels, comme par exemple

$$(-x^2)^{\frac{1}{2}}=[1-(1+x^2)]^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1+x^2}{2}-\frac{(1+x^2)^2}{2.4}-\frac{3(1+x^2)^3}{2.4.6}-\frac{3.5(1+x^2)^4}{2.4.6.8}-\ldots$$

mais qu'alors ces séries ne sauraient être constamment convergentes. Lors donc que quelqu'une des trois quantités a, b, c sera une série divergente, on ne pourra être certain de la conclusion $a=b$, $c=0$.

Prenant la somme des carrés des deux membres de ces équations, on aura d'abord la relation

$$R^2=P^2+Q^2\,,\qquad \text{d'où}\qquad R=\pm\sqrt{P^2+Q^2}\,,$$

au moyen de laquelle on pourra toujours calculer la valeur réelle unique ou la valeur réelle positive de $2^{\frac{m}{n}}\text{Cos.}^{\frac{m}{n}}x$, après avoir déterminé P et Q. Les équations (1, 2) donneront ensuite

$$\text{Cos.}k=\frac{P\text{Cos.}k'+Q\text{Sin.}k'}{R}\,,\qquad \text{Sin.}k=\frac{P\text{Sin.}k'-Q\text{Cos.}k'}{R}\,.$$

Au moyen de ces valeurs, celle de $2^{\frac{m}{n}}\text{Cos.}^{\frac{m}{n}}x$ pourra être écrite ainsi

$$2^{\frac{m}{n}}\text{Cos.}^{\frac{m}{n}}x=\pm\sqrt{P^2+Q^2}(\text{Cos.}k'+\sqrt{-1}\text{Sin.}k')$$

$$=+\sqrt{P^2+Q^2}\left(\text{Cos.}\frac{2p'\varpi}{n}+\sqrt{-1}\text{Sin.}\frac{2p'\varpi}{n}\right)\,.$$

Ainsi, P et Q étant calculés, on aura la valeur d'une racine quelconque déterminée de $2^{\frac{m}{n}}\text{Cos.}^{\frac{m}{n}}x$ en évaluant le second membre au moyen de p' qui sera donné, puisqu'on suppose que la racine dont il s'agit est déterminée. Si, par exemple, on demandait la racine entièrement réelle, il faudrait supposer $\text{Sin.}\frac{2p'\varpi}{n}=0$, d'où $p'=0$ ou $\frac{n}{2}$ ou n; ce qui ferait retomber sur la valeur

$$R=\pm\sqrt{P^2+Q^2}\,.$$

Cette remarque, au surplus, n'intéresse aucunement le sujet qui nous occupe, attendu que P et Q étant chacun, par la forme même de leur développement, moindres que $2^{\frac{m}{n}}$, ne sauraient être des séries divergentes.
(*Note de M. Stein.*)

3. Ce qui précède suppose qu'une au moins des valeurs de $2^{\frac{m}{n}}\text{Cos.}^{\frac{m}{n}}x$ est réelle ; mais si n est pair et $\text{Cos.}x$ négatif, il n'y en a pour lors que d'imaginaires. Dans ce cas, nous désignerons par $R\sqrt{-1}$ la valeur positive de $2^{\frac{m}{n}}\text{Cos.}^{\frac{m}{n}}x$ purement imaginaire, et nous aurons

$$R\sqrt{-1}(\text{Cos.}k'+\sqrt{-1}\text{Sin.}k')=(\text{Cos.}k+\sqrt{-1}\text{Sin.}k)(P+\sqrt{-1}Q)\ .$$

En développant et égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires de l'équation résultante, nous trouverons

$$R\text{Cos.}k'=P\text{Cos.}k-Q\text{Sin.}k\ ,$$

$$-R\text{Sin.}k'=P\text{Sin.}k+Q\text{Cos.}k\ ;$$

d'où

$$R^2=P^2+Q^2\ ,\qquad R=\pm\sqrt{P^2+Q^2}\ ,$$

et, par suite,

$$\text{Cos.}k=\frac{P\text{Cos.}k'-Q\text{Sin.}k'}{R}\ ,\qquad \text{Sin.}k=-\frac{P\text{Sin.}k'+Q\text{Cos.}k'}{R}\ ,$$

ce qui donne

$$2^{\frac{m}{n}}\text{Cos.}^{\frac{m}{n}}x=\sqrt{P^2+Q^2}(\text{Cos.}k'+\sqrt{-1}\text{Sin.}k')\sqrt{-1}$$

$$=\sqrt{P^2+Q^2}\left(\text{Cos.}\frac{2p'\varpi}{n}+\sqrt{-1}\text{Sin.}\frac{2p'\varpi}{n}\right)\sqrt{-1}\ .$$

4. Ces formules se vérifient aisément pour divers cas particuliers, comme, par exemple, pour $x=2\varpi$ et $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$; mais ces vérifications sont complètement inutiles, puisque les formules ne sauraient manquer d'être exactes ; et l'on peut, à l'inverse, s'en servir, dans chaque cas particulier, pour déterminer les valeurs

des séries représentées par P et Q, ce qui peut offrir d'intéressans résultats.

Nous croyons pouvoir affirmer, en terminant, que toutes les difficultés auxquelles ont pu et pourraient encore donner lieu à l'avenir les développemens de $2^{\frac{m}{n}}\text{Cos.}\frac{m}{n}x$ et $2^{\frac{m}{n}}\text{Sin.}\frac{m}{n}x$ se résoudront aisément et complètement à l'aide des considérations qui viennent d'être exposées.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche de quelques-unes des lois générales qui régissent les polyèdres ;

Par M. Gergonne.

Dans la VIII.e note de ses *Élémens de géométrie*, M. Legendre a déduit du théorème d'Euler, sur les polyèdres, quelques conséquences extrêmement piquantes, pour la plupart. Mais cet illustre géomètre paraît avoir négligé de remarquer qu'excepté quelques théorèmes, tels, par exemple, que celui d'Euler, dans l'énoncé desquels le nombre des faces et celui des sommets figurent de la même manière, il n'est aucun théorème de ce genre auquel il ne doive inévitablement en répondre un autre, qui s'en déduit en y permutant simplement entre eux les mots *faces* et *sommets* (*).

(*) On peut consulter sur ce sujet le IX.e volume du présent recueil (pag. 321—345).

La vérité de cette assertion s'aperçoit sur-le-champ, en imaginant, dans l'espace, une surface quelconque du second ordre, disposée d'une manière quelconque par rapport à un polyèdre donné, quel qu'il soit, et en supposant qu'on ait déterminé les polaires *conjuguées* ou *réciproques* de ses arêtes, par rapport à cette surface. On voit, en effet, que les polaires des côtés d'une même face concourront en un même point, pôle de cette face, et que les polaires des arêtes d'un même sommet seront, dans un même plan, plan polaire de ce sommet; d'où l'on voit que ces droites seront les arêtes d'un nouveau polyèdre, ayant autant de sommets que l'autre a de faces et autant de faces qu'il a de sommets; et dans lequel, en outre, chaque sommet aura autant de faces que la face correspondante du premier avait de côtés, et chaque face autant de côtés que le sommet correspondant du premier avait d'arêtes. Il est manifeste, de plus, que le premier des deux polyèdres dépendra du second de la même manière que le second dépendra du premier; de sorte qu'on pourra les considérer comme *conjugués* ou *réciproques* l'un de l'autre. Suivant donc que l'un des deux sera possible ou impossible, l'autre le sera également.

Cette seule considération suffit pour montrer que des théorèmes de M. Legendre il en résulte nécessairement quelques autres et pour indiquer en même temps la manière de les démontrer; mais, en y réfléchissant mieux, nous avons reconnu qu'on pouvait, par un procédé tout-à-fait simple et uniforme, parvenir à un nombre illimité de tels théorèmes. Nous nous bornerons ici à établir les plus remarquables d'entre eux, ce qui suffira pour mettre sur la voie de la recherche des autres ceux d'entre nos lecteurs que ce sujet pourra intéresser.

Rappelons d'abord le théorème d'Euler qui est le fondement de toute cette théorie :

I. *Dans tout polyèdre, la somme du nombre des faces et du* *nombre des sommets surpasse constamment de deux unités le nombre des arêtes* (*).

En représentant donc par F le nombre des faces, par S le nombre des sommets et par A le nombre des arêtes d'un polyèdre quelconque, on aura

$$F+S=A+2\ . \qquad (1)$$

Soient ensuite représentés respectivement par a, b, c, d,...., le nombre des faces trigones, tétragones, pentagones, hexagones, ..., et par α, β, γ, δ, ..., le nombre des sommets trièdres, tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres,......; on aura d'abord évidemment

$$\left.\begin{aligned} F&=a+b+c+d+e+f+\ldots\ldots\ , \\ S&=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\ldots\ldots\ ; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En outre, comme chaque arête appartient à la fois à deux faces et se termine à deux sommets, il s'ensuit qu'en comptant, soit le nombre des côtés de toutes les faces, soit le nombre des arêtes de tous les sommets, on compte deux fois le nombre total des arêtes du polyèdre; de sorte qu'on doit encore avoir

$$\left.\begin{aligned} 2A&=3a+4b+5c+6d+7e+8f+\ldots\ldots \\ 2A&=3\alpha+4\beta+5\gamma+6\delta+7\varepsilon+8\zeta+\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Substituant les valeurs (2) de F et S, et tour à tour les deux valeurs (3) de A dans l'équation (1), on obtiendra les deux suivantes;

(*) On peut consulter, sur l'historique et sur la démonstration de ce théorème, le III.e volume du présent recueil (pag. 169—189).

$$\left.\begin{array}{l} 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+.....)=4+a+2b+3c+4d+5e+.... \\ 2(a+b+c+d+e+.....)=4+\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+5\varepsilon+.... \end{array}\right\} \quad (4)$$

desquelles seules nous allons déduire tant les théorèmes de M. Legendre que tous ceux que nous nous sommes proposés d'y ajouter.

D'abord, ces deux équations peuvent être écrites ainsi

$$a+c+e+g+...=2\{(\alpha+\delta+\gamma+...)-2-(b+c)-2(d+e)-3(f+g)-...\},$$

$$\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta+...=2\{(a+b+c+...)-2-(\beta+\gamma)-2(\delta+\varepsilon)-3(\zeta+\eta)-...\};$$

d'où il suit que

II. *Dans tout polyèdre, les faces d'un nombre impair de côtés sont toujours en nombre pair.*

II. *Dans tout polyèdre, les sommets d'un nombre impair d'arêtes sont toujours en nombre pair.*

Entre ces mêmes équations (4), on peut éliminer tour à tour a et α, b et β, c et γ,..... Nous nous bornerons à examiner ce qui résulte des quatre premières éliminations.

Si d'abord on élimine tour à tour a et α, l'élimination de a entraînera celle de δ, et l'élimination de α entraînera celle de d; on aura

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha+2\beta+\gamma=12+(\varepsilon+2\xi+3\eta+..)+2(b+2c+3d+....)\,, \\ 3a+2b+c=12+(e+2f+3g+....)+2(\beta+2\gamma+3\delta+....)\,; \end{array}\right\} (5)$$

d'où résultent les conséquences que voici :

III. *Il n'existe aucun polyèdre dont tous les sommets aient plus de cinq arêtes.*

III. *Il n'existe aucun polyèdre dont toutes les faces aient plus de cinq côtés.*

IV. *Un polyèdre qui n'a ni sommets tétraèdres, ni sommets pentaèdres, doit avoir au moins quatre sommets trièdres.*

V. *Un polyèdre qui n'a ni sommets trièdres, ni sommets pentaèdres, doit avoir au moins six sommets tétraèdres.*

VI. *Un polyèdre qui n'a ni sommets trièdres, ni sommets tétraèdres, doit avoir au moins douze sommets pentaèdres.*

VII. *Si un polyèdre, dont toutes les faces sont trigones, n'a que des sommets trièdres et des sommets hexaèdres, il en aura nécessairement quatre de la première de ces deux sortes.*

VIII. *Si un polyèdre, dont toutes les faces sont trigones, n'a que des sommets tétraèdres et des sommets hexaèdres, il en aura nécessairement six de la première de ces deux sortes.*

IX. *Si un polyèdre à faces trigones n'a que des sommets pentaèdres et des sommets hexaèdres, il en aura nécessairement douze de la première de ces deux sortes.*

IV. *Un polyèdre qui n'a ni faces tétragones, ni faces pentagones, doit avoir au moins quatre faces trigones.*

V. *Un polyèdre qui n'a ni faces trigones, ni faces pentagones, doit avoir au moins six faces tétragones.*

VI. *Un polyèdre qui n'a ni faces trigones, ni faces tétragones, doit avoir au moins douze faces pentagones.*

VII. *Si un polyèdre, dont tous les sommets sont trièdres, n'a que des faces trigones et des faces hexagones, il en aura nécessairement quatre de la première de ces deux sortes.*

VIII. *Si un polyèdre, dont tous les sommets sont trièdres, n'a que des faces tétragones et des faces hexagones, il en aura nécessairement six de la première de ces deux sortes.*

IX. *Si un polyèdre à sommets trièdres n'a que des faces pentagones et des faces hexagones, il en aura nécessairement douze de la première de ces deux sortes.*

Si, entre les deux mêmes équations (4), on élimine une quelconque des deux quantités a et α, l'autre disparaîtra aussi, et il viendra

$$a+\alpha=8+(c+2d+3e+.....)+(\gamma+2\delta+3\varepsilon+.....)\ ; \qquad (6)$$

ce qui conduit aux conséquences que voici :

X. *Un polyèdre ne saurait être privé à la fois de faces trigones et de sommets trièdres. Il faut même que le nombre tant des uns que des autres ne soit pas moindre que huit.*

XI. *Tout polyèdre qui n'a point de faces trigones a au moins huit sommets trièdres.*

XI. *Tout polyèdre qui n'a point de sommets trièdres a au moins huit faces trigones.*

XII. *Si un polyèdre à faces tétragones n'a que des sommets trièdres et des sommets tétraèdres ; il en aura nécessairement huit de la première de ces deux sortes.*

XII. *Si un polyèdre à sommets tétraèdres n'a que des faces trigones et des faces tétragones ; il en aura nécessairement huit de la première de ces deux sortes.*

Si, entre les deux mêmes équations (4), on élimine tour à tour c et γ, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} 4a+2b+\alpha=20+2(d+2e+3f+4g+..)+(2\beta+5\gamma+8\delta+11\varepsilon+..)\,, \\ 4\alpha+2\beta+a=20+2(\delta+2\varepsilon+3\zeta+4\eta+..)+(2b+5c+8d+11e+..)\,; \end{array}\right\}(7)$$

ce qui conduit aux conséquences que voici :

XIII. *Si un polyèdre n'a ni faces trigones ni faces tétragones, il aura au moins vingt sommets trièdres.*

XIII. *Si un polyèdre n'a ni sommets trièdres ni sommets tétraèdres, il aura au moins vingt faces trigones.*

XIV. *Si un polyèdre à faces pentagones n'a que des sommets trièdres, ces sommets seront nécessairement au nombre de vingt.*

XIV. *Si un polyèdre à sommets pentaèdres n'a que des faces trigones, ces faces seront nécessairement au nombre de vingt.*

Nous ne pousserons pas plus loin cette analise qui, comme on le le voit, ne saurait offrir de difficulté, et nous observerons seulement qu'il en résulte qu'il ne saurait exister que cinq sortes de polyèdres dans lesquels toutes les faces se trouvent avoir le même nombre de côtés et tous les sommets le même nombre d'arêtes (*) ; ce sont :

Le tétraèdre *ou* tétragone, *qui a quatre faces trigones, quatre sommets trièdres et six arêtes.*

L'hexaèdre octogone, *qui a six faces tétragones, huit sommets trièdres et douze arêtes.*

L'octaèdre hexagone, *qui a six sommets tétraèdres, huit faces trigones et douze arêtes.*

Le dodécaèdre icosagone, *qui a douze faces pentagones, vingt sommets trièdres et trente arêtes.*

L'icosaèdre dodécagone, *qui a douze sommets pentaèdres, vingt faces trigones et trente arêtes.*

De là on conclura que, s'il y a des polyèdres réguliers, ils ne sauraient être qu'au nombre de cinq (**), à moins cependant qu'on ne veuille y comprendre la sphère considérée

Comme terminée par une infinité de tétragones infiniment petits, et par une infinité de sommets tétraèdres,

Comme terminée par une infinité d'hexagones infiniment petits, et par une infinité de sommets trièdres.

Comme terminée par une infinité de trigones infiniment petits, et par une infinité de sommets hexaèdres.

Ce qui en porterait alors le nombre à huit.

Terminons par la recherche des limites entre lesquelles doit se trouver compris soit le nombre des faces, soit le nombre des sommets d'un polyèdre dont le nombre des arêtes est donné. Le rapprochement des équations (2) et (3) donne

$$\left.\begin{aligned} 2A-2F&=b+2c+3d+4e+\ldots\ldots, \\ 2A-2S&=\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\ldots\ldots; \end{aligned}\right\}\quad(8)$$

(*) Voyez l'article du tom. IX déjà cité.

(1) Consultez, sur la possibilité de ces polyèdres, le tom. III, pag. 233.

En éliminant F de la première de ces équations et S de la seconde, au moyen de l'équation (1), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} 3S-A=6+b+2c+3d+4e+\ldots\ldots, \\ 3F-A=6+\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\ldots\ldots. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Les seconds membres des équations (8) peuvent fort bien être nuls ; mais ils sont, dans tous les cas, plus grands que -1 ; et, quant aux seconds membres des équations (9), ils peuvent fort bien être égaux à 6 ; mais ils seront, dans tous les cas, plus grands que 5. On a donc

$$2A-3F>-1\,, \qquad 3S-A>5\,,$$
$$2A-3S>-1\,; \qquad 3F-A>5\,;$$

d'où

$$3F \text{ ou } 3S \left\{\begin{array}{l} >A+5\,, \\ <2A+1\,; \end{array}\right.$$

Les signes $>$ et $<$ excluant l'égalité ; c'est-à-dire,

XV. *Dans tout polyèdre, le triple du nombre, soit des faces, soit des sommets, est toujours plus grand que le nombre des arêtes augmenté de cinq unités, mais plus petit que le double de ce même nombre d'arêtes augmenté d'une unité.*

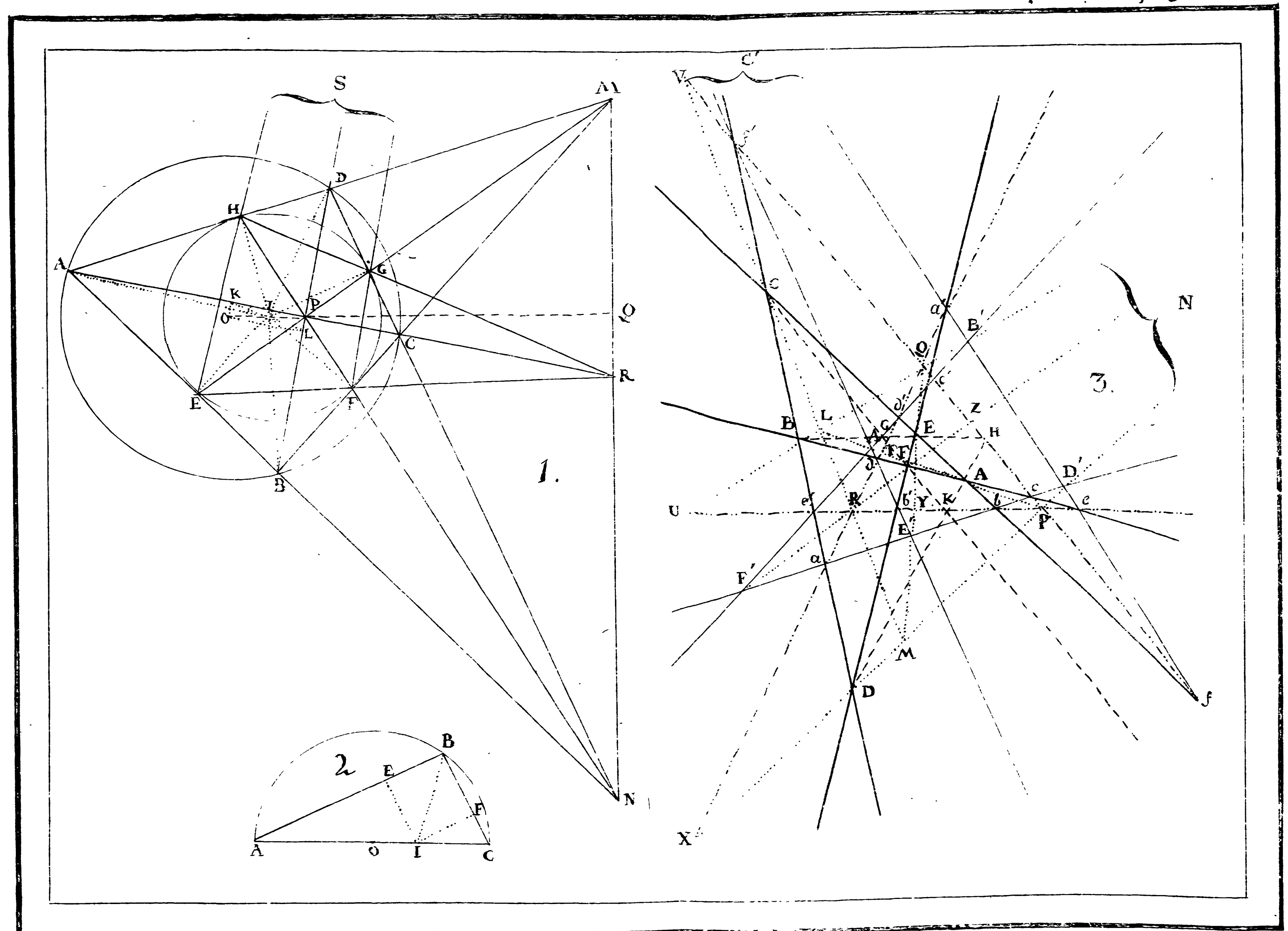
QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème d'analise.

Si, dans une équation de degré quelconque, les coefficiens p, q, r, s, de quatre termes consécutifs quelconques, pris avec leurs signes, sont tels qu'on ait

$$(q^2-pr)(r^2-qs)<0\,,$$

cette équation aura nécessairement deux racines imaginaires au moins ; et si une pareille relation a lieu pour plusieurs séries de quatre termes consécutifs, l'équation aura autant de couples de racines imaginaires au moins qu'elle offrira de pareilles séries.



J. D. G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherche sur la sommation des termes de la série de Taylor et sur les intégrales définies ;

Par M. Hippolyte Vernier, docteur ès sciences, professeur de mathématiques au collége royal de Caen.

1. Toutes les fois que la série de Taylor n'est pas en défaut, en arrêtant son développement à un quelconque de ses termes, on peut assigner les limites de l'erreur que l'on commet en négligeant ceux qui le suivent. L'objet principal que nous nous proposons dans cet essai est de donner, sous forme d'intégrale définie, la somme exacte d'un nombre quelconque de termes de cette série. Cette somme résulte de l'addition de deux intégrales définies, dont l'une représente la somme des termes de rang pair de la série, et l'autre la somme des termes de rang impair, prolongées toutes deux jusqu'au terme de la série complète où l'on veut s'arrêter. Deux autres formules, que l'on peut considérer comme le complément des deux premières, donnent aussi, l'une la somme des termes de rang pair et l'autre la somme des termes de rang impair, prolongées toutes deux à l'infini, à partir d'un terme de rang quelconque.

Considérées sous un autre point de vue, ces formules donnent la valeur d'un grand nombre d'intégrales définies. M. Poisson, dans son quatrième mémoire sur ce sujet (*), a déjà donné des formules générales d'intégration, pour les limites o et ϖ. Ces formules renferment une fonction arbitraire, assujettie à quelques restrictions; et, suivant les différentes formes que l'on donne à cette fonction, on obtient les valeurs d'autant d'intégrales définies. Ces formules donnent ainsi, à une branche d'analise qui, malgré son importance, n'avait guère offert jusqu'ici que des résultats épars, la plus grande généralité dont elle paraisse susceptible, dans l'état actuel de la science. Nous avons placé plusieurs formules du même genre à la suite de celles qui sont relatives à la sommation des termes de la série de Taylor. Indépendamment de leur fécondité, la manière dont elles s'obtiennent donne naissance à des développemens que nous croyons nouveaux, et qui ne paraîtront peut-être pas indignes de l'attention des géomètres.

2. Pour éviter au lecteur la peine de consulter d'autres ouvrages, nous allons d'abord nous occuper de la recherche de quelques résultats analitiques sur lesquels nous aurons à nous appuyer pour parvenir à notre but.

En représentant par n un nombre entier positif quelconque, on a, comme l'on sait,

$$\text{Sin.}nx=\frac{e^{nx\sqrt{-1}}-e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\frac{(e^{x\sqrt{-1}})^n-(e^{-x\sqrt{-1}})^n}{2\sqrt{-1}};$$

d'où, en posant $n=1$,

$$\text{Sin.}x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

puis, en divisant la première formule par la seconde,

(*) *Journal de l'école polytechnique*, XIX.e cahier, pag. 481 et suiv.

$$\frac{\text{Sin}.nx}{\text{Sin}.x}=\frac{(e^{x\sqrt{-1}})^n-(e^{-x\sqrt{-1}})^n}{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}\ ;$$

Mais on sait que

$$\frac{g^n-h^n}{g-h}=g^{n-1}+g^{n-2}h+g^{n-3}h^2+\ldots\ldots+g^2h^{n-3}+gh^{n-2}+h^{n-1},$$

ou encore

$$\frac{g^n-h^n}{g-h}=(g^{n-1}+h^{n-1})+gh(g^{n-3}+h^{n-3})+g^2h^2(g^{n-5}+h^{n-5})+\ldots\ldots$$

Si n est nombre pair, ce développement, mis sous cette dernière forme, se terminera par le terme

$$g^{\frac{n-2}{2}}h^{\frac{n-2}{2}}(g+h)\ ;$$

tandis que si n est impair ce dernier terme sera simplement

$$g^{\frac{n-1}{2}}h^{\frac{n-1}{2}}.$$

Or, si l'on fait

$$g=e^{x\sqrt{-1}}, \qquad h=e^{-x\sqrt{-1}},$$

on aura

$$gh, \quad \text{et en général} \quad g^kh^k=1\ ;$$

on aura de plus

$$g+h=e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}=2\text{Cos}.x$$

$$g^2+h^2=e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}=2\text{Cos}.2x$$

. . . .

$$g^{n-1}+h^{n-1}=e^{(n-1)x\sqrt{-1}}+e^{-(n-1)x\sqrt{-1}}=2\text{Cos}.(n-1)x\sqrt{-1}\ ;$$

substituant donc, et renversant le second membre, on trouvera

Pour n pair, $\dfrac{\text{Sin}.nx}{\text{Sin}.x}=2\{\text{Cos}.x+\text{Cos}.3x+\text{Cos}.5x+\ldots\ldots+\text{Cos}.(n-1)x\}$,

Pour n impair, $\dfrac{\text{Sin}.nx}{\text{Sin}.x}=1+2\{\text{Cos}.2x+\text{Cos}.4x+\text{Cos}.6x+\ldots\ldots+\text{Cos}.(n-1)x\}$;

Si présentement on multiplie l'une et l'autre de ces deux équations par dx et qu'indiquant ensuite l'intégration de leurs premiers membres, on exécute celles des seconds, on trouvera

Pour n pair, $\displaystyle\int\frac{\text{Sin}.nx}{\text{Sin}\ x}\,dx=2\left\{\frac{\text{Sin}.x}{1}+\frac{\text{Sin}.3x}{3}+\frac{\text{Sin}.5x}{5}+\ldots+\frac{\text{Sin}.(n-1)x}{n-1}\right\}$,

Pour n impair, $\displaystyle\int\frac{\text{Sin}.nx}{\text{Sin}.x}\,dx=x+2\left\{\frac{\text{Sin}.2x}{2}+\frac{\text{Sin}.4x}{4}+\frac{\text{Sin}.6x}{6}+\ldots+\frac{\text{Sin}\ (n-1)x}{n-1}\right\}$.

En prenant ces intégrales depuis $x=0$ jusqu'à $x=\varpi$, on aura évidemment

$$\text{Pour } n \text{ pair},\ \int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin}.nx}{\text{Sin}.x}\,dx=0\ ,$$

$$\text{Pour } n \text{ impair},\ \int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin}.nx}{\text{Sin}.x}\,dx=\varpi\ .$$

Changeons tour-à-tour n en $p+q$ et $p-q$, p et q étant tous deux des nombres entiers positifs, et p n'étant pas moindre que q.

Si p et q sont tous deux pairs ou tous deux impairs, $p+q$ et $p-q$ seront deux nombres positifs pairs, et ce sera la première des deux formules qu'il faudra employer. On aura donc

$$\int_0^{\varpi}\frac{\operatorname{Sin.}(p+q)x}{\operatorname{Sin.}x}\,dx=0\,,\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\operatorname{Sin.}(p-q)x}{\operatorname{Sin.}x}\,dx=0\,.\qquad (1)$$

Si, au contraire, des deux nombres p et q, l'un est pair et l'autre impair; $p+q$ et $p-q$ étant alors deux nombres impairs, ce sera alors à la seconde formule qu'il faudra recourir, et l'on aura

$$\int_0^{\varpi}\frac{\operatorname{Sin.}(p+q)x}{\operatorname{Sin.}x}\,dx=\varpi\,,\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\operatorname{Sin.}(p-q)}{\operatorname{Sin.}x}\,dx=\varpi\,.\qquad (2)$$

Si l'on prend tour-à-tour la différence des équations (1) et celle des équations (2), on trouvera également, en divisant par deux,

$$\int_0^{\varpi}\frac{\operatorname{Sin.}(p+q)x-\operatorname{Sin.}(p-q)x}{2\operatorname{Sin.}x}\quad\text{ou}\quad\int_0^{\varpi}\frac{\operatorname{Cos.}px.\operatorname{Sin.}qx}{\operatorname{Sin.}x}=0\,;\qquad (3)$$

formule qui a lieu conséquemment de quelque nature que soient les nombres entiers positifs p et q, pourvu qu'on n'ait pas $p<q$.

Mais, si l'on avait $p<q$, $p-q$ deviendrait négatif, ce qui ne changerait rien aux formules (1), de sorte que, pourvu que p et q fussent tous deux pairs ou tous deux impairs, la formule (3) aurait encore lieu.

Mais s'ils étaient l'un pair et l'autre impair, c'est-à-dire, si $p-q$ était un nombre négatif impair, on aurait

$$\int_0^{\varpi}\frac{\operatorname{Sin.}(p+q)x}{\operatorname{Sin.}x}\,dx=\varpi\,,\qquad \int_0^{\varpi}\frac{\operatorname{Sin.}(p-q)x}{\operatorname{Sin.}x}\,dx=-\varpi\,;$$

d'où, en prenant la demi-différence,

$$\int_0^{\varpi} \frac{\mathrm{Sin}\,(p+q)x - \mathrm{Sin}.(p-q)x}{2\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_0^{\varpi} \frac{\mathrm{Cos}\,px\mathrm{Sin}.qx}{\mathrm{Sin}.x} = \varpi. \quad (4)$$

De là on peut conclure, en particulier, 1.° que, quel que soit le nombre entier positif r, les intégrales, en nombre infini

$$\int \frac{\mathrm{Cos}.rx\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{Cos}.(r+1)x.\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{Cos}.(r+2)x.\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \ldots,$$

ainsi que les intégrales, en nombre infini,

$$\int \frac{\mathrm{Cos}.rx.\mathrm{Sin}.(r+2)x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{Cos}.rx.\mathrm{Sin}.(r+4)x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{Cos}.rx.\mathrm{Sin}.(r+6)x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \ldots,$$

prises entre les limites o et ϖ seront nulles; et qu'il en sera encore de même des $r-1$ intégrales

$$\int \frac{\mathrm{Cos}.rx\mathrm{Sin}.x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{Cos}.rx.\mathrm{Sin}.2x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \ldots\ldots, \int \frac{\mathrm{Cos}.rx\mathrm{Sin}.(r-1)x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x;$$

tandis que les intégrales, en nombre infini,

$$\int \frac{\mathrm{Cos}.rx.\mathrm{Sin}.(r+1)x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{Cos}.rx\,\mathrm{Sin}.(r+3)x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{Cos}.rx.\mathrm{Sin}.(r+5)x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \ldots$$

prises entre les mêmes limites, seront toutes égales à ϖ.

2.° Que, si le nombre entier positif r est *pair*, les $r-1$ intégrales

$$\int \frac{\mathrm{Cos}.0x.\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{Cos}.2x.\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x, \ldots\ldots, \int \frac{\mathrm{Cos}.(r-2)x.\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x,$$

prises toujours entre les limites o et ϖ, seront nulles, tandis que les $r-1$ autres intégrales

$$\int\frac{\text{Cos.}x.\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}\text{d}x\,,\ \int\frac{\text{Cos.}3x.\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}\text{d}x\,,\ldots\ldots,\ \int\frac{\text{Cos.}(r-1)x.\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}\text{d}x\,,$$

prises entre les mêmes limites, seront toutes égales à ϖ.

3.° Enfin, qu'il en ira à l'inverse, si le nombre entier positif r est *impair*; c'est-à-dire qu'alors ce seront les intégrales de la dernière ligne qui seront nulles, tandis que celles de l'avant-dernière seront toutes égales à ϖ.

Toutes ces remarques vont, dans un instant, recevoir leur application.

3. Soient présentement α et p deux constantes indéterminées, et soit F la caractéristique d'une fonction quelconque; le théorème de Taylor donnera

$$\text{F}(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})=\text{F}(\alpha)+\frac{p}{1}\text{F}'(\alpha).e^{x\sqrt{-1}}+\frac{p^2}{1.2}\text{F}''(\alpha).e^{2x\sqrt{-1}}+\frac{p}{1.2.3}\text{F}'''(\alpha).e^{3x\sqrt{-1}}+\ldots$$

puis, en changeant le signe de x,

$$\text{F}(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})=\text{F}(\alpha)+\frac{p}{1}\text{F}'(\alpha).e^{-x\sqrt{-1}}+\frac{p^2}{1.2}\text{F}''(\alpha).e^{-2x\sqrt{-1}}+\frac{p^3}{1.2.3}\text{F}'''(\alpha)\,e^{-3x\sqrt{-1}}+\ldots$$

Prenant d'abord la demi-somme de ces équations, puis leur demi-différence divisée par $\sqrt{-1}$, en se rappelant qu'en général

$$\frac{e^{k\sqrt{-1}}+e^{-k\sqrt{-1}}}{2}=\text{Cos.}k\,,\quad \frac{e^{k\sqrt{-1}}-e^{-k\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\text{Sin.}k\,,$$

on aura ces deux nouvelles équations

$$\frac{\text{F}(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})+\text{F}(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})}{2}$$

$$=\text{F}(\alpha)+\frac{p}{1}\text{F}'(\alpha).\text{Cos.}x+\frac{p^2}{1.2}\text{F}''(\alpha).\text{Cos.}2x+\frac{p^3}{1.2.3}\text{F}'''(\alpha).\text{Cos.}3x+\ldots;$$

$$\frac{\mathrm{F}(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})-\mathrm{F}(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{p}{1}\mathrm{F}'(\alpha).\mathrm{Sin}.x+\frac{p^2}{1.2}\mathrm{F}''(\alpha).\mathrm{Sin}.2x+\frac{p^3}{1.2.3}\mathrm{F}'''(\alpha).\mathrm{Sin}.3x+\ldots\ldots$$

multipliant les deux membres de la première et ceux de la seconde respectivement par

$$\frac{\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x\ , \qquad \frac{\mathrm{Cos}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x\ ,$$

et indiquant les intégrations, il viendra

$$\int\frac{\{\mathrm{F}(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})+\mathrm{F}(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})\}\mathrm{Sin}.rx}{2\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{F}(\alpha)\int\frac{\mathrm{Cos}.ox.\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x+\frac{p}{1}\mathrm{F}'(\alpha)\int\frac{\mathrm{Cos}.x.\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x+\frac{p^2}{1.2}\mathrm{F}''(\alpha)\int\frac{\mathrm{Cos}.2x.\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x+\ldots$$

$$\int\frac{\{\mathrm{F}(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})+\mathrm{F}(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})\}\mathrm{Cos}.rx}{2\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{p}{1}\mathrm{F}'(\alpha)\int\frac{\mathrm{Cos}.rx.\mathrm{Sin}.x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x+\frac{p^2}{1.2}\mathrm{F}''(\alpha)\int\frac{\mathrm{Cos}\,rx.\mathrm{Sin}.2x}{\mathrm{Sin}.x}\mathrm{d}x+\ldots\ldots$$

Si présentement on prend les intégrales entre les limites o et ϖ, en ayant égard à ce qui a été dit ci-dessus, et en renversant le second membre de la première équation ; on trouvera, quel que soit d'ailleurs le nombre entier positif r, en divisant par ϖ,

$$(A)\qquad \frac{1}{2\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\{F(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})+F(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})\}\,\mathrm{Sin}.rx}{2\mathrm{Sin}.x}\,dx$$

$$=\frac{p^{r-1}}{1.2....(r-1)}.F^{(r-1)}(\alpha)+\frac{p^{r-3}}{1.2...(r-3)}.F^{(r-3)}(\alpha)+\frac{p^{r-5}}{1.2...(r-5)}.F^{(r-5)}(\alpha)+...$$

$$(B)\qquad \frac{1}{2\varpi\sqrt{-1}}\int_0^{\varpi}\frac{\{F(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})-F(\alpha+re^{-x\sqrt{-1}})\}\,\mathrm{Cos}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\,dx$$

$$=\frac{p^{r+1}}{1.2...(r+1)}F^{(r+1)}(\alpha)+\frac{p^{r+3}}{1.2...(r+3)}F^{(r+3)}(\alpha)+\frac{p^{r+5}}{1.2...(r+5)}F^{(r+5)}(\alpha)+....$$

Si donc r est un nombre *pair*, la formule (A) donnera la somme des termes de degrés impairs de la série de Taylor, depuis le terme affecté de p jusqu'au terme affecté de p^{r-1}; et la formule (B) donnera la somme de tous les autres termes de degrés impairs, à l'infini.

Si, au contraire, r est un nombre *impair*, la formule (A) donnera la somme des termes de degrés pairs de la série de Taylor, depuis le terme $F(\alpha)$ jusqu'au terme affecté de p^{r-1}; et la formule (B) donnera la somme de tous les autres termes de degrés pairs, à l'infini.

4. Cette même série de Taylor donne

$$F(\alpha+p)=F(\alpha)+\frac{p}{1}F'(\alpha)+\frac{p^2}{1.2}F''(\alpha)+\frac{p^3}{1.2.3}F'''(\alpha)+.....,$$

puis, en changeant le signe de p,

$$F(\alpha-p)=F(\alpha)-\frac{p}{1}F'(\alpha)+\frac{p^2}{1.2}F''(\alpha)-\frac{p^3}{1.2.3}F'''(\alpha)+....;$$

prenant tour-à-tour la demi-somme et la demi-différence de ces deux équations, il viendra

$$\frac{\mathrm{F}(\alpha+p)+\mathrm{F}(\alpha-p)}{2}=\mathrm{F}(\alpha)+\frac{p^2}{1.2}\mathrm{F}''(\alpha)+\frac{p^4}{1.2.3.4}\mathrm{F}''''(\alpha)+\ldots \qquad \text{(C)}$$

$$\frac{\mathrm{F}(\alpha+p)+\mathrm{F}(\alpha-p)}{2}=\frac{p}{1}\mathrm{F}'(\alpha)+\frac{p^3}{1.2.3}\mathrm{F}'''(\alpha)+\frac{p^5}{1.2.3.4.5}\mathrm{F}^{\mathrm{v}}(\alpha)+\ldots \qquad \text{(D)}$$

équations dont les seconds membres sont respectivement, comme l'on voit, les sommes de termes de degrés pairs et de degrés impairs de la série de Taylor.

En multipliant et divisant en même temps le premier membre de l'équation (A) par $\sqrt{-1}$, elle prend cette forme

$$\frac{1}{2\varpi\sqrt{-1}}\int_0^{\varpi}\frac{\{\mathrm{F}(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})+\mathrm{F}(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})\}\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}\,x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{p^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}.\mathrm{F}^{(r-1)}(\alpha)+\frac{p^{r-3}}{1.2\ldots(r-3)}.\mathrm{F}^{(r-3)}(\alpha)+\frac{p^{r-5}}{1.2\ldots(r-5)}.\mathrm{F}^{(r-5)}(\alpha)+\ldots$$

Si l'on ajoute cette équation à l'équation (B) le second membre de leur somme sera, suivant que r sera pair ou impair, la somme de tous les termes de degré impair ou la somme de tous les termes de degré pair de la série de Taylor, c'est-à-dire que cette somme sera égale au second membre de l'équation (D) ou au second membre de l'équation (C).

Quant à la somme des premiers membres, elle sera

$$\frac{1}{2\varpi\sqrt{-1}}\int_0^{\varpi}\frac{\{\mathrm{F}(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})-\mathrm{F}(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})\}\mathrm{Cos}.rx+\{\mathrm{F}(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})+\mathrm{F}(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})\}\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.rx}{\mathrm{Sin}.x}\,\mathrm{d}x$$

ou, en développant,

$$\frac{1}{2\varpi\sqrt{-1}}\int_0^{\varpi}\frac{F(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}}).(\text{Cos}.rx+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.rx)-F(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}}).(\text{Cos}.rx-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.rx)}{\text{Sin}.x}\,dx\ ;$$

ou encore

$$\frac{1}{2\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{e^{rx\sqrt{-1}}.F(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})-e^{-rx\sqrt{-1}}\,F(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}.\text{Sin}.x}\,dx\ ;$$

de sorte qu'on pourra écrire, si r est un nombre pair,

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{e^{rx\sqrt{-1}}.F(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})-e^{-rx\sqrt{-1}}.F(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}.\text{Sin}.x}\,dx=F(\alpha+p)-F(\alpha-p)\ ;\quad (E)$$

et, si r est un nombre impair,

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{e^{rx\sqrt{-1}}.F(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})-e^{-rx\sqrt{-1}}.F(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}.\text{Sin}.x}\,dx=F(\alpha+p)+F(\alpha-p).\quad (F)$$

On remarquera que les seconds membres de ces équations sont indépendans de r.

Si dans la formule (B), on fait tour-à-tour $r=0$ et $r=1$, elle donnera

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{F(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})-F(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}.\text{Sin}.x}\,dx=F(\alpha+p)-F(\alpha-p)\ ,\qquad (G)$$

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\{F(\alpha+pe^{x\sqrt{-1}})-F(\alpha+pe^{-x\sqrt{-1}})\}\text{Cos}.x}{\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}.x}\,dx=F(\alpha+p)+F(\alpha-p)-2F(\alpha)\quad (H)$$

mais on ne pourrait obtenir des résultats analogues de la formule (A) qu'en y supposant r infini.

5. Les formules (A) et (B) servent à connaître les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies, par celles de la série finie qui en forme le second membre. La seule condition à laquelle doive être assujettie la fonction arbitraire F qui entre dans ces formules et les deux constantes α et p, c'est que la série de Taylor soit applicable et que les développemens

$$\mathrm{F}(\alpha)+\frac{p}{1}\mathrm{F}'(\alpha).\mathrm{Sin}.x+\frac{p^2}{1.2}\mathrm{F}''(\alpha).\mathrm{Sin}.2x+\ldots\ldots$$

$$\mathrm{F}(\alpha)+\frac{p}{1}\mathrm{F}'(\alpha).\mathrm{Cos}.x+\frac{p^2}{1.2}\mathrm{F}''(\alpha).\mathrm{Cos}.2x+\ldots\ldots$$

soient convergens.

Ainsi, par exemple, on pourra supposer

$$\mathrm{F}(\alpha)=\mathrm{Cos}.a\alpha\ ,\quad \mathrm{F}(\alpha))=\mathrm{Sin}.a\alpha\ ,\quad \mathrm{F}(\alpha)=e^{m\alpha}\ ;$$

les constantes α, a, m, étant quelconques. Mais si l'on fait

$$\mathrm{F}(\alpha)=\alpha^m\ ,$$

en supposant ensuite $\alpha=0$, il faudra que l'exposant m soit un nombre entier positif, autrement les termes de la série de Taylor deviendraient infinis. Si, au contraire, on suppose $\alpha=1$, le nombre m pourra recevoir toutes les valeurs positives possibles. On poura faire aussi

$$\mathrm{F}(\alpha)=\frac{\alpha^n}{1+b\alpha^m}\ ,$$

m et n étant des nombres entiers positifs, et b un nombre moindre que l'unité, pourvu que l'on fasse ensuite $\alpha=0$.

Soit, par exemple, $\mathrm{F}(\alpha)=e^{m\alpha}$, et qu'on doive ensuite poser $\alpha=0$, ce qui exigera que le nombre m soit entier ; posons de plus $p=1$, le premier membre de l'équation (A) deviendra

$$\frac{1}{2\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}\left(e^{me^{x\sqrt{-1}}}+e^{me^{-x\sqrt{-1}}}\right)\text{d}x\ ;$$

ou bien

$$\frac{1}{2\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}\{e^{m(\text{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x)}+e^{m(\text{Cos.}x-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x)}\}\text{d}x,$$

ou encore

$$\frac{1}{2\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}\,.\,e^{m\text{Cos.}x}.(e^{m\text{Sin.}x\sqrt{-1}}+e^{-m\text{Sin.}x\sqrt{-1}})\text{d}x,$$

ou enfin

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}\,.\,e^{m\text{Cos.}x}.\text{Cos.}(m\text{Sin.}x)\text{d}x\ .$$

On aura, en outre, en faisant toujours $\alpha=0$, après la différentiation,

$$\text{F}(\alpha)=1\ ,\quad \text{F}'(\alpha)=m\ ,\quad \text{F}''(\alpha)=m^2\ ,\ldots\ldots\text{F}^{(r-1)}(\alpha)=m^{r-1}\ ;$$

en conséquence l'équation (A) deviendra

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}.e^{m\text{Cos.}x}.\text{Cos.}(m\text{Sin.}x)\text{d}x=\frac{m^{r-1}}{1.2\ldots r-1}+\frac{m^{r-3}}{1.2\ldots(r-3)}+\frac{m^{r-5}}{1.2\ldots(r-5)}+\ldots$$

c'est-à-dire, si r est un nombre *pair*,

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin.}rx}{\text{Sin}\,x}.e^{m\text{Cos.}x}.\text{Cos.}(m\text{Sin.}x)\text{d}x=\frac{m}{1}+\frac{m^3}{1.2.3}+\frac{m^5}{1.2.3.4.5}+\ldots+\frac{m^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}\ ;$$

et si r est un nombre *impair*,

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{\varpi}\frac{\text{Sin.}rx}{\text{Sin.}x}.e^{m\text{Cos.}x}.\text{Cos.}(m\text{Sin.}x)\text{d}x=1+\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^4}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{m^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}\ ;$$

6. Les formules (A) et (B) ont été construites pour les limites d'intégration o et ϖ ; mais la considération de la série de Taylor en fournit encore deux autres, qui ont lieu entre les limites o et ∞, et qui donnent, sous forme finie, un nombre illimité d'intégrales.

Pour les obtenir, rappelons d'abord ces deux formules connues

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos}.rqx}{b^2+x^2}\,\text{d}x = \frac{\varpi}{2b}e^{-rqb}, \quad \int_0^\infty \frac{x\text{Sin}.rqx}{b^2+x^2}\,\text{d}x = \frac{\varpi}{2b}e^{-rqb}. \text{ (*)}$$

Remarquons en outre que, par la série de Taylor, on a

$$\frac{\text{F}(\alpha+pe^{qx\sqrt{-1}})+\text{F}(\alpha+pe^{-qx\sqrt{-1}})}{2} = \text{F}(\alpha)+\frac{p}{1}.\text{F}'(\alpha)\text{Cos}.qx+\frac{p^2}{1.2}\text{F}''(\alpha).\text{Cos}.2qx+.$$

$$\frac{\text{F}(\alpha+pe^{qx\sqrt{-1}})-\text{F}(\alpha+pe^{-qx\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}} = \frac{p}{1}.\text{F}'(\alpha).\text{Sin}.qx+\frac{p^2}{1.2}.\text{F}''(\alpha).\text{Sin}.2qx+\ldots$$

en multipliant les deux membres de l'une et de l'autre équations par dx, intégrant entre o et ∞, et ayant égard aux deux formules ci-dessus, il viendra

$$\int_0^\infty \frac{\text{F}(\alpha+pe^{qx\sqrt{-1}})+\text{F}(\alpha+pe^{-qx\sqrt{-1}})}{b^2+x^2}\,\text{d}x$$

$$= \frac{\varpi}{b}\left\{\text{F}(\alpha)+\frac{p}{1}\text{F}'(\alpha).e^{-qb}+\frac{p^2}{1.2}.\text{F}''(\alpha).e^{-2qb}+\frac{p^3}{1.2.3}.\text{F}'''(\alpha).e^{-3qb}+\ldots\right\}$$

(*) Voyez un mémoire de M. Laplace, dans le volume des *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris*, pour 1782, ou la *Théorie analitique des probabilités* du même géomètre, chap. III, n.° 33, ou encore le *Nouveau bulletin des sciences*, n.° 43, avril 1811, ou enfin le *Traité des différences et des séries* de M. Lacroix, 2.e édition, page 492, n.° 1211. Consultez aussi un beau mémoire de M. Bidone, dans les *Mémoires de l'académie royale des sciences de Turin*, pour 1812.

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{F(\alpha+pe^{qx\sqrt{-1}})+F(\alpha+pe^{-qx\sqrt{-1}})}{b^2+x^2}\,x\mathrm{d}x$$

$$=\varpi\left\{\frac{p}{1}\,F'(\alpha).e^{-qb}+\frac{p^2}{1.2}.F''(\alpha).e^{-2qb}+\frac{p^3}{1.2.3}.F'''(\alpha).e^{-3qb}+\ldots\right\}$$

on encore

$$\int_0^\infty \frac{F(\alpha+pe^{qx\sqrt{-1}})+F(\alpha+pe^{-qx\sqrt{-1}})}{b^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\varpi}{b}F(\alpha+pe^{-qb}), \quad \text{(M)}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{F(\alpha+pe^{qx\sqrt{-1}})-F(\alpha+pe^{-qx\sqrt{-1}})}{b^2+x^2}\,x\mathrm{d}x=\varpi\{F(\alpha+pe^{-qb})-F(\alpha)\}. \quad \text{(N)}$$

On peut faire, dans les formules (M) et (N), les mêmes suppositions que dans les formules (A) et (B), puisque, dans ces quatre formules, la fonction F est assujettie aux mêmes restrictions.

Soient, par exemple, $F(\alpha)=\text{Sin.}(a\alpha)$, $\alpha=0$, $p=1$. Le premier membre de l'équation (M) deviendra

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\,ae^{qx\sqrt{-1}}+\text{Sin.}\,ae^{-qx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\,\mathrm{d}x\,;$$

En faisant disparaître les imaginaires et formant le second membre, on trouvera finalement

$$\int_0^\infty \text{Sin.}(a\text{Cos}qx)\,\frac{e^{a\text{Sin.}qx}+e^{-a\text{Sin.}qx}}{b^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\varpi}{b}\text{Sin.}\,ae^{-qb}.$$

Il est inutile de multiplier les exemples pour faire comprendre que les formules (M) et (N) peuvent donner une infinité d'intégrales différentes.

7. Un moyen fréquemment employé dans les intégrations consiste à substituer à la variable une nouvelle variable, dont les limites sont alors les valeurs correspondantes aux valeurs limites de la première variable. Cette transformation ne change rien à la valeur de l'intégrale définie, somme des élémens différentiels. Mais, si l'on vient à remplacer une variable, réelle dans toute l'étendue de l'intégration, par une fonction variable, composée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, il semble que la valeur de l'intégrale définie peut en être altérée, bien que la nouvelle fonction substituée varie dans les mêmes limites que la variable primitive, puisqu'on a remplacé une somme d'élémens réels par une somme d'élémens imaginaires.

Nous nous proposons ici de faire voir que néanmoins une substitution de ce genre, appliquée à une fonction réelle et finie, dans toute l'étendue de l'intégration, loin de conduire à des résultats absurdes, peut servir, au contraire, dans un grand nombre de cas, à découvrir de nouvelles formules générales d'intégration.

Soit $\varphi(z).\mathrm{d}z$ un différentielle que l'on doit intégrer depuis $z=-1$ jusqu'à $z=+1$, et qui demeure constamment réelle entre ces limites. Soit fait $z=e^{x\sqrt{-1}}$; les limites correspondantes de x seront respectivement $x=\varpi$ et $x=0$, à cause de $e^{x\sqrt{-1}}=\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x$. On tire de cette relation $\mathrm{d}z=\sqrt{-1}.e^{x\sqrt{-1}}\mathrm{d}x$, ce qui donne

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(z).\mathrm{d}z=-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi}e^{x\sqrt{-1}}\,\varphi(e^{x\sqrt{-1}})\mathrm{d}x\;; \qquad \text{(P)}$$

équation qui ne sera vraie qu'autant qu'après avoir séparé dans le second membre la partie réelle de la partie imaginaire, l'intégrale de la partie imaginaire sera nulle, et celle de la partie réelle égale au premier membre.

Mais l'équation (P), obtenue en faisant passer la variable z, toujours réelle, par une série de valeurs imaginaires, ne serait pas suffisamment établie, s'il n'y avait, pour y parvenir, une marche où les imaginaires ne se montrassent qu'en apparence, et qui fît voir en outre à quelle restriction la fonction φ doit être assujettie.

Supposons $\varphi(z)$ développable suivant les puissances entières de z, on aura, par la série de Taylor que nous supposons convergente,

$$e^{x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{x\sqrt{-1}})+e^{-x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{-x\sqrt{-1}})$$

$$=2\left\{\varphi(o).\text{Cos}.x+\frac{\varphi'(o)\text{Cos}.2x}{1}+\frac{\varphi''(o)\text{Cos}.3x}{1.2}+\ldots\ldots\right\};$$

observant qu'en général, lorsque n est entier,

$$\int_o^{\varpi}\text{Cos}.nx.\text{d}x=o\ ,$$

multipliant par dx et intégrant depuis o jusqu'à ϖ, il viendra

$$\int_o^{\varpi}\{e^{x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{x\sqrt{-1}})+e^{-x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{-x\sqrt{-1}})\}\text{d}x=o\ . \qquad (1)$$

Cela posé, on a aussi

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{x\sqrt{-1}})-e^{-x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{-x\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}$$

$$=\varphi(o)\text{Sin}.x+\frac{\varphi'(o).\text{Sin}.2x}{1}+\frac{\varphi''(o).\text{Sin}.3x}{1.2}+\ldots\ldots;$$

observant que, lorsque n est entier, suivant que ce nombre est pair ou impair, on a

$$\int_{0}^{\varpi} \text{Sin}.nx.\text{d}x = 0 \;, \qquad \int_{0}^{\varpi} \text{Sin}.nx.\text{d}x = \frac{2}{n} \;,$$

multipliant par dx et intégrant depuis o jusqu'à ϖ, on aura

$$\int_{0}^{\varpi} \frac{e^{x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{x\sqrt{-1}}) - e^{-x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{-x\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}} \text{d}x$$

$$2\left\{\varphi(o) + \frac{\varphi''(o)}{1.2.3} + \frac{\varphi^{\text{IV}}(o)}{1.2.3.4.5} + \frac{\varphi^{\text{VI}}(o)}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right\} \;;$$

mais, on a aussi

$$\varphi(z) = \varphi(o) + \frac{\varphi'(o).z}{1} + \frac{\varphi''(o).z^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(z).\text{d}z = 2\left\{\varphi(o) + \frac{\varphi''(o)}{1.2.3} + \frac{\varphi^{\text{IV}}(o)}{1.2.3.4.5} + \ldots\right\} \;;$$

donc

$$\int_{0}^{\varpi} \{e^{x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{x\sqrt{-1}}) - e^{-x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{-x\sqrt{-1}})\}\text{d}x = 2\sqrt{-1}.\int_{-1}^{+1} \varphi(z)\text{d}z \;; \quad (2)$$

or, en ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), on tombe précisément sur l'équation (P) qui se trouve ainsi complètement justifiée.

8. Pour déduire de cette équation la valeur d'un grand nombre d'intégrales définies, il reste à donner à la fonction φ différentes formes. La seconde manière dont on est parvenu à l'équation (P)

fait voir d'ailleurs que cette fonction n'est pas entièrement arbitraire, et qu'elle doit être développable en série convergente, procédant suivant les puissances entières de z.

Soit, pour en donner un exemple, $\varphi(z)=ze^{az}$, on aura

$$-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi} e^{x\sqrt{-1}}.\varphi(e^{x\sqrt{-1}})\mathrm{d}x=-\sqrt{-1}.\int_{0}^{\varpi} e^{2x\sqrt{-1}}.e^{ae^{x\sqrt{-1}}}\mathrm{d}x,$$

et, en séparant la partie imaginaire de la partie réelle,

$$-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi} e^{x\sqrt{-1}}\varphi(e^{x\sqrt{-1}})\mathrm{d}x=e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Sin}.(2x+a\mathrm{Sin}.x)-\sqrt{-1}e^{a\mathrm{Cos}.x}\mathrm{Cos}(2x+a\mathrm{Sin}.x)$$

de sorte qu'on aura, par l'équation (P),

$$\int_{-1}^{+1} ze^{az}\mathrm{d}z=\int_{0}^{\varpi} e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Sin}.(2x+a\mathrm{Sin}.x)\mathrm{d}x-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi} e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Cos}.(2x+a\mathrm{Sin}.x).$$

L'intégration par partie donne

$$\int_{-1}^{+1} ze^{az}\mathrm{d}z=e^{a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)+e^{-a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right);$$

on a donc

$$\int_{0}^{\varpi} e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Sin}.(2x+a\mathrm{Sin}.x)\mathrm{d}x=e^{a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)+e^{-a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$\int_{0}^{\varpi} e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Cos}.(2x+a\mathrm{Sin}.x)\mathrm{d}x=0.$$

En faisant $\varphi(z)=z^n.e^{az}$, n étant un nombre entier quelconque, on obtiendrait les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\varpi} e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(nx+a\text{Sin}.x)\text{d}x\,,\quad \int_0^{\varpi} e^{a\text{Cos}.x}.\text{Sin}.(nx+a\text{Sin}.x)\text{d}x\,,$$

dont la première sera toujours nulle. L'équation

$$\int_0^{\varpi} e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(nx+a\text{Sin}.x)\text{d}x=0\,;$$

se vérifie d'ailleurs immédiatement par les équations

$$\frac{2}{\varpi}\int_0^{\varpi} e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}\,x)\text{Cos}.nx.\text{d}x=\frac{a^n}{1.2...n}\,,$$

$$\frac{2}{\varpi}\int_0^{\varpi} e^{a\text{Cos}.x}.\text{Sin}.(a\text{Cos}.x)\text{Sin}.nx.\text{d}x=\frac{a^n}{1.2...n}\,;$$

données par M. Poisson dans son quatrième mémoire sur les intégrales définies (*).

9. Par une marche analogue à celle qui nous a conduit à l'équation (P), on peut obtenir une nouvelle formule, relative à des intégrales dont les limites sont o et ∞.

Soit $\psi(z)\text{d}z$ une différentielle qui doive être intégrée depuis o jusqu'à 1. Posons

$$z=e^{-x+x\sqrt{-1}}\,;$$

Pour que z varie toujours depuis o jusqu'à 1, il faudra que x varie, depuis ∞ jusqu'à o. On tire de là

(*) *Journal de l'école polytechnique*, XIX.e cahier, page 439.

$$dz=(-1+\sqrt{-1})e^{-x+x\sqrt{-1}}dx\,,$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \psi(z)dz=\int_0^\infty (1-\sqrt{-1}).\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\,\psi\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\right)dx\;;$$

ou bien

$$\int_0^\infty \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\,\psi\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\right)dx=\tfrac{1}{2}\int_0^1 \psi(z)dz+\frac{\sqrt{-1}}{2}\int_0^1 \psi(z)dz\,;\quad\text{(Q)}$$

et l'équation (Q) fournira, comme l'équation (P), les valeurs d'une infinité d'intégrales définies, en égalant respectivement, dans les deux membres, les parties réelles et les parties imaginaires. Mais l'équation (Q) a besoin, comme l'équation (P), d'être établie d'une manière plus rigoureuse.

Soit $F(x)$ une fonction développable en série convergente, procédant suivant les puissances entières de x, et qui soit nulle en même temps que x, on aura

$$F(e^{-x+x\sqrt{-1}})+F(e^{-x-x\sqrt{-1}})$$

$$=2\left\{F'(o)\frac{e^{-x}\mathrm{Cos}.x}{1}+F''(o)\frac{e^{-2x}.\mathrm{Cos}.2x}{1.2}+F'''(o)\frac{e^{-3x}.\mathrm{Cos}.3x}{1.2.3}+\ldots\right\}.$$

En observant que, par une formule connue

$$\int_0^\infty e^{-nx}.\,\mathrm{Cos}.nx\,dx=\frac{1}{2n}\;,$$

multipliant par dx et intégrant depuis o jusqu'à ∞, on aura

$$\int_0^\infty \left\{ \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) + F\left(\frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) \right\} dx$$

$$= \frac{F'(o)}{1} + \frac{F''(o)}{1.2^2} + \frac{F'''(o)}{1.2.3^2} + \frac{F''''(o)}{1.2.3.4^2} + \ldots\ldots .$$

Mais on a aussi

$$F(e^{-x}) = F'(o).\frac{e^{-x}}{1} + F''(o).\frac{e^{-2x}}{1.2} + F'''(o).\frac{e^{-3x}}{1.2.3} + \ldots\ldots ;$$

observant qu'en général

$$\int_0^\infty e^{-nx} dx = \frac{1}{n},$$

multipliant par dx et intégrant depuis o jusqu'à ∞, on aura aussi

$$\int_0^\infty F(e^{-x})dx = \frac{F'(o)}{1} + \frac{F''(o)}{1.2^2} + \frac{F'''(o)}{1.2.3^2} + \ldots\ldots ;$$

de sorte que

$$\int_0^\infty \left\{ F\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) + F\left(\frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) \right\} dx = \int_0^\infty F(e^{-x})dx .$$

Cela posé, soit $F(x) = x\psi(x)$; il suffira que $\psi(x)$ ne soit pas infinie pour $x = o$, et soit développable suivant les puissances entières de x. L'équation précédente deviendra

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\psi\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^x}\psi\left(\frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) \right\} \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}.\psi(e^{-x})\mathrm{d}x.$$

Faisant ensuite

$$e^{-x} = z\ , \quad \text{d'où} \quad \int_0^\infty e^{-x}\psi(e^{-x})\mathrm{d}x = \int_0^1 \psi(z)\mathrm{d}x\ ,$$

on aura

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\psi\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^x}\psi\left(\frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \psi(z)\mathrm{d}z. \quad (1)$$

Par une marche semblable, et en observant que

$$\int_0^\infty e^{-nx}.\mathrm{Sin}.nx.\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\ ,$$

on trouvera

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\psi\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) - \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^x}\psi\left(\frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^x}\right) \right\} \mathrm{d}x = x\sqrt{-1}\int_0^1 \psi(z)\mathrm{d}z. \quad (2)$$

En ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), on retombe sur l'équation (Q), qui se trouve ainsi rigoureusement justifiée.

10 Pour donner une application de cette dernière équation, soit

$$\psi(z) = \frac{\mathrm{Log}.(1+z)}{z}\ ;$$

fonction qui satisfait aux restrictions qui limitent la forme de la fonction ψ. L'équation (1) devient

$$\int_{0}^{\infty}\left\{\text{Log.}\left(1+\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^{x}}\right)+\text{Log.}\left(1+\frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{-x}}\right)\right\}\text{d}x=\int_{0}^{1}\frac{\text{Log.}(1+z)}{z}\,\text{d}z\ ,$$

ou

$$\int_{0}^{\infty}\text{Log.}(1+2e^{-x}.\,\text{Cos.}x+e^{-2x})\text{d}x=\int_{0}^{1}\frac{\text{Log.}(1+z)}{z}\,\text{d}z\ ;$$

or, on trouve

$$\int_{0}^{1}\frac{\text{Log.}(1+z)}{z}\,\text{d}z=\int_{0}^{1}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^{2}}{3}-\frac{z^{3}}{4}+\ldots.\right)\text{d}z=\frac{\pi}{12}\quad(*);$$

donc

$$\int_{0}^{\infty}\text{Log.}(1+2e^{-x}.\,\text{Cos.}x+e^{-2x})\text{d}x=\frac{\pi^{2}}{12}\ .$$

(*) Voyez le troisième mémoire de M. Poisson, dans le *Journal de l'école polytechnique*, XVIII.e cahier, pag. 341.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la sommation des termes du développement des puissances d'un binome, pour faire suite aux articles insérés à la page 359 du tome XII.ᵉ et à la page 163 du tome XIII.ᵉ des Annales ;

Par M. Querret, ancien chef d'institution.

Représentons par M_i le coefficient numérique du terme affecté de a^ix^{m-i}, dans le développement de $(x+a)^m$; et soit la suite

$$M_1a\,,\quad M_2a^2\,,\quad M_3a^3\,,\quad M_4a^4\,,\ldots.M_ra^r\,,\ldots.;\qquad(\alpha)$$

r désignant le rang du terme M_ra^r ; et appelons cette suite (α).

Soit formée une seconde suite (β) dont le premier terme soit le premier terme de (α) augmenté de b ; dont le second terme soit le second terme de (α) augmenté du premier terme de (β) multiplié par b ; dont le troisième terme soit le troisième terme de (α) augmenté du second terme de (β) multiplié par b, et ainsi de suite ; en disposant dans une même colonne toutes les parties d'un même terme de cette deuxième suite, et en disposant ces termes de gauche à droite, suivant leur rang, elle sera

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l}
M_1 a & M_2 a^2 & M_3 a^3 & M_4 a^4 & \ldots\ldots\ M_r a^r \ \ldots\ldots \\
+b & +M_1 ab & +M_2 a^2 b & +M_3 a^3 b & \ldots\ldots+M_{r-1} a^{r-1} b \ \ldots\ldots \\
 & +\ b^2 & +M_1 ab^2 & +M_2 a^2 b^2 & \ldots\ldots+M_{r-2} a^{r-2} b^2 \ldots\ldots \\
 & & +\ b^3 & +M_1 ab^3 & \ldots\ldots+M_{r-3} a^{r-3} b^3 \ldots\ldots \\
 & & & +\ b^4 & \ldots\ldots+M_{r-4} a^{r-4} b^4 \ldots\ldots \\
 & & & & \ldots\ldots+\ \ldots\ldots\ldots \\
 & & & & \quad +\ \ldots\ldots b^r \ldots
\end{array}\right\} (\beta)$$

Nous appellerons cette suite la *somme première* de (α); en désigant ses termes consécutifs par $\Sigma(1,1)$, $\Sigma(1,2)$, $\Sigma(1,3)$, ... $\Sigma(1,r)$, ...

Si on opère sur la série (β), pour trouver une troisième série (γ) comme on avait opéré sur (α) pour trouver (β), on aura

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
M_1 a & M_2 a^2 & M_3 a^3 & M_4 a^4 \ \ldots\ldots\ M_r a^r \ \ldots\ldots \\
+2b & +2M_1 ab & +2M_2 a^2 b & +2M_3 a^3 b \ \ldots\ldots+2M_{r-1} a^{r-1} b \ \ldots\ldots \\
 & +\ 3b^2 & +3M_1 ab^2 & +3M_2 a^2 b^2 \ldots\ldots+3M_{r-2} a^{r-2} b^2 \ldots\ldots \\
 & & +\ 4b^3 & +4M_1 ab^3 \ldots\ldots+4M_{r-3} a^{r-3} b^3 \ldots\ldots \\
 & & & +\ 4b^4 \ldots\ldots+5M_{r-4} a^{r-4} b^4 \ldots\ldots \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \quad +(r+1) b^r \ldots\ldots
\end{array}\right\} (\gamma)$$

Nous appellerons indistinctement cette nouvelle suite la *somme première* de (β) ou la *somme seconde* de (α), et nous représenterons ses termes consécutifs par $\Sigma(2,1)$, $\Sigma(2,2)$, $\Sigma(2,3)$, ... $\Sigma(2,r)$.....

En opérant sur (γ), comme sur les précédentes, nous formerons une suite (γ) telle qu'on la voit ici

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
M_1 a & M_2 a^2 & M_3 a^3 & M_4 a^4 \ldots\ldots\ldots M_r a^r \ldots\ldots\ldots \\
+3b & +3M_1 ab & +3M_2 a^2 b & +\ 3M_3 a^3 b \ldots\ldots +\ 3M_{r-1} a^{r-1} b \ldots\ldots \\
 & +\ 6\ b^2 & +6M_1 ab^2 & +\ 6M_2 a^2 b^2 \ldots\ldots +\ 6M_{r-2} a^{r-2} b^2 \ldots\ldots \\
 & & +\ 10\ b^3 & +10M_1 ab^3 \ldots\ldots +10M_{r-3} a^{r-3} b^3 \ldots\ldots \\
 & & & +15b^4 \ldots\ldots\ldots +15M_{r-4} a^{r-4} b^4 \ldots\ldots \\
 & & & \qquad\qquad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \qquad\qquad\quad + \frac{(r+1)(r+2)}{2} b^r \ldots\ldots
\end{array}\right\} (\delta)$$

Cette suite sera pareillement la *somme première* de (γ) ou la *somme seconde* de (β) ou la *somme troisième* de (α), et nous représenterons ses termes consécutifs par $\Sigma(3,1)$, $\Sigma(3,2)$, $\Sigma(3,3)$, ... $\Sigma(3,r)$.....

On peut, par le même procédé, former tant d'autres suites (ε), (ζ), (η), ... qu'on voudra, lesquelles seront dites les *sommes quatrième*, *cinquième*, *sixième*,.... de la suite (α); et il résulte des lois de leur formation,

1.° Que, dans la *somme première* de (α), les coefficiens sont constans et égaux à l'unité;

2.° Que, dans la *somme seconde*, les coefficiens sont les nombres de la suite naturelle 1, 2, 3,....;

3.° Que, dans la *somme troisième*, les coefficiens sont les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10,.......;

4.° Que, dans la *somme quatrième*, les coefficiens sont la somme des nombres tétraèdres 1, 4, 10, 20, ...;

Et ainsi de suite.

De sorte que généralement, dans la *somme n.me*, les coefficiens sont les nombres figurés du *n.me* ordre.

Si donc nous désignons, en général, par $\varphi(p, q)$ le q.me nombre figuré du p.me ordre, et par $\Sigma(n, r)$ le r.me terme de la somme n.me de (x), nous aurons

$$\Sigma(n,r)=M_r a^r+\varphi(n,2)M_{r-1}a^{r-1}b+\varphi(n,3)M_{r-2}a^{r-2}b^2+\ldots+\varphi(n,r+1)b^r. \quad (X)$$

Le terme général de cette série est $\varphi(n, i+1)M_{r-i}a^{r-i}b^i$.

Cela posé, on sait que

$$M_r=\frac{m-r+1}{r}M_{r-1}, \quad \text{d'où} \quad M_{r-1}=\frac{r}{m-r+1}M_r;$$

de là on tire, en changeant continuellement r en $r-1$

$$M_{r-1}=\frac{r}{m-r+1}M_r,$$

$$M_{r-2}=\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}M_r,$$

$$M_{r-3}=\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\cdot\frac{r-2}{m-r+3}M_r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{r-i}=\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\cdot\frac{r-2}{m-r+3}\cdots\cdots\frac{r-i+1}{m-r+i}M_r:$$

Par la substitution de ces valeurs, la série (X) deviendra

$$\Sigma(n,r)=M_r\left\{a^r+\frac{r}{m-r+1}\varphi(n,2)a^{r-1}b+\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\varphi(n,3)a^{r-2}b^2\right.$$

$$+\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\cdot\frac{r-2}{m-r+3}\varphi(n,4)a^{r-3}b^3+\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\cdot\frac{r-2}{m-r+3}\cdots\frac{r-i+1}{m-r+i}\varphi(n,i+1)a^{r-i}b^i+\ldots+\frac{\varphi(n,r+1)}{M_r}b^r\right\}.\ (\mathrm{Y})$$

Mais, à cause de la relation connue $\varphi(p,q)=\varphi(q,p)$, on a

$$m-r+1=\varphi(2,m-r+1)=\varphi(m-r+1,2),$$

$$(m-r+1)(m-r+2)=1.2\varphi(3,m-r+1)=1.2\varphi(m-r+1,3),$$

$$(m-r+1)(m-r+2)(m-r+3)=1.2.3\varphi(4,m-r+1)=1.2.3\varphi(m-r+1,4),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(m-r+1)(m-r+2)\ldots(m-r+i)=1.2\ldots i\varphi(i+1,m-r+1)=1.2\ldots i\varphi(m-r+1,i+1);$$

on a de plus

$$M_r=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ldots\ldots\ldots\frac{m-r+1}{r}=\varphi(r+1,m-r+1)=\varphi(m-r+1,r+1)$$

Au moyen de ces valeurs, la série (Y) deviendra

$$\Sigma(n,r)=M_r\left\{a^r+\frac{1}{r}\frac{\varphi(n,n)}{\varphi(m-r+1,2)}a^{r-1}b+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{\varphi(n,3)}{\varphi(m-r+1,3)}a^{r-2}b^2+\right.$$

$$+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\frac{\varphi(n,4)}{\varphi(m-r+1,4)}a^{r-3}b^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{r}{1}\frac{r-1}{2}\ldots\ldots\frac{r-i+1}{i}\cdot\frac{\varphi(n,i+1)}{\varphi(m-r+1,i+1)}a^{r-i}b^i+\ldots+\frac{\varphi(n,r+1)}{\varphi(m-r+1,r+1)}b^r\right\}.\ (\mathrm{Z})$$

Telle est l'expression générale d'un terme d'un rang quelconque dans une somme quelconque.

Si présentement on suppose $n=m-r+1$, la série (Z) deviendra

$$\Sigma(m-r+1,r)=M_r\left\{a^r+\frac{r}{1}a^{r-1}b+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}a^{r-2}b^2+\ldots\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdots\frac{r-i+1}{i}a^{r-i}b^i+\ldots+b^r\right\}$$

c'est-à-dire,

$$\Sigma(m-r+1,r)=M_r(a+b)^r\ ;$$

de là on conclura

$$(a+b+c)^m=\Sigma(1,m)+\Sigma(2,m-1)c+\Sigma(3,m-2)c^2+\ldots+\Sigma(i+1,m-i)c^i+\ldots+c^m\ ;$$

ce qui démontre généralement les équations posées tome XIII, (pag. 164 et suiv.), sur lesquelles est fondée la méthode que nous avons développée en cet endroit pour l'extraction des racines.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Vincent, professeur de mathématiques au collége royal de Reims,

Au Rédacteur des *Annales*;

Monsieur,

Depuis l'insertion dans vos *Annales* de mon mémoire sur les courbes exponentielles et logarithmiques (*), on m'a fait observer que j'avais, à tort, donné, comme nouvelles, des considérations qui, me disait-on, se trouvaient développées dans Euler. Je me hâtai de me procurer l'*Introduction à l'analise infinitésimale*, que je n'avais point lue; et je reconnus que, pour ce qui a rapport aux courbes composées de points disjoints, le fond de l'assertion était exact. Je dois donc, dans l'intérêt de la science et de la vérité, me dépouiller d'un honneur qui ne m'appartient point; celui d'avoir, sinon découvert, du moins fait connaître le premier l'existence de ces sortes de courbes, et me borner à revendiquer

(*) Voyez à la première page du présent volume.

J. D. G

celui d'en avoir plus complettement développé la nature et les propriétés. J'aurai aussi à me féliciter d'avoir ramené l'attention des géomètres sur des faits curieux qui paraissaient totalement tombés dans l'oubli, puisque les ouvrages modernes les plus étendus et les plus justement estimés n'en font absolument aucune mention. Ceux qui désireraient savoir ce que j'ai pu ajouter à la théorie d'Euler pourront consulter l'ouvrage cité, liv. II, chap. XXI, n.os 515—520 (pag. 292 du II.e volume de la traduction de M. Labey).

Ces observations ne sont nullement applicables à la théorie analitique que j'ai cherché à établir sur les quantités exponentielles et logarithmiques; car Euler dit, en parlant de l'exponentielle a^z, (*Ibid.* liv. I, chap. VI, n.° 97, pag. 70) « si l'on substitue » à z des fractions, on aura pour résultats des quantités qui, » considérées en elles-mêmes, ont deux ou un plus grand nombre » de valeurs, puisque l'extraction des racines en fournit toujours » plusieurs. Cependant, *on n'admet ordinairement*, dans ce cas, » que les valeurs qui se présentent les premières, c'est-à-dire, » celles qui sont réelles et positives; parce que la quantité a^z » *est regardée comme une fonction uniforme de* z.... Il en est de » même si l'exposant z a des valeurs irrationnelles; mais, *comme* » *il est difficile*, dans ce cas, de concevoir le nombre de valeurs » que renferme la quantité proposée, *on se contente* de considérer » la seule valeur réelle.... » Ainsi, Euler reconnaît implicitement que la théorie des logarithmes, telle qu'on a coutume de l'exposer, est incomplète et de pure convention; et les expressions qu'il emploie montrent clairement qu'il ne la donne ainsi que pour se conformer à l'usage, et à cause de la difficulté d'en établir une plus rigoureuse. Je me propose, au reste, dès que le temps me le permettra, de donner de nouveaux développemens à ce second objet de mon mémoire.

Je vous prie, Monsieur le Rédacteur, de vouloir bien donner une place à cette lettre, dans un de vos prochains numéros, et d'agréer, etc. (*).

Reims, le 20 octobre 1824.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 76 du présent volume.

PROBLÈME. *A quelle courbe sont tangentes les cordes d'une section conique qui a un centre, hypoténuses d'une suite de triangles rectangles ayant constamment le sommet de l'angle droit au centre de la courbe?*

Solution de M. Querret.

Supposons que la courbe soit une ellipse dont C soit le centre. Soit MN une des hypothénuses dont il s'agit. Du centre C à son

(*) Nous devons nous-mêmes des excuses à nos lecteurs pour ne leur avoir pas fait remarquer, par une note, l'analogie des idées d'Euler avec celles de M. Vincent. Mais la vérité est que, comme cet estimable géomètre, nous les croyons tout-à-fait nouvelles. L'ouvrage d'Euler, où elles sont consignées, est pourtant un de ceux que nous avons le plus souvent sous la main; mais c'est sur-tout la première partie que nous sommes dans le cas de consulter; et il y a au moins trente ans que nous ne l'avons lu de suite en entier. Voilà sans doute comment cet endroit nous sera échappé.

J. D. G.

milieu O soit menée une droite rencontrant la courbe en un point T par lequel soit menée une tangente à cette courbe. Du centre C soit abaissée sur cette tangente la perpendiculaire CG coupant en H sa parallèle MN. Soit enfin PQ le diamètre parallèle à MN, conjugué de celui qui passe par T ; à cause de l'angle droit MCN, on aura CO=OM=ON.

Cela posé, à cause des parallèles, on aura

$$\mathrm{CT}:\mathrm{CO}::\mathrm{CG}:\mathrm{CH}=\frac{\mathrm{CO.CG}}{\mathrm{CT}}=\frac{\mathrm{MO.CG}}{\mathrm{CT}}.$$

Mais, par la propriété de l'ellipse, on a

$$\overline{\mathrm{MO}}^2=\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{CT}}^2}(\overline{\mathrm{CT}}^2-\overline{\mathrm{CO}}^2)=\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{CT}}^2}(\overline{\mathrm{CT}}^2-\overline{\mathrm{MO}}^2)\ ;$$

d'où

$$\mathrm{MO}=\frac{\mathrm{CP.CT}}{\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{CT}}^2}}.$$

Mais, par une autre propriété de l'ellipse, si l'on représente par a et b ses deux demi-diamètres principaux, on aura

$$\mathrm{CP.CG}=ab\ ,\qquad \text{d'où}\qquad \mathrm{CP.CT}=\frac{ab.\mathrm{CT}}{\mathrm{CG}}\ ,$$

et

$$\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{CT}}^2=a^2+b^2\ ;$$

d'où

$$\mathrm{MO}=\frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{CG}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

En substituant donc cette valeur de MO dans celle de CH, elle deviendra simplement

$$\mathrm{CH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,$$

quantité constante, de sorte que la courbe cherchée est un cercle concentrique à l'ellipse dont il s'agit, et ayant pour rayon la perpendiculaire abaissée de son centre sur la corde qui joint deux sommets consécutifs quelconques (*).

Pour passer de là à l'hyperbole sans faire de nouveaux calculs, a étant le demi-axe transverse, il suffit de changer b en $b\sqrt{-1}$ ce qui donne, pour le rayon du cercle,

$$\frac{ab\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\,;$$

ce qui prouve qu'alors le cercle n'est possible qu'autant que l'axe transverse est le plus petit des deux.

Autre solution du même problème et de son analogue pour les surfaces du second ordre;

Par un Abonné.

Soit une ligne quelconque du second ordre ayant un centre, rapportée à ses diamètres principaux; et soit alors son équation

$$ax^2+by^2=c\,. \qquad (1)$$

(*) Quelqu'un nous a assuré que cette proposition se trouvait démontrée dans l'ouvrage de M. Poncelet; mais nous n'avons pu découvrir en quel endroit. §491

J. D. G.

Par son centre O, soient menées arbitrairement deux droites perpendiculaires entre elles, la rencontrant en A et B; et cherchons l'expression de la perpendiculaire p abaissée du centre O sur la corde AB.

Pour cela, soient pris respectivement OA et OB pour axes des t et des u; pour passer au nouveau système de coordonnées; il faudra faire

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha t+\beta u\ , \\ y=\alpha' t+\beta' u\ ; \end{array}\right\} \quad (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$a(\alpha t+\beta u)^2+b(\alpha' t+\beta' u)^2=c\ . \qquad (3)$$

Si, dans cette équation, on fait tour à tour chaque coordonnée égale à zéro, et qu'on tire ensuite la valeur de l'autre, on obtiendra ainsi OA et OB, qu'on trouvera être

$$\mathrm{OA}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a\alpha^2+b\alpha'^2}}\ , \qquad \mathrm{OB}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a\beta^2+b\beta'^2}}\ ; \qquad (4)$$

Cela posé, l'aire du triangle rectangle ACB ayant également pour expression $\frac{1}{2}$OA.OB et $\frac{1}{2}p$.AB, on doit avoir

$$p=\frac{\mathrm{OA.OB}}{\mathrm{AB}}\ ,$$

ou bien

$$p=\frac{\mathrm{OA.OB}}{\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}^2}+\frac{1}{\overline{\mathrm{OB}}^2}}}\ ;$$

introduisant, dans cette expression, pour OA et OB leurs valeurs (4), elle deviendra

$$p=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha'^2+\beta'^2)}}\ ;$$

mais on sait que

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2=1\ ,\\ \alpha'^2+\beta'^2=1\ ;\end{array}\right\}\quad(5)$$

donc cette expression se réduit simplement à

$$p=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}}\ ,$$

quantité constante ; de sorte qu'on a ce théorème :

THÉORÈME I. Les cordes d'une ligne du second ordre hypothénuses d'une suite de triangles rectangles, ayant pour sommet commun de l'angle droit le centre de la courbe, sont toutes tangentes à un même cercle.

On peut toujours supposer c positif, et conséquemment le numérateur réel ; le cercle ne sera donc réel qu'autant que $a+b$ sera une quantité positive, circonstance qui aura toujours lieu dans l'ellipse.

Soit, en second lieu, une surface quelconque du second ordre ayant un centre, rapportée à ses diamètres principaux ; et soit alors son équation

$$ax^2+by^2+cz^2=d\ .\qquad(1)$$

Par son centre O, soient menées arbitrairement trois droites perpendiculaires entre elles, la rencontrant en A, B, C ; et cherchons l'expression de la perpendiculaire p abaissée de son centre O sur le plan du triangle ABC.

Pour cela, soient pris respectivement OA, OB, OC pour axes des t, u, v; pour passer au nouveau système de coordonnées, il faudra faire

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha\, t+\beta\, u+\gamma\, v\,, \\ y=\alpha' t+\beta' u+\gamma' v\,, \\ z=\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v\,; \end{array}\right\} (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$a(\alpha t+\beta u+\gamma v)^2+b(\alpha' t+\beta' u+\gamma' v)^2+c(\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v)^2=d\,. \quad (3)$$

Si, dans cette équation, on fait tour-à-tour deux des coordonnées égales à zéro, et qu'on en tire ensuite la valeur de la troisième, on obtiendra ainsi les valeurs de OA, OB, OC, qu'on trouvera être

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{OA}=\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\alpha^2+b\alpha'^2+c\alpha''^2}}\,, \\ \mathrm{OB}=\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\beta^2+b\beta'^2+c\beta''^2}}\,, \\ \mathrm{OC}=\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\gamma^2+b\gamma'^2+c\gamma''^2}}\,. \end{array}\right\} (4)$$

Cela posé, considérons le tétraèdre rectangle dont le sommet est en O et dont ABC est la face hypothénusale. Les aires des faces rectangulaires de ce tétraèdre sont

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{OB.OC}\,,\qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{OC.OA}\,,\qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{OA.OB}\,;$$

on sait d'ailleurs que la somme de leurs quarrés doit être égale au quarré de l'aire de la face hypothénusale; d'où il suit qu'on doit avoir

$$ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{OB}^2.\overline{OC}^2+\overline{OC}^2.\overline{OA}^2+\overline{OA}^2.\overline{OB}^2}\,.$$

Présentement, le volume du tétraèdre peut être indistinctement exprimé par $\frac{1}{3}p.ABC$ ou par $\frac{1}{6}OA.OB.OC$; d'où il suit qu'on doit avoir

$$p=\frac{OA.OB.OC}{2ABC}\,.$$

c'est-à-dire en substituant,

$$p=\frac{OA.OB.OC}{\sqrt{\overline{OB}^2.\overline{OC}^2+\overline{OC}^2.\overline{OA}^2+\overline{OA}^2.\overline{OB}^2}}\,,$$

ou encore

$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}+\frac{1}{\overline{OC}^2}}}\,;$$

ce qui donnera, en introduisant pour OA, OB, OC, les valeurs (4),

$$p=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+b(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)+c(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)}}\,.$$

Mais on a, dans le cas présent,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,,\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1\,,\\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1\,;\end{array}\right\}(5)$$

donc cette expression se réduit simplement à

$$p=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a+b+c}}\,,$$

quantité constante; de sorte qu'on a ce théorème:

THÉORÈME II. Les triangles inscrits à une surface du second ordre, faces hypothénusales d'une suite de tétraèdres rectangles, ayant pour sommet commun de l'angle droit trièdre le centre de cette surface, sont tous tangens à une même sphère.

On peut toujours supposer d positif, et conséquemment le numérateur réel ; la sphère ne sera donc réelle qu'autant que $a+b+c$ sera une quantité positive ; ce qui, en particulier, aura toujours lieu pour l'ellipsoïde.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

A quelle courbe est tangente une droite indéfinie qui se meut sur le plan d'un segment de cercle, de manière à couper constamment l'arc et sa corde en parties proportionnelles ?

OPTIQUE.

Recherches sur les caustiques ;

Par M. Ch. Sturm.

Soit, dans un milieu homogène, un point lumineux A, d'où émanent, en tous sens, des rayons qui se réfractent, en passant de ce milieu dans un autre milieu également homogène, séparé du premier par une surface plane ou sphérique. Nous nous proposons ici de déterminer la nature de la surface caustique formée par la rencontre consécutive des rayons réfractés.

Supposons d'abord (fig. 1 et 2) que la surface de séparation soit un plan. Abaissons du point A sur ce plan une perpendiculaire AC, que nous prolongerons d'une quantité CB=AC, et par laquelle nous conduirons, à volonté, un plan ACD qui coupera le proposé suivant une droite CD, perpendiculaire à CA. Il est clair que tous les rayons émanés du point A qui tomberont dans ce plan ACD n'en sortiront pas en passant dans le second milieu. Ainsi nous n'avons à considérer que ce qui se passe dans le plan ACD, qui est celui de la figure.

Soient donc AI un rayon incident quelconque, I son point d'incidence, sur la droite CD et IK la direction qu'il prend en se réfractant. Soit IL le prolongement de cette direction IK du côté du point A ; élevons IF perpendiculaire à CD ; les sinus des angles AIF et LIF d'incidence et de réfraction seront entre eux, d'après une loi connue, dans un rapport constant que nous nommerons $\frac{a}{c}$.

Faisons passer par les trois points A, B, I une circonférence de cercle. Cette circonférence touchera IF en I, et coupera de nouveau la droite IL en un point M. Il est aisé de voir que les sinus des angles AIF, MIF que la tangente IF au cercle AIB fait avec les cordes IA, IM sont entre eux comme ces cordes. Donc le rapport de celles-ci est donné et égal à $\frac{a}{c}$; et suivant que a sera plus grand ou plus petit que c, les points I et M seront ou ne seront pas situés tous deux du même côté de AB. Ces deux cas doivent être examinés séparément.

Premier cas (fig. 1). $a>c$, d'où $IA>IM$.

L'angle AMB étant alors égal à l'angle AIB, prenons sur MB une portion MG égale à MA et joignons AG, les deux triangles isocèles AIB, AMG seront semblables; donc l'angle MAG sera égal à l'angle IAB, et par conséquent l'angle BAG égal à l'angle IAM; mais on a aussi l'angle ABG égal à l'angle IAM; donc les deux triangles BAG et AMI sont semblables, et donnent conséquemment cette proportion

$$\frac{BA}{BG}=\frac{IA}{IM}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{BA}{BG}=\frac{a}{c};$$

donc BG est constant et donné de grandeur; et comme

$$BG=MB-MG=MB-MA,$$

on voit que la différence MB—MA est constante, et que par conséquent le point M est à une branche d'hyperbole dont les foyers sont A et B et dont l'axe transverse est égal à BG.

De plus MI est la normale à cette courbe au point M, puisqu'elle fait, avec les deux rayons vecteurs MA, MB, des angles

AMI, BMI, supplémens de l'autre, comme sous-tendus dans le cercle AMB par des cordes égales BI, AI. Tous les rayons réfractés IK sont donc normaux à la branche d'hyperbole dont il s'agit.

Ainsi, *lorsque l'angle de réfraction est moindre que l'angle d'incidence, la caustique formée par les rayons réfractés est la développée d'une branche d'hyperbole dont le foyer est le point de départ des rayons incidens, dont le centre est la projection du même point sur la droite séparatrice des deux milieux, et dont l'excentricité est à l'axe transverse dans le rapport donné du sinus d'incidence au sinus de réfraction.*

Deuxième cas (fig. 2). $a<c$, d'où $IA<IM$.

L'angle AMB étant alors supplément de AIB, prolongeons BM d'une quantité $MG=MA$ et joignons AG ; les triangles isocèles AIB, AMG étant semblables, l'angle MAG sera égal à IAB, et par conséquent l'angle BAG égal à l'angle IAM ; mais l'angle ABG est égal à l'angle AIM ; donc les deux triangles BAG, IAM sont semblables et donnent conséquemment

$$\frac{BA}{BG}=\frac{IA}{IM}, \quad \text{ou} \quad \frac{BA}{BG}=\frac{a}{c};$$

donc BG est donné de grandeur ; et comme

$$BG=MG+MB=MA+MB,$$

on voit que le point M appartient à une ellipse dont A et B sont les foyers et dont le grand axe est égal à BG.

De plus MI est la normale à cette courbe, puisqu'elle fait, avec les rayons vecteurs MA, MB, des angles IMA, IMB égaux entre eux, comme sous-tendant des cordes égales IA, IB du cercle AMB. Tous les rayons réfractés IK sont donc normaux à l'ellipse dont il s'agit.

Ainsi, *lorsque l'angle de réfraction est plus grand que l'angle d'incidence, la caustique formée par les rayons réfractés est la* *développée d'une demi-ellipse, dont le foyer est le point de départ des rayons incidens, dont le centre est la projection du même point sur la droite séparatrice des deux milieux, et dont l'excentricité est au demi-grand axe dans le rapport donné du sinus d'incidence au sinus de réfraction.* Il faut remarquer qu'ici l'angle d'incidence ne saurait croître au-delà d'une certaine limite déterminée par la formule $\text{Sin.AIF}=\frac{a}{c}$.

Comme les résultats que nous venons d'exposer sont déjà connus et ont été démontrés par l'analise (*), nous ne nous y arrêterons pas davantage. Passons donc à d'autres recherches.

Supposons (fig. 3, 4, 5) que la surface séparatrice des deux milieux soit une surface sphérique. Tirons de son centre C au point lumineux A une droite indéfinie CA, par laquelle nous ferons passer un plan CAD, qui coupera cette surface suivant un cercle $dD\delta$, représenté dans la figure. Il est clair que tous les rayons émanés du point A dans ce plan CAD n'en sortiront pas en pénétrant du premier milieu dans le second.

Soient donc AI un rayon incident quelconque, I son point d'incidence sur le cercle $dD\delta$ et IK la direction qu'il prend en se réfractant. Soit IL le prolongement de IK dans la direction opposée, et tirons le rayon ou la normale CI. Les sinus des angles AIC, LIC d'incidence et de réfraction sont toujours entre eux dans un rapport donné. Il faut remarquer, en outre, que ces angles doivent toujours être de même espèce, c'est-à-dire, tous deux aigus ou tous deux obtus.

Prenons, sur la direction de la droite CA, un point B tel que

(*) Voyez le mémoire inséré à la page 229 du XI.e volume du présent recueil.

J. D. G.

le produit de CA par CB soit égal au quarré du rayon CI ou Cd. Les triangles CAI, CIB seront semblables et donneront $\frac{IA}{IB}=\frac{CA}{CI}$; le rapport $\frac{IA}{IB}$ sera donc constant. Posons

$$\frac{IA}{IB}=\frac{a}{b} \; .$$

Le triangle CAI donne encore

$$\frac{Sin.CIA}{Sin.CAI}=\frac{CA}{CI}=\frac{a}{b} \; ;$$

et comme les angles CAI, CIB sont égaux, on a

$$\frac{Sin.CIA}{Sin.CIB}=\frac{CA}{CI}=\frac{a}{b} \; .$$

Si le point A est tellement placé, à l'égard de la surface séparatrice, que le rapport de CA au rayon CI soit égal au rapport donné du sinus d'incidence au sinus de réfraction, la formule ci-dessus fait voir que, l'angle d'incidence étant CIA, l'angle de réfraction sera CIB, pourvu toutefois que ces deux angles soient de même espèce. Cette condition n'est remplie qu'autant que le point I tombe sur l'arc δD, déterminé sur le cercle dDδ par la perpendiculaire AD à CA (fig. 3) ou par la tangente AD à ce cercle (fig. 4, 5), suivant que A lui est intérieur ou extérieur. Ce cas particulier, dans lequel la courbure sphérique fait converger en un seul et même point les directions des rayons réfractés, a été signalé par M. le professeur de La Rive fils, dans son mémoire sur les Caustiques, imprimé récemment à Genève (*).

(*) Nous aurions déjà annoncé cet intéressant mémoire que nous n'avons reçu au surplus que depuis peu, si nous n'avions voulu faire connaître

Pour rentrer dans la généralité de la question, faisons passer une circonférence par les trois points A, B, I; cette circonférence coupera la droite IL en un second point M; et, à cause de la relation $CA.CB=\overline{CI}^2$, CI lui sera tangente en I. Cela étant, les sinus des angles CIA, CIM, formés par cette tangente CI avec les cordes IA, IM seront entre eux comme ces cordes. Soit $\frac{a}{c}$ le rapport donné de ces sinus; on aura ainsi $\frac{IA}{IM}=\frac{a}{c}$, de sorte que les trois droites IA, IB, IM seront constamment proportionnelles aux trois constantes a, b, c.

La circonférence qui passe par les trois points A, B, I, est divisée par ces points en trois arcs sur chacun desquels le point M peut également se trouver. Voilà donc trois cas distincts qu'il faut discuter séparément.

Premier cas (fig. 3). Le point M tombe sur l'arc AB.

Les angles AIB, AMB étant alors supplémens l'un de l'autre; prolongeons BM d'une longueur MG qui soit à MA dans le rapport donné de b à a ou de IB à IA, et soit menée AG. Les triangles AIB, AMG ayant un angle égal en M et I, compris entre deux côtés proportionnels, seront semblables; d'où il suit que l'angle MAG sera égal à l'angle IAB, et par conséquent l'angle BAG égal à l'angle IAM. Les triangles BAG, IAM ayant en outre les angles ABG, AIM égaux sont donc semblables et donnent

$$\frac{BA}{BG}=\frac{IA}{IM}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{BA}{BG}=\frac{a}{c};$$

donc BG est constante et donnée de grandeur. Or, on a

---

en même temps quelques résultats sur le même sujet que nous avons obtenus depuis long-temps, mais que le défaut de loisir nous a empêché jusqu'ici de mettre en ordre.

J. D. G.

$$BG = MB + MG\ , \qquad MG = \frac{b}{a}MA\ ;$$

ainsi

$$MB + \frac{b}{a}MA = BG\ , \quad \text{ou} \quad a.MB + b.MA = c.AB\ . \qquad (1)$$

Le lieu géométrique du point M est donc une courbe dans laquelle la somme des produits des rayons vecteurs, rapportés aux points A et B par deux constantes, est elle-même une quantité constante.

Deuxième cas (fig. 4). Le point M se trouve sur l'arc AI.

Les angles AIB, AMB étant alors égaux entre eux, soit prise sur MB, prolongée, s'il est nécessaire, au-delà du point B, une longueur MG qui soit à MA dans le rapport donné de b à a, et soit menée AG. Les triangles AMG, AIB ayant un angle égal en M et I, compris entre deux côtés proportionnels, seront semblables ; d'où il suit que l'angle MAG sera égal à l'angle IAB, et conséquemment plus petit que MAB ; de sorte que G doit réellement tomber entre M et B. Ensuite l'angle BAG sera égal à l'angle IAM ; et, comme les angles ABG, AIM sont aussi égaux, on voit que les triangles BAG, IAM sont aussi semblables, et donnent conséquemment

$$\frac{BA}{BG} = \frac{IA}{IM}\ , \quad \text{ou} \quad \frac{BA}{BG} = \frac{a}{c}\ ;$$

donc BG est constant et donné de grandeur. Or, on a

$$BG = MB - MG\ , \quad MG = \frac{b}{a}MA\ ,$$

ainsi

$$MB - \frac{b}{a}MA = BG\ , \quad \text{ou} \quad a.MB - b.MA = c.AB\ . \qquad (2)$$

Le lieu géométrique du point M est donc une courbe dans laquelle la différence des produits des rayons vecteurs, rapportés aux points A et B, par deux constantes est elle-même une quantité constante.

Troisième cas (fig. 5). Le point M tombe sur l'arc BI.

Soit prise sur BM, prolongée, s'il est nécessaire, au-delà de B une longueur $MG=\frac{b}{a}$ MA, et soit menée. Par là les triangles AMG et AIB seront semblables, l'angle MAG égal à l'angle IAB, et plus grand que l'angle MAB; de sorte que G doit réellement tomber sur le prolongement de MB. Ensuite, l'angle BAG sera égal à l'angle IAM; mais d'ailleurs les angles ABG, AIM sont égaux, comme ayant le même supplément ABM; donc les triangles BAG, IAM sont semblables et donnent

$$\frac{BA}{BG}=\frac{IA}{IM}, \quad \text{ou} \quad \frac{BA}{BG}=\frac{a}{c};$$

donc BG est constant et donné de grandeur. Or, on a

$$BG=MG-MB, \quad MG=\frac{b}{a}MA;$$

ainsi

$$\frac{b}{a}MA-MB=BG, \quad \text{ou} \quad b.MA-a.MB=c.AB. \qquad (3)$$

Le lieu géométrique du point M est donc encore ici une courbe dans laquelle la différence des produits des rayons vecteurs, rapportés aux points A et B, par deux constantes est elle-même une quantité constante; mais ici la différence est inverse de celle du cas précédent.

En résumé, nous voyons que le lieu géométrique du point M est une courbe telle que la somme ou la différence des produits des distances de ses points aux deux points fixes A et B par deux coefficiens déterminés est constante et donnée de grandeur. Il sera donc toujours facile de construire cette courbe, d'après l'équation qui lui correspondra; on trouvera que c'est une courbe du genre de l'ellipse ou de l'hyperbole, différant d'autant moins de l'une ou de l'autre de celles-ci que le rayon du cercle dont le centre est C sera plus grand par rapport à la distance du point A à sa circonférence, et qu'en même temps les deux coefficiens seront moins inégaux.

Nous allons faire voir présentement que la normale au point M de la courbe dont il s'agit coïncide avec le rayon réfracté MI. Soit en effet MN cette normale (fig. 3), la courbe répondant alors à l'équation (1). Comme on peut toujours, d'un point pris à volonté sur le plan d'une courbe, lui mener une ou plusieurs normales, supposons que la normale MN à la courbe proposée soit celle qui passe par un point fixe P, pris sur son plan. D'après les théories connues, sa portion PM sera un *minimum* ou un *maximum*, entre toutes les droites que l'on peut mener du point P à la même courbe. Donc, en vertu de l'équation (1), la somme

$$p.\mathrm{PM}+a.\mathrm{MB}+b.\mathrm{MA}\ ,$$

dans laquelle p est un coefficient constant arbitraire, sera aussi un *minimum* ou un *maximum*. De là résulte, suivant un théorème général que nous avons démontré ailleurs (*), que, si l'on applique au point M trois forces dirigées suivant les droites PM, BM, AM et proportionnelles aux quantités p, a, b, respectivement, leur résultante sera dirigée suivant la normale MN. Or, l'une d'elles ayant déjà cette direction, les deux autres qui agissent suivant BM et AM devront aussi avoir leur résultante dirigée suivant MN,

(*) Voyez tom. XIV, pag. 115.

avec laquelle elles feront des angles BMN, AMN, dont les sinus devront être conséquemment en raison inverse de leurs intensités, c'est-à-dire, dans le rapport de b à a. Mais MI fait avec MB et MA des angles dont les sinus sont entre eux comme les cordes IB, IA qui les sous-tendent, dans le cercle AMB, c'est-à-dire, dans le rapport de b à a; donc la normale MN coïncide avec MI. On démontrerait la même chose pour le cas des équations (2) et (3), (fig. 4 et 5) (*).

Cette propriété fait voir que la courbe à laquelle sont tangens les rayons réfractés IK ou IM, est la développée de l'une des courbes (1), (2), (3); or, cette courbe n'est autre chose que la caustique formée par ces rayons réfractés, d'où il faut conclure que *la caustique que forment les rayons lumineux qui émanent d'un point, après s'être réfractés à la rencontre d'une circonférence dans le plan de laquelle ce point se trouve situé, est la développée d'une courbe dont la propriété caractéristique est que la somme ou la différence des produits des distances de ses points au point lumineux et à son conjugué par rapport au cercle, par deux coefficiens constans est une quantité constante.* Les courbes de ce genre ayant quelque ressemblance soit avec l'ellipse, soit avec l'hyperbole, on doit en conclure que les caustiques dont il s'agit ici ne doivent pas

(*) Si l'on voulait faire usage du calcul différentiel, on aurait, en nommant r, r' les droites MA, MB, et ds l'élément de la courbe

$$br \pm ar' = Const. \quad \text{d'où} \quad b\frac{dr}{ds} \pm a\frac{dr'}{ds} = 0;$$

or, $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{dr'}{ds}$ sont les sinus des angles que fait la normale avec les rayons vecteurs r et r'; donc, etc.

différer extrêmement des développées de ces deux courbes (*).

La proposition que nous venons d'établir doit maintenant être appliquée aux différentes circonstances que peut présenter la question.

(*) Ce qui précède nous conduit à une construction assez simple des courbes (1), (2), (3).

Soit prise (fig. 6) sur la direction de IA une longueur IM'=IM, et soit M'C', parallèle à CI, qui coupe en C' la direction de CA. On a d'abord

$$\frac{\text{IA}}{\text{IM}'}=\frac{a}{c}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{IA}}{\text{M}'\text{A}}=\frac{a}{c-a}.$$

les triangles CIA, C'M'A donnent ensuite

$$\frac{\text{CA}}{\text{C}'\text{A}}=\frac{\text{CI}}{\text{C}'\text{M}'}=\frac{\text{IA}}{\text{M}'\text{A}}=\frac{a}{c-a};$$

donc le point C' est donné de position et la distance C'M' donnée de grandeur ; de sorte que le point M' appartient à une circonférence de cercle dont on connaît le centre C' et le rayon.

Ainsi, décrivons un cercle dont le centre C' et le rayon C'M' soient déterminés par les proportions

$$\frac{\text{CA}}{\text{CC}'}=\frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\text{CI}}{\text{C}'\text{M}'}=\frac{\text{CA}}{\text{C}'\text{A}}=\frac{a}{c-a};$$

le point A sera un centre de similitude des cercles dont C et C' sont les centres. Soient menées par ce point A des droites IM' qui coupent ces deux cercles en des points corrélatifs I et M', de sorte que les rayons CI, C'M' soient parallèles entre eux ; puis, faisant passer par les points A et B une suite de cercles AIB, prenons sur chacun d'eux une corde IM égale à IM', tellement que l'angle CIM soit de même espèce que CIA ; nous obtiendrons, par cette construction, tous les points M de la courbe demandée, et toutes ses normales MI.

Une construction analogue, indiquée (fig. 2), a lieu relativement à l'ellipse et à l'hyperbole dont il a été question (fig. 1 et 2).

Tout étant supposé comme ci-dessus (fig. 3) , soit d'abord supposé le point A dans l'intérieur du cercle réfringent , ce qui donne $a<b$. Elevons la perpendiculaire AD à l'axe CA. L'angle CDB étant égal à l'angle CAD , BD sera tangente au cercle dDδ , et l'angle CDA=CBD , sera la plus grande valeur que puisse prendre l'angle d'incidence CIA, qui est toujours égal à CBI. Concevons décrit le cercle AIB , pour chaque point I d'incidence ; il faudra supposer successivement que le point I tombe sur l'arc dD , puis sur l'arc δD , en se rappelant que l'angle CIM ne peut devenir obtus.

Si l'on a $c<a$, il s'ensuit IM<IA, le point M tombe toujours sur l'arc AI, quel que soit I ; la caustique formée par les rayons réfractés est alors la développée de la courbe (2).

Si l'on a $c>a$ et $<b$, IM est compris entre IA et IB , le point M tombe sur l'arc AB, quel que soit I ; la caustique répond alors à la courbe (1).

Soit enfin $c>a$ et $>b$, d'où IM>IA et >IB. Si le point d'incidence tombe sur l'arc dD , on voit que la caustique est la développée de la courbe (1) ; et , s'il tombe sur δD , elle devient celle de la courbe (3). L'angle d'incidence a ici une limite au-dessous de CDA , qu'on obtient en faisant Sin.CIM=1 , dans la formule $\frac{Sin.\,\mathrm{CIA}}{Sin.\,\mathrm{CIM}}=\frac{a}{c}$, d'où $Sin.\mathrm{CIA}=\frac{a}{c}<\frac{a}{b}$ ou $<$Sin.CDA.

Examinons maintenant ce qui a lieu (fig. 4 et 5) , quand le point A est extérieur au cercle, d'où résulte $a>b$. Soit alors AD tangente au cercle dDδ ; il est clair que les rayons qui partent du point A ne pourront pas tomber , à la fois , sur les deux arcs dD et δD ; ils tomberont seulement sur l'un ou sur l'autre. D'après cela , si l'on suppose décrit le cercle AIB pour chaque point I, en se rappelant que les angles CIA , CIM sont toujours de même espèce , et que le premier est obtus ou aigu , suivant que I tombe sur dD ou sur δD, on parviendra aux résultats suivans.

Les rayons incidens tombant sur l'arc dD , si l'on a $c<a$, la

caustique est la développée de la courbe (2) ; mais, si l'on a $c>a$, elle répondra à la courbe (1) ; les rayons incidens susceptibles de réfraction n'atteindront pas AD, et leur limite sera donnée par la formule $Sin.\mathrm{CIA}=\frac{a}{c}$.

Les rayons incidens tombant sur l'arc δD, si l'on a $c<a$, la caustique se rapporte à la courbe (1) ou à la courbe (3), suivant qu'on a $c>$ ou $<b$. Mais $c>a$ se rapporte à la courbe (2). Dans ce dernier cas, l'angle d'incidence CIA a une limite au-dessous de l'angle droit CDA, donnée par la formule $Sin.\mathrm{CIA}=\frac{a}{c}$.

Outre les suppositions que nous venons de parcourir, il reste celle de $c=b$. Nous avons vu qu'alors, tant que les rayons incidens tombent sur l'arc δD, la caustique se réduit à un point unique B ; mais, à l'égard de ceux qui tombent sur l'autre arc dD, la caustique devient la développée de la courbe (1) ou de la courbe (2), suivant que le point A est intérieur ou extérieur au cercle dDδ.

Pour compléter ces recherches, nous allons encore considérer la surface sphérique comme surface réfléchissante, ou, ce qui revient au même, le cercle comme courbe réfléchissante, et nous ferons connaître la nature de la caustique que forment alors les rayons réfléchis.

En admettant les mêmes notations et constructions que ci-dessus, on parvient aisément alors aux conclusions que voici :

Si la distance du point A au centre du miroir est plus petite que son rayon, la caustique formée par les rayons réfléchis est la développée de la courbe définie par l'équation $\frac{b}{a}\mathrm{MA}-\mathrm{MB}=\mathrm{AB}$.

Si la distance du point A au centre du miroir est plus grande que son rayon, la caustique est la développée de la courbe

$MB+\frac{b}{a}MA=AB$ ou de la courbe $MB-\frac{b}{a}=AB$, suivant que le miroir est convexe ou concave à l'égard du point A.

Il convient de rappeler ici une autre propriété optique dont jouissent en commun les courbes désignées par (2) et (3) dans ce qui précède, et qui se trouve énoncée dans les *Œuvres de Descartes*; propriété qui découle de celle que nous avons exposée relativement aux normales de ces courbes. En voici l'énoncé. Soient A et B deux points donnés de position, et soit $\frac{b}{a}$ un rapport donné; soit construite une courbe telle que, pour chacun de ses points M, la quantité $b.MA-a.MB$ soit égale à une constante arbitraire qu'on peut prendre positive, négative ou nulle. Si des rayons lumineux, partant du point A, se réfractent à la rencontre de cette courbe, de telle sorte que les sinus des angles d'incidence et de réfraction soient entre eux dans le rapport donné de a à b, les directions des rayons réfractés convergeront vers le point fixe B (*).

(*) Nous avons déjà insinué ailleurs (tom. V, pag. 289) qu'il se pourrait bien que la plupart des caustiques, d'ordinaire d'une figure si compliquée, ne fussent que des développées de courbes beaucoup plus simples. Cette pensée semble avoir présidé au beau travail qu'on vient de lire; et c'est sans doute ce qui a conduit son estimable auteur aux élégans résultats auxquels il est parvenu, et qui jettent tant de jour sur un des plus épineux sujets que puisse offrir l'analise appliquée.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

Traité abrégé de gnomonique graphique (*) ;

Par M. SARRUS, docteur agrégé ès sciences.

DANS les applications de la gnomonique qui ne sont pas de pure curiosité, la surface sur laquelle il s'agit de tracer un cadran est une surface plane, qui peut d'ailleurs avoir dans l'espace un situation quelconque. Les heures sont indiquées par la coïncidence de l'ombre solaire d'une verge rectiligne, partant d'un point de la surface du cadran, et dirigée parallèlement à l'axe de la terre, avec une suite de droites partant du même point. Ces droites sont ce qu'on appelle les *lignes horaires* ; leur point de concours est le *centre du cadran*, et la verge rectiligne dont l'ombre indique les heures en est dite l'*axe* ou le *style*. On appelle *soustylaire* la projection orthogonale du style sur le plan du cadran.

Dans les cadrans les plus soignés, on remplace le style par une plaque métallique circulaire, percée à son centre d'un trou de quelques millimètres de diamètre. Cette plaque est solidement fixée, à l'avance, en avant du plan du cadran; et les heures sont indiquées par la coïncidence successive du rayon solaire qui passe par

(*) On peut consulter, sur le même sujet, deux articles de M. Francœur, insérés aux pages 233 du tome VIII.e et 91 du tome IX.e des *Annales*.

J. D. G.

le trou dont elle est percée avec chacune des lignes horaires. Dans ce cas, la droite menée du centre du trou au point de concours des lignes horaires doit être parallèle à l'axe de la terre ; c'est l'axe du cadran partant de son centre ; et la droite qui joint ce centre à la projection orthogonale du centre du trou sur le plan du cadran est la soustylaire. Nous supposerons constamment, dans tout ce qui va suivre, que les heures sont indiquées par une telle plaque, d'autant que rien n'est plus facile que de passer de cette dernière supposition à la première.

Les méthodes que l'on prescrit ordinairement pour tracer un cadran solaire sur un plan supposent d'abord que l'on connaît la latitude du lieu ; elles exigent ensuite que l'on détermine, par des procédés plus ou moins pénibles et délicats, l'inclinaison et la déclinaison du plan du cadran, desquelles on déduit ensuite la situation du centre et la direction de la soustylaire. Alors les lignes horaires se tracent par des procédés connus.

Nous nous proposons ici d'enseigner à tracer un cadran solaire, dans un lieu dont la latitude est inconnue, sur un plan dont on ignore la situation, en remplaçant la détermination de ces élémens par trois points d'ombre marqués sur le cadran à des intervalles de quelques heures d'une même journée, choisie de préférence vers l'un des solstices ; afin qu'on puisse considérer la déclinaison du soleil comme sensiblement constante dans l'intervalle qu'embrasseront les observations. Mais, pour la commodité des praticiens, et pour mieux faire voir en même temps combien la méthode est facile, nous donnerons d'abord les développemens théoriques, que nous ferons suivre du procédé pratique, dépouillé de tous raisonnemens.

§. I.

Développemens théoriques.

En faisant abstraction de son mouvement en déclinaison, ce qui est permis, sous les conditions que nous venons d'indiquer, le soleil décrit chaque jour un parallèle à l'équateur. Si l'on imagine par son centre mobile et par le centre fixe du trou de la plaque une droite indéfinie, prolongée jusqu'au plan du cadran, cette droite décrira, dans l'intervalle de vingt-quatre heures, une double surface conique de révolution, dont les deux nappes auront leur sommet commun au centre du trou. Le plan du cadran coupera l'une de ces nappes suivant une ligne du second ordre qui suivra constamment, dans son mouvement, l'image mobile du trou de la plaque. L'axe du double cône, parallèle à l'axe de la terre, sera aussi l'axe du cadran, qu'il ira percer à son centre, point de concours des lignes horaires.

Soit S (fig. 7) le sommet commun de deux cônes, centre du trou de la plaque. Soit O la projection orthogonale de ce sommet sur le plan du cadran ; et soient P et P′ deux quelconques des points du périmètre de la section de l'un des cônes par ce plan. Soit enfin C le point où le plan du cadran est percé par l'axe commun SC des deux cônes, lequel sera aussi l'axe du cadran dont le centre sera en C.

Soient menées les droites PP′, OP, OP′, SP, SP′. Sur les deux dernières, soient prises, à partir de S, les longueurs égales arbitraires SA et SA′ ; des points A et A′ soient respectivement abaissées, sur OP et OP′, les perpendiculaires AB et A′B′, et soient menées AA′ et BB′ ; la dernière de ces deux droites sera la projection orthogonale de la première sur le plan du cadran. Soit divisé l'angle PSP′ en deux parties égales, par une droite coupant AA′ en E″ et PP′ en D″ ; le point E″ sera le milieu de

AA′ ; et si, par la droite SD″, on conçoit un plan perpendiculaire à AA′, ce plan contiendra évidemment l'axe du cône, de sorte que sa trace sur le plan du cadran passera par le point C, et sera ainsi dirigée suivant D″C.

Or, il est connu, et il est d'ailleurs facile de démontrer que, lorsqu'un plan et une droite sont perpendiculaires l'un à l'autre, la trace du plan, sur un autre plan quelconque, est perpendiculaire à la projection orthogonale de la droite sur ce même dernier plan ; donc, dans le cas qui nous occupe, la trace D″C du plan D″SC, sur le plan du cadran, doit être perpendiculaire à la projection orthogonale BB′ de la droite AA′ sur ce même plan.

Il résulte de là que, connaissant seulement la hauteur perpendiculaire du centre du trou de la plaque au-dessus du plan du cadran, la projection de ce centre sur le même plan et en outre deux images du même centre sur ce plan, marquées à deux époques quelconques d'un même jour, on peut, par une construction plane, exécutée sur ce cadran même, obtenir une droite qui en contienne le centre.

Supposons, en effet, (fig. 8) que le plan de la figure soit le plan même du cadran, que le point O soit la projection orthogonale du centre du trou et que les points P et P′ soient les centres des images du même trou, pour deux heures différentes quelconques. Soient menées OP, OP′ et PP′. Au point O soient élevées des perpendiculaires OS, OS′ à OP et OP′, d'une même longueur égale à la hauteur perpendiculaire du centre du trou au-dessus du point O. Soient menées les deux droites SP et S′P′ sur lesquelles soient prises, à partir des points S, S′, des longueurs égales arbitraires SA et S′A′. Des points A et A′ soient abaissées respectivement, sur OP et OP′, les perpendiculaires AB et A′B′, et soit menée BB′. Sur PP′ comme base soit construit un triangle P*s*″P′, dont les deux autres côtés P*s*″ et P′*s*″ soient respectivement égaux aux droites PS, P′S′. Soit divisé l'angle *s*″ de ce triangle en deux parties égales par une droite coupant le côté opposé en D″. Soit enfin menée, par le point D″, une perpendiculaire indéfinie à BB′, et cette perpendiculaire contiendra le centre du cadran. Cela est manifeste, puisque la figure 8 n'est autre que le développement du tétraèdre SPOP′ de la figure 7 sur le plan de sa base.

Si donc, au lieu de deux images du centre du trou sur le plan du cadran, on en a trois; en les combinant deux à deux, on obtiendra trois droites qui contiendront toutes le centre du cadran; de sorte que, si la construction est bien faite, ces trois droites devront concourir en un même point C qui sera le centre de ce cadran.

Ce point C ainsi obtenu, en le joignant au point O par une droite, cette droite sera la projection de l'axe sur le plan du cadran, c'est-à-dire la soustylaire. Construisant ensuite sur CO, comme côté de l'angle droit, un triangle rectangle dont l'autre côté de l'angle droit OΣ soit égal à la hauteur du centre du trou au-dessus du plan du cadran, l'angle ΣCO de ce triangle mesurera l'inclinaison de l'axe sur ce plan. Si enfin on conçoit, par le centre du trou, une verticale rencontrant le plan du cadran en M, la ligne OM sera la méridienne ou la ligne horaire de midi, de sorte qu'il ne restera plus à tracer que les autres lignes horaires. Voyons donc quels principes doivent présider à leur construction.

Les lignes horaires d'un cadran plan quelconque ne sont autre chose que les intersections du plan de ce cadran avec douze autres assujettis aux conditions suivantes, 1.° de passer tous par la direction de l'axe du cadran; 2.° de former autour de cet axe, comme arête commune, vingt-quatre angles dièdres égaux entre eux; 3.° d'être tellement situés que l'un d'eux, qui déterminera la situation de tous les autres, soit vertical. Celui-ci est le plan du méridien.

Si l'on coupe ce système de douze plans par un autre plan quelconque, les intersections seront les lignes horaires d'un nouveau cadran, tracé sur ce dernier plan, ayant même axe que le premier.

Si l'on représente par X et Y ces deux cadrans, le cadran X pourra être considéré comme la perspective du cadran Y, pour un œil situé en un quelconque des points de l'axe commun; et, si les plans des deux cadrans ne sont pas parallèles, leur commune section sera coupée aux mêmes points par les lignes horaires de l'un et de l'autre.

Le plan du cadran X étant donné; à cause de l'indétermination du plan du cadran Y, on peut le choisir tel que le tracé de ses lignes horaires soit des plus faciles, et se servir ensuite de ce tracé pour exécuter celui des lignes horaires du cadran X, à l'aide des remarques qui précèdent.

Or, de tous les cadrans, le plus facile à construire est, sans contredit, le cadran équinoxial, c'est-à-dire, celui dont le plan est perpendiculaire à son axe ou parallèle au plan de l'équateur. Ses lignes horaires, en effet, font des angles égaux autour de son centre, et la ligne de midi, qui détermine toutes les autres, est l'intersection de son plan avec le plan vertical conduit par son axe.

Soient donc (fig. 9) S le centre du trou de la plaque, O sa projection orthogonale sur le plan du cadran, et C le centre de ce cadran, de manière que CS en soit l'axe et CO la soustylaire. Concevons, par ce point S, un plan perpendiculaire à l'axe SC du cadran, et coupant le plan de ce cadran suivant une droite GH rencontrée en T par le prolongement de CO; ce plan sera celui d'un cadran équinoxial ayant même axe que le premier; de sorte que, si du point S comme centre et avec ST perpendiculaire à GH, prise pour rayon, on décrit un cercle sur ce second cadran, il ne s'agira que de diviser sa circonférence en vingt-quatre parties égales et de mener du point S des rayons aux points de division, pour en obtenir les lignes horaires, pourvu qu'un seul de ces points de division, celui de midi, par exemple, soit donné.

Or, soit M le point où le plan du premier cadran est percé par la verticale SM menée par le centre du trou; CM sera la méri-ridienne de ce premier cadran, coupant la droite GH au point 12, d'où il suit que la droite $S12$, coupant la circonférence en M', sera la méridienne du second cadran, et le point M' le point de départ des divisions de cette circonférence.

Or, si l'on conçoit que le plan du second cadran tourne autour de GH jusqu'à se confondre avec celui du premier, TS deviendra le prolongement de CT, et en prolongeant les lignes horaires de ce dernier jusqu'à GH, les droites menées du point C aux points de division de cette droite seront les lignes horaires du premier.

La construction d'un cadran solaire sur un plan quelconque, se réduit donc à ce qui suit.

§. II.

Procédé pratique.

Supposons (fig. 10) que le plan de la figure soit celui du cadran. En avant de ce plan, soit solidement établie une plaque percée d'un trou circulaire ; le plan de cette plaque étant à peu près dirigé vers le pôle et tourné d'ailleurs de telle sorte que vers midi, à une époque peu éloignée de l'une des équinoxes, l'image solaire du trou soit la plus nette et la plus circulaire qu'il se pourra.

Soient marqués arbitrairement, sur le plan du cadran, trois points à une même distance quelconque du centre du trou de la plaque, et soient considérés ces trois points comme les trois sommets d'un triangle ; les perpendiculaires sur les milieux de ses côtés devront se couper toutes trois en un même point O, qui sera la projection orthogonale du centre du trou de la plaque au plan du cadran. Soit mesurée la distance de ce centre à sa projection.

En un même jour, peu distant de l'un des solstices, soient marquées sur le cadran trois images solaires du centre du trou de la plaque, la première entre huit et neuf heures du matin, la seconde vers les midi, et la troisième de trois à quatre heures du soir. Soient P, P', P'' ces trois points ; et soient menées OP, OP', OP'', $P'P''$, $P''P$, PP'.

Soient élevées respectivement à OP, OP′, OP″, au point O des perpendiculaires OS, OS′, OS″, égales entre elles et à la distance du centre du trou de la plaque à sa projection ; soient menées SP, S′P′, S″P″ ; soient prises sur ces droites, à partir de S, S′, S″, des longueurs arbitraires SA, S′A′, S″A″, égales entre elles (*) ; soient abaissées des points A, A′, A″ respectivement, sur OP, OP′, OP″, les perpendiculaires AB, A′B′, A″B″, et soit formé le triangle BB′B″.

Sur P′P″, P″P, PP′ comme bases soient construits des triangles P′sP″, P″s'P, Ps''P′, dont les deux autres côtés soient égaux à P′S′, P″S″ pour le premier ; P″S″, PS pour le second ; PS, P′S′ pour le troisième ; soient divisés les angles s, s', s'' de ces triangles en deux parties égales, par des droites coupant les côtés opposés en D, D′, D″; enfin des points D, D′, D″ soient conduites des droites respectivement perpendiculaires à B′B″, B″B, BB′; ces trois perpendiculaires concourront en un même point C, qui sera le centre du cadran.

Ce centre ainsi déterminé, on achevera la construction comme il suit. Soit menée la soustylaire OC (fig. 11), et, par le point O, soit élevée à cette droite la perpendiculaire OΣ égale à la distance du centre du trou de la plaque à sa projection ; alors l'angle OCΣ déterminera l'inclinaison de l'axe du cadran sur son plan. Soit menée à ΣC, par le point Σ, une perpendiculaire rencontrant en T le prolongement de CO. Soit menée à CT, par le point T, une perpendiculaire indéfinie GH, et soit prolongée CT au-delà de cette perpendiculaire d'une quantité Tσ=TΣ ; enfin du point σ comme centre et avec σT comme rayon, soit décrite une circonférence.

(*) Le plus simple serait de prendre ces trois longueurs égales à la moins longue des trois droites SP, S′P′, S″P″. Si nous ne le faisons pas ici, c'est pour conserver la symétrie des notations.

Supposons présentement qu'en laissant tomber un fil à plomb du centre du trou de la plaque sa direction rencontre le plan du cadran en un point M ; alors en menant CM , rencontrant GH en un point 12 ; cette droite sera la méridienne du cadran. Menant ensuite $\sigma 12$, coupant la circonférence en M′, on divisera cette circonférence en vingt-quatre parties égales, à partir du point M′; on menera du centre σ aux points de division des rayons prolongés jusqu'à la rencontre de l'indéfinie GH ; et alors les droites menées du point C aux points ainsi déterminés sur GH seront les lignes horaires du cadran (*).

Le peu qu'on vient de lire nous paraît comprendre toute la gnomonique usuelle , sur laquelle on a écrit tant de traités volumineux ; comme ce qu'on lit à la page 181 du tome XIII comprend toute la perspective.

(*) Il se pourrait quelquefois que certaines droites partant du point σ ne rencontrassent GH que fort loin du point T; mais on sait , et même en n'employant que la règle , mener , par un point donné C , une droite dirigée vers le point de concours d'une droite donnée GH et d'une autre droite donnée , sans qu'il soit besoin d'avoir ce point de concours.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la division de la ligne droite en parties égales ;

Par un Abonné.

Au Rédacteur des *Annales* ;

Monsieur,

En voyant que vous n'aviez pas dédaigné de mentionner, dans les *Annales*, les procédés de MM. Voruz et Sarrus pour la division d'une droite en parties égales, j'ai pensé que vous ne dédaigneriez pas d'accorder la même faveur au suivant, qui n'en diffère, au surplus, que par des nuances très-légères, mais dont la démonstration générale résulte très-simplement d'une proposition fort connue.

Comme on sait, par les premiers élémens, partager une droite en deux parties égales, toute la difficulté du problème se réduit à savoir diviser une droite donnée en un nombre impair quelconque de parties égales ; et il est même aisé de voir que toute la difficulté de ce dernier problème se réduit elle-même à savoir construire un des deux points de division du milieu de la droite à partager.

Soit donc AB (fig. 12) une droite qu'il faille diviser en $2n+1$ parties égales. Pour y parvenir, sur AB, comme base, soit érigé, à volonté, un triangle ASB. Soit prolongée AB au-delà de B d'une quantité BQ égale à n fois AB. Par le point Q soit menée une droite arbitraire, coupant respectivement SA et SB en M et N. Soient encore menées AN et BM, se coupant en C. Alors la droite SC coupera AB en un point P tel que PA et PB contiendront respectivement $n+1$ et n des $2n+1$ divisions de AB.

En effet, les quatre droites SA, SB, AN et BM forment un quadrilatère complet, dont les trois diagonales sont SC, MN et AB; et l'on a, par construction,

$$QA:QB::n+1:n\ ;$$

mais, dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est harmoniquement coupée par les deux autres; d'où il suit qu'on doit avoir

$$PA:PB::QA:QB\ ;$$

on aura donc aussi

$$PA:PB::n+1:n\ ,$$

comme nous l'avions annoncé (*).

(*) M. du Chayla, capitaine du génie, nous a indiqué, pour éviter la multiplicité des parallèles qu'exige la méthode ordinaire, ou plutôt pour pouvoir les mener facilement, un tour d'adresse fort simple, qui pourrait d'autant mieux trouver place dans les élémens, qu'il ne repose que sur les notions qu'on est dans l'usage d'y développer. Voici en quoi il consiste :

Soit AB (fig. 13) la droite à diviser; soit menée, à l'ordinaire, par le point A, une autre droite sur laquelle soient portées, à partir du même point, autant d'ouvertures de compas égales et arbitraires qu'on veut de divisions dans AB; et supposons que la dernière se termine en M. Soit menée MB, et du point A comme centre, et avec AM pour rayon, soit

ANALISE TRANSCENDANTE.

Remarques diverses sur le mémoire de M. Vincent, inséré au commencement du présent volume, et éclaircissemens sur l'article de la page 105;

Par M. STEIN, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique.

Au Rédacteur des *Annales*;

MONSIEUR,

LES considérations très-intéressantes que M. Vincent vient d'exposer, au commencement du XV.^{e} volume des *Annales*, le conduisent à

---

décrit un arc de cercle coupant MB en M′. En portant les divisions de AM sur son égale AM′, et menant ensuite des droites par les points de division correspondans de ces deux-là, ces droites seront les parallèles à construire, lesquelles couperont AB aux points de division demandés.

M. Voruz nous observe que c'est à tort que nous avons dit (page 94) que le procédé dont nous recommandions l'usage et le théorème qui lui sert de démonstration n'étaient point présentés dans les traités élémentaires, attendu que l'on rencontre l'un et l'autre dans les élémens de M. Develey, professeur à Lausanne. Bezout a aussi donné quelque chose d'analogue; mais toujours est-il vrai de dire que le procédé, dans toute sa simplicité, n'est point généralement enseigné.

J. D. G.

des conséquences très-différentes de plusieurs résultats admis jusqu'ici comme exacts. Le hazard ayant fait que, sans connaître le travail de M. Vincent, je me suis aussi occupé d'un sujet analogue, je vais ajouter ici quelques observations à celles que j'ai eu l'honneur de vous communiquer dans ma dernière lettre, en tâchant par là d'éclaircir le point principal du mémoire de M. Vincent sur les courbes transcendantes.

§. I. *Sur les exposans fractionnaires.*

Les deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{mp}{np}$ sont essentiellement les mêmes, et donnent cependant des résultats différens lorsqu'on les emploie comme exposans d'une seule et même quantité. En effet, $a^{\frac{m}{n}}$ n'a que n valeurs différentes, tandis que $a^{\frac{mp}{np}}$ en a np. Dans ces np valeurs sont comprises les n valeurs de $a^{\frac{m}{n}}$, de sorte que l'expression $a^{\frac{mp}{np}}$ est plus générale que l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ (*).

D'après cela, la valeur d'une puissance fractionnaire dépend à la fois de la valeur absolue et de la forme de son exposant; de sorte que, pour caractériser une puissance fractionnaire d'une

---

(*) On serait tenté de croire, d'après cela, qu'il n'est pas permis de multiplier par un même nombre les deux termes d'un exposant fractionnaire, ainsi qu'on le pratique dans la multiplication des radicaux; mais on peut observer que, dans le produit $a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}}$, les n valeurs du premier facteur se combinant avec les q valeurs du dernier, ce produit doit par-là même avoir nq valeurs. Lors donc que, suivant les procédés connus, on lui substitue $a^{\frac{mq+np}{nq}}$, on ne lui fait pas acquérir des valeurs plus nombreuses que celles qu'il avait avant cette transformation.

J. D. G.

quantité connue, il ne suffit pas d'indiquer la valeur de son exposant ; mais qu'il faut dire, en outre, quel est le dénominateur de cet exposant.

§. II. *Sur la définition des logarithmes.*

En admettant, pour définition des logarithmes, que le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre constant pour obtenir celui-là, on doit reconnaître, d'après ce qui précède, que cette définition manque de précision. En effet, si $y=a^{\frac{m}{n}}$, on aura aussi $y=a^{\frac{mp}{np}}$; ainsi ce n'est pas plutôt $\frac{m}{n}$ que $\frac{mp}{np}$ qui est le logarithme de y. Cependant, les conséquences des deux hypothèses sont bien loin d'être les mêmes. Si, par exemple, n est impair et p pair, en posant $\frac{m}{n}=\text{Log.}y$, on trouvera que $-y$ n'a pas de logarithme réel, tandis qu'en prenant $\frac{mp}{np}=\text{Log.}y$, on aura $\text{Log.}+y=\text{Log.}-y$.

Il faudra donc, dans tous les cas, ajouter quelque chose à la définition des logarithmes généralement admise. Peut-être croirait-on atteindre le but en disant que l'exposant dont il est question dans la définition est supposé réduit à ses moindres termes ; mais ce serait rendre la définition des logarithmes moins générale ; et jamais on ne doit, sans une absolue nécessité, faire de telles restrictions en analise.

Il paraîtra peut-être plus conforme à la marche analitique de supposer, tout au contraire, que l'exposant a été amené à avoir un dénominateur infini ; ce qui rendra la puissance aussi générale qu'elle puisse l'être.

§. III. *Sur la construction de la logarithmique.*

Les restrictions de la signification des puissances fractionnaires qui naissent des diverses formes que peuvent prendre leurs exposans paraissent pouvoir être moins admises que dans aucun autre cas, lorsqu'il s'agit de constructions géométriques. En effet, les quantités $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$, par exemple, n'ont et ne sauraient avoir aucune différence, lorsqu'on les considère comme des grandeurs géométriques ; de sorte que l'abscisse $\frac{2}{3}$ se confond absolument avec l'abscisse $\frac{4}{6}$.

On ne saurait donc être d'accord avec M. Vincent, lorsqu'il réduit à $\frac{1}{2q+1}$ l'abscisse $\frac{2}{4q+2}$, et qu'il en conclut qu'à cette abscisse il ne correspond point d'ordonnée négative, puisque, comme nous venons de le dire, les abscisses $\frac{1}{2q+1}$ et $\frac{2}{4q+2}$ ont la même extrémité ; de manière que l'ordonnée négative qui correspond à la dernière correspond aussi à la première.

Les conclusions de M. Vincent, relatives aux branches pointillées et ponctuées, ne sont dues qu'à une restriction arbitraire de la définition des logarithmes ; et on pourrait, par d'autres restrictions, parvenir à des résultats tout différens. Si, par exemple, au lieu du dénominateur $4q+2$, on choisissait 2^q, on trouverait, pour la courbe $y=a^x$, en suivant mot à mot le raisonnement de M. Vincent, une branche continue du côté des y positives, et une branche composée de parties continues séparées par des points, du côté des y négatives. Si l'on avait pris pour dénominateur $2q+1$, on n'aurait eu qu'une seule branche, du côté des y positives.

Si donc on voulait restreindre arbitrairement la signification de l'équation $y=a^x$, elle ne présenterait plus aucun sens déterminé. Il faudra donc, pour la construire complètement, donner à x un dénominateur infini, et ne le réduire en aucune manière.

§. IV. *Autre manière de parvenir aux mêmes conclusions.*

On arriverait aux mêmes conclusions en partant des principes généraux relatifs à la construction d'une courbe représentée par une équation. En effet, pour construire une telle courbe, il ne suffit point de donner à l'abscisse x des valeurs *indéfiniment* peu différentes ; il faut lui donner des valeurs *infiniment* peu différentes ; c'est-à-dire qu'il faut faire croître x d'une manière continue. Il ne faudra donc pas partager l'unité linéaire en un nombre *fini* mais en un nombre *infini* de parties ; c'est-à-dire qu'il faudra donner aux x des dénominateurs infinis ; et ce que nous avons dit plus haut montre qu'il n'est pas permis de réduire les valeurs fractionnaires de x à leur plus simple expression.

§. V. *Réponse aux objections.*

On pourrait peut-être nous objecter ici qu'en supposant le dénominateur de x infini, il n'en reste pas moins une indétermination dans la définition des logarithmes ; puisque ce nombre infini peut être, à volonté, supposé pair ou impair. Mais cette objection est inadmissible. Dès l'instant que l'on suppose le dénominateur de x infini, la puissance a^x aura toutes les valeurs possibles, c'est-à-dire, toutes les valeurs dont elle est susceptible, en donnant à x les diverses formes qu'il peut avoir, ainsi que je l'ai prouvé dans ma précédente lettre, indépendamment de toute supposition sur la nature de l'infini.

Je n'entrerai dans aucun développement sur ce que dit M. Vincent de la loi de continuité, et sur ce qu'il entend par des différences plus petites que toute quantité assignable. Je me bornerai uniquement à observer que la réponse aux difficultés qu'il élève à ce sujet semble pouvoir être renfermée dans ce peu de mots : Lorsqu'on fait croître une variable d'une manière discontinue, on ne saurait obtenir des valeurs continues d'aucune fonction de cette variable.

Veuillez bien, Monsieur, si vous le jugez convenable, faire insérer la présente note à la suite des observations consignées dans ma précédente lettre.

Agréez, etc.

Trèves, le 15 août 1824.

P. S. La date de la précédente lettre vous prouvera, Monsieur, que, lorsque je l'ai écrite, je ne pouvais prévoir l'objection que vous m'avez faite dans la note de la page 109. La vérité est que le passage auquel cette note est relative ne se trouve point dans la minute de l'article que j'ai gardée par devers moi ; de sorte que j'ai dû le faire entrer dans la copie par inadvertance. Il y était d'autant plus inutile qu'il n'ajoutait rien à ce qui avait été établi à la page 108. Ce n'est pas, en effet, parce que l'infini peut être indistinctement considéré comme pair ou comme impair qu'aux logarithmes de y à dénominateurs infinis répondent également les nombres $+y$ et $-y$; mais la raison que j'en apporte est que, sans faire aucune hypothèse sur la nature de l'infini, on a $\sqrt[\infty]{1}=\text{Cos.}u+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}u$, quel que soit u ; expression qui comprend les valeurs $+1$ et -1.

J'ose espérer, Monsieur, que vous ne refuserez pas de donner place à cet éclaircissement.

Trèves, le 10 novembre 1824.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 132 du présent volume ;

Par M. Querret, ancien chef d'institution.

PROBLÈME I. *Entre tous les arcs de cercles de même longueur et de différens rayons, quel est celui qui comprend le plus grand segment circulaire entre lui et sa corde ?*

Solution. Pour fixer les idées, supposons qu'il soit question d'un segment plus petit que le demi-cercle. Soient a la longueur constante de l'arc dont il s'agit, x la longueur variable de son rayon, et y l'aire du segment qui lui répond, nous trouverons successivement

$$\text{Angle du secteur} \ldots = \frac{a}{x}\,,$$

$$\text{Aire du secteur} \ldots = \frac{1}{2}ax\,,$$

$$\text{Corde de l'arc} \ldots = 2x\,\text{Sin.}\frac{a}{2x}\,,$$

$$\text{Flèche de l'arc} \ldots = x\left(1-\text{Cos.}\frac{a}{2x}\right),$$

Hauteur du triangle. . $=x\,\text{Cos.}\,\dfrac{a}{2x}$,

Aire du triangle. . . . $=x^2\,\text{Sin.}\,\dfrac{a}{2x}\,\text{Cos.}\,\dfrac{a}{2x}=\frac{1}{2}x^2\,\text{Sin.}\,\dfrac{a}{x}$,

$y=$ secteur — triangle. $=\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}x^2\,\text{Sin.}\,\dfrac{a}{x}$.

Nous remarquerons que cette dernière formule convient également au cas où le segment devrait excéder le demi-cercle, pourvu que, comme on le pratique ordinairement, $\text{Sin.}\,\dfrac{a}{x}$ soit pris avec son signe.

On peut même concevoir tels segmens de cercles qui excèdent tant qu'on voudra le cercle auquel ils se trouvent correspondre. Un segment de cercle est, en effet, la surface comprise entre un arc quelconque et sa corde; or, rien n'empêche qu'on ne prenne l'arc plus grand qu'une circonférence et même plus grand que tant de circonférences on voudra; et alors le segment vaudra lui-même plus d'un cercle entier, et pourra même surpasser tel nombre de cercles on voudra. Cette remarque rendra plus faciles à interpréter les résultats que nous allons obtenir.

En différentiant deux fois consécutivement la valeur de y, on trouvera

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}a-x\,\text{Sin}\,\frac{a}{x}+\frac{1}{2}a\,\text{Cos.}\,\frac{a}{x}\ ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\,\frac{a^2-x^2}{x^2}\,\text{Sin.}\,\frac{a}{x}+\frac{a}{x}\,\text{Cos.}\,\frac{a}{x}\ .$$

Suivant donc les théories connues, on obtiendra la condition commune au *maximum* et au *minimum* en égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, et les valeurs de x qui résulteront de cette condition répondront au *maximum* ou au *minimum* suivant qu'elles rendront $\frac{d^2y}{dx^2}$ *négatif* ou *positif*.

L'égalité à zéro de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ donne

$$a\left(1+\text{Cos.}\,\frac{a}{x}\right)-2x\,\text{Sin.}\,\frac{a}{x}=0\,,$$

ou bien

$$2a\,\text{Cos.}^2\,\frac{a}{2x}-4x\,\text{Sin.}\,\frac{a}{2x}\,\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}=0\,,$$

ou encore

$$\left(a\,\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}-2x\,\text{Sin.}\,\frac{a}{2x}\right)\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}=0\,.$$

En égalant le premier facteur à zéro, il vient

$$\text{Tang.}\,\frac{a}{2x}=\frac{a}{2x}\,,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{a}{2x}=0\qquad \text{et}\qquad x=\infty\,.$$

Cette valeur répond évidemment au cas où l'arc a est une ligne droite. Il se confond alors avec sa corde, et le segment est nul et conséquemment *minimum*. On trouve, en effet, pour x infini,

Angle du secteur $=0$,

Aire du secteur $=\infty$,

Corde de l'arc. . $=a$,

Segment. . . . . $=0$,

comme cela doit être. On trouve ensuite $\frac{d^2y}{dx^2}=+\frac{a}{2x}$, qui est le caractère du *minimum.*

Si, au contraire, on égale le dernier facteur à zéro, il viendra

$$\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{2x}=\frac{(2n+1)\varpi}{2},$$

n étant un nombre entier positif quelconque, ce qui donne

$$x=\frac{a}{(2n+1)\varpi}\,;$$

Il en résulte

$$\text{Sin.}\,\frac{a}{x}=0\,, \qquad \text{Cos.}\,\frac{a}{x}=-1\,,$$

et on trouve, en conséquence,

$$\text{Angle du secteur } =(2n+1)\varpi\,,$$

$$\text{Aire du secteur } =\frac{a^2}{2(2n+1)\varpi}\,,$$

$$\text{Corde de l'arc . } =\frac{2a}{(2n+1)\varpi}\,,$$

$$\text{Flèche de l'arc. } =\frac{a}{(2n+1)\varpi}\,,$$

$$\text{Segment. . . . . } =\frac{a^2}{2(2n+1)\varpi}\,;$$

on trouve de plus

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(2n+1)\varpi\,,$$

ce qui montre que l'aire du segment est ici un *maximum* ; mais , à cause de l'indétermination de n , on voit qu'il y a ici une infinité de *maxima* , lesquels consistent tous en un certain nombre de cercles plus un demi-cercle. La valeur

$$y=\frac{a^2}{2(2n+1)\varpi}$$

prouve en outre que le *maximum maximorum* aura lieu, lorsqu'on aura $n=0$, et alors le segment sera évidemment un simple demi-cercle.

PROBLÈME II. Entre toutes les calottes sphériques de même surface et de différens rayons , quelle est celle qui comprend le plus grand segment sphérique entre elle et le plan du cercle qui lui sert de base ?

Solution. Pour fixer les idées , supposons qu'il soit question d'une calotte moindre que l'hémisphère. Soient a^2 la surface constante de la calotte dont il s'agit, x la longueur variable du rayon de la sphère à laquelle elle appartient, et enfin y le volume du segment sphérique qui lui répond ; nous trouverons successivement

Flèche de la calotte . $\dfrac{a^2}{2\varpi x}$,

Volume du secteur. . . $\dfrac{1}{3}a^2x$,

Hauteur du cône. . . $\dfrac{2\varpi x^2-a^2}{2\varpi x}$,

Rayon de sa base . . $\dfrac{a\sqrt{4\varpi x^2-a^2}}{2\varpi x}$, Aire de cette base. . . $\dfrac{a^2(4\varpi x^2-a^2)}{4\varpi x^2}$,

Volume du cône. . . $\dfrac{a^2(4\varpi x^2-a^2)(2\varpi x^2-a^2)}{24\varpi^2 x^3}$,

$y =$ secteur — cône. . $a^4 . \dfrac{6\varpi x^2-a^2}{24\varpi^2 x^3}$.

En différentiant deux fois la valeur de y, on trouve

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^4}{8\varpi^2}\cdot\frac{a^2-2\varpi x^2}{x^4}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^4}{2\varpi^2}\cdot\frac{\varpi x^2-a^2}{x^5}.$$

En égalant donc à zéro la valeur de $\dfrac{dy}{dx}$, on obtiendra pour la condition commune au *maximum* et au *minimum*

$$a^2-2\varpi x^2=0, \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{a^2}{2\varpi x};$$

il faut donc que le rayon soit égal à la flèche du segment, ou, en d'autres termes, que ce segment soit une hémisphère.

On tire de là

$$\varpi x^2-a^2=-\varpi x^2,$$

et par suite

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a^4}{2\varpi x^3};$$

et comme x est positif, il s'ensuit que cette valeur est *négative* et qu'ainsi l'hémisphère est le segment *maximum*.

Si l'on supposait le secteur plus grand que l'hémisphère, on aurait

$$\text{Hauteur du cône} \ldots = \frac{a^2-2\varpi x^2}{2\varpi x},$$

$$\text{Son volume} \ldots\ldots = \frac{a^2(4\varpi x^2-2^2)(a^2-2\varpi x^2)}{24\varpi^2 x^3},$$

$$y = \text{secteur} + \text{cône} = a^4 . \frac{6\varpi x^2-a^2}{24\varpi^2 x^3};$$

valeur pareille à la précédente, et qui conduirait aux mêmes conséquences.

Solution purement géométrique des mêmes problèmes ;

Par un ABONNÉ.

I. SOIT donné le segment de cercle *maximum* entre tous ceux qui sont terminés par des arcs de même longueur. Sur sa corde, comme corde commune, concevons, du côté opposé, un pareil segment ; il est manifeste que le double segment devra aussi être *maximum*, entre tous les doubles segmens qui auraient un périmètre double en longueur de la longueur constante de l'arc dont il s'agit. Donc, par un principe connu (*), ce double segment devra être un cercle ; donc le segment *maximum*, entre tous ceux qui sont terminés par des arcs de même longueur, est un demi-cercle.

(*) Tom. XIII, pag. 132.

II. Soit donné le segment sphérique *maximum* entre tous ceux qui sont terminés par des calottes de même surface. Sur le cercle qui lui sert de base, comme base commune, soit construit, du côté opposé, un pareil segment; il est manifeste que le double segment sphérique devra aussi être *maximum*, entre tous les doubles segmens qui auraient une surface double de la surface constante de la calotte dont il s'agit. Donc, par un principe connu (*), ce double segment devra être une sphère; donc le segment *maximum*, entre tous ceux qui sont terminés par des calottes de même surface est une hémisphère (**).

(*) Tome XIII, pag. 132.

(**) Nous avons reçu aussi de M. Tédenat, recteur honoraire, correspondant de l'académie royale des sciences, une solution de ces deux problèmes; mais qui ne diffère guère que par les notations de celle de M. Querret, et qui ne nous a pas été adressée pour être rendue publique.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

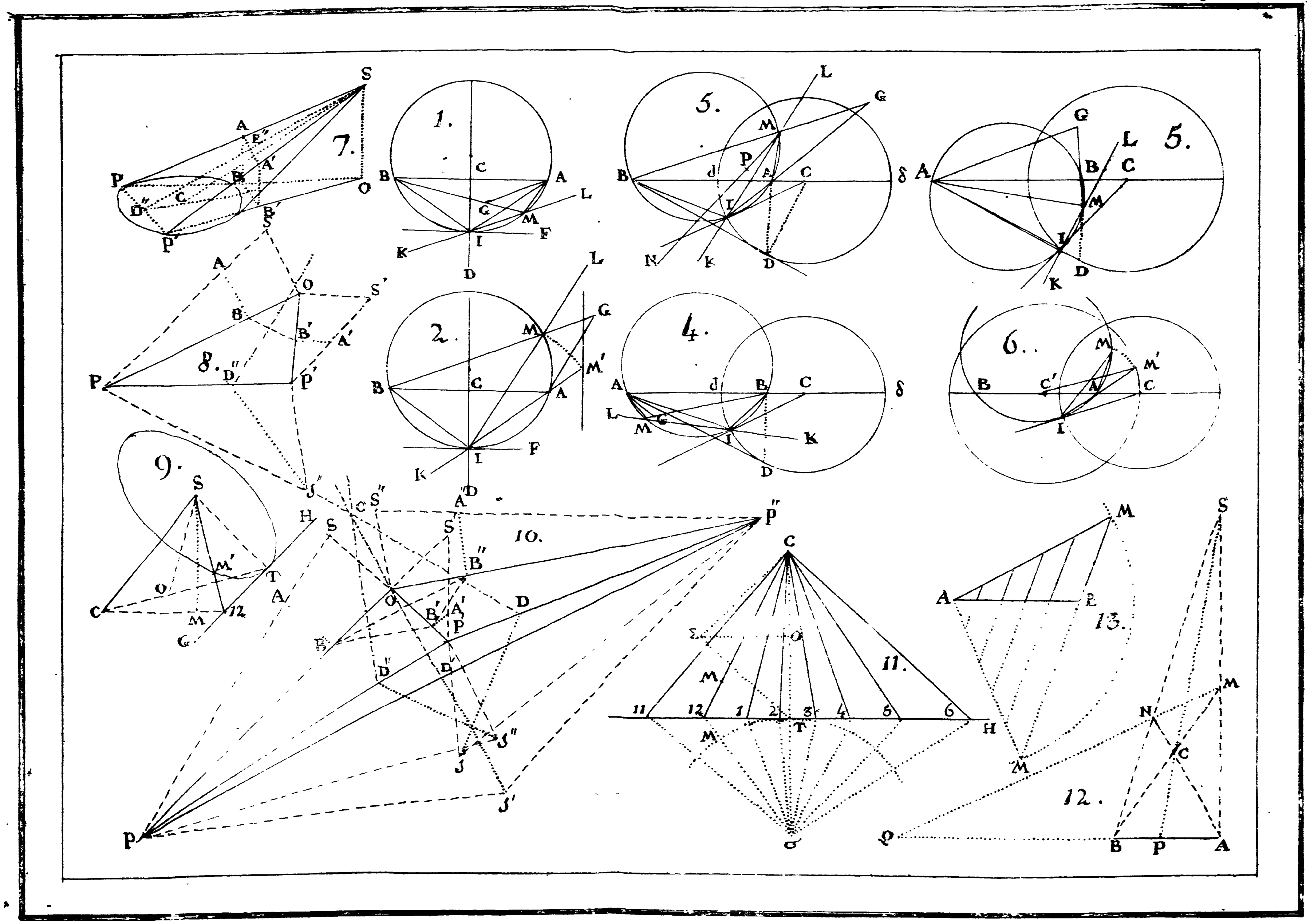
Problème d'optique.

QUELLE est la courbe plane réfléchissante pour laquelle la caustique par réflexion à laquelle donnent naissance les rayons de lumière émanés de l'un des points de son plan est la développée d'une ellipse ou d'une hyperbole ?

Problèmes de Géométrie.

A un cercle donné inscrire ou circonscrire un triangle dont les trois côtés forment une proportion continue par différence ou par quotiens dont la raison soit donnée ?

Quel est, sur la surface d'un cône droit, le lieu des pieds des normales abaissées sur cette surface d'un même point quelconque de l'espace ?



J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Recherche du cercle osculateur d'une courbe à double courbure en l'un quelconque de ses points ;

Par M. Poncelet, capitaine du génie, professeur à l'école royale d'application de l'artillerie et du génie.

Dans le VII.e volume des *Annales* (pag. 18), M. Dupin a donné un procédé assez simple pour obtenir le cercle osculateur d'une courbe à double courbure dont on a les projections orthogonales sur deux plans quelconques. Ce procédé consiste proprement à rechercher deux sections coniques osculatrices des projections qui soient telles que les cylindres projetans qui leur répondent s'entrecoupent, dans l'espace, suivant une autre osculatrice plane. La méthode donnée par M. Hachette, dans le *Bulletin de la société philomatique* (année 1816, page 88), semble beaucoup plus compliquée, puisqu'elle est fondée sur l'emploi des surfaces gauches. On sait d'ailleurs qu'elle a pour principe le beau théorème dû à Meusnier sur les rayons de courbure des sections obliques.

En combinant ce théorème avec celui de M. Dupin, sur l'indicatrice de la courbure des surfaces (*), nous sommes parvenus à une troisième solution du problème qui nous paraît nouvelle

(*) Voyez *Annales*, tom. IX, pag. 176 et 179.

et qui, si nous ne nous trompons, sera jugée beaucoup plus simple encore que les deux que nous venons de rappeler. Voici en quoi elle consiste.

On sait que l'indicatrice de la courbure, pour l'un des points d'une surface cylindrique quelconque, se réduit à deux droites parallèles aux génératrices, situées dans le plan tangent en ce point et symétriquement placées par rapport à celle de ces génératrices qui passe par ce même point, qui d'ailleurs doit être considéré comme centre de ces deux droites. On sait aussi que toute section normale aux génératrices d'un cylindre est nécessairement une section de moindre courbure ; de sorte que, pour le point dont il s'agit, la génératrice et sa perpendiculaire dans le plan tangent sont les directions de plus grande et de moindre courbure de la surface cylindrique. On sait enfin que les rayons de courbure des diverses sections normales, en un même point, sont proportionnels aux quarrés des diamètres correspondans de l'indicatrice relative à ce point; lesquels diamètres sont ici des droites terminées aux deux parallèles dont il vient d'être question ci-dessus, et passant par le point dont il s'agit.

Il résulte de là que si, pour un quelconque des points de la surface d'un cylindre, on connaissait le rayon de courbure de la section normale aux génératrices, on obtiendrait, par une construction très-simple, le rayon de courbure d'une autre section normale quelconque, passant par le même point, et dont la direction serait donnée par une droite tracée dans le plan tangent en ce point; car il serait une quatrième proportionnelle au rayon donné et aux quarrés des droites ou diamètres qui correspondent respectivement aux deux rayons dans l'indicatrice.

Cela posé, ayant une courbe à double courbure quelconque, donnée dans l'espace par ses projections orthogonales sur deux plans, on aura, par là même, deux cylindres renfermant à la fois cette courbe et dont les rayons de moindre courbure, en chaque point, seront égaux et parallèles aux rayons de courbure des points correspondans de leurs bases respectives, c'est-à-dire, des deux projections de la courbe à double courbure dont il s'agit; rayons qui sont censés connus dans le problème proposé (*); donc, pour l'un quelconque des points de l'intersection des cylindres projetans, on aura à la fois *les rayons de courbure des deux sections normales faites suivant la tangente commune en ce point.*

Or, de là on déduira aisément le rayon de courbure de la courbe même d'intersection, ainsi que le plan osculateur de cette courbe au point donné, attendu que le cercle osculateur correspondant doit être commun aux sections obliques faites par ce plan dans les deux cylindres proposés. En effet, il résulte du théorème de Meusnier que le plan osculateur dont il s'agit sera perpendiculaire à la droite qui joint les centres de courbure des deux sections normales respectives faites suivant la tangente commune aux deux cylindres qui répond au point donné sur leur courbe d'intersection, et de plus coupera cette même droite des centres de courbure en un point qui sera le centre osculateur demandé.

Ainsi, la solution du problème que nous nous sommes proposé se réduit proprement à ce qui suit : 1.° déterminer, pour le point donné sur la courbe, les rayons de courbure de ses projections orthogonales sur deux plans quelconques; 2.° à l'aide de ces rayons, qui sont respectivement égaux et parallèles aux rayons de moindre courbure des cylindres projetans, relatifs au point donné, déterminer les rayons ou centres de courbure des sections normales qui correspondent, dans les deux cylindres, à la tangente en ce même point; 3.° enfin, joindre les centres dont il s'agit par une droite, et conduire par la tangente un plan qui

(*) Sur la détermination de ces rayons, voyez *Annales*, tome XI, pag. 361 et tome XII, pages 135 et 137.

soit perpendiculaire à cette droite, et qui la coupera au centre de courbure demandé.

On déduit facilement de cette construction une expression très-simple du rayon de courbure d'une courbe, soit plane, soit à double courbure, située d'une manière quelconque dans l'espace, en fonction des rayons de courbure des points correspondans des projections orthogonales de cette courbe sur deux plans arbitraires.

Soient, en effet, R et R' les rayons de courbure des deux projections, pour les points de ces projections qui répondent à celui de la courbe duquel on cherche le rayon de courbure. Soient, en outre, a et a' les angles que forme la tangente en ce point avec ses projections respectives sur les deux plans. Soient enfin r et r' les rayons de courbure des sections normales des deux cylindres projetans, faites suivant cette tangente; on aura, d'après les propriétés de l'indicatrice rappelées ci-dessus,

$$r=\frac{R}{\text{Cos.}^2 a}, \qquad r'=\frac{R'}{\text{Cos.}^2 a'},$$

Cela posé, si l'on nomme d la distance entre les centres de courbure des sections normales qui ont r et r' pour rayons de courbure, N l'angle formé par ces rayons ou les normales au point donné de l'intersection commune des deux cylindres, enfin, α et α' les angles compris entre les directions de ces normales respectives et le rayon de courbure cherché; en représentant ce dernier par ρ, on aura également, par ce qui précède, dans les triangles formés par ces diverses droites,

$$d^2=r^2+r'^2-2rr'\text{Cos.}N,$$

$$\rho=r\text{Cos.}\alpha, \qquad \rho=r'\text{Cos}\,\alpha',$$

$$\rho d=rr'\text{Sin.}N;$$

d'où l'on tirera

$$\text{Tang}.\alpha=\frac{r-r'\text{Cos}.N}{r'\text{Sin}.N}=\frac{R\text{Cos}.^2a'-R\text{Cos}.^2a\text{Cos}.N}{R'\text{Cos}.^2a'\text{Sin}.N},$$

$$\text{Tang}.\alpha'=\frac{r'-r\text{Cos}.N}{r\text{Sin}.N}=\frac{R'\text{Cos}.^2a-R\text{Cos}.^2a'\text{Cos}.N}{R\text{Cos}.^2a\text{Sin}.N};$$

et par suite

$$\rho=\frac{RR'\text{Sin}.N}{\sqrt{R^2\text{Cos}.^4a'+R'^2\text{Cos}.^4a-2RR'\text{Cos}.^2a\text{Cos}.^2a'\text{Cos}.N}}.$$

Il serait facile, au surplus, d'arriver directement à ce résultat par la théorie ordinaire des coordonnées dans l'espace (*).

(*) Dans la lettre d'envoi de l'article qu'on vient de lire, M. le professeur Poncelet nous observe, 1.° que le théorème démontré par M. Talbot, tom. XIV, pag. 126, se trouve énoncé sous une autre forme à la page 262 du *Traité des propriétés projectives des figures*, n.° 457 ; 2.° que les articles du même ouvrage qui précèdent celui-là, à compter du n.° 453, page 260, répondent négativement à la question que nous nous sommes faite au bas de cette même page 126 du tome XIV, et font connaître sous quelles conditions le sommet d'un cône quelconque du 2.e degré peut se projeter sur le plan de sa base, de telle sorte que sa projection soit le foyer, soit de cette base, soit de la projection d'une section plane quelconque faite dans ce cône.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Théorèmes sur les polygones réguliers ;

Par M. Ch. Sturm.

Il a paru, à la page 45 du présent volume, une démonstration d'un théorème de géométrie dont M. le professeur Lhuilier avait donné l'énoncé dans la *Bibliothèque universelle*. Cette démonstration nous ayant paru moins simple que le sujet ne semblait le comporter, nous nous sommes occupés à en chercher une autre ; et le tour de raisonnement que nous y avons employé nous a heureusement conduit à quelques autres théorèmes assez curieux. M. Lhuilier n'ayant point encore publié sa démonstration, nous pensons que nos recherches sur ce sujet seront accueillies avec quelque bienveillance.

Nous allons d'abord chercher quel est le lieu des points du plan d'un polygone régulier quelconque, desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, la somme des puissances semblables quelconques de ces perpendiculaires est une grandeur constante donnée.

Soient m le nombre des côtés du polygone régulier dont il s'agit, O son centre, et P l'un des points desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, la somme des $n.^{me}$ puissances de ces perpendiculaires soit une grandeur constante donnée.

Du point O comme centre, et avec sa distance au point P pour rayon, soit décrit une circonférence (C). Du même point O soient menées des droites à tous les sommets; ces droites diviseront la circonférence (C) en m parties égales. Or, excepté le cas où le point P se trouverait le milieu de l'une des divisions, ce point sera plus près de l'un des points de division que de tous les autres. Soit pris, de l'autre côté de ce point de division, un second point Q qui en soit à la même distance que le point P, de sorte que le point de division dont il s'agit soit le milieu de l'arc PQ. Soient enfin déterminés, pour chacun des autres points de division de la circonférence (C), des points P' et Q', P'' et Q'', P''' et Q''', ... qui soient situés par rapport à eux de la même manière que le sont les points P et Q par rapport au premier. Il est manifeste que la circonférence (C) sera aussi divisée en m parties égales, soit par les points P, P', P'',..... soit par les points Q, Q', Q'',..... Il n'est pas moins évident que les points de ces deux séries seront tous des points semblablement situés par rapport au polygone dont il s'agit; d'où il suit que les perpendiculaires abaissées de l'un quelconque d'entre eux, autre que le point P, sur les directions des côtés de ce polygone seront, une à une, égales aux perpendiculaires abaissées de ce point P sur ces mêmes côtés. Il arrivera seulement que les perpendiculaires égales, dans les deux séries, correspondront à des côtés différens.

Concluons de là que la somme des $n.^{\text{mes}}$ puissances des perpendiculaires abaissées de l'un quelconque des $2m$ points P, P', P'',...., Q, Q', Q'',...., autre que le point P, sur les directions des côtés du polygone est égale à la somme des $n.^{\text{mes}}$ puissances des perpendiculaires abaissées de ce point P sur ces mêmes directions, et qu'ainsi ces $2m$ points doivent tous appartenir à la courbe cherchée, qui doit conséquemment couper en $2m$ points au moins la circonférence (C), si toutefois elle ne se confond pas avec elle.

Or, un cercle, qui est une ligne du second ordre, ne saurait être coupé en $2m$ points au moins que par une ligne qui soit au moins du m^{me} ordre ; donc toutes les fois que le lieu cherché sera d'un ordre inférieur au $m.^{me}$, il devra nécessairement se confondre avec la circonférence (C).

Mais, d'un autre côté, il est connu que la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est une fonction linéaire des coordonnées de ce point ; d'où il résulte que le lieu des points P du plan d'un polygone régulier desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions des côtés de ce polygone, la somme des $n.^{mes}$ puissances des longueurs de ces perpendiculaires est une quantité donnée, ne saurait être qu'une ligne du $n.^{me}$ ordre au plus ; donc, toutes les fois qu'on aura $n<m$, ce lieu devra se confondre avec la circonférence (C). On a donc ce théorème assez remarquable :

THÉORÈME. Le lieu géométrique des points du plan d'un polygone régulier, desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, la somme des puissances semblables d'un degré donné quelconque des longueurs de ces perpendiculaires est une grandeur constante donnée, est nécessairement une circonférence concentrique au polygone dont il s'agit ; toutes les fois du moins que l'exposant de la puissance est inférieur au nombre des côtés de ce polygone.

Or, il est connu que toute fonction symétrique entière et rationnelle de plusieurs quantités est exprimable en sommes de puissances semblables de ces mêmes quantités, dont le degré n'excède jamais le nombre des dimensions de la fonction dont il s'agit ; on peut donc à ce théorème substituer le suivant, beaucoup plus général.

THÉORÈME. Le lieu géométrique des points du plan d'un polygone régulier, desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, une fonction symétrique rationnelle et entière de forme quelconque des longueurs de ces perpendiculaires est une quantité constante, est une circonférence concentrique au polygone dont il s'agit ; toutes les fois du moins que le nombre *des dimensions de la fonction est inférieur au nombre des côtés de ce polygone.*

Ainsi, en particulier, le théorème sera vrai pour les sommes de produits deux à deux, trois à trois, ... $m-1$ à $m-1$ de ces perpendiculaires.

D'après l'idée qu'on se forme communément de la loi de continuité, on serait tenté de croire que notre premier théorème doit subsister encore pour les sommes de puissances des longueurs des perpendiculaires d'un degré égal ou supérieur à m. Il paraîtrait étrange et vraiment paradoxal, en effet, que, par exemple, le lieu géométrique des points du plan d'un polygone régulier de 100 côtés desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ces côtés, la somme des 99.mes puissances ou des puissances semblables de degrés inférieurs serait constante, dût être un cercle, et que ce lieu dût devenir tout-à-coup une ligne du 100.me ordre, ou peut-être même d'un ordre plus élevé, dès qu'il s'agirait seulement de la somme des 100mes puissances de ces mêmes longueurs.

Pour démontrer généralement qu'alors le lieu demandé cesse d'être un cercle, il faudrait probablement s'engager dans de longs et difficiles calculs ; mais nous pouvons du moins prouver, par un exemple particulier des plus simples, que du moins la loi de continuité n'est point observée dans tous les cas. En effet, dans ses *Élémens d'analise géométrique* (pag. 139), M. Lhuilier a prouvé que le lieu des points du plan d'un polygone régulier tels que la somme des cubes de leurs distances aux côtés du polygone est constante, est une circonférence concentrique à ce polygone, tant que le nombre de ses côtés surpasse trois ; mais que, dans le cas du triangle équilatéral, ce lieu cesse d'être une circonférence, pour devenir une ligne du troisième ordre. Il résulte d'ailleurs, de ce qui vient d'être démontré ci-dessus, que, pour le triangle équilatéral, comme pour les autres polygones réguliers, ce lieu redevient une circonférence dès qu'il ne s'agit plus que des sommes de perpendiculaires ou de la somme de leurs quarrés.

Venons présentement au théorème de M. Lhuilier, que nous avons rappelé au commencement de cet article, et cherchons quel est le lieu des points du plan d'un polygone régulier donné quelconque, desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, le polygone non régulier inscrit qui aura ses sommets aux pieds de ces perpendiculaires, ait une aire constante donnée.

Exécutons exactement les mêmes constructions que ci-dessus et nous obtiendrons comme alors $2m$ points P, P′, P″, ... Q, Q′, Q″, ... distribués sur la circonférence (C), de telle sorte que le polygone non régulier inscrit qui aura ses sommets aux pieds des perpendiculaires abaissées de l'un quelconque, autre que P, sur les directions des côtés du polygone primitif, sera identiquement égal au polygone irrégulier inscrit qui aura ses sommets aux pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur ces mêmes directions; d'où l'on conclura, comme ci-dessus, que le lieu cherché doit couper la circonférence (C) aux $2m$ points P, P′, P″, ... Q, Q′, Q″, ..., si toutefois il ne se confond pas avec elle.

Mais, d'un autre côté, il résulte, des considérations très-simples exposées à la page 293 du précédent volume, que le lieu cherché ne saurait être qu'une ligne du second ordre qui, si elle ne se confond pas avec la circonférence (C), ne saurait la couper en plus de quatre points; donc ce lieu est cette circonférence elle-même; de sorte qu'on a ce théorème, qui est précisément celui de M. Lhuilier:

THÉORÈME. Étant donné, sur un plan, un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés; une circonférence concentrique à ce polygone est le lieu géométrique des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur ses côtés, l'aire du polygone qui a pour sommets les pieds de ces perpendiculaires est d'une grandeur donnée.

Désignons présentement par a, b, c, ... g, h les perpendiculaires abaissées du point quelconque P de la circonférence (C) sur les directions des côtés du polygone régulier dont il s'agit; ces perpendiculaires diviseront le polygone irrégulier inscrit en une suite de triangles dont les aires seront respectivement, en représentant par ε l'angle intérieur du polygone régulier,

$$\tfrac{1}{2}ab\text{Sin.}\varepsilon\ ,\quad \tfrac{1}{2}bc\text{Sin.}\varepsilon\ ,\ldots\ldots,\ \tfrac{1}{2}gh\text{Sin.}\varepsilon\ ,\quad \tfrac{1}{2}ha\text{Sin.}\varepsilon\ ;$$

la somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire, l'aire du polygone irrégulier inscrit, aura donc pour expression

$$\tfrac{1}{2}(ab+bc+\ldots\ldots+gh+ha)\text{Sin.}\varepsilon\ .$$

Or, d'après ce qui vient d'être démontré ci-dessus, cette aire est constante, quelle que soit la situation du point P sur la circonférence (C); puis donc que Sin.ε est constant, il s'ensuit que la somme de produits

$$ab+bc+\ldots\ldots\ldots+gh+ha\ ,$$

est aussi une quantité constante, quelle que soit la situation du point P sur la circonférence (C).

Or, les quarrés des côtés consécutifs du polygone irrégulier inscrit ont respectivement pour expression

$$a^2+b^2+2ab\text{Cos.}\varepsilon\ ,$$

$$b^2+c^2+2bc\text{Cos.}\varepsilon\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$g^2+h^2+2gh\text{Cos.}\varepsilon\ ,$$

$$h^2+a^2+2ha\text{Cos.}\varepsilon\ ;$$

donc la somme des quarrés de ces mêmes côtés a pour expression

$$2(a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots+g^2+h^2)+2(ab+bc+\ldots\ldots+gh+ha)\text{Cos.}\varepsilon\ .$$

Or, il a été démontré ci-dessus que $a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots+g^2+h^2$ était une quantité constante, et nous venons de démontrer la même chose de $ab+bc+\ldots\ldots+gh+ha$; on a donc cet autre théorème:

THÉORÈME. De quelque point d'une circonférence concentrique à un polygone régulier donné qu'on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, la somme des quarrés des côtés du polygone irrégulier inscrit dont les sommets consécutifs seront les pieds de ces perpendiculaires, demeurera constante.

Le tour de raisonnement qui nous a conduit à la démonstration de ces divers théorèmes peut être employé à démontrer un grand nombre de théorèmes analogues, parmi lesquels nous nous bornerons à indiquer le suivant:

THÉORÈME. Une circonférence concentrique à un polygone régulier donné est le lieu géométrique des points de chacun desquels menant des droites à tous ses sommets, la somme des puissances paires du même degré des longueurs de ces droites est une grandeur constante; pourvu toutefois que l'exposant commun de ces puissances paires soit inférieur au nombre des côtés du polygone régulier donné.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Réflexions sur la démonstration donnée à la page 132 *du XIII.ᵉ volume des* Annales , *de la propriété de* minimum *dont jouit la surface de la sphère entre celles de tous les corps de même volume , et sur une question proposée à la page* 180 *du même volume ;*

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR ,

IL nous arrive assez souvent, à nous autres géomètres , de nous vanter , vis-à-vis des profanes , d'être en état , avec nos x et nos y , de résoudre complètement toutes les questions qui peuvent être proposées sur les nombres , l'étendue , le mouvement , et généralement sur tous les êtres rigoureusement comparables à d'autres êtres de même nature qu'eux ; et je conviendrai qu'en effet un très-grand nombre de questions des plus ardues ont déjà cédé , presque sans effort , à nos moyens d'investigation.

Mais, parmi cette multitude d'énigmes que la nature mesurable nous offre à déchiffrer, n'y a-t-il que celles-là seulement qui n'ont point encore fixé notre attention dont le mot reste à découvrir? J'en appelle ici à la bonne foi de ceux-là même que nous regardons, avec tant de raison, comme nos maîtres dans la science; ils conviendront tous que leurs efforts n'ont pas toujours été couronnés de succès, et que, dans la carrière qu'ils parcourent, d'une manière si brillante d'ailleurs, ils ont rencontré plus d'un obstacle qu'ils n'ont pu encore parvenir à surmonter.

Que les géomètres éprouvent quelques déceptions dans des questions compliquées de physique-mathématique, telles que celles que présente la théorie de la chaleur ou celle de l'électricité, auxquelles on ne s'est avisé que très-récemment d'appliquer une analise rigoureuse; qu'ils reculent d'autres fois devant la complication pratique des calculs qu'exigeraient certaines questions, dont la solution complète ne les dédommagerait pas suffisamment de la peine qu'il leur en aurait coûtée pour l'obtenir; cela se conçoit parfaitement. Mais qu'ils se trouvent arrêtés devant de simples questions numériques ou géométriques, bien nettement circonscrites; voilà ce qui peut surprendre; voilà ce qui est bien fait pour montrer toute la défaillance de l'esprit humain.

Par exemple, vous avez proposé, Monsieur, dans le VII.e volume de votre intéressant recueil (aux pages 68, 99 et 156), d'assigner la moindre surface entre toutes celles qui se terminent à des limites données, telles que deux cercles non situés dans un même plan, ou la courbe à double courbure intersection de deux cylindres, ou encore le périmètre d'un quadrilatère gauche, etc.; et ces questions sont demeurées jusqu'ici sans solution; non sans doute qu'on les ait dédaignées, comme on aura pu faire de quelques autres d'une moindre importance; mais apparemment parce qu'on aura vainement tenté de les résoudre.

Je dis, Monsieur, que ces questions sont demeurées sans solution, car je ne pense pas qu'un de vos correspondans doive être regardé comme les ayant résolues, en disant, dans le même volume (pag. 152 et 153), que l'équation différentielle de la surface demandée est

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0\ ,$$

ni même en ajoutant que son intégrale est le résultat de l'élimination de a et b entre les trois équations

$$z=\varphi'(a)+\psi'(b)\ ,$$

$$y=\varphi(a)-a\varphi'(a)+\psi(b)-b\psi'(b)\ ,$$

$$z=\int\varphi''(a)\sqrt{-(1+a^2)}\mathrm{d}a-\int\varphi''(b)\sqrt{-(1+b^2)}\mathrm{d}b\ ,$$

où φ et ψ désignent deux fonctions arbitraires. Toutes ces relations, en effet, expriment des propriétés communes aux surfaces *minima*, indépendamment des limites auxquelles elles se terminent ; mais, lorsque ces limites sont déterminées, l'équation de la surface qui résout proprement le problème doit être une équation ne renfermant uniquement que x, y, z et les élémens qui déterminent les limites, sans aucune constante ni fonction arbitraire quelconque. Si en effet on pouvait réputer résolu un problème dans lequel il s'agit de trouver une surface inconnue, lorsqu'on a découvert quelque propriété commune à toutes les surfaces parmi lesquelles se trouve celle qu'on cherche, il serait beaucoup plus commode et tout aussi utile de dire que le problème est résolu par l'équation

$$z=\mathrm{F}(x\,,y\,,a\,,b\,,c\,,\ldots\ldots\ldots)\ .$$

a, b, c, ... étant les constantes que déterminent les limites.

A la page 180 de votre XIII.e volume, vous avez proposé, Monsieur, d'assigner la moindre des surfaces qui, se terminant au périmètre d'un rectangle donné, comprennent entre elle et lui un volume donné; et c'est principalement sur ce problème que je me propose d'arrêter un moment l'attention de vos lecteurs; non cependant pour le résoudre, car je confesse ici volontiers mon impuissance, mais parce que sa considération semble infirmer une démonstration donnée dans le même volume (pag. 132). Afin qu'on ne puisse pas m'objecter la discontinuité de la limite, et la discontinuité qui en doit résulter pour la surface cherchée, je substituerai une ellipse au rectangle, et je supposerai qu'il s'agit d'assigner, entre toutes les surfaces courbes qui se terminent à cette ellipse, et qui comprennent entre elles et le plan de l'ellipse un volume donné, quelle est celle de moindre étendue?

Il est d'abord manifeste que le problème est possible; et, pour en obtenir physiquement la solution, il ne s'agirait que d'étendre sur l'ellipse et de lui assujetir, par les bords, une surface flexible, uniformément et indéfiniment élastique, de même figure, et d'introduire ensuite entre l'une et l'autre un fluide élastique, en quantité suffisante pour atteindre au volume demandé.

Cela posé, il a été rigoureusement démontré (tom. XIII, pag. 132) que de tous les troncs de prismes triangulaires de mêmes arêtes latérales et de même section perpendiculaire aux arêtes, et conséquemment de même volume, celui dont la somme des aires des bases est un *minimum* est celui dans lequel le plan qui contient les milieux des trois arêtes latérales est perpendiculaire à la direction commune de ces arêtes, et dans lequel conséquemment ce plan et ceux des deux bases vont tous trois se couper suivant une même droite.

Or, en appliquant littéralement à la surface qui nous occupe, le raisonnement que l'auteur de la démonstration dont il s'agit applique, en l'endroit cité, à la surface de la sphère, on serait conduit à conclure que la surface *minimum* doit être telle, dans tous les cas, que les plans tangens aux extrémités de l'une quelconque de ses cordes et le plan perpendiculaire sur son milieu se coupent tous trois suivant une même droite.

Mais vous avez démontré, Monsieur, page 64 du présent volume, qu'une telle propriété appartient exclusivement à la sphère; d'où il paraîtrait résulter que la surface cherchée ne pourrait être qu'une portion de surface sphérique, résultat absurde, puisque, tandis que toutes les sections planes d'une surface sphérique sont circulaires, l'une des sections de la surface dont il s'agit ici doit être l'ellipse donnée.

De quel côté donc se trouve l'erreur? car encore faut-il bien qu'il en existe une quelque part. Je soupçonne qu'elle réside dans le raisonnement de la page 139 du XIII.e volume, duquel il ne résulterait pas conséquemment, bien que cela soit vrai, que la surface sphérique fût *minimum*, entre toutes celles qui enferment un même espace; c'est-à-dire, pour employer le langage de quelques écoles de philosophie, que, dans ce raisonnement, le *conséquent* serait vrai et la *conséquence* fausse. Je soupçonne que, dans les recherches relatives à la surface *minimum*, parmi celles qui renferment un volume donné, sous des conditions données, on ne peut pas se permettre de prendre pour élémens des troncs de prismes triangulaires infiniment petits, qui ne déterminent que les plans tangens aux extrémités des cordes, mais qu'il faut nécessairement recourir à des élémens compris entre quatre arêtes parallèles, lesquels détermineront alors les rayons de courbure aux extrémités des cordes; et, ce qui paraît venir à l'appui de cette opinion, c'est que l'équation différentielle de la surface *minimum* ne renferme pas seulement les coefficiens différentiels du premier ordre, mais encore ceux du second.

Si la conjecture que je hasarde ici était fondée, nous aurions en cette rencontre un nouvel exemple, et je puis même dire un exemple très-remarquable, de la circonspection avec laquelle on doit faire usage des infiniment petits, dans la démonstration des théorèmes de géométrie. L'erreur logique commise par l'auteur du raisonnement, très-séduisant d'ailleurs, sur lequel j'appèlle l'attention des géomètres, serait tout-à-fait du genre de celle que l'on commettrait si, cherchant le lieu de l'image d'un point dans un miroir courbe, on substituait à ce miroir le miroir plan tangent au point d'incidence ; ce serait encore une erreur du genre de celle qui a été commise par quelques géomètres qui, dans la recherche des orbites des comètes, d'après des observations voisines, se sont permis de considérer comme rectiligne la portion d'orbite décrite dans l'intervalle des observations ; ce serait enfin une erreur du genre de celle que Newton lui-même a commise, dans la première édition de ses principes, en cherchant la loi de résistance du milieu qui peut faire décrire à un projectile une courbe donnée; et, si l'erreur n'est jamais recevable, il faut convenir du moins qu'on ne saurait errer en meilleure compagnie.

Agréez, etc.

Lyon, le 1.er novembre 1824.

HYDROSTATIQUE.

Note sur la stabilité de l'équilibre des corps flottans ;

Par M. GERGONNE.

DANS ses *Applications de géométrie* (*), M. Dupin a présenté la théorie de l'équilibre des corps flottans sous une forme nouvelle, remarquable par sa simplicité et son élégance.

En réfléchissant de nouveau sur cette théorie, il nous a paru qu'elle pouvait être simplifiée davantage encore, et qu'au lieu des deux surfaces considérées par M. Dupin, il suffisait d'en considérer une seule.

Soit un corps homogène ou hétérogène, terminé par une surface quelconque, continue ou discontinue ; et soient représentés par Σ tant le corps lui-même que la surface qui le termine. Pour que ce corps puisse flotter sur un liquide, il est nécessaire et il suffit que son poids soit inférieur à celui d'un pareil volume de ce liquide ; et, en quelque situation qu'il y flotte, il s'y enfonce de telle sorte qu'un volume de liquide égal à celui de la partie submergée pèse autant que le corps entier. C'est cette partie submergée qu'on appelle la *carène*.

(*) In-4.° ; Bachelier, Paris, 1823.

Concevons une suite de plans coupant, détachant du corps dont il s'agit des portions d'un volume constant, égal à celui d'une masse de liquide qui peserait autant que lui. Ces plans, qu'on appelle *plans de flottaison*, seront tous tangens à une même surface, que M. Dupin appelle l'*enveloppe des flottaisons*. Représentons par S tant cette surface que la portion du corps qu'elle termine. Il est aisé de voir que, physiquement parlant, quelle que soit la surface Σ, la surface S sera toujours continue, en ce sens que partout ses plans tangens consécutifs varieront de direction par degrés insensibles. Il résulte aussi de la nature de la surface S que, dans quelque situation que le corps Σ flotte sur le liquide, la surface supérieure de ce liquide sera toujours tangente à cette surface S.

Supposons, pour fixer les idées, que le centre de gravité du corps Σ soit intérieur au corps S, ainsi qu'il arrivera le plus souvent; et imaginons que, sans que le corps Σ change de volume, toute la partie de sa masse qui excède S se réfugie dans l'intérieur de ce dernier corps et s'y distribue de manière que la situation du centre de gravité n'en éprouve aucun changement. Alors l'excès de Σ sur S deviendra une simple étendue impénétrable et sans masse, ou, si l'on veut, une sorte d'appareil destiné uniquement à obliger le corps S à toucher, dans toutes ses situations, la surface supérieure du liquide. Tout se passera donc exactement de la même manière que si, le corps Σ étant réduit au corps S, le liquide sur lequel il flotte s'était tout-à-coup solidifié.

La théorie de l'équilibre d'un corps solide, dont la figure, le poids et le centre de gravité sont connus, flottant sur un liquide dont la densité est également connue, se trouve donc réduite, par ce qui précède, à la théorie de l'équilibre d'un autre corps dont on peut assigner la surface et le centre de gravité, posé sur un plan horizontal; c'est-à-dire, à une théorie fort simple, dont nous avons posé les principes dans le VIII.e volume du présent recueil (pag. 349 et suiv.).

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Réflexions d'un Anonyme, *sur l'article de M.* Bouvier, *inséré à la page* 115 *du présent volume ;*

(Extrait ; par M. Gergonne.)

Un Anonyme nous a adressé d'Allemagne, nous ignorons de quelle contrée, des réflexions critiques sur la démonstration donnée par M. Bouvier de la propriété de *minimum* dont jouissent le périmètre du carré et la surface du cube, entre les périmètres et surfaces des parallélogrammes rectangles de même surface et des parallélipipèdes de même volume.

L'auteur de ces réflexions ne prétend pas infirmer la démonstration de M. Bouvier, qu'il trouve tout-à-fait exacte ; mais il en attaque la forme qu'il trouve peu naturelle et peu d'accord avec le titre d'*élémentaire* que M. Bouvier lui a donnée. Pour des raisons logiques dans le détail desquelles il est superflu d'entrer, il pense, 1.° que M. Bouvier aurait dû démontrer d'abord ses deux corollaires, comme propositions principales, et ne présenter ensuite celles qu'il considère comme principales que comme des corollaires de celles-là ; 2.° que, pour exprimer que deux quantités sont inégales, il est plus convenable d'exprimer que la plus grande diminuée de la plus petite donne un reste plus grand que zéro, que d'exprimer que la plus grande divisée par la plus petite donne un quotient plus grand que l'unité ; et c'est principalement à reproduire la démonstration d'après ces bases qu'il consacre la lettre qu'il nous fait l'honneur de nous adresser.

Si l'Anonyme ne tenait qu'au premier de ces deux points, la démonstration serait tout aussi simple que celle de M. Bouvier, et on retomberait même exactement sur les résultats déjà obtenus par ce géomètre; mais on ne peut accorder le second qu'en sacrifiant beaucoup de la brièveté ; et c'est ce dont le lecteur demeurera sans doute convaincu, lorsque nous lui aurons mis sous les yeux une démonstration conforme au vœu du critique, bien qu'un peu plus simple que la sienne ; démonstration qui, au surplus, se trouvera peut-être pareille à celle de M. le professeur Lhuilier, qui ne nous est pas connue.

THÉORÈME I. Parmi tous les parallélogrammes rectangles de même périmètre, le carré est celui de plus grande surface.

Démonstration. Quel que soit un parallélogramme rectangle donné, ses deux dimensions peuvent toujours être représentées par a et $a+b$, de manière qu'aucune des deux quantités a et b ne soit négative. Seulement b devra être supposé nul, si les deux dimensions sont égales.

La surface de ce parallélogramme sera a^2+ba, et son périmètre $4a+2b$.

Si, sous le même périmètre, on veut construire un carré, son côté devra être $\frac{4a+2b}{4}$ ou $\frac{2a+b}{2}$; et sa surface sera $\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2$. Tout se réduit donc à prouver qu'on doit avoir.

$$\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2 > a^2+ba\ ,$$

ou

$$(2a+b)^2-4(a^2+ba)>0 ;$$

inégalité qui devient, par le développement,

$$b^2>0 ,$$

dont l'exactitude est manifeste, tant que b n'est pas nul, c'est-à-dire, tant que le rectangle donné n'est point un carré.

COROLLAIRE. *Parmi tous les parallélogrammes rectangles de même surface, le carré a le moindre périmètre.*

Démonstration. Soient, en effet, R un rectangle et C un carré équivalent; et supposons, s'il est possible, que ce carré n'ait pas un moindre périmètre; en construisant un rectangle R′, semblable à R, et de même périmètre que C, R′ ne serait pas moindre que R, ni conséquemment moindre que C, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

THÉORÈME II. *Parmi tous les parallélipipèdes rectangles de même surface, le cube est celui de plus grand volume.*

Démonstration. Quel que soit un parallélipipède rectangle donné, ses trois dimensions peuvent toujours être représentées par a, $a+b$, $a+b+c$, de manière qu'aucune des trois quantités a, b, c ne soit négative. Seulement c sera nul, si les deux plus grandes dimensions sont de même longueur; ce sera b si ce sont les deux plus petites; enfin, b et c seront tous deux nuls, si les trois dimensions sont égales.

La surface de ce parallélipipède sera

$$2\{a(a+b)+a(a+b+c)+(a+b)(a+b+c)\}\ ,$$

c'est-à-dire ;

$$2\{3a^2+2(2b+c)a+b(b+c)\}\ ;$$

et son volume

$$a(a+b)(a+b+c)\ ,$$

c'est-à-dire,

$$a^3+(2b+c)a^2+b(b+c)a\ .$$

Si, sous la même surface, on veut construire un cube, l'une de ses faces devra être le sixième de la surface totale du parallélipipède, c'est-à-dire ;

$$\frac{3a^2+2(2b+c)a+b(b+c)}{3}\ ;$$

son arête sera donc

$$\sqrt{\frac{3a^2+2(2b+c)a+b(b+c)}{3}}\ ,$$

et son volume

$$\left\{\frac{3a^2+2(2b+c)a+b(b+c)}{3}\right\}^{\frac{3}{2}}\ ;$$

et tout se réduira à prouver qu'on doit avoir

$$\left\{\frac{3a^2+2(2b+c)a+b(b+c)}{3}\right\}^{\frac{3}{2}} > a^3+(2b+c)a^2+b(b+c)a \ ,$$

ou bien

$$\{3a^2+2(2b+c)a+b(b+c)\}^3-27\{a^3+(2b+c)a^2+b(b+c)a\}^2>0 \ ;$$

or, en développant, on trouve, pour la première partie,

$$27a^6+54(2b+c)a^5+9[4(2b+c)^2+3b(b+c)]a^4+4(2b+c)[9b(b+c)+2(2b+c)^2]a^3$$

$$+3b(b+c)[4(2b+c)^2+3b(b+c)]a^2+6b^2(b+c)^2(2b+c)a+b^3(b+c)^3 \ ,$$

et pour la seconde,

$$27a^6+54(2b+c)a^5+27[(2b+c)^2+2b(b+c)]a^4$$

$$+54b(b+c)(2b+c)a^3+27b^2(b+c)^2a^2 \ ;$$

substituant donc dans l'inégalité ci-dessus, il viendra

$$9[(2b+c)^2-3b(b+c)]a^4+2(2b+c)[4(2b+c)^2-9b(b+c)]a^3$$

$$+6b(b+c)[2(2b+c)^2-3b(b+c)]a^2+6b^2(b+c)^2(2b+c)a+b^3(b+c)^3>0 \ ;$$

ou, en développant et réduisant,

$$9(b^2+bc+c^2)a^4+2(2b+c)(7b^2+7bc+4c^2)a^3+6b(b+c(5b^2+5bc+2c^2)a^2$$

$$+6b^2(b+c)^2(2b+c)a+b^3(b+c)^3>0 \ ;$$

inégalité dont l'exactitude est manifeste, tant que b et c ne sont pas tous deux nuls, c'est-à-dire, tant que le parallélipipède donné n'est point un cube.

Corollaire. Parmi tous les parallélipipèdes rectangles de même volume, le cube a la moindre surface.

Démonstration. Soient en effet P un parallélipipède rectangle et C un cube équivalent ; et supposons, s'il est possible, que ce cube n'ait pas une moindre surface. En construisant un parallélipipède P′, semblable à P, et de même surface que C, P′ ne serait pas moindre que P, ni conséquemment moindre que C, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

Voilà des démonstrations terre à terre, telles que l'Anonyme paraît les aimer, et telles que tout le monde peut les trouver ; tandis que M. Bouvier les avait abrégées par un coup d'adresse ; et, dans notre opinion, les coups d'adresse qui abrègent constituent le talent. Du reste, nous remercions sincèrement ce critique pour nous avoir fait remarquer, 1.° qu'à la page 116, ligne 18, il eût été plus court, plus clair et plus correct de remplacer ces mots : *ayant une surface moindre que la sienne*, par ceux-ci : *sous une surface moindre* ; 2.° qu'au bas de la page 117, nous avons laissé mettre *minimum* pour *maximum*. Lui-même, dans sa lettre, au lieu de $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, a écrit $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=ab+\frac{a^2+b^2}{4}$, ce qui prouve que tout le monde ici bas est sujet aux distractions, hors de France tout comme en France.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Probabilité.

I. ON suppose qu'un point inconnu devant se trouver au concours de trois droites qu'on peut construire, il résulte des erreurs inévitablement attachées aux procédés graphiques que ces trois droites forment un triangle ; on suppose qu'on n'a aucun motif de suspecter davantage d'erreur la direction d'aucune de ces droites que les directions des deux autres ; et on demande où se serait le plus probablement trouvé le point demandé, si l'on avait opéré avec une exactitude rigoureuse ?

II. On suppose qu'une droite inconnue devant être déterminée par trois points de sa direction qu'on sait construire, il résulte des erreurs inévitablement attachées aux procédés graphiques que ces trois points forment un triangle ; on suppose que l'on n'a aucun motif de suspecter davantage d'erreur la situation de l'un de ces points que celle de chacun des deux autres ; et on demande quelle aurait été, le plus probablement, la direction de la droite demandée, si l'on avait opéré avec une exactitude rigoureuse ?

Problèmes de Géométrie.

I. Quel est le lieu des points de l'espace desquels abaissant des perpendiculaires sur les plans des faces d'un tétraèdre régulier, le tétraèdre non régulier inscrit dont les sommets sont aux pieds de ces perpendiculaires à un volume constant et donné ?

II. Dans tout polygone plan ou gauche et dans tout polyèdre, si l'on désigne par s la somme des quarrés des droites qui joignent deux à deux les milieux tant des côtés ou arêtes que des diagonales, par S la somme des quarrés tant de ces côtés ou arêtes que des diagonales, et enfin par n le nombre des sommets, on aura $4s=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot S$.

III. Les perpendiculaires communes aux arêtes opposées d'un tétraèdre passent toutes trois par un même point.

Théorème de Statique.

Si des forces agissant sur un même point P de l'espace sont représentées en intensité et en direction par des droites PA, PB, PC, PD,...... issues de ce point, 1.° le centre O des moyennes distances des points A, B, C, D,...... sera un point de la direction de la résultante de ces forces ; 2.° cette résultante sera représentée en intensité par autant de fois la longueur PO qu'il y aura de forces dans le système.

TRIGONOMÉTRIE.

Recherches de trigonométrie sphérique;

Par M. Sorlin, professeur des sciences physiques au collége royal de Tournon, membre de plusieurs sociétés savantes et littéraires.

(*Extrait*; par M. Gergonne.)

Le mémoire, fort étendu, que nous nous proposons ici de faire connaître par extrait, a été présenté, en 1819, à l'académie royale des sciences de Paris, qui, dans sa séance du 22 février même année, sur la proposition de MM. Legendre et Delambre, commissaires, l'a déclaré digne d'être inséré dans la collection des *Savans étrangers*. C'est, comme on va le voir, un recueil de formules de trigonométrie sphérique, dérivées les unes des autres de la manière la plus simple et la plus symétrique.

§. I.

Formules préliminaires.

En représentant par u et v deux arcs ou angles quelconques, on a, comme l'on sait, les quatre formules

$$\mathrm{Cos.}(u+v)=\mathrm{Cos.}u\mathrm{Cos.}v-\mathrm{Sin.}u\mathrm{Sin.}v\ , \tag{1}$$

$$\mathrm{Cos.}(u-v)=\mathrm{Cos.}u\mathrm{Cos.}v+\mathrm{Sin.}u\mathrm{Sin.}v\ , \tag{2}$$

$$\mathrm{Sin.}(u+v)=\mathrm{Sin.}u\mathrm{Cos.}v+\mathrm{Cos.}u\mathrm{Sin.}v\ , \tag{3}$$

$$\mathrm{Sin.}(u-v)=\mathrm{Sin.}u\mathrm{Cos.}v-\mathrm{Cos.}u\mathrm{Sin.}v\ .\ (*) \tag{4}$$

Si l'on suppose $v=u$, ces formules donneront

$$\mathrm{Cos.}2u=\mathrm{Cos.}^2u-\mathrm{Sin.}^2u=1-2\mathrm{Sin.}^2u=2\mathrm{Cos.}^2u-1\ , \tag{5}$$

$$1=\mathrm{Cos.}^2u+\mathrm{Sin.}^2u\ , \tag{6}$$

$$\mathrm{Sin.}2u=2\mathrm{Sin.}u\mathrm{Cos.}u\ . \tag{7}$$

Si l'on prend tour-à-tour la somme et la différence des équations (1) et (2), ainsi que la somme et la différence des équations (3) et (4), en posant, pour abréger, $u+v=x$, $u-v=y$, on trouvera

$$\mathrm{Cos.}y+\mathrm{Cos.}x=2\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ , \tag{8}$$

$$\mathrm{Cos.}y-\mathrm{Cos.}x=2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ , \tag{9}$$

$$\mathrm{Sin.}x+\mathrm{Sin.}y=2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ , \tag{10}$$

$$\mathrm{Sin.}x-\mathrm{Sin.}y=2\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ . \tag{11}$$

d'où, en changeant y en $\frac{1}{2}\varpi-y$,

(*) Voyez, pour la démonstration la plus simple et la plus générale de ces théorèmes, la page 323 du XI.e volume du présent recueil.

$$\mathrm{Sin}\,y+\mathrm{Cos}.x=+2\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi+(x-y)\}\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(x+y)\}\ , \quad (12)$$

$$\mathrm{Sin}\,y-\mathrm{Cos}\,x=-2\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi+(x-y)\}\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(x+y)\}\ , \quad (13)$$

$$\mathrm{Sin}.x+\mathrm{Cos}\,y=+2\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi+(x-y)\}\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(x+y)\}\ , \quad (14)$$

$$\mathrm{Sin}.x-\mathrm{Cos}.y=-2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi+(x-y)\}\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(x+y)\}\ . \quad (15)$$

Si, dans chacune de ces huit dernières formules, on change tour-à-tour y en $y+z$ et en $y-z$, en faisant, pour abréger,

$$x+y+z=2t\ , \qquad (16)$$

il en résultera seize autres, desquelles rejetant les quatre qui n'offrent aucune symétrie, il restera les douze suivantes:

$$\mathrm{Sin}.x+\mathrm{Sin}.y\mathrm{Cos}.z+\mathrm{Cos}.y\mathrm{Sin}.z=+\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.(t-x)\ , \qquad (17)$$

$$\mathrm{Cos}.x+\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}.z-\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.z=+\mathrm{Cos}.t\mathrm{Cos}.(t-x)\ , \qquad (18)$$

$$\mathrm{Sin}.x-\mathrm{Sin}.y\mathrm{Cos}.z-\mathrm{Cos}.y\mathrm{Sin}.z=-\mathrm{Cos}.t\mathrm{Sin}.(t-x)\ , \qquad (19)$$

$$\mathrm{Cos}.x-\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}.z+\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.z=+\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.(t-x)\ , \qquad (20)$$

$$\mathrm{Cos}.x+\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}.z+\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.z=+\mathrm{Cos}.(t-y)\mathrm{Cos}.(t-z)\ , \qquad (21)$$

$$\mathrm{Cos}.x-\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}.z-\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.z=-\mathrm{Sin}.(t-y)\mathrm{Sin}.(t-z)\ , \qquad (22)$$

$$\mathrm{Sin}.x+\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}.z-\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.z=+2\mathrm{Cos}.(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\mathrm{Sin}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\ , \qquad (23)$$

$$\mathrm{Cos}.x+\mathrm{Sin}.y\mathrm{Cos}.z+\mathrm{Cos}.y\mathrm{Sin}.z=+2\mathrm{Cos}.(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\mathrm{Cos}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\ , \qquad (24)$$

$$\mathrm{Sin}.x-\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}.z+\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.z=-2\mathrm{Sin}.(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\mathrm{Cos}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\ . \qquad (25)$$

$$\mathrm{Cos}.x-\mathrm{Sin}.y\mathrm{Cos}.z-\mathrm{Cos}.y\mathrm{Sin}.z=-2\mathrm{Sin}.(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\mathrm{Sin}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\ , \qquad (26)$$

$$\mathrm{Sin}.x+\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}\,z+\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.z=+2\mathrm{Cos}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\mathrm{Cos}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\}\ , \qquad (27)$$

$$\mathrm{Sin}.x-\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}.z-\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.z=-2\mathrm{Sin}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\mathrm{Sin}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\}\ . \qquad (28)$$

En combinant entre elles les douze dernières formules, soit par voie de multiplication, soit par voie de division, on en obtiendrait une multitude d'autres, plus ou moins utiles, et auxquelles, comme à celles-là, le calcul par logarithmes serait facilement applicable. Parmi ces formules, nous ne signalerons que les huit suivantes, sur lesquelles nous aurons besoin de nous appuyer plus loin. L'inspection de leurs seconds membres indique assez comment elles ont été déduites des douze qui précèdent, en ayant égard à la formule (6),

$$1-\text{Cos.}^2x-\text{Cos.}^2y-\text{Cos.}^2z+2\text{Cos.}x\text{Cos.}y\text{Cos.}z=+4\text{Sin.}t\text{Sin.}(t-x)\text{Sin.}(t-y)\text{Sin.}(t-z), \quad (29)$$

$$1-\text{Cos.}^2x-\text{Cos.}^2y-\text{Cos.}^2z-2\text{Cos.}x\text{Cos.}y\text{Cos.}z=-4\text{Cos.}t\text{Cos.}(t-x)\text{Cos.}(t-y)\text{Cos.}(t-z), \quad (30)$$

$$1+\text{Cos.}^2x-\text{Cos.}^2y-\text{Cos.}^2z+2\text{Cos.}x\text{Sin.}y\text{Sin.}z=-4\text{Sin.}t\text{Sin.}(t-x)\text{Cos.}(t-y)\text{Cos.}(t-z), \quad (31)$$

$$1+\text{Cos.}^2x-\text{Cos.}^2y-\text{Cos.}^2z-2\text{Cos.}x\text{Sin.}y\text{Sin.}z=+4\text{Cos.}t\text{Cos.}(t-x)\text{Sin.}(t-y)\text{Sin.}(t-z). \quad (32)$$

$$\left.\begin{array}{c}1-\text{Sin.}^2x-\text{Sin.}^2y-\text{Sin.}^2z+2\text{Sin.}x\text{Sin.}y\text{Sin.}z\\ =+4\text{Cos.}(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\text{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\text{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\text{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\},\end{array}\right\} \quad (33)$$

$$\left.\begin{array}{c}1-\text{Sin.}^2x-\text{Sin.}^2y-\text{Sin.}^2z-2\text{Sin.}x\text{Sin.}y\text{Sin.}z\\ =+4\text{Sin.}(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\text{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\text{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\text{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\},\end{array}\right\} \quad (34)$$

$$\left.\begin{array}{c}1+\text{Sin.}^2x-\text{Sin.}^2y-\text{Sin.}^2z+2\text{Sin.}x\text{Cos.}y\text{Cos.}z\\ =+4\text{Cos.}(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\text{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\text{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\text{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\},\end{array}\right\} \quad (35)$$

$$\left.\begin{array}{c}1+\text{Sin.}^2x-\text{Sin.}^2y-\text{Sin.}^2z-2\text{Sin.}x\text{Cos.}y\text{Cos.}z\\ =+4\text{Sin.}(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\text{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\text{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\text{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\}.\end{array}\right\} \quad (36)$$

Ces formules sont susceptibles de simplifications plus ou moins notables, lorsque la somme des trois arcs ou angles x, y, z est de l'une de ces trois formes $\frac{1}{2}n\varpi$, $n\varpi$, $2n\varpi$.

§. II.

Résolution des triangles sphériques.

Soient x, y, z les trois côtés d'un triangle rectiligne, et X, Y, Z les angles respectivement opposés. En exprimant que chaque côté est égal à la somme des projections des deux autres sur sa direction, on aura les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} x=y\text{Cos.}Z+z\text{Cos.}Y\ , \\ y=z\text{Cos.}X+x\text{Cos.}Z\ , \\ z=x\text{Cos.}Y+y\text{Cos.}X\ , \end{array}\right\} \quad (37)$$

Prenant la somme des produits respectifs de ces trois équations par $-x$, $+y$, $+z$, transposant et réduisant, on aura

$$2yz\text{Cos.}X=y^2+z^2-x^2\ . \qquad (38)$$

Soient présentement a, b, c les trois côtés d'un triangle sphérique, et A, B, C les angles respectivement opposés. Par le sommet A soient menées aux côtés b et c des tangentes rencontrant en G et H les prolongemens des rayons menés du centre O de la sphère aux sommets B et C. Les deux triangles rectilignes GOH et GAH donneront (38)

$$2OG.OH\text{Cos.}a=\overline{OG}^2+\overline{OH}^2-\overline{GH}^2\ ,$$

$$2AG.AH\text{Cos.}A=\overline{AG}^2+\overline{AH}^2-\overline{GH}^2\ ;$$

d'où, en retranchant et simplifiant,

$$OG.OH\text{Cos.}a-AG.AH\text{Cos.}A=\overline{OA}^2\ ;$$

ou encore

$$\left(\frac{AG}{OA}\right)\cdot\left(\frac{AH}{OA}\right)\text{Cos.}A=\left(\frac{OG}{OA}\right)\cdot\left(\frac{OH}{OA}\right)\text{Cos.}a-1\ ,$$

c'est-à-dire ;

$$\text{Tang.}b\text{Tang.}c\text{Cos.}A=\text{Sec.}b\text{Sec.}c\text{Cos.}a-1\ ;$$

ou enfin, en multipliant par Cos.bCos.c,

$$\text{Sin.}b\text{Sin.}c\text{Cos.}A=\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c\ . \qquad (i)$$

Par un point pris arbitrairement dans l'intérieur de l'angle trièdre formé par les plans des trois côtés du triangle, et dont le sommet est conséquemment au centre de la sphère, abaissons des perpendiculaires sur les trois faces de cet angle trièdre, et considérons ces perpendiculaires comme les trois arêtes d'un nouvel angle trièdre. Il est aisé de voir que les arêtes du premier seront perpendiculaires aux plans de faces de celui-ci, d'où il suit que les angles dièdres de chacun seront les supplémens des angles plans correspondans de l'autre et réciproquement ; et voilà pourquoi on dit que ces deux angles trièdres sont *supplémentaires*, *réciproques* ou *conjugués l'un de l'autre*.

Si donc du sommet du second comme centre on conçoit une sphère, les côtés du triangle sphérique intercepté seront $\varpi-A$, $\varpi-B$, $\varpi-C$, et les angles respectivement opposés $\varpi-a$, $\varpi-b$, $\varpi-c$; on doit donc avoir (i)

$$\text{Sin.}(\varpi-B)\text{Sin.}(\varpi-C)\text{Cos.}(\varpi-a)=\text{Cos.}(\varpi-A)-\text{Cos.}(\varpi-B)\text{Cos.}(\varpi-C)$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}B\text{Sin.}C\text{Cos.}a=\text{Cos.}A+\text{Cos.}B\text{Cos.}C\ . \qquad (I)$$

Les formules (i) et (I) en donnent chacune deux autres qu'on en déduit en changeant continuellement a et A en b et B, B et b en c et C, c et C en a et A, comme si l'on tournait sur la circonférence d'un cercle, où seraient écrites de suite les lettres a, b, c ou les lettres A, B, C.

Au moyen de cette remarque, la formule (i) donne

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}c\text{Sin.}a\text{Cos.}B=\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a\ ,\\ \text{Sin.}a\text{Sin.}b\text{Cos.}C=\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b\ ;\end{array}\right\}\ (39)$$

d'où, en ajoutant et retranchant, tour-à-tour, et décomposant,

$$\text{Sin.}a(\text{Sin.}c\text{Cos.}B+\text{Sin.}b\text{Cos.}C)=(1-\text{Cos.}a)(\text{Cos.}b+\text{Cos.}c)\ ,$$

$$\text{Sin.}a(\text{Sin.}c\text{Cos.}B-\text{Sin.}b\text{Cos.}C)=(1+\text{Cos.}a)(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c)\ ;$$

multipliant ces deux dernières équations membre à membre, et simplifiant, on aura

$$\text{Sin.}^2c\text{Cos.}^2B-\text{Sin.}^2b\text{Cos.}^2C=\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c=\text{Sin.}^2c-\text{Sin.}^2b\ ,$$

ou, en transposant,

$$\text{Sin.}^2b(1-\text{Cos.}^2C)=\text{Sin.}^2c(1-\text{Cos.}^2B)\ ;$$

ou enfin

$$\text{Sin.}^2b\text{Sin.}^2C=\text{Sin.}^2c\text{Sin.}^2B\ .$$

En extrayant les racines des deux membres de cette dernière équation, on levera l'ambiguïté qui naît des doubles signes en remarquant que, dans le cas particulier où $b=c$, on doit avoir aussi $B=C$. On trouvera ainsi

$$\text{Sin.}b\text{Sin.}C=\text{Sin.}c\text{Sin.}B\ ;$$

d'où, par la permutation des lettres,

$$\frac{\text{Sin.}A}{\text{Sin.}a}=\frac{\text{Sin }B}{\text{Sin.}b}=\frac{\text{Sin.}C}{\text{Sin.}c}\,. \qquad (ii)$$

On peut tirer la même chose de la formule (I). Elle donne, en effet,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}C\text{Sin.}A\text{Cos.}b=\text{Cos.}B+\text{Cos.}C\text{Cos.}A\ ,\\ \text{Sin.}A\text{Sin.}B\text{Cos.}c=\text{Cos.}C+\text{Cos.}A\text{Cos.}B\ ;\end{array}\right\}\ (40)$$

d'où, en ajoutant et retranchant successivement,

$$\text{Sin.}A(\text{Sin.}C\text{Cos.}b+\text{Sin.}B\text{Cos.}c)=(1+\text{Cos.}A)(\text{Cos.}B+\text{Cos.}C)\ ,$$

$$\text{Sin.}A(\text{Sin.}C\text{Cos }b-\text{Sin.}B\text{Cos.}c)=(1-\text{Cos.}A)(\text{Cos.}B-\text{Cos.}C)\ ;$$

ce qui donne, en multipliant membre à membre et simplifiant,

$$\text{Sin.}^2C\text{Cos.}^2b-\text{Sin.}^2B\text{Cos.}^2c=\text{Cos.}^2B-\text{Cos.}^2C=\text{Sin.}^2C-\text{Sin.}^2B\ ;$$

ou bien, en transposant,

$$\text{Sin.}^2B(1-\text{Cos.}^2c)=\text{Sin.}^2C(1-\text{Cos.}^2b)\ ;$$

ou encore

$$\text{Sin.}^2B\text{Sin.}^2c=\text{Sin.}^2C\text{Sin.}^2b\ ;$$

ce qui donne, par l'extraction des racines et la permutation des lettres,

$$\frac{\text{Sin.}a}{\text{Sin.}A}=\frac{\text{Sin.}b}{\text{Sin.}B}=\frac{\text{Sin.}c}{\text{Sin.}C}\ ; \qquad (II)$$

double égalité qui revient à celle que nous avons trouvée plus haut.

En éliminant Cos.b entre les deux équations (39), mettant pour

Sin.b, dans l'équation résultante, sa valeur Sin.c. $\frac{\text{Sin.}B}{\text{Sin.}C}$, réduisant, divisant par Sin.a et chassant le dénominateur, il vient

$$\text{Sin.}c\text{Sin.}B\text{Cos.}C=\text{Sin.}a\text{Cos.}c\text{Sin.}C-\text{Cos.}a\text{Sin.}c\text{Cos.}B\text{Sin.}C\ ;$$

d'où, en divisant par Sin.cSin.C et transposant,

$$\text{Cos.}a\text{Cos}\,B=\text{Sin.}a\text{Cot.}c-\text{Sin.}B\text{Cot.}C\ . \qquad (iii)$$

En éliminant Cos.B entre les deux équations (40), mettant pour Sin.B, dans l'équation résultante, sa valeur Sin.C $\frac{\text{Sin.}b}{\text{Sin.}c}$, réduisant, divisant par Sin.A et chassant le dénominateur, il vient

$$\text{Sin.}C\text{Sin.}b\text{Cos.}c=\text{Sin.}A\text{Cos.}C\text{Sin.}c+\text{Cos.}A\text{Sin.}C\text{Cos}\,b\text{Sin.}c;$$

d'où, en divisant par Sin.CSin.c et transposant,

$$\text{Cos.}A\text{Cos.}b=\text{Sin.}b\text{Cot.}c-\text{Sin.}A\text{Cot.}C\ . \qquad (III)$$

Il est aisé de voir que les formules (iii) et (III) n'expriment qu'une seule et même propriété du triangle sphérique. Chacune d'elles, par la permutation des lettres, est d'ailleurs susceptible de trois formes différentes.

Les formules (i, I), (ii, II), (iii, III) ne laissent rien à désirer pour la résolution analitique des triangles sphériques ; mais les formules (ii, II) sont les seules qui se prêtent commodément au calcul par logarithmes ; cherchons-en donc d'autres qui jouissent du même avantage, pour suppléer à celles qui en sont privées.

Posons.

$$a+b+c=2s\ , \qquad (iv)$$

$$A+B+C=2S\ . \qquad (IV)$$

Les formules (5), (i, I) donnent

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}A}{2}}=\sqrt{-\frac{\text{Cos.}a-\text{Sin.}b\text{Sin.}c-\text{Cos.}b\text{Cos.}c}{2\text{Sin.}b\text{Sin.}c}}\,,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}a}{2}}=\sqrt{-\frac{\text{Cos.}A-\text{Sin.}B\text{Sin.}C+\text{Cos.}B\text{Cos.}C}{2\text{Sin.}B\text{Sin.}C}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}A}{2}}=\sqrt{+\frac{\text{Cos.}a+\text{Sin.}b\text{Sin.}c-\text{Cos.}b\text{Cos.}c}{2\text{Sin.}b\text{Sin.}c}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}a}{2}}=\sqrt{+\frac{\text{Cos.}A+\text{Sin.}B\text{Sin.}C+\text{Cos.}B\text{Cos.}C}{2\text{Sin.}B\text{Sin.}C}}\,,$$

d'où, en vertu des formules (18), (20), (21), (22),

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{Sin.}(s-b)\text{Sin.}(s-c)}{\text{Sin.}b\text{Sin.}c}}\,, \qquad (v)$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\text{Cos.}S\text{Cos.}(S-A)}{\text{Sin.}B\text{Sin.}C}}\,, \qquad (V)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-a)}{\text{Sin.}b\text{Sin.}c}}\,, \qquad (vi)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{Cos.}(S-B)\text{Cos.}(S-C)}{\text{Sin.}B\text{Sin.}C}}\,. \qquad (VI)$$

En posant, pour abréger,

$$p^2=+\text{Sin.}s\,\text{Sin.}(s-a)\text{Sin.}(s-b)\text{Sin.}(s-c), \qquad (vii)$$

$$P^2=-\text{Cos.}S\text{Cos.}(S-A)\text{Cos.}(S-B)\text{Cos.}(S-C), \qquad (VII)$$

on tire encore de là, au moyen de la formule (7),

$$\mathrm{Sin}.A=\frac{2p}{\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Sin}.c}\,,\quad (viii)\qquad \mathrm{Sin}\,a=\frac{2P}{\mathrm{Sin}.B\,\mathrm{Sin}.C}\,.\quad (VIII)$$

Par les formules (v, V), (vi, VI), on a

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}.(s-c)\mathrm{Sin}.(s-a)}{\mathrm{Sin}.c\,\mathrm{Sin}.a}}, & \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}.s\,\mathrm{Sin}\,(s-b)}{\mathrm{Sin}.c\,\mathrm{Sin}.a}},\\
\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}.(s-a)\mathrm{Sin}.(s-b)}{\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Sin}.b}}, & \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}.s\,\mathrm{Sin}\,(s-c)}{\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Sin}.b}};
\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{-\frac{\mathrm{Cos}.S(\mathrm{Cos}.S-B)}{\mathrm{Sin}.C\,\mathrm{Sin}.A}}, & \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,(S-C)\,\mathrm{Cos}\,(S-A)}{\mathrm{Sin}.C\,\mathrm{Sin}.A}},\\
\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{-\frac{\mathrm{Cos}.S\,\mathrm{Cos}.(S-C)}{\mathrm{Sin}.A\,\mathrm{Sin}.B}}, & \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}.(S-A)\mathrm{Cos}.(S-B)}{\mathrm{Sin}.A\,\mathrm{Sin}.B}},
\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

De ces dernières on conclut, à l'aide des formules (1, 2, 3, 4, 7)

$$\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(B\pm C)=\frac{\mathrm{Sin}.(s-c)\pm\mathrm{Sin}.(s-b)}{\mathrm{Sin}.a}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}.s\,\mathrm{Sin}.(s-a)}{\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Sin}.c}}=\frac{\mathrm{Sin}.(s-c)\pm\mathrm{Sin}.(s-b)}{2\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}a}\,\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}A\,,$$

$$\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(B\pm C)=\frac{\mathrm{Sin}.s\mp\mathrm{Sin}.(s-a)}{\mathrm{Sin}.a}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}.(s-b)\mathrm{Sin}.(s-c)}{\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Sin}.c}}=\frac{\mathrm{Sin}.s\mp\mathrm{Sin}\,(s-a)}{2\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}a}\,\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}A\,,$$

$$\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(b\pm c)=\frac{\mathrm{Cos}.(S-B)\pm\mathrm{Cos}.(S-C)}{\mathrm{Sin}.A}\cdot\sqrt{-\frac{\mathrm{Cos}.S\,\mathrm{Cos}.(S-A)}{\mathrm{Sin}.B\,\mathrm{Sin}.C}}=\frac{\mathrm{Cos}.(S-B)\pm\mathrm{Cos}.(S-C)}{2\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A}\,\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}a\,,$$

$$\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(b\pm c)=\frac{\mathrm{Cos}.(S-A)\mp\mathrm{Cos}.S}{\mathrm{Sin}.A}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}.(S-B)\mathrm{Cos}.(S-C)}{\mathrm{Sin}.B\,\mathrm{Sin}.C}}=\frac{\mathrm{Cos}.(S-A)\mp\mathrm{Cos}.S}{2\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,.$$

dédoublant et décomposant les seconds membres, à l'aide des formules (8), (9), (10), (11), on trouvera également, soit par les deux premières, soit par les deux dernières équations,

$$\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(B+C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b+c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}, \qquad (ix, IX)$$

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}; \qquad (x, X)$$

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+C)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}, \ (xi) \quad \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}. \ (XI)$$

on reconnaît là les quatre formules trouvées par MM. Gauss et Delambre, chacun de leur côté (*).

De ces formules, on conclut, par division,

$$\left.\begin{aligned}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B+C)&=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b+c)}\,\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\,,\\ \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B-C)&=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c)}\,\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\,,\end{aligned}\right\}\quad (xii)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b+c)&=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(B+C)}\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}a\,,\\ \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b-c)&=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+C)}\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\,.\end{aligned}\right\}\quad (XII)$$

Ce sont les analogies de Néper, qui complètent la série des formules usuelles nécessaires pour la résolution arithmétique des triangles.

(*) Voyez, sur ce sujet, *Theoria motûs corporum cœlestium*, *etc.*, de Gauss, page 51, la *Connaissance des temps* pour 1808, ou celle de 1812, page 349, ou la grande *Astronomie* de Delambre, tome I, page 157, ou l'*Abrégé*, page 110, ou encore la page 351 du III.e volume du présent recueil.

§. III.

Recherche des sommes ou différences d'angles ou de côtés.

La combinaison des formules (41) avec les formules (*v*) et (*vi*) donne

$$\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin.}s}{\text{Sin.}a}\,,\qquad \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin.}(s-a)}{\text{Sin.}a}\,;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}s=\frac{\text{Sin.}a\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}\,,\qquad (xiii)$$

$$\text{Sin.}(s-a)=\frac{\text{Sin.}a\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}\,.\qquad (xiv)$$

La combinaison des formules (42) avec les formules (*V*) et (*VI*) donne ensuite

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=-\frac{\text{Cos.}S}{\text{Sin.}A}\,,\qquad \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{Cos.}(S-A)}{\text{Sin.}A}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Cos}\,S=-\frac{\text{Sin.}A\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}\,,\qquad (XIII)$$

$$\text{Cos.}(S-A)=+\frac{\text{Sin.}A\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}\,.\qquad (XIV)$$

Mais les formules (*viii*, *VIII*) donnent (7)

$$\text{Sin}\,a\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C=\frac{P}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}\,,\qquad (xv)$$

$$\text{Sin.}A\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\frac{p}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}b\,\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\,, \qquad (XV)$$

$$\text{Sin.}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C=\frac{P}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}B\,\text{Cos.}\frac{1}{2}C}\,, \qquad (xvi)$$

$$\text{Sin.}A\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c=\frac{p}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c}\,. \qquad (XVI)$$

Introduisant ces valeurs dans les numérateurs des quatre dernières formules, elles deviendront

$$\text{Sin.}s=\frac{P}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}A\,\text{Sin.}\frac{1}{2}B\,\text{Sin.}\frac{1}{2}C}\,, \qquad (xvii)$$

$$\text{Cos.}S=-\frac{p}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}a\,\text{Cos.}\frac{1}{2}b\,\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\,, \qquad (XVII)$$

$$\text{Sin.}(s-a)=\frac{P}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}A\,\text{Cos.}\frac{1}{2}B\,\text{Cos.}\frac{1}{2}C}\,, \qquad (xviii)$$

$$\text{Cos.}(S-A)=\frac{p}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c}\,. \qquad (XVIII)$$

Les formules $(viii)$ et $(VIII)$, divisées l'une par l'autre, donnent (ii)

$$\frac{\text{Sin.}A}{\text{Sin.}a}=\frac{p}{P}\cdot\frac{\text{Sin}\,B}{\text{Sin.}b}\cdot\frac{\text{Sin.}C}{\text{Sin.}c}=\frac{p}{P}\cdot\frac{\text{Sin.}^2A}{\text{Sin.}^2a}\,;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{P}{p}=\frac{\text{Sin.}A}{\text{Sin.}a}\,. \qquad (xix\,,\,XIX)$$

en introduisant tour-à-tour les valeurs de Sin.a et Sin.A, tirées de cette dernière formule, dans les formules $(xiii)$, $(XIII)$, (xiv), (XIV), et ayant égard à la formule (7), on trouvera

$$\text{Sin.}s=\frac{2p}{P}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ , \qquad (xx)$$

$$\text{Cos.}S=-\frac{2P}{p}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\ ; \qquad (XX)$$

$$\text{Sin}\,(s-a)=\frac{2p}{P}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ , \qquad (xxi)$$

$$\text{Cos.}(S-A)=\frac{2P}{p}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\ . \qquad (XXI)$$

Si l'on multiplie respectivement ces quatre valeurs par les quatre qui les précèdent immédiatement, on aura encore

$$\text{Sin.}^2s=p\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\text{Cot.}\tfrac{1}{2}B\text{Cot.}\tfrac{1}{2}C\ , \qquad (xxii)$$

$$\text{Cos.}^2S=P\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\text{Tang.}\tfrac{1}{2}b\text{Tang.}\tfrac{1}{2}c\ , \qquad (XXII)$$

$$\text{Sin.}^2(s-a)=p\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B\text{Tang.}\tfrac{1}{2}C\ , \qquad (xxiii)$$

$$\text{Cos.}^2(S-A)=P\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\text{Cot.}\tfrac{1}{2}b\text{Cot.}\tfrac{1}{2}c\ . \qquad (XXIII)$$

Les formules (ii, II) reviennent (7) à

$$\frac{\text{Sin.}a\text{Cos.}\frac{1}{2}B}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin}\,b\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}b}\ , \qquad \frac{\text{Sin.}a\text{Cos.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin.}c\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C}\ ,$$

$$\frac{\text{Sin.}A\,\text{Sin.}\frac{1}{2}b}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{Sin.}B\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\text{Cos.}\frac{1}{2}b}\ , \qquad \frac{\text{Sin.}A\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{Sin.}C\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\ ;$$

au moyen desquelles les formules $(xiii)$, $(XIII)$, (xiv), (XIV) prennent cette nouvelle forme

$$\text{Sin.}s=\frac{\text{Sin.}b\text{Cos.}\frac{1}{2}C\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}B}=\frac{\text{Sin.}c\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Cos.}\frac{1}{2}B}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C}, \qquad (xxiv)$$

$$-\text{Cos.}S=\frac{\text{Sin.}B\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\text{Cos.}\frac{1}{2}b}=\frac{\text{Sin.}C\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}, \qquad (XXIV)$$

$$\text{Sin.}(s-a)=\frac{\text{Sin.}b\text{Sin.}\frac{1}{2}C\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Cos.}\frac{1}{2}B}=\frac{\text{Sin.}c\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}\frac{1}{2}B}{\text{Cos.}\frac{1}{2}C}, \qquad (xxv)$$

$$\text{Cos.}(S-A)=\frac{\text{Sin.}B\text{Cos.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\text{Sin.}\frac{1}{2}b}=\frac{\text{Sin.}C\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b}{\text{Sin.}\frac{1}{2}c}. \qquad (XXV)$$

En vertu des formules (29) et (30), les valeurs (vii) et (VII) peuvent être écrites ainsi

$$p^2=\tfrac{1}{4}(1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c), \qquad (xxvi)$$

$$P^2=\tfrac{1}{4}(1-\text{Cos.}^2A-\text{Cos.}^2B-\text{Cos.}^2C-2\text{Cos.}A\text{Cos.}B\text{Cos.}C). \qquad (XXVI)$$

En transformant les cosinus d'angles en cosinus de moitiés, dans la première et en sinus de moitiés dans la seconde, à l'aide des formules (5), on trouvera

$$p^2=4\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-(1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c)^2, \qquad (xxvii)$$

$$P^2=4\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-(1-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C)^2; \qquad (XXVII)$$

ou encore

$$p^2=4\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c-(1+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c)^2, \qquad (xxviii)$$

$$P^2=4\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C-(1+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C)^2. \qquad (XXVIII)$$

Cela posé, on a, par les formules $(xvii)$ et $(XVII)$,

$$\text{Cos.}s=\sqrt{1-\text{Sin.}^2s}=\frac{\sqrt{4\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-P^2}}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C},$$

$$\text{Sin.}S=\sqrt{1-\text{Cos.}^2S}=\frac{\sqrt{4\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-p^2}}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c};$$

à l'aide des formules *(xxvii)* et *(XXVII)*, ces dernières deviendront

$$\text{Cos.}s=\frac{1-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}=-\frac{1-\text{Cos.}A-\text{Cos.}B-\text{Cos.}C}{4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C},(xxix)$$

$$\text{Sin.}S=-\frac{1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}=\frac{1+\text{Cos}a+\text{Cos.}b+\text{Cos.}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}.(XXIX)$$

On aussi, par les formules *(xviii)* et *(XVIII)*,

$$\text{Cos.}(s-a)=\sqrt{1-\text{Sin.}^2(s-a)}=\frac{\sqrt{4\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C-P^2}}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C},$$

$$\text{Sin.}(S-A)=\sqrt{1-\text{Cos.}^2(S-A)}=\frac{\sqrt{4\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c-p^2}}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c};$$

à l'aide des formules *(xxviii)* et *(XXVIII)*, ces dernières deviendront

$$\text{Cos.}(s-a)=\frac{1+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}=\frac{1-\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C}{4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C},(xxx)$$

$$\text{Sin.}(S-A)=\frac{1+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}=\frac{1+\text{Cos.}a-\text{Cos.}b-\text{Cos.}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}.(XXX)$$

La comparaison des formules *(xvii)*, *(XVII)*, *(xviii)*, *(XXIII)* aux formules *(xxix)*, *(XXIX)*, *(xxx)*, *(XXX)*, donne encore

$$\text{Tang.}s=-\frac{2P}{1-\text{Cos.}A-\text{Cos.}B-\text{Cos.}C},\qquad(xxxi)$$

$$\text{Cot.}S=-\frac{2p}{1+\text{Cos.}a+\text{Cos.}b+\text{Cos.}c}\,, \qquad (XXXI)$$

$$\text{Tang.}(s-a)=\frac{2P}{1-\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C}\,, \qquad (xxxii)$$

$$\text{Cot.}(S-A)=\frac{2p}{1+\text{Cos.}a-\text{Cos.}b-\text{Cos.}c}\,. \qquad (XXXII)$$

En formant les expressions analogues, relatives à $s-b$, $s-c$, $S-B$, $S-C$, on en conclura

$$\text{Cot.}(s-a)+\text{Cot.}(s-b)+\text{Cot.}(s-c)=\frac{3+\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C}{2P}=\frac{\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}A+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C}{P}\,, \quad (xxxiii)$$

$$\text{Tang.}(S-A)+\text{Tang.}(S-B)+\text{Tang.}(S-C)=\frac{3-\text{Cos.}o-\text{Cos.}b-\text{Cos.}c}{2p}=\frac{\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C}{p}\,. \quad (XXXIII)$$

Par les formules (5) et par la formule $(xxix)$, on a

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}s}{2}}=\sqrt{-\frac{1-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}s}{2}}=\sqrt{\frac{1-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C+2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{-4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}}\,;$$

comparant ces formules aux formules (34) et (35), on pourra leur donner cette forme

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{-\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Cos}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}}\,, \quad (xxxiv)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}}\,; \quad (xxxv)$$

d'où encore

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}\,. \quad (xxxvi)$$

Par les mêmes formules (5), et par la formule (*XXIX*), on a

$$-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\frac{1-\text{Sin.}S}{2}}=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c+2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}\,,$$

$$+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\frac{1+\text{Sin.}S}{2}}=\sqrt{-\frac{1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}\,;$$

comparant ces formules aux formules (29) et (30), on pourra leur donner cette forme

$$-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}s\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}\,, \quad (XXXV)$$

$$+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}s\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}\,; \quad (XXXIV)$$

d'où encore

$$-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\text{Tang.}\tfrac{1}{2}s\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-c)}\,.\ (*)\ (XXXVI)$$

Par les formules (5) et par la formule (xxx), on trouve

(*) Si l'on désigne par T l'aire du triangle, on aura, comme l'on sait,

$$T=A+B+C-\varpi=2S-\varpi\,, \quad \text{d'où} \quad \tfrac{1}{2}T=-(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\,,$$

et par conséquent

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}T=-\text{Cos.}S\,, \quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}T=\text{Sin.}S\,, \quad \text{Tang.}\tfrac{1}{2}T=-\text{Cot.}S\,,$$

on aura en outre $\tfrac{1}{4}T=-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)$, d'où

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{4}T=-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\,,\ \text{Cos.}\tfrac{1}{4}T=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\,,\ \text{Tang.}\tfrac{1}{4}T=-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\,,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}(s-a)}{2}}=\sqrt{-\frac{1+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{4\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}(s-a)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C+2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}}\,;$$

comparant ces formules aux formules (35) et (36), on pourra leur donner cette forme

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{-\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}}\,;\quad (xxxvii)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}}\,;\quad (xxxviii)$$

d'où encore

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(S-B)\}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}\,.\quad (xxxix)$$

Par les mêmes formules (5) et par la formule (XXX), on trouve

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}=\sqrt{\frac{1-\text{Sin.}(S-A)}{2}}=\sqrt{\frac{-1+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}=\sqrt{\frac{1+\text{Sin.}(S-A)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c+2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}}\,;$$

comparant ces formules aux formules (31) et (32), on pourra leur donner cette forme

---

de sorte que les formules $(XIII)$, $(XVII)$, (XX), $(XXIV)$, $(XXIX)$, $(XXXI)$, $(XXXIV)$, $(XXXV)$, $(XXXVI)$ offrent autant de moyens d'obtenir l'aire d'un triangle sphérique en fonction de trois de ses parties. On reconnaîtra en particulier la dernière pour celle de M. Lhuilier, donnée par M. Legendre, dans ses *Elémens de Géométrie*.

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}=\sqrt{\frac{\text{Cos}\tfrac{1}{2}s.\ \text{os.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}}, \quad (XXXVIII)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}=\sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}s\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}}; \quad (XXXVII)$$

d'où encore

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}=\sqrt{\text{Cot.}\tfrac{1}{2}s\text{Cot.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-c)}. \quad (XXXIX)$$

§. IV.

Recherches diverses.

Soit d l'arc de grand cercle mené du sommet A au milieu A' du côté a ; il divisera notre triangle en deux autres, pour lesquels on aura (i)

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}d\text{Cos.}AA'C=\text{Cos.}b-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}d\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}d\text{Cos.}AA'B=\text{Cos.}c-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}d\ ;$$

en prenant la somme de ces deux équations et observant que

$$\text{Cos.}AA'C+\text{Cos.}AA'B=0\ ,$$

il viendra, en transposant,

$$2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}d=\text{Cos.}b+\text{Cos.}c=2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)\ ;$$

et, par suite,

$$\operatorname{Cos}.d=\frac{\operatorname{Cos}.\frac{1}{2}(b+c)\operatorname{Cos}.\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{Cos}.\frac{1}{2}a}\ .\ (*) \qquad (xl)$$

L'arc d étant déterminé par cette formule, on trouvera ensuite (ii, II), ($viii$)

$$\operatorname{Sin}.(d,a)=\frac{\operatorname{Sin}.b\operatorname{Sin}.c}{\operatorname{Sin}.d}\ , \qquad (xli)$$

$$\operatorname{Sin}.(d,b)=\frac{p}{\operatorname{Cos}.\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}.b\operatorname{Sin}.d}\ ,\ \operatorname{Sin}.(d,c)=\frac{p}{\operatorname{Cos}.\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}.c\operatorname{Sin}.d}\ . \qquad (xlii)$$

Soit D l'angle que fait avec le côté a l'arc de grand cercle a' qui divise l'angle A en deux parties égales ; il divisera notre triangle en deux autres dans lesquels on aura (I)

$$\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}.D\operatorname{Cos}.a'=\operatorname{Cos}.B+\operatorname{Cos}.\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}.D\ ,$$

$$\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}D\operatorname{Cos}.a'=\operatorname{Cos}.C-\operatorname{Cos}.\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}.D\ ;$$

en prenant la différence de ces deux équations, il viendra, en transposant,

$$2\operatorname{Cos}.\tfrac{1}{2}A\operatorname{Cos}.D=\operatorname{Cos}.C-\operatorname{Cos}.B=2\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}(B+C)\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}(B-C)\ ,$$

et, par suite,

$$\operatorname{Cos}.D=\frac{\operatorname{Sin}.\frac{1}{2}(B+C)\operatorname{Sin}.\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{Cos}.\frac{1}{2}A}\ . \qquad (XL)$$

L'angle D étant déterminé, par cette formule, on trouvera ensuite (ii, II) et ($VIII$)

(*) Cette formule a été donnée par M. Querret, dans la *Connaissance des temps* pour 1822, page 335.

$$\mathrm{Sin}.DA=\frac{\mathrm{Sin}.B\,\mathrm{Sin}.C}{\mathrm{Sin}.D}\,, \qquad (XLI)$$

$$\mathrm{Sin}.DB=\frac{P}{\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}.B\,\mathrm{Sin}.D}\,, \quad \mathrm{Sin}.DC=\frac{P}{\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}.C\,\mathrm{Sin}.D}\,. \quad (XLII)$$

Soient O le pôle et R le rayon sphérique du cercle circonscrit à notre triangle. On sait que, si de ce point O on abaisse des arcs perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, ils tomberont sur leurs milieux ; de sorte qu'en désignant par A', B', C' les pieds de ces arcs perpendiculaires, on aura

$$A'B=A'C=\tfrac{1}{2}a\,, \quad B'C=B'A=\tfrac{1}{2}b\,, \quad C'A=C'B=\tfrac{1}{2}c\,,$$

et, de plus,

$$OA=OB=OC=R\,,$$

Cela posé, on aura

$$\mathrm{Ang}.OAB+\mathrm{Ang}.OAC=A\,,$$

$$\mathrm{Ang}.OBC+\mathrm{Ang}.OBA=B\,,$$

$$\mathrm{Ang}.OCA+\mathrm{Ang}.OCB=C\,;$$

retranchant la première de la somme des deux autres, il viendra

$$\mathrm{Ang}.OBC+\mathrm{Ang}.OCB+\mathrm{Ang}.OBA-\mathrm{Ang}.OAB+\mathrm{Ang}.OCA-\mathrm{Ang}.OAC=B+C-A$$

mais, dans les triangles isocèles AOB, BOC, COA, on a

$$\mathrm{Ang}.OBC=\mathrm{Ang}.OCB,\ \mathrm{Ang}.OCA=\mathrm{Ang}.OAC,\ \mathrm{Ang}.OAB=\mathrm{Ang}.OBA$$

réduisant donc, à l'aide de ces relations, il viendra

$$2\text{Ang.}OBC=2\text{Ang.}OCB=B+C-A=2(S-A)\ ,$$

d'où

$$\text{Ang.}OBC=\text{Ang.}OCB=S-A\ ;$$

or, dans le triangle sphérique rectangle $OA'B$, on a

$$\text{Tang.}OB\text{Cos.}OBC=\text{Tang.}BA'\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}R\text{Cos.}(S-A)=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\ ;$$

donc

$$\text{Cot.}R=\text{Cot.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}(S-A)\ ; \qquad (xliii)$$

c'est-à-dire (XIV),

$$\text{Cot.}R=\frac{\text{Sin.}A\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}\ ; \qquad (xliv)$$

ou encore $(viii)$,

$$\text{Cot.}R=\frac{p}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}\ . \qquad (xlv)$$

voilà donc le rayon sphérique du cercle circonscrit exprimé par une fonction des trois côtés à laquelle le calcul par logarithmes est facilement applicable.

Si l'on veut avoir le même rayon en fonction des trois angles, il ne s'agira que de mettre pour le dénominateur sa valeur donnée par la formule (XX), il viendra ainsi

$$\text{Cot.}R=-\frac{P}{\text{Cos.}S}\ . \qquad (xlvi)$$

Soient présentement o le pôle et r le rayon sphérique du cercle inscrit, on sait que si de ce point on conduit des arcs de grands cercles aux trois sommets, ces arcs diviseront les angles du triangle en deux parties égales. Si en outre on désigne par A'', B'', C'' les points de contacts respectifs avec les côtés, on aura

$$A''B+A''C=a\ ,\quad B''C+B''A=b\ ,\quad C''A+C''B=c\ ;$$

d'où, en retranchant la première équation de la somme des deux autres,

$$AB''+AC''+BC''-BA''+CB''-CA''=b+c-a\ ;$$

mais on a ici

$$AB''=AC''\ ,\quad BC''=BA''\ ,\quad CB''=CA''\ ;$$

réduisant donc, à l'aide de ces relations, il viendra

$$2AB''=2AC''=b+c-a=2(s-a)\ ;$$

d'où

$$AB''=s-a\ ;$$

mais le triangle sphérique rectangle $oB''A$ donne

$$\text{Tang.}oB''=\text{Sin.}AB''\text{Tang.}oAB''\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}r=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}(s-a)\ ;\qquad (XLIII)$$

ou bien (xiv)

$$\text{Tang.}r=\frac{\text{Sin.}a\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}\ ;\qquad (XLIV)$$

ou encore $(VIII)$

$$\text{Tang.}r=\frac{p}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C}\,. \qquad (XLV)$$

Voilà donc le rayon sphérique du cercle inscrit exprimé par une fonction des trois angles à laquelle le calcul par logarithmes est facilement applicable.

Si l'on veut avoir le même rayon en fonction des trois côtés, il ne s'agira que de mettre pour le dénominateur sa valeur donnée par la formule (xx), il viendra ainsi

$$\text{Tang.}r=\frac{p}{\text{Sin.}s}\,. \qquad (XLVI)$$

Au moyen des formules auxquelles nous venons de parvenir, on obtiendrait facilement les rayons sphériques des cercles inscrit et circonscrit, en fonction de trois quelconques des six parties du triangle.

Nous ne devons pas quitter ce sujet sans rappeler qu'il a été démontré (tome XIV, page 61) qu'en désignant par δ la distance des pôles, on a

$$\text{Sin.}^2\delta=\frac{\text{Sin.}(R+r)+\text{Sin.}(R-r)}{2}\cdot\frac{3\text{Sin.}(R+r)-\text{Sin.}(R-r)}{2}\,. \qquad (43)$$

Si l'on prolonge les côtés du triangle sphérique deux à deux au-delà de leur point de concours, jusqu'à ce qu'ils rencontrent de nouveau la circonférence dont le troisième côté fait partie, on formera trois nouveaux triangles sphériques tels que chacun aura un angle égal, comme opposé au sommet, à l'un des angles du triangle proposé, compris entre deux côtés qui seront les supplémens des deux côtés correspondans de celui-là. En supposant donc qu'on ait circonscrit des cercles aux trois triangles ainsi formés, et qu'on désigne par R', R'', R''' les rayons sphériques de ces cercles, on aura $(xliii)$ et $(xlvi)$

$$\text{Cot.}R'=-\text{Cot.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}S\,,\ \text{Cot.}R''=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}(S-C)\,,\ \text{Cot.}R'''=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}(S-B)\ ;$$

multipliant ces équations entre elles et par l'équation (*xliii*) en ayant égard à la formule (*VII*), il viendra

$$\text{Cot.}R\text{Cot.}R'\text{Cot.}R''\text{Cot}\,R'''=P^2\ . \qquad (XLVII)$$

Si l'on prolonge les côtés du triangle sphérique deux à deux jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau, on formera trois nouveaux triangles sphériques tels que chacun aura un côté commun avec le triangle proposé, compris entre deux angles qui seront les supplémens de leurs correspondans dans le même triangle (*). En supposant donc qu'on ait inscrit des cercles aux trois triangles ainsi formés, et qu'on désigne par r', r'', r''' les rayons sphériques de ces cercles, on aura (*XLIII*) et (*XLVI*)

$$\text{Tang.}r'=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}s\,,\ \text{Tang.}r''=\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}(s-c)\,,\ \text{Tang.}r'''=\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}(s-b)\ ;$$

multipliant ces équations entre elles et par l'équation (*XLIII*), en ayant égard à la formule (*vii*), il viendra

$$\text{Tang.}r\text{Tang.}r'\text{Tang}\,r''\text{Tang}\,r'''=p^2\ . \qquad (xlvii)$$

Cherchons quel est, sur la sphère, le lieu des sommets A des triangles sphériques qui ont tous la base commune a et dans lesquels en outre la somme des angles est constante. Dans cette hypothèse on doit avoir $\text{Cos.}S=\text{Constante}$; c'est-à-dire (*XIII*),

---

(*) Ces trois derniers sont ce que Viète appelle les *Anapléroses* du triangle proposé ; ils sont respectivement opposés, sur la sphère, aux trois dont il a été question ci-dessus.

$$\frac{\text{Sin.}A\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=\text{Constante} ;$$

ou, plus simplement,

$$\text{Sin.}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\text{Constante} ;$$

d'où encore

$$\frac{\text{Sin.}A\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}=\text{Constante} .$$

Or, cette dernière expression est évidemment (*xliv*) celle du rayon sphérique du cercle circonscrit au triangle dont un des côtés serait le côté a, et les deux angles adjacens les supplémens respectifs des angles B et C; donc, si sur une même base a on construit une suite de triangles sphériques dont la somme des angles soit constante (*), et qu'ensuite on construise pour chacun d'eux, le triangle secondaire dont il vient d'être question, les cercles circonscrits aux triangles secondaires seront tous égaux ; ils auront donc aussi le même pôle, puisqu'ils passeront par les deux mêmes sommets B et C, c'est-à-dire qu'ils se confondront en un seul auquel tous ces triangles seront inscrits. Mais, si l'on considère les triangles formés en prolongeant les côtés b et c au-delà du sommet A des quantités respectives $\varpi-b$, $\varpi-c$, ils seront respectivement égaux et opposés à ceux-là, et seront conséquemment comme eux inscrits à un même cercle, dont le pôle sera à l'autre extrémité du diamètre de la sphère conduit par le pôle du premier ; puis donc que ces nouveaux triangles ont tous leur sommet A commun avec les triangles construits sur la base commune a de manière que la somme de leurs angles soit constante, il s'ensuit que ces

(*) Et qui auront conséquemment même surface.

derniers ont aussi leurs sommets opposés à a sur la circonférence de ce même cercle.

Ainsi, *le lieu des sommets de tous les triangles sphériques de même base et de même somme d'angles est la circonférence d'un petit cercle de la sphère.* C'est le théorème de Lexell (*Nova acta Petropolitana* , tom. V, pag. 1) qu'a démontré M. Legendre, dans la X.e note de ses *Élemens de Géométrie.*

Cherchons enfin quelle est, sur la surface de la sphère, la courbe enveloppe des bases de tous les triangles sphériques qui ont l'angle au sommet commun et même périmètre. Dans cette hypothèse, on doit avoir $\text{Cos}.s=\text{Constante}$; c'est-à-dire (*xiii*)

$$\frac{\text{Sin}.a\text{Cos}.\frac{1}{2}B\text{Cos}.\frac{1}{2}C}{\text{Cos}.\frac{1}{2}A}=\text{Constante} ;$$

ou, plus simplement,

$$\text{Sin}.a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}B\text{Cos}.\tfrac{1}{2}C=\text{Constante} ;$$

d'où encore

$$\frac{\text{Sin}.a\text{Cos}.\frac{1}{2}B\text{Cos}.\frac{1}{2}C}{\text{Cos}.\frac{1}{2}A}=\text{Constante} .$$

Or, cette dernière expression est évidemment (*XLIV*) celle du rayon sphérique du cercle inscrit au triangle dont un des angles serait l'opposé au sommet de l'angle A, et les deux côtés qui le comprendraient les supplémens respectifs des côtés b et c ; donc, si avec un même angle du sommet A on construit une suite de triangles sphériques de même périmètre, et qu'ensuite, pour chacun d'eux, on construise le triangle secondaire dont il vient d'être question, les cercles circonscrits aux triangles secondaires seront tous égaux ; ils auront donc aussi le même pôle, puisqu'ils toucheront tous les deux mêmes arcs de cercles b et c ; c'est-à-dire qu'ils se confondront tous en un seul, auquel tous ces triangles seront circonscrits. Mais, si l'on considère les triangles formés par le côté a et les prolongemens des deux autres b et c au-delà de C et B, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau, ils seront respectivement égaux et opposés à ceux-là, et seront conséquemment comme eux circonscrits à un même cercle, dont le pôle sera à l'autre extrémité du diamètre de la sphère conduit par le pôle du premier ; puis donc que ces nouveaux triangles ont tous le côté a commun avec ceux qui ont l'angle A commun et même périmètre, il s'ensuit que ces derniers ont aussi leur côté a tangent à ce même cercle.

Ainsi, *l'enveloppe des bases de tous les triangles sphériques qui ont un angle commun et même périmètre est la circonférence d'un petit cercle de la sphère.* Ce théorème, que celui de Lexell aurait dû faire pressentir, n'avait pas encore été démontré.

Si l'on fait attention à la manière dont nous avons numéroté nos formules, on reconnaîtra qu'excepté les formules dans lesquelles les angles et les côtés qui leur sont respectivement opposés figurent de la même manière, toutes les formules de la trigonométrie sphérique sont doubles, et peuvent être distribuées en deux séries de telle sorte qu'on passera d'une formule de l'une quelconque des deux séries à sa correspondante dans l'autre série, en y remplaçant simplement les côtés par les supplémens des angles et les angles par les supplémens des côtés. Cette correspondance, qui n'a pas échappé à M. Sorlin, est une suite évidente de la propriété des triangles polaires ou supplémentaires l'un de l'autre ; et il en résulte qu'en général il n'est aucun théorème ou problème de trigonométrie sphérique auquel il n'en réponde nécessairement un autre dans lequel les supplémens des angles ont pris la place des côtés et *vice versâ.*

On doit remarquer aussi que toute formule de trigonométrie sphérique dans laquelle les arcs ne figurent que par leurs sinus ou leurs tangentes, et qui est homogène par rapport à ces deux sortes de fonctions, donne naissance à une formule de géométrie plane qu'on en déduit en substituant simplement les arcs à leurs sinus et tangentes et les considérant ensuite comme des lignes droites; ce qui revient évidemment à supposer que le rayon de la sphère devient infini. Avec cette attention, on déduira des diverses formules auxquelles nous sommes parvenus les formules suivantes, en regard de chacune desquelles nous avons placé le numéro de la formule de trigonométrie sphérique de laquelle elle est déduite.

$$\frac{\text{Sin}.A}{a}=\frac{\text{Sin}.B}{b}=\frac{\text{Sin}.C}{c}\,, \qquad (ii,\,II)$$

$$\text{Sin}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\,,\ (v) \qquad \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\,, \qquad (vi)$$

$$p^2=s(s-a)(s-b)(s-c)\,, \qquad (vii)$$

$$\text{Sin}.A=\frac{2p}{bc}\,, \qquad (viii)$$

$$\frac{\text{Sin}.\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Cos}.\frac{1}{2}A}=\frac{b-c}{a}\,, \quad (ix\,,IX) \qquad \frac{\text{Cos}.\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Sin}.\frac{1}{2}A}=\frac{b+c}{a}\,, \quad (XI)$$

$$\text{Tang}.\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\text{Cot}.\tfrac{1}{2}A\,, \qquad (xii)$$

$$\frac{s}{a}=\frac{\text{Cos}.\frac{1}{2}B\text{Cos}.\frac{1}{2}C}{\text{Sin}.\frac{1}{2}A}\,, \quad (xiii) \qquad \frac{s-a}{a}=\frac{\text{Sin}.\frac{1}{2}B\text{Sin}.\frac{1}{2}C}{\text{Sin}.\frac{1}{2}A}\,, \quad (xiv)$$

$$s^2=p\text{Cot}.\tfrac{1}{2}A\text{Cot}.\tfrac{1}{2}B\text{Cot}.\tfrac{1}{2}C\,, \qquad (xxii)$$

$$(s-a)^2=p\text{Cos}.\tfrac{1}{2}A\text{Tang}.\tfrac{1}{2}B\text{Tang}.\tfrac{1}{2}C\,, \qquad (xxiii)$$

$$s=\frac{b\text{Cos.}\frac{1}{2}C\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}B}=\frac{c\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Cos.}\frac{1}{2}B}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C}\,; \qquad (xxiv)$$

$$s-a=\frac{b\text{Sin.}\frac{1}{2}C\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Cos.}\frac{1}{2}B}=\frac{c\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}\frac{1}{2}B}{\text{Cos.}\frac{1}{2}C}\,; \qquad (xxv)$$

$$r=(s-a)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A=\frac{a\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}=\frac{p}{s}\,, \qquad (XLIII,\ XLIV,\ XLVI)$$

$$\delta^2=R(R-2r)\,, \qquad (43)$$

$$rr'r''r'''=p^2\,.\ (*) \qquad (xlvii)$$

Le théorème démontré en dernier lieu donne aussi ce théorème de géométrie élémentaire, qui ne paraît pas connu ; mais de la vérité duquel on peut s'assurer directement par des considérations très-simples : *l'enveloppe des bases de tous les triangles rectilignes qui ont l'angle du sommet commun et le même périmètre est une circonférence de cercle* (**).

(*) Ce théorème a été donné par M. Lhuilier, dans ses *Élémens d'analise géométrique et d'analise algébrique.*

(**) L'auteur du mémoire que nous venons d'extraire, et de plusieurs autres qu'il nous a promis de mettre successivement à notre disposition, ancien élève particulier de Lalande et de Delambre, et qui a concouru, durant plusieurs années, à la rédaction des volumes de la *Connaissance des temps*, joint à beaucoup de savoir en astronomie et à une grande dextérité à manier les formules trigonométriques, une écriture extrêmement lisible et agréable à l'œil, genre de mérite assez rare chez les savans. A ces divers titres, il pourrait être utilement employé soit au *Bureau des longitudes*, soit dans les *Bureaux du Cadastre*, soit encore comme

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur la détermination de l'aire d'un triangle rectiligne en fonction de ses trois côtés ;

Par M. G. C. Gerono.

Soient A, B, C les trois sommets d'un triangle rectiligne, et a, b, c les côtés respectivement opposés. Posons

$$\frac{1}{2}(a+b+c)=s\ ;$$

d'où

$$\frac{1}{2}(b+c-a)=s-a\ ,$$

Professeur de navigation dans l'un de nos ports ; et il languit, à l'âge de plus de 50 ans et chargé de famille, dans un emploi fort obscur et fort peu lucratif ; ce qui prouverait, si toutefois une telle assertion avait besoin de nouvelle preuve, qu'il faut souvent quelque chose de plus que du mérite pour percer dans le monde. Nous nous estimerions extrêmement heureux si, en faisant connaître, dans notre recueil, les titres de ce savant modeste, nous parvenions à attirer sur lui les regards et la bienveillance des hommes puissans qui sont en situation d'influer sur son sort.

$$\tfrac{1}{2}(c+a-b)=s-b\ ,$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b-c)=s-c\ .$$

Soit inscrit au triangle proposé un cercle dont O soit le centre ; et soient A′, B′, C′ respectivement les points de contact de ce cercle avec les côtés a, b, c ; il est connu, et il est d'ailleurs facile de démontrer qu'on aura

$$\mathrm{AB'}=s-a\ ,\qquad \mathrm{BC'}=s-b\ ,\qquad \mathrm{CA'}=s-c\ .$$

En conséquence, en désignant par r le rayon du cercle, on aura

$$\mathrm{Tang.AOB'}=\frac{s-a}{r}\ ,\qquad \mathrm{Tang.BOC'}=\frac{s-b}{r}\ ,\qquad \mathrm{Tang.COA'}=\frac{s-c}{r}\ ;$$

mais, parce que ces angles sont les moitiés respectives des angles B′OC′, C′OA′, A′OB′, dont la somme est quatre angles droits, leur somme doit valoir deux angles droits, et conséquemment on doit avoir, par un théorème connu et d'ailleurs facile à démontrer,

$$\mathrm{Tang.AOB'}+\mathrm{Tang.BOC'}+\mathrm{Tang.COA'}=\mathrm{Tang.AOB'.Tang.BOC'Tang.COA'}\ ;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$\frac{s-a}{r}+\frac{s-b}{r}+\frac{s-c}{r}=\frac{s-a}{r}\cdot\frac{s-b}{r},\frac{s-c}{r}\ ,$$

d'où

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\ ;$$

mais, en désignant par T l'aire du triangle, on a

$$\mathrm{T}=rs\ ;$$

donc, en substituant,

$$\mathrm{T}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

Agréez, etc.

Du Château des Tuileries, le 18 janvier 1825.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Trigonométrie sphérique.

I. QUEL est, sur la sphère, le lieu du sommet d'un angle sphérique mobile, de grandeur invariable, dont les côtés sont assujettis à passer constamment par les deux extrémités d'un arc de grand cercle fixe ?

II. Quelle est, sur la sphère, la courbe enveloppe d'un arc de grand cercle, de grandeur invariable, dont les extrémités sont assujetties à être constamment sur les côtés d'un angle sphérique fixe ?

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherches analitiques sur les polygones rectilignes plans ou gauches, renfermant la solution de plusieurs questions proposées dans le présent recueil;

Par M. Ch. Sturm.

Dans l'essai que l'on va lire, nous avons beaucoup moins en vue de découvrir des propriétés nouvelles des polygones plans ou gauches, que de montrer comment on peut, par une application convenable de l'analise, déduire, d'une manière uniforme, toutes les propriétés de ces polygones d'un petit nombre d'équations fondamentales. Ces propriétés sont en très-grand nombre sans doute, ou, pour mieux dire, leur nombre est illimité, et c'est assez faire comprendre que nous ne saurions nous proposer ici de les démontrer toutes; mais un petit nombre d'exemples bien choisis suffira pour montrer comment on doit se conduire dans les cas très-nombreux que le dessein d'abréger nous aura forcé d'omettre. La résolution générale des polygones plans, c'est-à-dire, l'art d'assigner les diverses parties inconnues de ces polygones en fonction des données nécessaires pour les déterminer devrait naturellement faire partie de notre travail; mais M. le professeur Lhuilier préparant dans ce moment un ouvrage où ce sujet doit être traité dans le plus grand détail, nous croyons superflu de nous y arrêter.

§. I.

Soit, dans l'espace, un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, de n côtés, dont nous nommerons les côtés consécutifs r_1, r_2, r_3, ... r_n. Concevons un système d'axes rectangulaires auquel ce polygone soit rapporté, et soient α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3; ...... α_n, β_n, γ_n les angles que forment respectivement ces côtés avec les axes des coordonnées. Soient enfin (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), ... (x_n, y_n, z_n), les sommets des angles (r_n, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), ... (r_{n-1}, r_n).

Par les principes connus, nous aurons cette suite d'équations

$$\left.\begin{array}{lll}
x_2=x_1+r_1\text{Cos.}\alpha_1\,, & y_2=y_1+r_1\text{Cos.}\beta_1\,, & z_2=z_1+r_1\text{Cos.}\gamma_1\,, \\
x_3=x_2+r_2\text{Cos.}\alpha_2\,, & y_3=y_2+r_2\text{Cos.}\beta_2\,, & z_3=z_2+r_2\text{Cos.}\gamma_2\,, \\
x_4=x_3+r_3\text{Cos.}\alpha_3\,, & y_4=y_3+r_3\text{Cos.}\beta_3\,, & z_4=z_3+r_3\text{Cos.}\gamma_3\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\
x_1=x_n+r_n\text{Cos.}\alpha_n\,; & y_1=y_n+r_n\text{Cos.}\beta_n\,; & z_1=z_n+r_n\text{Cos.}\gamma_n\,;
\end{array}\right\}\quad(1)$$

En prenant successivement les sommes d'équations de chacune des colonnes, on aura, sur-le-champ, par l'effet des réductions, les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
r_1\text{Cos.}\alpha_1+r_2\text{Cos.}\alpha_2+r_3\text{Cos.}\alpha_3+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}\alpha_n=0\,, \\
r_1\text{Cos.}\beta_1+r_2\text{Cos.}\beta_2+r_3\text{Cos.}\beta_3+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}\beta_n=0\,, \\
r_1\text{Cos.}\gamma_1+r_2\text{Cos.}\gamma_2+r_3\text{Cos.}\gamma_3+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}\gamma_n=0\,;
\end{array}\right\}\quad(2)$$

dont chacune exprime ce théorème connu : *Dans tout polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, la somme des produits respectifs des côtés par les cosinus tabulaires des angles que forment leurs* *directions avec celle d'une droite indéfinie quelconque est égale à zéro* ; ou, en d'autres termes, *Dans tout polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, la somme des projections des côtés sur une même droite indéfinie quelconque est égale à zéro.*

§. II.

Avant d'aller plus loin, nous tirerons des équations (2) quelques conséquences relatives à la statique.

Et d'abord : *Si des forces respectivement parallèles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, et proportionnelles aux longueurs de ces côtés, sont appliquées à un même point de l'espace, elles se feront équilibres.* En effet, si plusieurs forces proportionnelles aux longueurs r_1, r_2, r_3, ... r_n, et dont les directions sont déterminées par les angles α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2 ; α_3, β_3, γ_3 ; ...... α_n, β_n, γ_n, sont appliquées à un même point de l'espace, les conditions connues de leur équilibre ne seront autres que les équations (2).

Il résulte de ce théorème que, des forces d'intensité et de directions quelconques étant appliquées à un même point de l'espace, si l'on décrit, dans l'espace, un polygone ouvert dont les côtés soient respectivement parallèles et proportionnels à ces forces, la droite qui fermera le polygone sera parallèle et proportionnelle à leur résultante.

Et, comme les mêmes forces appliquées à un même point ne sauraient avoir qu'une seule et même résultante, dans quelque ordre d'ailleurs qu'on les combine, il faut en conclure que, si deux polygones ouverts ont un même nombre de côtés égaux et parallèles chacun à chacun ; dans quelque ordre d'ailleurs que se succèdent ces côtés, dans les deux polygones, les droites qui les formeront seront égales et parallèles.

On voit, par ce qui précède, que la plupart des théorèmes que nous démontrerons, sur les polygones rectilignes, pourront s'appliquer immédiatement à la composition et à la décomposition des forces autour d'un même point.

Par des points (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_n, b_n, c_n), pris à volonté dans l'espace, en nombre égal à celui des sommets du polygone, soient menées des droites respectivement parallèles et proportionnelles à ses côtés $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$. Soient (a'_1, b'_1, c'_1), (a'_2, b'_2, c'_2), ... (a'_n, b'_n, c'_n) les extrémités de ces droites; en représentant par λ le rapport donné, on aura

$$a'_1=a_1+\lambda r_1\,\text{Cos.}\alpha_1\ ,\quad b'_1=b_1+\lambda r_1\,\text{Cos.}\beta_1\ ,\quad c'_1=c_1+\lambda r_1\,\text{Cos.}\gamma_1\ ,$$

$$a'_2=a_2+\lambda r_2\,\text{Cos.}\alpha_2\ ,\quad b'_2=b_2+\lambda r_2\,\text{Cos}\,\beta_2\ ,\quad c'_2=c_2+\lambda r_2\,\text{Cos.}\gamma_2\ ,$$

$$a'_3=a_3+\lambda r_3\,\text{Cos.}\alpha_3\ ,\quad b'_3=b_3+\lambda r_3\,\text{Cos.}\beta_3\ ,\quad c'_3=c_3+\lambda r_3\,\text{Cos.}\gamma_3\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a'_n=a_n+\lambda r_n\,\text{Cos.}\alpha_n\ ;\quad b'_n=b_n+\lambda r_n\,\text{Cos}\,\beta_n\ ;\quad c'_n=c_n+\lambda r_n\,\text{Cos.}\gamma_n\ ;$$

d'où, en ajoutant les équations d'une même colonne et ayant égard aux équations (2),

$$a'_1+a'_2+a'_3+\ldots\ldots+a'_n=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n\ ,$$

$$b'_1+b'_2+b'_3+\ldots\ldots+b'_n=b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_n\ ,$$

$$c'_1+c'_2+c'_3+\ldots\ldots+c'_n=c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots+c_n\ .$$

Ces équations signifient que le centre commun de gravité des points (a'_1, b'_1, c'_1), (a'_2, b'_2, c'_2), ... (a'_n, b'_n, c'_n) coïncide avec celui des points (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_n, b_n, c_n).

Donc, *Si, par des points pris à volonté, dans l'espace, on mène des droites respectivement parallèles et proportionnelles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche; le centre de gravité d'un système de poids égaux sera le même,* *soit que ces poids se trouvent situés aux points où ces droites se terminent ou qu'on les place à leurs points de départ.*

En supposant que les points de départ sont pris respectivement sur les directions des côtés du polygone, on conclura de là que, *Si des poids égaux, placés d'abord arbitrairement sur les directions des côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, parcourent simultanément et dans le même sens, sur ces directions, des longueurs respectivement proportionnelles à celles de ces mêmes côtés ; leur centre commun de gravité demeurera immobile* (*).

Si l'on suppose, au contraire, que toutes ces droites émanent d'un même point quelconque de l'espace ; comme ce point sera à lui-même son centre de gravité, on conclura de la même proposition générale que, *Si, par un point quelconque de l'espace, on conduit des droites parallèles et proportionnelles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, ce point sera le centre commun de gravité d'un système de masses égales placées aux extrémités de ces droites.*

Cette dernière proposition, combinée avec la première du présent §., donne la suivante : *Un point autour duquel des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace se font équilibre est le centre commun de gravité de masses égales placées aux extrémités des droites qui, partant de ce point, représentent ces forces en intensité et en direction.*

Et comme, lorsque des forces ne se font pas équilibre autour d'un point, il suffit, pour établir l'équilibre dans le système, d'y introduire une force égale et directement opposée à leur résultante,

---

(*) C'est là l'un des deux théorèmes de statique énoncés à la page 391 du XIV.e volume des *Annales*, et déjà démontré à la page 129 du présent volume.

J. D. G.

il en faut conclure que, *Lorsque des forces agissent dans des directions quelconques sur un même point de l'espace*, 1.° *le centre des moyennes distances des extrémités des droites qui représentent ces forces en intensité et en direction est un point de la direction de leur résultante*; 2.° *cette résultante est représentée en intensité par autant de fois la distance de ce centre au point d'application des forces qu'il y a de composantes dans le système* (*).

Maintenant, par les mêmes points (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_n, b_n, c_n), menons encore des droites respectivement parallèles aux côtés du polygone, mais d'une même longueur quelconque k; en désignant leurs extrémités respectives par (a''_1, b''_1, c''_1), (a''_2, b''_2, c''_2), ... (a''_n, b''_n, c''_n), nous aurons

$$a''_1=a_1+k\mathrm{Cos}\,\alpha_1\,,\quad b''_1=b_1+k\mathrm{Cos}\,\beta_1\,,\quad c''_1=c_1+k\mathrm{Cos}.\gamma_1\,,$$

$$a''_2=a_2+k\mathrm{Cos}.\alpha_2\,,\quad b''_2=b_2+k\mathrm{Cos}.\beta_2\,,\quad c''_2=c_2+k\mathrm{Cos}\,\gamma_2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\,,\quad \ldots\ldots\ldots\,,\quad \ldots\ldots\ldots\,,$$

$$a''_n=a_n+k\mathrm{Cos}.\alpha_n\,;\quad b''_n=b_n+k\mathrm{Cos}.\beta_n\,;\quad c''_n=c_n+k\mathrm{Cos}\,\gamma_n\,.$$

Prenant successivement la somme des produits respectifs des équations de chaque colonne par r_1, r_2, ... r_n, en ayant égard aux équations (2), il viendra

---

(*) C'est le théorème énoncé à la page 272 du présent volume. M. Gerono remarque qu'il en résulte que, si plusieurs systèmes de forces, concourant en divers points de l'espace, sont composés de forces représentées en intensité et en direction par les distances de ces points à un certain nombre de points fixes, les résultantes de ces systèmes se croiseront toutes au centre des moyennes distances de ces derniers points.

Si l'on suppose ensuite que ces points de concours des composantes sont infiniment éloignés, on retombe sur le théorème relatif au *centre des forces parallèles*, du moins pour le cas où ces forces sont égales.

J. D. G.

$$a''_1r_1+a''_2r_2+a''_3r_3+\ldots+a''_nr_n=a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3+\ldots+a_nr_n\ ,$$

$$b''_1r_1+b''_2r_2+b''_3r_3+\ldots+b''_nr_n=b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3+\ldots+b_nr_n\ ,$$

$$c''_1r_1+c''_2r_2+c''_3r_3+\ldots+c''_nr_n=c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3+\ldots+c_nr_n\ ;$$

d'où on conclut ce théorème : *Si , par des points pris à volonté dans l'espace , on mène des droites d'une même longueur quelconque , respectivement parallèles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque , plan ou gauche , le centre de gravité d'un système de poids respectivement parallèle aux longueurs de ces côtés sera le même , soit que ces poids soient situés aux points où ces droites se terminent , ou qu'on les place à leurs points de départ.*

En supposant que les points de départ soient pris respectivement sur les directions des côtés du polygone , on conclura de là que , *Si des poids respectivement proportionnels aux longueurs des côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque , plan ou gauche , et placés arbitrairement sur les directions de ces côtés , y parcourent simultanément et dans le même sens des longueurs égales quelconques , leur centre commun de gravité demeurera immobile* (*).

Si l'on suppose , au contraire , que toutes ces droites émanent d'un même point quelconque de l'espace , comme ce point sera à lui-même son centre de gravité , on conclura de la même proposition générale que , *Si , dans une sphère , on mène des rayons parallèles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque , plan ou gauche , et qu'on place aux extrémités de ces rayons des poids respectivement proportionnels aux longueurs des côtés auxquels ils*

(*) C'est l'autre théorème de statique de l'endroit déjà cité.

J. D. G.

sont parallèles ; leur centre commun de gravité coïncidera avec le centre de la sphère.

§. III.

Si le polygone proposé se réduit à un triangle, les équations (2) se réduisent aux suivantes :

$$r_1\text{Cos.}\alpha_1+r_2\text{Cos.}\alpha_2+r_3\text{Cos.}\alpha_3=0\ ,$$

$$r_1\text{Cos.}\beta_1+r_2\text{Cos.}\beta_2+r_3\text{Cos.}\beta_3=0\ ,$$

$$r_1\text{Cos.}\gamma_1+r_2\text{Cos.}\gamma_2+r_3\text{Cos.}\gamma_3=0\ .$$

Transposant les derniers termes dans les seconds membres, prenant ensuite la somme des quarrés des équations résultantes, en se rappelant les relations connues

$$\text{Cos.}^2\alpha_1+\text{Cos.}^2\beta_1+\text{Cos.}^2\gamma_1=1\ ,$$

$$\text{Cos.}^2\alpha_2+\text{Cos.}^2\beta_2+\text{Cos.}^2\gamma_2=1\ ,$$

$$\text{Cos.}^2\alpha_3+\text{Cos.}^2\beta_3+\text{Cos.}^2\gamma_3=1\ ,$$

on obtient

$$r^2_3=r^2_1+r^2_2+2r_1r_2(\text{Cos.}\alpha_1\text{Cos}\,\alpha_2+\text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\beta_2+\text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\gamma_2)\ .$$

Mais, en supposant, pour un moment, que la droite r_1 est parallèle à l'axe des x, l'angle α_1 sera nul, et les angles β_1 et γ_1 seront droits, de sorte qu'on aura

$$\text{Cos.}\alpha_1=1\ ,\quad \text{Cos.}\beta_1=0\ ,\quad \text{Cos.}\gamma_1=0\ .$$

Quant à l'angle α_2, ce sera alors l'angle $(r_1\,,\,r_2)$ lui-même ; de sorte que l'on aura

$$r^2_3=r^2_1+r^2_2+2r_1r_2\text{Cos.}(r_1,r_2)\ ;$$

comparant cette dernière avec celle de laquelle elle est dérivée, on obtient la formule bien connue

$$\text{Cos.}(r_1\ ,\ r_2)=\text{Cos.}\alpha_1\text{Cos.}\alpha_2+\text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\beta_2+\text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\gamma_2\ ;$$

de laquelle on déduit ensuite aisément

$$\text{Sin.}^2(r_1,r_2)=\left\{\begin{array}{l}\quad(\text{Cos.}\alpha_1\text{Cos.}\beta_2-\text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\alpha_2)^2\\+(\text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\gamma_2-\text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\beta_2)^2\\+(\text{Cos.}\gamma_1\text{Cos}\,\alpha_2-\text{Cos.}\alpha_1\text{Cos.}\gamma_2)^2\end{array}\right\}.$$

L'équation

$$r^2_3=r^2_1+r^2_2+2r_1r_2\text{Cos.}(r_1\ ,\ r_2)$$

exprime aussi une proposition fondamentale de la trigonométrie rectiligne ; mais nous verrons bientôt qu'elle n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale.

Retournons présentement aux équations (2). En prenant la somme de leurs produits respectifs, d'abord par $\text{Cos.}\alpha_1$, $\text{Cos.}\beta_1$, $\text{Cos.}\gamma_1$, puis par $\text{Cos.}\alpha_2$, $\text{Cos}\,\beta_2$, $\text{Cos}\,\gamma_2$, et ainsi de suite, et enfin par $\text{Cos.}\alpha_n$, $\text{Cos.}\beta_n$, $\text{Cos.}\gamma_n$, observant que

$$\text{Cos.}^2\alpha_1+\text{Cos.}^2\beta_1+\text{Cos.}^2\gamma_1=1\ ,$$

$$\text{Cos.}^2\alpha_2+\text{Cos.}^2\beta_2+\text{Cos.}^2\gamma_2=1\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et que

$$\text{Cos.}\alpha_1\,\text{Cos.}\alpha_2+\text{Cos.}\beta_1\,\text{Cos.}\beta_2+\text{Cos.}\gamma_1\,\text{Cos.}\gamma_2=\text{Cos.}(r_1\,,r_2)\;,$$

$$\text{Cos.}\alpha_1\,\text{Cos.}\alpha_3+\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos.}\beta_3+\text{Cos.}\gamma_1\,\text{Cos.}\gamma_3=\text{Cos.}(r_1\,,r_3)\;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;,$$

il viendra

$$\left.\begin{array}{l}
r_1+r_2\text{Cos.}(r_1\,,r_2)+r_3\text{Cos.}(r_1\,,r_3)+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}(r_1\,,r_n)=0\;,\\
r_1\text{Cos.}(r_1\,,r_2)+r_2+r_3\text{Cos.}(r_2\,,r_3)+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}(r_2\,,r_n)=0\;,\\
r_1\text{Cos.}(r_1\,,r_3)+r_2\text{Cos.}(r_2\,,r_3)+r_3+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}(r_3\,,r_n)=0\;,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_1\text{Cos.}(r_1\,,r_n)+r_2\text{Cos.}(r_2\,,r_n)+r_3\text{Cos.}(r_3\,,r_n)+\ldots+r_n=0\;.
\end{array}\right\}(3)$$

On parviendrait également à ces équations, en supposant successivement, dans les équations (2), que chacune des droites r_1, r_2, r_3,.... r_n devient, à son tour, parallèle à l'axe des x. Elles se traduisent dans l'énoncé que voici : *Dans tout polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, chaque côté est égal à la somme des produits de tous les autres par les cosinus des angles que forment leurs directions avec la sienne.*

Si l'on prend la somme des quarrés des équations (2), il vient, en faisant les réductions convenables,

$$r^2_1+r^2_2+r^2_3+..+r^2_n+2r_1r_2\text{Cos.}(r_1,r_2)+2r_1r_3\text{Cos.}(r_1,r_3)+2r_2r_3\text{Cos.}(r_2,r_3)+..=0\;(4)$$

c'est-à-dire, *La somme des quarrés des côtés d'un polygone rectiligne quelconque, plan ou gauche, augmentée des doubles produits de ces côtés deux à deux, multipliés par les cosinus des angles que forment entre elles leurs directions, est égale à zéro.*

Si l'on prend de nouveau la somme des quarrés des équations

(2), mais après avoir préalablement transporté leurs premiers termes dans le second membre, il viendra, par l'effet de semblables réductions,

$$r_1^2=r^2_2+r^2_3+\ldots+r^2_n+2r_2r_3\,\text{Cos.}(r_2,r_3)+2r_2r_4\,\text{Cos.}(r_2,r_4)+2r_3r_4\,\text{Cos.}(r_3,r_4)+\ldots=0\,(s)$$

donc, *Dans tout polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, le quarré de l'un quelconque des côtés est égal à la somme des quarrés de tous les autres augmentée de la somme des doubles produits de ces derniers deux à deux multipliés par les cosinus des angles que forment entre elles leurs directions.* Ce théorème fait en même temps connaître l'intensité de la résultante de plusieurs forces données d'intensité et de direction autour d'un même point de l'espace.

Si, au lieu de transposer seulement les premiers termes des équations (2), on y transpose un même nombre quelconque de termes correspondans, et qu'on prenne ensuite la somme des quarrés des équations résultantes, en y faisant toujours les mêmes réductions, on obtiendra cette autre proposition : *La somme des quarrés d'un certain nombre de côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, augmentée des doubles produits de ces côtés deux à deux multipliés par les cosinus des angles qu'ils comprennent entre eux, est égale à la somme des quarrés des côtés restans augmentée des produits de ces derniers deux à deux multipliés par les cosinus des angles qu'ils comprennent entre eux.*

Si l'on désigne par Π le périmètre du polygone, on aura

$$\Pi=r_1+r_2+r_3+\ldots\ldots\ldots+r_n\,,$$

d'où, en quarrant,

$$\Pi^2=r^2_1+r^2_2+r^2_3+\ldots\ldots+r^2_n+2r_1r_2+2r_1r_3+2r_2r_3+\ldots\ldots\,;$$

mais nous avons trouvé plus haut

$$0=r^2_1+r^2_2+r^2_3+\ldots+r^2_n+2r_1r_2\,\text{Cos.}(r_1,r_2)+2r_1r_3\,\text{Cos.}(r_1,r_3)+2r_1r_3\,\text{Cos.}(r_2,r_3)+\ldots;$$

retranchant cette dernière de la précédente, nous aurons, en nous rappelant qu'en général $1-\text{Cos.}x=2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}x$,

$$\Pi^2=4\{r_1r_2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(r_1,r_2)+r_1r_3\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(r_1,r_3)+r_2r_3\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(r_2,r_3)+\ldots\}.$$

Ainsi, *Le quarré du demi-périmètre d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, est égal à la somme des produits de ses côtés deux à deux multipliés par les quarrés des sinus des moitiés des angles que comprennent entre elles leurs directions.*

§. IV.

Posons généralement, pour abréger,

$$x^m{}_1+x^m{}_2+x^m{}_3+\ldots\ldots+x^m{}_n=\text{X}_m,$$

$$y^m{}_1+y^m{}_2+y^m{}_3+\ldots\ldots+y^m{}_n=\text{Y}_m,$$

$$z^m{}_1+z^m{}_2+z^m{}_3+\ldots\ldots+z^m{}_n=\text{Z}_m.$$

Le quarré de la distance entre deux sommets quelconques est

$$(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2+(z_p-z_q)^2;$$

ou, en développant,

$$(x^2{}_p+y^2{}_p+z^2{}_p)-2(x_px_q+y_py_q+z_pz_q)+(x^2{}_q+y^2{}_q+z^2{}_q).$$

Si l'on veut avoir la somme des quarrés des distances du sommet (x_p, y_p, z_p) à tous les autres, il faudra prendre la somme des résultats qu'on obtient en mettant dans cette formule pour q tous les nombres naturels de 1 à n inclusivement. Il ne sera pas même nécessaire d'en excepter le nombre p puisque la distance d'un sommet à lui-même est nulle. On obtiendra ainsi, pour la somme de ces quarrés, à l'aide des notations ci-dessus,

$$n(x^2_p+y^2_p+z^2_p)-2(X_1x_p+Y_1y_p+Z_1z_p)+(X_2+Y_2+Z_2)\ .$$

Si présentement on veut avoir la somme des quarrés de toutes les droites, soit côtés, soit diagonales, qui joignent les sommets deux à deux, lesquelles sont au nombre de $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$, il ne s'agira que de prendre la demi-somme des résultats qu'on déduit de cette dernière formule en y mettant successivement pour p tous les nombres naturels de 1 à n inclusivement. Nous disons la demi-somme, parce que menant, tour à tour, des droites de chaque sommet à tous les autres, chaque droite se trouve menée deux fois. On aura ainsi, pour la somme des quarrés de toutes ces droites,

$$n(X_2+Y_2+Z_2)-(X^2_1+Y^2_1+Z^2_1)\ .$$

Cherchons ensuite la somme des quarrés des longueurs des droites qui joignent deux à deux les milieux tant des côtés que des diagonales. Nous venons déjà de remarquer que le nombre tant des côtés que des diagonales était $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$, et leurs milieux sont en même nombre. Si donc on représente respectivement par X'_1, Y'_1, Z'_1 les sommes des premières puissances des coordonnées de ces milieux parallèles à chaque axe, et par X'_2, Y'_2, Z'_2 les sommes des quarrés de ces mêmes coordonnées; en posant $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}=n'$, on aura, pour la somme des quarrés des droites dont il s'agit, d'après la précédente formule,

$$n'(X'_2+Y'_2+Z'_2)-(X'^2_1+Y'^2_1+Z'^2_1)\ ;$$

Cela posé, 1.° comme la coordonnée parallèle aux x du milieu de la droite qui joint deux sommets quelconques est $\frac{x_p+x_q}{2}$, nous aurons

$$X'_1=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\ldots\ldots+\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\ .$$

$$+\frac{x_1+x_3}{2}+\frac{x_2+x_4}{2}+\ldots\ldots+\frac{x_{n-2}+x_n}{2}$$

$$+\frac{x_1+x_4}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x_3+x_n}{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x_1+x_n}{2}\ .$$

Ces termes sont au nombre de $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$; et, comme il entre deux de nos n sortes de lettres dans chacun, il s'ensuit qu'ils se composent de $n(n-1)$ lettres; et comme il est d'ailleurs manifeste que chacune des n sortes de lettres y figure de la même manière, il s'ensuit que chaque sorte de lettre y figure $n-1$ fois; de sorte qu'on doit avoir

$$X'_1=\frac{(n-1)(x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n)}{2}=\frac{n-1}{2}\cdot X_1\ ;$$

et par conséquent

$$X'^2_1=\frac{(n-1)^2}{4}\cdot X_1^2\ .$$

On aura semblablement

$$Y'^2_1=\frac{(n-1)^2}{4}\cdot Y^2_1\ ,\qquad Z'^2_1=\frac{(n-1)^2}{4}\cdot Z^2_1\ ;$$

et, par suite,

$$X'^2_1+Y'^2_1+Z'^2_1=\frac{(n-1)^2}{4}(X^2_1+Y^2_1+Z^2_1).$$

2.° On aura, par les mêmes considérations,

$$\begin{aligned}X'_2=&\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)^2\\&+\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{x_{n-2}+x_n}{2}\right)^2\\&+\left(\frac{x_1+x_4}{2}\right)^2+\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{x_3+x_n}{2}\right)^2\\&+\ldots\ldots\ldots\\&+\left(\frac{x_1+x_n}{2}\right)^2\end{aligned}$$

En faisant, pour un moment, abstraction des doubles produits qui naîtront du développement des quarrés, nous nous trouverons dans le même cas que ci-dessus avec cette seule différence que les quarrés des coordonnées x_1, x_2, ... x_n se trouveront substitués à leurs premières puissances, et que le dénominateur commun sera 4; de sorte qu'il y a d'abord, dans le développement de X'_2,

$$\frac{n-1}{4}(x^2_1+x^2_2+x^2_3+\ldots\ldots+x^2_n)=\frac{n-1}{4}X_2.$$

Mais il s'y trouve de plus

$$\frac{x_1x_2}{2}+\frac{x_2x_3}{2}+\frac{x_3x_4}{2}+\ldots\ldots+\frac{x_{n-1}x_n}{2};$$

$$+\frac{x_1x_3}{2}+\frac{x_2x_4}{2}+\ldots\ldots+\frac{x_{n-2}x_n}{2}$$

$$+\frac{x_1x_4}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x_3x_n}{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x_1x_1}{2}$$

c'est tout simplement la demi-somme des produits deux à deux des coordonnées x_1, x_2, x_3, ... x_n. Or, on a

$$X^2_1=(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2=(x^2_1+x^2_2\, x^2_3+\ldots+x^2_n)+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots);$$

c'est-à-dire,

$$X^2_1=X_2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots\ldots);$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots\ldots\ldots)=\frac{X_1^2-X_2}{4};$$

ajoutant donc cette quantité à celle que nous avons déjà obtenue ci-dessus, nous aurons

$$X'_2=\frac{n-1}{4}X_2+\frac{X_1^2-X_2}{4},$$

ou, en réduisant,

$$X'_2=\frac{X_1^2}{4}+\frac{n-2}{4}X_2.$$

On aura semblablement

$$Y'_2=\frac{Y_1^2}{4}+\frac{n-2}{4}Y_2\,, \qquad Z'_2=\frac{Z_1^2}{4}+\frac{n-2}{4}Z_2\,,$$

et par suite

$$X'_2+Y'_2+Z'_2=\frac{X^2_1+Y^2_1+Z^2_1}{4}+\frac{n-2}{4}(X_2+Y_2+Z_2)\ :$$

Nous avons trouvé tout à l'heure pour la somme des quarrés des droites qui joignent deux à deux les milieux tant des côtés que des diagonales

$$n'(X'_2+Y'_2+Z'_2)-(X'^2_1+Y'^2_1+Z'^2_1)\ ;$$

mais nous venons de trouver

$$X'_2+Y'_2+Z'_2=\tfrac{1}{4}\{(n-2)(X_2+Y_2+Z_2)+(X^2_1+Y^2_1+Z^2_1)\}\,,$$

$$X'^2_1+Y'^2_1+Z'^2_1=\tfrac{1}{4}(n-1)^2(X^2_1+Y^2_1+Z^2_1)\ ,$$

nous avons d'ailleurs $n'=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$; en substituant donc, nous trouverons pour cette somme de quarrés

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\{n(X_2+Y_2+Z_2)-(X^2_1+Y^2_1+Z^2_1)\}\ ;$$

mais nous avons trouvé ci-dessus, pour la somme des quarrés tant des côtés que des diagonales,

$$n(X_2+Y_2+Z_2)-(X^2_1+Y^2_1+Z^2_1)\ ;$$

donc, en désignant par S_1 cette dernière somme et par S_2 l'autre, nous aurons

$$4S_2=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}S_1\ .$$

Or, si l'on considère que, dans le présent §., les sommets ne se trouvent assujettis à aucun ordre de succession déterminé, on verra que l'équation que nous venons d'obtenir revient au théorème suivant : *Des points, en nombre quelconque, étant situés d'une manière quelconque dans l'espace, si l'on joint ces points deux à deux par des droites, de toutes les manières possibles, puis les milieux de ces droites deux à deux par d'autres droites, de toutes les manières possibles, le quadruple de la somme des quarrés de ces dernières droites sera égal à autant de fois la somme des quarrés des premières qu'un nombre de choses inférieur d'une unité à celui des points dont il s'agit peut donner de combinaisons deux à deux* (*).

§. V.

Présentement, soit éliminé le côté r_1 entre les équations (2), prises deux à deux, il viendra

$$\left.\begin{aligned}
&r_2(\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2)+r_3(\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_3-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_3)+\ldots=0\,,\\
&r_2(\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\alpha_2-\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}\,\gamma_2)+r_3(\text{Cos}.\gamma_1\,\text{Cos}.\alpha_3-\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\gamma_3)+\ldots=0\,,\\
&r_2(\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\beta_2-\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\alpha_2)+r_3(\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\,\beta_3-\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\,\alpha_3)+\ldots=0\,.
\end{aligned}\right\}\ (6)$$

(*) C'est le théorème de la page 272 du présent volume. M. Gerono, en nous l'adressant, en a pris occasion de relever une méprise de Carnot qui, dans sa *Géométrie de position*, page 331, a énoncé ce théorème, sous le n.° XXXI, d'une manière défectueuse.

J. D. G.

Afin d'évaluer la quantité $\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\gamma_2-\mathrm{Cos}.\gamma_1\mathrm{Cos}.\beta_2$ et ses analogues, soient menées, par un point quelconque de l'espace, des parallèles aux côtés r_1, r_2, r_3,......r_n du polygone ; la première fera, avec toutes les autres, des angles (r_1,r_2), r_1,r_3,.....(r_1,r_n). Soient élevées, par le même point, aux plans de ces divers angles, des perpendiculaires que nous désignerons respectivement par r_1r_2, r_1r_3,...... r_1r_n ; en représentant les angles que forment ces perpendiculaires avec les axes des coordonnées par

$$\begin{array}{ccc}(r_1r_2\,,x)\,, & (r_1r_2\,,y)\,, & (r_1r_2\,,z)\,,\\ (r_1r_3\,,x)\,, & (r_1r_3\,,y)\,, & (r_1r_3\,,z)\,,\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\,,\\ (r_1r_n\,,x)\,, & (r_1r_n\,,y)\,, & (r_1r_n\,,z)\,.\end{array}$$

Cela posé, soient, pour un moment, a, b, c les cosinus des angles $(r_1r_2\,,x)$, $(r_1r_2\,,y)$, $(r_1r_2\,,z)$ que fait avec les axes la perpendiculaire r_1r_2 au plan de l'angle (r_1r_2), construite comme il vient d'être dit. Comme elle est perpendiculaire, à la fois aux directions des deux droites r_1, r_2, on aura, par les conditions connues de perpendicularité,

$$a\mathrm{Cos}.\alpha_1+b\mathrm{Cos}.\beta_1+c\mathrm{Cos}.\gamma_1=0\,,$$
$$a\mathrm{Cos}.\alpha_2+b\mathrm{Cos}.\beta_2+c\mathrm{Cos}.\gamma_2=0\,;$$

d'où on tire

$$b=a.\frac{\mathrm{Cos}.\gamma_1\mathrm{Cos}.\alpha_2-\mathrm{Cos}.\alpha_1\mathrm{Cos}.\gamma_2}{\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\gamma_2-\mathrm{Cos}.\gamma_1\mathrm{Cos}.\beta_2}\,,\quad c=a.\frac{\mathrm{Cos}.\alpha_1\mathrm{Cos}.\beta_2-\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\alpha_2}{\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\gamma_2-\mathrm{Cos}.\gamma_1\mathrm{Cos}.\beta_2}\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation de condition

$$a^2+b^2+c^2=1\,,$$

on trouvera

$$(\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2)^2=a^2\left\{\begin{array}{l}(\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2)^2\\+(\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\alpha_2-\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.x_2)^2\\+(\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\beta_2-\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2)^2\end{array}\right\};$$

or, le multiplicateur de a^2, dans le second membre (§. III) n'est autre chose que $\text{Sin}.^2(r_1\,,\,r_2)$, d'où il suit qu'on aura, en extrayant la racine quarrée,

$$\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2=\pm a\text{Sin}.(r_1\,,r_2)=\pm\text{Sin}.(r_1,r_2)\text{Cos}.(r_1\,,r_2\,,\,x).$$

Les signes $+$ et $-$ étant ici arbitraires, nous ferons choix du signe $+$, et nous aurons, en formant les équations analogues,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2=\text{Sin}.(r_1\,,\,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\,,\,x)\;,\\\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}\,\alpha_2-\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\gamma_2=\text{Sin}.(r_1\,,\,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\,,\,y)\;,\\\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\beta_2-\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\alpha_2=\text{Sin}.(r_1\,,\,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\,,\,z)\;.\end{array}\right\}\;(7)$$

Substituant ces valeurs et les autres que nous obtiendrions de même forme, par un semblable calcul, dans les équations (6), elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l}r_2\text{Sin}.(r_1\,,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\,,\,x)+r_3\text{Sin}.(r_1,\,r_3)\text{Cos}.(r_1r_3\,,\,x)+\ldots\ldots=0\;,\\r_2\text{Sin}.(r_1\,,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\,,\,y)+r_3\text{Sin}.(r_1,\,r_3)\text{Cos}.(r_1r_3\,,\,y)+\ldots\ldots=0\;,\\r_2\text{Sin}.(r_1\,,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\,,\,z)+r_3\text{Sin}.(r_1,\,r_3)\text{Cos}.(r_1r_3\,,\,z)+\ldots\ldots=0\;.\end{array}\right\}\;(8)$$

Ces équations (8) étant de même forme que les équations (2), nous pourrons opérer sur elles de la même manière. Pour pouvoir noter les résultats de ces opérations, nous représenterons simplement par $(r_1r_2\,,r_1r_3)$ l'angle que forment entre elles les perpendiculaires aux plans des deux angles $(r_1\,,\,r_2)$, $(r_1\,,r_3)$, et ainsi de suite pour les autres. Ces angles sont la mesure des angles dièdres formés par les plans de ces mêmes angles, et qui peuvent s'étendre de zéro à quatre droites ; attendu qu'on doit les compter invariablement, en partant de l'un quelconque des angles plans dont il s'agit, et en tournant constamment dans le même sens, jusqu'à ce qu'en passant par tous les autres on y soit revenu de nouveau. Tout cela admis, les équations (8) donneront d'abord (3)

$$\left.\begin{array}{l}
r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_3)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.})r_1r_2,r_1r_4)+..=0,\\
r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_3)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(r_1r_3,r_1r_4)+..=0,\\
r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_4)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(r_1r_3,r_1r_4)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)+..=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(9)$$

On aura, en second lieu, (4)

$$\left.\begin{array}{l}
0=r^2{}_2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_2)+r^2{}_3\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_3)+r^2{}_4\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_4)+\ldots+r^2{}_n\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_n)\\
\qquad+2r_2r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_3)+\ldots
\end{array}\right\}(10)$$

On aura enfin (5)

$$\left.\begin{array}{l}
r^2{}_2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_2)=r^2{}_3\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_3)+r^2{}_4\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_4)+\ldots\ldots+r^2{}_n\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_4)\\
\qquad+2r_3r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(r_1r_3,r_1r_4)+\ldots
\end{array}\right\}(11)$$

Soient désignées, pour un moment, par p_2, p_3, ... p_n, les perpendiculaires aux plans des angles (r_1, r_2), (r_1, r_3), ...(r_1, r_n), dont il a été question ci-dessus ; les deux premières équations (8) pourront être écrites ainsi

$$r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Cos.}(p_2,x)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(p_3,x)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(p_4,x)+..=0,$$

$$r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Cos.}(p_2,y)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(p_3,y)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(p_4,y)+..=0.$$

Si, du produit de la première par Cos.(p_2, y), on retranche le produit de la seconde par Cos.(p_2, x), afin d'éliminer r_2 entre elles, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} r_3\text{Sin.}(r_1,r_3)([\text{Cos.}(p_3,x)\text{Cos.}(p_2,y)-\text{Cos.}(p_2,x)\text{Cos.}(p_3,y)] \\ +r_4\text{Sin.}(r_1,r_4)([\text{Cos.}(p_4,x)\text{Cos.}(p_2,y)-\text{Cos.}(p_2,x)\text{Cos}(p_4,y)] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=0.$$

Or, les formules (7) donnent

$$\text{Cos.}(p_3,x)\text{Cos.}(p_2,y)-\text{Cos.}(p_2,x)\text{Cos.}(p_3,y)=\text{Sin.}(p_2,p_3)\text{Cos.}(p_2p_3,z),$$

$$\text{Cos.}(p_4,y)\text{Cos.}(p_2,y)-\text{Cos.}(p_2,x)\text{Cos.}(p_4,y)=\text{Sin.}(p_2,p_4)\text{Cos.}(p_2p_4,z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on a d'ailleurs, par la définition même des lignes p_2, p_3, ..p_n,

$$(r_1,z)=(p_2p_3,z)=(p_2p_4,z)=\ldots\ldots$$

et, en outre,

$$\text{Sin}(p_2,p_3)=\text{Sin.}(r_1r_2,r_1r_3),\ \text{Sin.}(p_2,p_4)=\text{Sin.}(r_1r_2,r_1r_4),\ldots.$$

au moyen de quoi l'équation ci-dessus deviendra, en divisant par Cos.(r_1, z),

$$r_3\text{Sin.}(r_1,r_3)\text{Sin.}(r_1r_2,r_1r_3)+r_4\text{Sin.}(r_1,r_4)\text{Sin.}(r_1r_2,r_1r_4)+\ldots=0. \quad (12)$$

Comme cette dernière équation, et toutes les autres qu'on en pourrait déduire, ne renferment plus rien de relatif aux axes des coordonnées, elles ne sauraient être susceptibles de transformations ultérieures.

§. VI.

Après nous être occupés d'un polygone rectiligne quelconque, occupons-nous, en particulier, du quadrilatère gauche, dont la théorie se lie à celle des coordonnées obliques.

Soient, dans l'espace, trois axes obliques, donnés de position, et un point quelconque, rapporté à ces axes, par les trois coordonnées x, y, z. Soit r la distance de ce point à l'origine, laquelle est la diagonale d'un parallélipipède obliquangle, ayant x, y, z pour les trois arêtes d'un même angle. Trois arêtes consécutives de ce parallélipipède forment avec cette diagonale r, un quadrilatère gauche, auquel nous pouvons appliquer les formules générales trouvées précédemment. Nous conviendrons seulement de changer la direction de son côté r, c'est-à-dire que nous considérerons la diagonale comme allant de l'origine au point (x, y, z); en conséquence, il faudra, dans toutes nos formules, changer $\text{Cos.}(r, x)$, $\text{Cos.}(r, y)$, $\text{Cos.}(r, z)$ en $-\text{Cos}(r, x)$, $-\text{Cos.}(r, y)$, $-\text{Cos.}(r, z)$.

Cela posé, r' étant une droite de direction arbitraire, les équations (2) donnent d'abord

$$r\text{Cos.}(r, r') = x\text{Cos.}(x, r') + y\text{Cos.}(y, r') + z\text{Cos.}(z, r') \,. \quad (13)$$

On tire ensuite des équations (3)

$$\left.\begin{aligned} r &= x\text{Cos.}(r, x) + y\text{Cos.}(r, y) + z\text{Cos.}(r, z)\,, \\ r\text{Cos}(r, x) &= x + y\text{Cos.}(x, y) + z\text{Cos.}(x, z)\,, \\ r\text{Cos.}(r, y) &= x\text{Cos.}(x, y) + y + z\text{Cos.}(y, z)\,, \\ r\text{Cos.}(r, z) &= x\text{Cos.}(x, z) + y\text{Cos.}(y, z) + z\,. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Si l'on met, dans la première des équations (14), les valeurs de x, y, z tirées des trois autres, on parviendra à l'équation de relation connue entre les six angles que forment deux à deux dans l'espace quatre droites r, x, y, z de direction arbitraire. Cette équation est

$$1-\text{Cos.}^2(y,z)-\text{Cos.}^2(z,x)-\text{Cos.}^2(x,y)+2\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Cos.}^2(r,x)\text{Sin.}(y,z)-2\text{Cos.}(r,y)\text{Cos.}(r,z)[\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(z,x)]\\+\text{Cos.}^2(r,y)\text{Sin.}^2(z,x)-2\text{Cos.}(r,z)\text{Cos.}(r,x)[\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(x,y)]\\+\text{Cos.}^2(r,z)\text{Sin.}^2(x,y)-2\text{Cos.}(r,x)\text{Cos.}(r,y)[\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(y,z)]\end{array}\right\}.\quad(15)$$

Soient α, β, γ les angles dièdres adjacens à l'une des faces d'un tétraèdre et α', β', γ' les angles dièdres respectivement opposés. Si, d'un point pris dans l'intérieur du tétraèdre on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses quatre faces, ces perpendiculaires formeront deux à deux six angles qui auront entre eux la relation ci-dessus ; mais ces angles seront les supplémens respectifs des six angles dièdres du tétraèdre, d'où il suit que ces derniers auront entre eux la relation suivante :

$$1-\text{Cos.}^2\alpha'-\text{Cos.}^2\beta'-\text{Cos.}^2\gamma'-2\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'\text{Cos.}\gamma'$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Cos.}^2\alpha\text{Sin.}^2\alpha'+2(\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos}\,\beta'\text{Cos.}\gamma')\text{Cos}\,\beta\text{Cos.}\gamma\\+\text{Cos}^2\beta\text{Sin.}^2\beta'+2(\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\gamma'\text{Cos.}\alpha')\text{Cos.}\gamma\,\text{Cos.}\alpha\\+\text{Cos.}^2\gamma\text{Sin.}^2\gamma'+2(\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}\alpha'\text{Cos}\,\beta')\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\end{array}\right\};$$

et la première des deux questions proposées à la page 396 du XIII.e volume des *Annales*, consisterait à déduire de cette équation une relation entre les angles α, β, γ, α', β', γ' eux-mêmes ; mais peut-être parviendrait-on plus aisément au but à l'aide d'un procédé analogue à ceux qui ont été mis en usage dans l'article de la page 271 du tome IX.

Les formules (4) donnent

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2yz\text{Cos.}(y,z)+2zx\text{Cos.}(z,x)+2xy\text{Cos.}(x,y)\;;\qquad(16)$$

c'est-à-dire que : *Le quarré de la diagonale d'un parallèlipipède* *est égal à la somme des quarrés des trois arêtes qui partent de l'une de ses extrémités, augmentée des doubles produits de ces arêtes deux à deux, multipliés par les cosinus des angles que comprennent leurs directions.*

En vertu des équations (9), on a

$$r^2\text{Sin.}^2(r,x)=y^2\text{Sin.}^2(x,y)+z^2\text{Sin.}^2(x,z)+2xy\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.}(x,z)\text{Cos.}(xy,xz) ;$$

mais en quarrant la seconde des équations (14) on a

$$r^2\text{Cos.}^2(r,x)=x^2+y^2\text{Cos.}^2(x,y)+z^2\text{Cos.}^2(x,z)+2xy\text{Cos.}(x,y)$$
$$+2xz\text{Cos.}(x,z)+2yz\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(x,z) ;$$

ajoutant cette équation à la précédente, il viendra

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2xy\text{Cos.}(x,y)+2xz\text{Cos.}(x,z)$$
$$+2yz\{\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.}(x,z)\text{Cos.}(xy,xz)+\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(x,z)\} ;$$

en égalant cette valeur de r^2 à celle qui est donnée par la formule (16), on aura

$$\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.}(x,z)\text{Cos.}(xy,xz)=\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(x,z) ; \quad (17)$$

équation que l'on reconnaîtra pour l'équation fondamentale de la trigonométrie sphérique.

En vertu des équations (9), on a

$$x\text{Sin.}(z, x)\text{Sin.}(zx, rz)=y\text{Sin.}(y, z)\text{Sin.}(yz, rz) ,$$
$$y\text{Sin.}(x, y)\text{Sin.}(xy, rx)=z\text{Sin.}(z, x)\text{Sin.}(xy, rx) ;$$
$$z\text{Sin.}(y, z)\text{Sin.}(yz, ry)=x\text{Sin.}(x, y)\text{Sin.}(xy, ry) ;$$

donc, en multipliant

$$\text{Sin.}(zx\,,\,rz)\text{Sin.}(xy\,,\,rx)\text{Sin.}(yz\,,\,ry)=\text{Sin.}(yz\,,\,rz)\text{Sin.}(zx\,,\,rx)\text{Sin.}(xy\,,\,ry)\,.$$

On peut, dans l'équation (13) faire disparaître, de trois manières, deux des termes du second membre, en y supposant nulles deux des quantités Cos.$(x\,,\,r')$, Cos.$(y\,,\,r')$, Cos.$(z\,,\,r')$; la droite r', dabord de direction indéterminée, devient alors perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, ce qui donne

$$r\text{Cos.}(r,yz)=x\text{Cos.}(x,yz)\,,\; r\text{Cos.}(r,zx)=y\text{Cos.}(y,zx)\,,\; r\text{Cos.}(r,xy)=z\text{Cos.}(z,xy). \quad (18)$$

En substituant les valeurs de x, y, z qui en résultent dans les équations trouvées ci-dessus, on obtiendra diverses formules indépendantes des longueurs des droites r, x, y, z et relatives seulement à leur direction ; les principales sont

$$1=\frac{\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos}(x,yz)}\text{Cos.}(r,x)+\frac{\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(y,zx)}\text{Cos}(r,y)+\frac{\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(z,xy)}\text{Cos.}(r,z)\,,$$

$$\text{Cos.}(r,x)-\frac{\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos.}(x,yz)}=\frac{\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(y,zx)}\text{Cos.}(x,y)+\frac{\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(z,xy)}\text{Cos.}(z,x)\,;$$

$$\text{Cos.}(r,y)-\frac{\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(y,zx)}=\frac{\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(z,xy)}\text{Cos.}(y,z)+\frac{\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos.}(x,yz)}\text{Cos.}(x,y)\,,$$

$$\text{Cos.}(r,z)-\frac{\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(z,xy)}=\frac{\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos.}(x,yz)}\text{Cos.}(z,x)+\frac{\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(y,zx)}\text{Cos.}(y.z)\,.$$

$$1=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\text{Cos.}^2(r,yz)}{\text{Cos.}^2(x,yz)}+2\dfrac{\text{Cos.}(r,zx)\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(y,zx)\text{Cos.}(z,xy)}\text{Cos.}(y,z)\\[2ex]
+\dfrac{\text{Cos.}^2(r,zx)}{\text{Cos.}^2(y,zx)}+2\dfrac{\text{Cos.}(r,xy)\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos.}(z,xy)\text{Cos.}(x,yz)}\text{Cos.}(z,x)\\[2ex]
+\dfrac{\text{Cos.}^2(r,xy)}{\text{Cos.}^2(z,xy)}+2\dfrac{\text{Cos.}(r,yz)\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(x,yz)\text{Cos.}(y,zx)}\text{Cos.}(x,y)
\end{array}\right\}$$

Soit encore une droite r', menée, dans une direction quelconque, par l'origine des axes obliques, et soit (x', y', z') son extrémité ; l'équation (13), multipliée par r', donnera

$$rr'\text{Cos.}(r, r') = r'x\text{Cos.}(r', x) + r'y\text{Cos.}(r', y) + r'z\text{Cos.}(r', z) ;$$

mais les trois dernières équations (14) donnent

$$r'\text{Cos.}(r', x) = x' + y'\text{Cos.}(x, y) + z'\text{Cos.}(z, x) ,$$
$$r'\text{Cos.}(r', y) = y' + z'\text{Cos.}(y, z) + x'\text{Cos.}(x, y) ,$$
$$r'\text{Cos.}(r', z) = z' + x'\text{Cos.}(z, x) + y'\text{Cos.}(y, z) ;$$

mettant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$rr'\text{Cos.}(r, r') = \left\{\begin{array}{r} xx' + (yz' + zy')\text{Cos.}(y, z) \\ + yy' + (zx' + xz')\text{Cos}(z, x) \\ + zz' + (xy' + yx')\text{Cos.}(x, y) \end{array}\right\} .$$

En substituant aux rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, $\frac{x'}{r}$. $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$, leurs valeurs angulaires, données par les équations (18), cette formule donnera le cosinus de l'angle de deux droites, rapportées à des coordonnées obliques.

§. VII.

Les formules relatives à la transformation des coordonnées se déduisent de l'équation (13) de la manière la plus simple.

Soient, en effet dans l'espace, deux systèmes d'axes obliques ayant la même origine ; soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées d'un même point quelconque, dans les deux systèmes, et soit r la distance de ce point à l'origine. Si p désigne une autre droite de direction arbitraire menée par cette origine, l'équation (13) donnera

$$r\text{Cos.}(r\,,p)=x\,\text{Cos.}(x\,,p)+y\,\text{Cos.}(y\,,p)+z\,\text{Cos.}(z\,,p)\;,$$

$$r\text{Cos.}(r\,,p)=x'\text{Cos.}(x'\,,p)+y'\,\text{Cos.}(y'\,,p)+z'\text{Cos.}(z'\,,p)\;;$$

et conséquemment

$$x\text{Cos.}(x,p)+y\text{Cos.}(y,p)+z\text{Cos.}(z,p)=x'\text{Cos.}(x',p)+y'\text{Cos.}(y',p)+z'\text{Cos.}(z',p). \quad (19)$$

Nous ferons disparaître deux termes de cette dernière équation, en posant

$$\text{Cos.}(y\,,p)=0\;,\quad \text{Cos.}(z\,,p)=0\;;$$

alors la droite p sera perpendiculaire au plan des yz. Désignant alors par $(x\,,\,yz)$, $(x'\,,yz)$, les angles que fait cette droite avec les axes des x et des x', et employant des notations analogues pour les autres angles du même genre, l'équation (19) deviendra

$$x\text{Cos.}(x,yz)=x'\text{Cos.}(x'yz)+y'\text{Cos.}(y',yz)+z'\text{Cos.}(z',yz)\;; \quad (20)$$

et, comme on pourrait appliquer le même raisonnement à chacun des autres axes, on aura, pour les formules générales de la transformation des coordonnées,

$$\left.\begin{aligned}x\text{Cos.}(x,yz)&=x'\text{Cos.}(x',yz)+y'\text{Cos.}(y',yz)+z'\text{Cos.}(z'yz)\;,\\ y\text{Cos.}(y,zx)&=y'\text{Cos.}(y',zx)+z'\text{Cos.}(z',zx)+x'\text{Cos.}(x',zx)\;,\\ z\text{Cos.}(z,xy)&=z'\text{Cos.}(z',xy)+x'\text{Cos.}(x'xy)+y'\text{Cos.}(y',xy)\;.\end{aligned}\right\}(21)$$

On obtient par les mêmes moyens, les formules réciproques,

$$\left.\begin{aligned}x'\text{Cos.}(x',y'z')&=x\text{Cos.}(x,y'z')+y\text{Cos.}(y,y'z')+z\text{Cos.}(z,y'z')\,,\\ y'\text{Cos.}(y',z'x')&=y\text{Cos.}(y,x'x')+z\text{Cos.}(z,z'x')+x\text{Cos.}(x,z'x')\,,\\ z'\text{Cos.}(z',x'y')&=z\text{Cos.}(z,x'y')+x\text{Cos.}(x,x'y')+y\text{Cos}(y,x'y')\,.\end{aligned}\right\}(22)$$

Ces équations sont celles qui résolvent le problème général de la transformation des coordonnées. Les neuf coefficiens qui entrent dans leurs seconds membres sont, en vertu de l'équation (15), liés par trois conditions, de manière que six seulement d'entre eux sont nécessaires et indépendans.

Lorsque les axes primitifs des x, y, z sont rectangulaires, les équations (21) se simplifient et deviennent

$$x = x'\text{Cos.}(x',x) + x'\text{Cos.}(y',x) + z'(z',x) \,,$$

$$y = y'\text{Cos.}(y',y) + z'\text{Cos.}(z',y) + x'(x',y) \,,$$

$$z = z'\text{Cos.}(z',z) + x'\text{Cos.}(x',z) + y'(y',z) \,;$$

et les trois équations de relation dont il vient d'être question ci-dessus

$$\text{Cos.}^2(x',x) + \text{Cos.}^2(x'y) + \text{Cos.}^2(x',z) = 1 \,,$$

$$\text{Cos.}^2(y',y) + \text{Cos.}^2(y',z) + \text{Cos.}^2(y',x) = 1 \,,$$

$$\text{Cos.}^2(z',z) + \text{Cos.}^2(z',x) + \text{Cos.}^2(z',y) = 1 \,.$$

Supposons de nouveau les deux systèmes de coordonnées obliques; mais admettons que les axes des x', y', z' soient respectivement perpendiculaires aux plans des yz, zx, xy, alors les axes des x, y, z seront, à l'inverse, respectivement perpendiculaires aux plans des $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$, en introduisant ces conditions dans les équations (21) et (22), en posant, pour abréger,

$$\text{Cos.}(y,z) = a \,,\qquad \text{Cos.}(zx,xy) = a' \,,\qquad \text{Cos.}(x,yz) = \text{A} \,,$$

$$\text{Cos.}(z,x) = b \,,\qquad \text{Cos.}(xy,yz) = b' \,,\qquad \text{Cos.}(y,zx) = \text{B} \,,$$

$$\text{Cos.}(x,y) = c \,,\qquad \text{Cos.}(yz,zx) = c' \,,\qquad \text{Cos.}(z,xy) = \text{C} \,.$$

Ces équations deviendront

$$\left.\begin{array}{l}Ax=x'+c'y'+b'z' \,, \\ By=y'+a'z'+c'x' \,, \\ Cz=z'+b'x'+a'y' \,;\end{array}\right\} (23) \qquad \left.\begin{array}{l}Ax'=x+cy+bz \,, \\ By'=y+az+cx \,, \\ Cz'=z+bx+ay \,.\end{array}\right\} (24)$$

Si l'on résout les équations (24) par rapport à x, y, z, en multipliant respectivement les résultats par A, B, C, et posant, pour abréger,

$$k^2=1-a^2-b^2-c^2+2abc \,,$$

on trouvera

$$Ax=\frac{1}{k^2}\left\{A^2(1-a^2)x'+AB(ab-c)y'+CA(ca-b)z'\right\}$$

$$By=\frac{1}{k^2}\left\{B^2(1-b^2)y'+BC(bc-a)z'+AB(ab-c)x'\right\}$$

$$Cz=\frac{1}{k^2}\left\{C^2(1-c^2)z'+CA(ca-b)x'+BC(bc-a)y'\right\}$$

comparant ces dernières équations aux équations (23), on aura, à cause de l'identité qui doit évidemment exister entre leurs seconds membres,

$$\left.\begin{array}{ll}A^2(1-a^2)=k^2 \,, & BC(bc-a)=a'k^2 \,, \\ B^2(1-b^2)=k^2 \,, & CA(ca-b)=b'k^2 \,, \\ C^2(1-c^2)=k^2 \,, & AB(ab-c)=c'k^2 \,.\end{array}\right\} (25)$$

Il est manifeste que si l'on eût opéré d'abord sur les équations (23) pour comparer ensuite les résultats aux équations (24); en posant, pour abréger,

$$k'^2=1-a'^2-b'^2-c'^2+2a'b'c' \,,$$

on aurait eu

$$\left.\begin{array}{ll} A^2(1-a'^2)=k'^2\ , & BC(b'c'-a')=ak^2\ , \\ B^2(1-b'^2)=k'^2\ , & CA(c'a'-b')=bk^2\ , \\ C^2(1-c'^2)=k'^2\ ; & AB(a'b'-c')=ck^2\ . \end{array}\right\}(26)$$

Equations dont le système équivaut évidemment à celui des premières.

Les axes des x, y, z sont les arêtes d'un angle trièdre dont les angles plans sont (x, y), (y, z), (z, x); et dont nous désignerons les angles dièdres respectivement opposés par X, Y, Z. On peut supposer que les perpendiculaires élevées aux faces de cet angle trièdre, sont tellement dirigées que les angles qu'elles font avec les arêtes opposées n'excèdent pas l'angle droit; alors les cosinus A, B, C de ces angles sont positifs, et les équations de gauche (25) et (26) donnent

$$\begin{array}{ll} A\sqrt{1-a^2}=k\ , & A\sqrt{1-a'^2}=k'\ , \\ B\sqrt{1-b^2}=k\ , & B\sqrt{1-b'^2}=k'\ , \\ C\sqrt{1-c^2}=k\ , & C\sqrt{1-c'^2}=k'\ ; \end{array}$$

d'où, par division

$$\frac{k}{k'}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a'^2}}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-b'^2}}=\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c'^2}}\ .$$

Si l'on compare les produits deux à deux des trois premières, puis des trois dernières, avec les équations de droite (25) et (26), on aura

$$\begin{array}{ll} bc-a=\sqrt{1-b^2}.\sqrt{1-c^2}.a'\ , & b'c'-a'=\sqrt{1-b'^2}.\sqrt{1-c'^2}.a\ , \\ ca-b=\sqrt{1-c^2}.\sqrt{1-a^2}.b'\ , & c'a'-b'=\sqrt{1-c'^2}.\sqrt{1-a'^2}.b\ , \\ ab-c=\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-b^2}.c'\ , & a'b'-c'=\sqrt{1-a'^2}.\sqrt{1-b'^2}.c\ . \end{array}$$

Maintenant, les angles que font entre elles les perpendiculaires aux plans des faces de l'angle trièdre, et dont les cosinus sont a', b', c', peuvent être égaux aux angles dièdres X, Y, Z ou bien en être les supplémens. La question se décide par l'examen d'un cas particulier. Quand les angles plans zx, xy sont droits, ce qui rend b et c nuls, l'angle (y, z) ne diffère pas de l'angle dièdre X, et l'on a $a=\text{Cos.X}$; mais nos formules donnent, en même temps $-a=a'$, donc $a'=-\text{Cos.X}$; d'où l'on conclut qu'en général a', b', c' sont les cosinus des supplémens des angles dièdres X, Y, Z. Quant à A, B, C, ce sont visiblement les sinus des angles que font les arêtes avec les faces opposées, angles que, pour abréger, nous dénoterons simplement par X′, Y′, Z′. Désignant en outre, pour abréger, x, y, z, respectivement, les angles (y, z), (z, x), (x, y); les formules ci-dessus deviendront

$$\text{Sin.}x\text{Sin.X}'=\text{Sin.}y\text{Sin.Y}'=\text{Sin.}z\text{Sin.Z}'=k\ ,$$

$$\text{Sin.XSin.X}'=\text{Sin.YSin.Y}'=\text{Sin.ZSin.Z}'=k'\ ;$$

$$\frac{\text{Sin.}x}{\text{Sin.X}}=\frac{\text{Sin.}y}{\text{Sin.Y}}=\frac{\text{Sin.}z}{\text{Sin.Z}}=\frac{k}{k'}\ ,$$

$$\text{Sin.}y\text{Sin.}z\text{Cos.X}=\text{Cos.}x-\text{Cos.}y\text{Cos.}z\ ,\qquad \text{Sin.YSin.ZCos.}x=\text{Cos.X}+\text{Cos.YCos.Z}\ ,$$

$$\text{Sin.}z\text{Sin.}x\text{Cos.Y}=\text{Cos.}y-\text{Cos.}z\text{Cos.}x\ ,\qquad \text{Sin.ZSin.XCos.}y=\text{Cos.Y}+\text{Cos.ZCos.X}\ ,$$

$$\text{Sin}x\text{Sin.}y\text{Cos.Z}=\text{Cos.}z-\text{Cos.}x\text{Cos.}y\ ,\qquad \text{Sin.XSin.YCos.}z=\text{Cos.Z}+\text{Cos.XCosY}\ .$$

Nous retrouvons donc ainsi l'ensemble des formules de la trigonométrie sphérique.

Le volume P du parallélipipède construit sur les grandeurs et directions des coordonnées x, y, z, est égal à l'aire de la face qui renferme les coordonnées x et y multipliée par la perpendiculaire abaissée sur le plan de cette face de l'extrémité de l'arête z qui lui est opposée. Or, l'aire de cette face est $xy\text{Sin.}(x, y)$, et la perpendiculaire a pour expression $z\text{Cos.}(z, xy)$ ou $z\text{Sin.Z}'$; donc

$$\text{P}=xyz\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.Z}'\ ;$$

mais nous avons trouvé

$$\mathrm{Sin.}(y,z)\mathrm{Sin.}Z'=k=\sqrt{1-\mathrm{Cos.}^2(x,y)-\mathrm{Cos.}^2(y,z)-\mathrm{Cos.}^2(z,x)+2\mathrm{Cos.}(x,y)\mathrm{Cos}(y,z)\mathrm{Cos.}(z,x)}\ ;$$

donc finalement

$$P=xyz\sqrt{1-\mathrm{Cos.}^2(x,y)-\mathrm{Cos.}^2(y,z)-\mathrm{Cos.}^2(z,x)+2\mathrm{Cos.}(x,y)\mathrm{Cos.}(y,z)\mathrm{Cos.}(z,x)}\ .$$

§. VIII.

La formule (13) va nous conduire à l'équation du plan. En désignant, en effet, par p la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur un plan donné de position, (x, y, z) représentant un point quelconque de ce plan, et r la distance du même point à l'origine, on aura par l'équation (13)

$$r\mathrm{Cos.}(r,p)=x\mathrm{Cos.}(x,p)+y\mathrm{Cos.}(y,p)+z\mathrm{Cos.}(z.p)\ .$$

Or $r\mathrm{Cos}(r, p)$ n'est autre chose que la perpendiculaire p ; donc

$$x\mathrm{Cos.}(x,p)+y\mathrm{Cos.}(y,p)+z\mathrm{Cos.}(z,p)=p\ . \qquad (27)$$

Telle est donc sous une forme très-simple l'équation entre les trois coordonnées de l'un quelconque des points d'un plan donné. On doit remarquer, au surplus, que les trois coëfficiens du premier membre sont liés entre eux par l'équation (15) qui, lorsque les axes sont rectangulaires, se réduit à

$$\mathrm{Cos.}^2(x,p)+\mathrm{Cos.}^2(y,p)+\mathrm{Cos.}^2(z,p)=1\ .$$

Dans la même hypothèse, si

$$Ax+By+Cz=D$$

représente l'équation d'un plan, on aura

$$\mathrm{Cos.}(x,p)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \mathrm{Cos.}(y,p)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \mathrm{Cos.}(z,p)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,$$

$$p=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

Soit (x', y', z') un point quelconque de l'espace, et soit P la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan (27) ; si, par le point (x', y', z') on conçoit un plan parallèle à celui-là, son équation sera de la forme

$$x\mathrm{Cos.}(x, p)+y\mathrm{Cos.}(y, p)+z\mathrm{Cos.}(z, p)=p' ; \qquad (28)$$

et conséquemment on devra avoir

$$x'\mathrm{Cos.}(x, p)+y'\mathrm{Cos.}(y, p)+z'\mathrm{Cos.}(z, p)=p' ;$$

or, la perpendiculaire P est visiblement égale à la différence des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les deux plans parallèles (27) et (28) ; donc suivant que le plan (27) sera ou ne sera pas situé entre l'origine et le point (x', y', z'), on aura

$$\pm\mathrm{P}=p'-p=x'\mathrm{Cos.}(x,p)+y'\mathrm{Cos.}(y,p)+z'\mathrm{Cos.}(z,p)-p . \quad (29)$$

D'après les formules déterminées ci-dessus, on voit que, si l'équation proposée était de la forme

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z=\mathrm{D} ,$$

on aurait alors

$$\mathrm{P}=\pm\frac{\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{C}z'-\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}} ;$$

formule connue.

Soit un second plan

$$\mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'z=\mathrm{D}' ;$$

l'angle des deux plans sera égal à (p, p'), p' étant ici la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le second plan ; or, on a (§. VI)

$$\mathrm{Cos.}(p,p')=\mathrm{Cos.}(x,p)\mathrm{Cos.}(x,p')+\mathrm{Cos.}(y,p)\mathrm{Cos.}(y,p')+\mathrm{Cos.}(z,p)\mathrm{Cos}(z,p') ;$$

donc

$$\mathrm{Cos.}(p, p')=\frac{\mathrm{AA}'+\mathrm{BB}'+\mathrm{CC}'}{\sqrt{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)(\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2+\mathrm{B}'^2)}} ;$$

formule également connue.

§. IX.

Nous terminerons par la recherche des relations entre les aires des faces d'un polyèdre et les angles dièdres qu'elles déterminent par leur rencontre.

Soient t_1, t_2, t_3, ... t_n les aires de ces faces. Rapportons le polyèdre à des axes rectangulaires ayant leur origine dans son intérieur ; et soient p_1, p_2, p_3, ... p_n les perpendiculaires abaissées de cette origine sur les plans de ses faces, et allant conséquemment du dedans au dehors. Soient encore α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2 ;....., α_n, β_n, γ_n les angles que font ces mêmes perpendiculaires avec les trois faces.

Si l'on considère un autre point (x, y, z), pris dans l'intérieur du polyèdre, comme le sommet commun d'une suite de pyramides ayant ses faces pour bases, leurs hauteurs seront (29)

$$\begin{array}{l}
p_1-x\mathrm{Cos}.\alpha_1-y\mathrm{Cos}.\beta_1-z\mathrm{Cos}.\gamma_1 \;, \\
p_2-x\mathrm{Cos}.\alpha_2-y\mathrm{Cos}.\beta_2-z\mathrm{Cos}.\gamma_2 \;, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;, \\
p_n-x\mathrm{Cos}.\alpha_n-y\mathrm{Cos}.\beta_n-z\mathrm{Cos}.\gamma_n \;;
\end{array}$$

de sorte qu'en désignant par P le volume de tout le polyèdre, égal à la somme des volumes de ces pyramides, on aura

$$3\mathrm{P}=\left\{\begin{array}{l}
t_1(p_1-x\mathrm{Cos}.\alpha_1-y\,\mathrm{Cos}.\beta_1-z\mathrm{Cos}.\gamma_1) \\
+t_2(p_2-x\mathrm{Cos}.\alpha_2-y\mathrm{Cos}.\beta_2-z\mathrm{Cos}.\gamma_2) \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+t_n(p_n-x\mathrm{Cos}.\alpha_3-y\mathrm{Cos}.\beta_n-z\mathrm{Cos}.\gamma_n)
\end{array}\right\};$$

ou bien

$$3\mathrm{P}=t_1p_1+t_2p_2+\ldots\ldots+t_np_n-\left\{\begin{array}{l}
x(t_1\mathrm{Cos}.\alpha_1+t_2\mathrm{Cos}.\alpha_2+\ldots\ldots t_n\mathrm{Cos}.\alpha_n) \\
+y(t_1\mathrm{Cos}.\beta_1+t_2\mathrm{Cos}.\beta_2+\ldots\ldots t_n\mathrm{Cos}.\beta_n) \\
+z(t_1\mathrm{Cos}.\gamma_1+t_2\mathrm{Cos}.\gamma_2+\ldots\ldots t_n\mathrm{Cos}.\gamma_n)
\end{array}\right\};$$

et, comme on a aussi

$$3\mathrm{P}=t_1p_1+t_2p_2+\ldots\ldots+t_np_n \;,$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{l} x(t_1\text{Cos.}\alpha_1+t_2\text{Cos.}\alpha_2+\ldots\ldots\, t_n\text{Cos.}\alpha_n) \\ +y(t_1\text{Cos.}\beta_1+t_2\text{Cos}\,\beta_2+\ldots\ldots\, t_n\text{Cos.}\beta_n) \\ +z(t_1\text{Cos.}\gamma_1+t_2\,\text{Cos.}\gamma_2+\ldots\ldots\, t_n\text{Cos.}\gamma_n) \end{array}\right\}=0\,;$$

et, comme x, y, z sont tout à fait arbitraires et indépendans, cette équation équivaut aux trois suivantes

$$t_1\text{Cos.}\alpha_1+t_2\text{Cos.}\alpha_2+t_3\text{Cos.}\alpha_3+\ldots\ldots\, t_n\text{Cos.}\alpha_n=0\,,$$

$$t_1\text{Cos.}\beta_1+t_2\text{Cos.}\beta_2+t_3\text{Cos.}\beta_3+\ldots\ldots\, t_n\text{Cos.}\beta_n=0\,,$$

$$t_1\text{Cos.}\gamma_1+t_2\text{Cos}\,\gamma_2+t_3\text{Cos.}\gamma_3+\ldots\ldots\, t_n\text{Cos.}\gamma_n=0\,;$$

équations absolument de même forme que les équations (2), relatives aux polygones rectilignes fermés, plans ou gauches, de sorte que toutes les propositions que nous en avons déduites pour ces polygones s'appliquent sans restrictions aucunes, aux polyèdres, pourvu que l'on substitue les aires des faces aux longueurs des côtés et les directions des perpendiculaires à ces faces à celles de ces mêmes côtés ; et c'est assez dire que nous ne devons pas insister davantage sur ce sujet.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de Géométrie.

Une circonférence dont le rayon est r étant divisée en n parties égales, et m étant un nombre plus petit que n, la somme des $(2m)^{\text{mes}}$ puissances des droites menées aux points de division, d'un point quelconque du plan du cercle, éloigné de son centre d'une quantité k a pour expression

$$n\left\{\left(r^m\right)^2+\left(\frac{m}{1}kr^{m-1}\right)^2+\left(\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^{m-2}\right)^2+\left(\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}k^3r^{m-3}\right)^2+\ldots\ldots\right\}.$$

OPTIQUE.

Recherches d'analise sur les caustiques planes ;

Par M. GERGONNE.

LES travaux des Bernouilli, de la Hire et de l'Hopital sur les caustiques semblaient en avoir épuisé la théorie, et elles étaient, en effet, tombées dans une sorte d'oubli, depuis près d'un siècle, lorsque les belles recherches de Malus ramenèrent, à l'envi, l'attention des géomètres vers ces courbes qui jouent un rôle si important dans les phénomènes de la vision, dont la génération est si facile à concevoir, et qui pourtant se montrent quelquefois si réfractaires à l'action du calcul.

Déjà Petit avait donné, dans le II.e volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique* (pag. 354), une méthode très-élégante pour construire par points la caustique, soit par réflexion soit par réfraction, relative au cercle, et par suite à la sphère, lorsque, dans le V.e volume du présent recueil (pag. 283), je m'occupai de ramener à la théorie des caustiques de phénomène des images multiples, auquel donne naissance une glace étamée ou non étamée, à faces parallèles. J'insinuai dès lors (pag. 289), qu'il se pourrait bien que *les caustiques*, d'une figure si compliquée pour l'ordinaire, ne fussent que les *développées d'autres courbes beaucoup plus simples*. Dans le XI.e volume (pag. 229), je déterminai la nature de la caustique formée par les rayons émanés de l'un des points d'un milieu homogène, après avoir pénétré dans un autre milieu homogène, séparé de celui-là par un plan, et je prouvai que cette caustique était, dans tous les cas, la développée d'une section conique. Revenant ensuite de nouveau, dans le XIV.e volume (pag. 1), sur les lentilles planes, à faces parallèles, je prouvai, contre l'opinion commune, et toujours par la considération des caustiques, que ces sortes de lentilles partagent avec les lentilles convexes la faculté amplificative.

Dans le même temps M. Dupin venait de faire paraître ses *Applications de géométrie*, dans lesquelles il donnait une extension importante à la théorie dont Malus avait posé les premières bases; je prouvai, à ce sujet, dans le même volume (pag. 129), que la recherche de la caustique produite par un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, à la rencontre de surfaces quelconques, pouvait toujours être réduite à celle de la caustique produite soit par la réflexion soit par la réfraction, à la rencontre d'une surface unique, ou encore à la recherche de la développée d'une surface déterminée.

J'étais, depuis quelque temps, en possession de l'équation de la caustique par réflexion sur le cercle, et par suite sur la sphère, qui n'avait encore été donnée par personne; mais je l'avais obtenu par des calculs trop prolixes et sous une forme trop peu élégante pour songer à la publier, lorsque j'appris, par les journaux, que M. le professeur Auguste de Larive, de Genève, venait de publier un mémoire dans lequel, disait-on, il s'occupait de la recherche de cette même caustique, non seulement pour le cas de la réflexion, mais pour le cas, incomparablement plus difficile, de la réfraction, lequel renferme l'autre, comme cas particulier. Quelle que fût mon impatience de connaître le mémoire de M. de Larive, il ne me parvint qu'assez tard. Je me hâtai de le parcourir, j'y rencontrai beaucoup de choses fort intéressantes; mais je n'y trouvai point l'équation annoncée. Rebuté sans doute par la complication des calculs, l'auteur avait pris le parti de recourir à des approximations, ressource très-utile sans doute pour les applications pratiques, mais dont l'emploi laissait tout à fait entière la question spéculative que j'avais en vue.

C'est fort peu de temps après que m'est parvenu le mémoire de M. Sturm, inséré dans le présent volume (pag. 205), et dans lequel il démontre que *la caustique, soit par réfraction soit par réflexion, relative au cercle, est constamment la développée d'une courbe telle que la somme ou la différence des produits qu'on obtient en multipliant les distances de ses points au point rayonnant et à son conjugué, par rapport au cercle, pris pour foyers, par des nombres constans, est égale à une longueur constante*. On voit que M. Sturm est entré dans la bonne voie, dans celle que j'avais indiquée il y a déjà plusieurs années, et qui consiste à chercher, au lieu de la caustique, la courbe dont elle est la développée.

Je me proposais de profiter du premier moment de loisir que je rencontrerais pour chercher de nouveau, à l'aide des résultats obtenus par M. Sturm, la caustique par réflexion relative au cercle, espérant l'obtenir ainsi par un calcul plus simple et sous une forme plus concise, lorsque j'ai reçu, avec une lettre de M. Quetelet, professeur d'astronomie et de physique au muséum de Bruxelles, les cinq premières feuilles imprimées du III.e volume des *Mémoires de l'académie royale des sciences* de la même ville, contenant le commencement d'un mémoire de ce géomètre sur une nouvelle manière d'envisager la génération des caustiques planes, soit par réflexion soit par réfraction. Par sa lettre d'envoi, M. Quetelet déclare qu'il est depuis trois ans en possession des idées qui forment le fond de son mémoire ; il se plaît à reconnaître que les conseils que M. Lacroix a bien voulu lui donner, il y a déjà plus d'un an, n'ont pas peu contribué à en améliorer les détails ; il ajoute enfin que, frappé des nombreux points de ressemblance qui existent entre les résultats obtenus par M. Sturm et les siens, il n'a pu, avant même l'impression terminée, résister à l'envie de m'adresser les quarante premières pages de son mémoire, afin de me mettre en situation de juger par moi-même de cette ressemblance.

M. Quetelet est parvenu en effet, pour la caustique relative au cercle, à des conclusions pareilles à celles de M. Sturm ; mais ce qu'il dit de cette courbe n'est qu'une application particulière de deux principes très-élégans sur les caustiques planes en général, et qu'il énonce en ces termes :

I. *La caustique par réflexion pour une courbe plane quelconque, et pour un point rayonnant, situé d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui, ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, passent par le point rayonnant.*

II. *La caustique par réfraction, pour une courbe plane quelconque, et pour un point rayonnant situé d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice des deux milieux, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres au point rayonnant dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.*

On doit remarquer, au surplus, que ces deux principes n'en font proprement qu'un seul, attendu que le premier se déduit du second, en supposant, dans celui-ci, que le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence est égal à *moins un*. C'est ainsi qu'en ont usé constamment M. de Larive et M. Sturm, et que j'en ai usé moi-même dans le deuxième article du tom. XIV, rappelé au commencement de celui-ci.

M. Sarrus se trouvait momentanément à Montpellier, lorsque je reçus la lettre et le commencement du mémoire de M. Quetelet. Il m'observa que les deux principes de ce géomètre pouvaient être déduit, *à priori*, de la théorie des ondulations. Ayant fait remarquer ensuite à M. Sarrus que malheureusement ces deux principes se trouvaient illusoires, dans le cas des rayons incidens parallèles ; après un moment de réflexion, et en s'aidant toujours de la théorie des ondulations et de celles des courbes parallèles, données par M. Crelle, au commencement du XII.^{e} volume du présent recueil, M. Sarrus me dit qu'alors sans doute ces principes devaient être remplacés par les deux suivans; ce qu'une analise rigoureuse a complètement justifié.

I. *La caustique par réflexion, pour une courbe plane quelconque, et pour des rayons incidens parallèles entre eux dirigés d'une manière quelconque, dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe réfléchissante et qui sont tangens à une perpendiculaire menée arbitrairement à la direction commune des rayons incidens.*

II. *La caustique par réfraction, pour une courbe plane quelconque et pour des rayons incidens parallèles entre eux, dirigés d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice des deux milieux, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à une perpendiculaire menée arbitrairement à la direction commune des rayons incidens, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.*

Depuis le départ de M. Sarrus, j'ai pensé qu'il serait plus simple et plus élégant de n'avoir, s'il était possible, qu'un principe unique qui pût se plier indistinctement au cas où les rayons incidens partent d'un point voisin et à celui où ces rayons sont parallèles; et, après quelques recherches, je suis parvenu aux deux principes que voici.

I. *La caustique par réflexion, pour une courbe plane quelconque, et pour un point rayonnant situé d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui, ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, sont tangens à un même cercle, décrit du point rayonnant comme centre, avec un rayon quelconque.*

II. *La caustique par réfraction, pour une courbe plane quel-*

conque, et pour un point rayonnant situé d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice des deux milieux, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à une circonférence décrite du point rayonnant comme centre, avec un rayon quelconque, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

On voit que, si, dans ces deux théorèmes, on suppose le rayon arbitraire nul, on retombe sur ceux de M. Quetelet, et que, si, au contraire, en supposant le point rayonnant infiniment éloigné, on suppose ce rayon infini, on obtient ceux de M. Sarrus. On doit remarquer aussi que, dans l'application du premier de ces deux principes, les cercles dont on cherche l'enveloppe peuvent indistinctement toucher extérieurement le cercle arbitraire qui a son centre au point rayonnant, ou bien l'envelopper ou encore en être eux-mêmes enveloppés, si la courbe réflechissante coupe ce dernier cercle. Pareillement, dans l'application de l'autre principe, on peut prendre pour distance des centres des cercles dont on cherche l'enveloppe au cercle arbitraire qui a son centre au point rayonnant, leur plus courte ou leur plus longue distance à ce cercle. L'essentiel est seulement que les cercles dont on cherche l'enveloppe se trouvent tous dans les mêmes circonstances par rapport à celui-là.

Ces deux principes sont également précieux sous le point de vue analitique et sous le point de vue graphique. Sous le premier de ces deux points de vue, en effet, ils semblent offrir le procédé le plus simple et le plus naturel qu'on puisse employer pour parvenir à l'équation de la caustique. Sous le second, il présente toutes les facilités qu'on peut désirer pour en tracer le cours. En traçant, en effet, un assez grand nombre de cercles dont on cherche l'enveloppe, pour que ces cercles se trouvent fort rapprochés les uns des autres, l'enveloppe s'offrira pour ainsi dire d'elle-même dans leurs intersections consécutives. En outre, à raison de l'indétermination du rayon du cercle qui a son centre au point rayonnant, on pourra se procurer plusieurs enveloppes ; et dès lors il deviendra facile de leur mener à vue des normales communes, dont les intersections consécutives dessineront la caustique cherchée.

J'allais livrer tout ceci à l'impression, lorsque j'ai réfléchi que, si ces principes suffisaient pour des rayons qui subissent une réflexion ou une réfraction unique, il n'en était plus ainsi pour ceux qui subissent plusieurs réflexions ou réfractions consécutives, ou qui subissent alternativement des réflexions et des réfractions, dans un ordre quelconque ; attendu que, dès la seconde réflexion ou réfraction, les rayons incidens cessent de partir d'un même point ou d'être parallèles, mais sont simplement tangens à une même caustique ou normaux à une même enveloppe. J'ai donc pensé que, pour ne plus rien laisser à dire sur ce sujet, il fallait établir des principes relatifs à la caustique qui doit répondre à des rayons incidens normaux à une même courbe plane, réfléchis ou réfractés à leur rencontre avec une autre courbe plane, située dans un même plan avec celle-là ; et, au point où j'en étais parvenu, il ne m'a pas été difficile, avant même toute démonstration, de deviner les deux théorèmes suivans qui, pour parler le langage des adeptes de la philosophie de Konigsberg, sont à l'égard des caustiques planes, d'une généralité *absolue*.

THÉORÈME I. La caustique par réflexion, pour une courbe plane réfléchissante quelconque, et pour des rayons incidens normaux à une autre courbe plane aussi quelconque, située dans un même plan avec celle-là, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui, ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, sont tangens à la courbe à laquelle tous les rayons incidens sont normaux.

THÉORÈME II. La caustique par réfraction, pour une courbe plane quelconque, séparatrice de deux milieux, et pour des rayons incidens normaux à une autre courbe aussi quelconque, située dans un même plan avec celle-là, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice, et dont *les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à la courbe à laquelle tous les rayons incidens sont normaux, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.*

Les deux précédens principes, que j'ai montré renfermer, comme cas particulier, ceux de M. Quetelet et ceux de M. Sturm, ne sont eux-mêmes que des cas particuliers de ces deux théorèmes; on les en déduit, en effet, en supposant simplement que la courbe à laquelle tous les rayons incidens sont normaux est la circonférence d'un cercle ou une ligne droite, qui n'est elle-même qu'un cercle dont le rayon est infini. Et comme, d'un autre côté, le *Théorème II* renferme implicitement le *Théorème I*, de la même manière que le deuxième principe de M. Quetelet ou celui de M. Sarrus renferme implicitement le premier, il s'ensuit que ce *Théorème II* est à lui seul l'expression générale de toute la théorie des caustiques planes.

On voit que des rayons lumineux, émanés d'un point, après avoir subi une première réflexion ou une première réfraction, deviendront normaux à une première enveloppe; qu'après avoir été de nouveau réfléchis ou réfractés, ils deviendront normaux à une seconde enveloppe, et ainsi du reste; et la développée de la dernière enveloppe sera la caustique à laquelle ces rayons, successivement réfléchis ou réfractés, donneront naissance.

Ainsi se trouve pleinement confirmée, pour les caustiques planes, la conjecture que j'avais hasardée, il y a déjà dix ans; on voit, en effet, que, de quelque manière que ces courbes soient engendrées, elles sont toujours des développées d'enveloppes d'une suite de cercles, c'est-à-dire, des developpées de courbes qui sont d'ordinaire d'une nature assez simple.

M. Quetelet a déduit la démonstration de ses deux principes, par la géométrie descriptive, de la considération des surfaces de révolution. Faute des figures, qui ne me sont point encore parvenues, je n'ai pu suivre qu'assez imparfaitement les raisonnemens de l'auteur; mais il me paraît qu'il serait assez facile de les remplacer par des considérations puisées dans la géométrie plane la plus élémentaire. Peut-être même ne serait-il pas impossible de ramener à cette même géométrie la démonstration de deux théorèmes, beaucoup plus généraux, par lesquels je viens de les remplacer. Cependant, pour la satisfaction de ceux d'entre les lecteurs qui comme moi peuvent éprouver quelque gêne à promener alternativement leurs regards d'un texte sur une figure et d'une figure sur un texte, j'ai pensé qu'il valait mieux recourir à l'usage du calcul; d'autant que, comme on le verra tout à l'heure, il n'est pas nécessaire ici d'en faire une très-grande dépense.

Le calcul peut, en cette rencontre, être employé de deux manières différentes. On peut supposer le théorème connu, et employer le calcul à en démontrer l'exactitude: c'est la marche synthétique que l'on persiste encore aujourd'hui à suivre dans les traités de géométrie élémentaire. On peut, au contraire, supposer le théorème tout à fait inconnu, et montrer comment le calcul aurait pu y conduire depuis long-temps, si nous étions plus adroits à le manier; c'est la marche analitique, bien préférable à l'autre, et qu'il convient d'autant mieux d'adopter ici qu'elle pourra donner d'utiles directions dans les recherches qui restent encore à faire, relativement aux caustiques que forment les rayons réfléchis ou réfractés, à la rencontre d'une surface courbe quelconque.

Soit donc une courbe plane quelconque, séparatrice de deux milieux homogènes, de densité différente; et soit une autre courbe plane aussi quelconque, située dans le même plan avec la première, et de tous les points de laquelle jaillissent, dans des directions normales, des rayons lumineux qui se réfractent à la rencontre de l'autre courbe. Soit $\frac{m}{n}$ le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

Soient rapportées les deux courbes à deux axes rectangulaires quelconques, soit $(t'u')$ un point de la seconde courbe, duquel jaillit un rayon incident; soit (t,u) le point d'incidence sur la première courbe; soit (x,y) un quelconque des points de la direction du rayon réfracté; et prenons enfin X, Y pour symbole des coordonnées courantes.

Les coordonnées t et u devront être liées par une relation connue; et il en sera de même de t' et u'. Représentons ces deux relations par

$$\varphi(t,u)=V=0\;; \qquad \varphi'(t',u')=V'=0\,.$$

De ces deux relations on déduira, en t et u, t' et u', les valeurs de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t'}$; valeurs que, pour abréger, nous représenterons respectivement par p et p'.

Les équations du rayon incident, du rayon réfracté et de la normale au point d'incidence seront respectivement

$$Y-u=-\frac{1}{p'}(X-t)\,,$$

$$Y-u=\frac{y-u}{x-t}(X-t)\,,$$

$$Y-u=-\frac{1}{p}(X-t).$$

On aura, en conséquence, par les formules connues

$$\text{Sinus d'incidence}=\frac{p-p'}{\sqrt{(1+p^2)(1+p'^2)}}\,,$$

$$\text{Sinus de réfraction}\;\frac{(x-t)+p(y-u)}{\sqrt{(1+p^2)\{(x-t)^2+(y-u)^2\}}}\,;$$

en divisant ces deux formules l'une par l'autre, on devra donc avoir

$$\frac{\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2}}{(x-t)+p(y-u)} \cdot \frac{p-p'}{\sqrt{1+p'^2}} = \frac{m}{n}\,; \qquad (1)$$

de plus, les coordonnées t et u, t' et u' se trouveront liées par la condition

$$\frac{u-u'}{t-t'} = -\frac{1}{p'}\,,$$

c'est-à-dire,

$$(t-t')+p'(u-u')=0\,, \qquad (2)$$

au moyen de laquelle l'équation (1) deviendra

$$\frac{\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2}}{(x-t)+p(y-u)} \cdot \frac{(t-t')+p(u-u')}{\sqrt{(t-t')^2+(u-u')^2}} = \frac{m}{n}. \qquad (3)$$

Cela posé, si l'on prend un quelconque des systèmes de valeurs de t' et u' donnés par l'équation $V'=0$, ainsi que la valeur correspondante de p', pour les substituer dans l'équation (2), l'équation résultante en t et u, combinée avec $V=0$, donnera les valeurs correspondantes de t, u et p ; et, en substituant ces valeurs dans (3), l'équation qu'on en obtiendra, en x et y, sera indistinctement satisfaite par tous les points de la direction du rayon réfracté.

Puis donc que cette équation laisse x et y indéterminés, et n'établit entre elles qu'une simple relation, il doit nous être permis de la décomposer arbitrairement en deux autres, qui alors donneront, pour x et y, les coordonnées d'un point déterminé de la direction du rayon réfracté qui répond au point de départ (x,y) du rayon incident.

Or, on satisfait à cette équation, en posant à la fois,

$$(x-t)^2+(y-u)^2=\frac{n^2}{m^2}\{(t-t')^2+(u-u')^2\}\ , \qquad (4)$$

$$(x-t)+p(y-u)=\frac{n^2}{m^2}\{(t-t')+p(u-u')\}\ ; \qquad (5)$$

car, en divisant la racine quarrée de la première par la seconde, on retombe sur la proposée; donc les équations (4) et (5), pour chaque point de départ (t', u') d'un rayon incident, feront connaître un des points de la direction du rayon réfracté. Examinons quel est ce point.

L'équation (4) est celle d'un cercle qui a son centre (t, u) sur la courbe séparatrice des deux milieux et dont le rayon $\frac{n}{m}\sqrt{(t-t')^2+(u-u')^2}$ est à la distance $\sqrt{(t-t')^2+(u-u')^2}$ de ce centre à la courbe des points de laquelle émanent les rayons incidens dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence; ainsi le point de la direction du rayon réfracté donné par les deux équations (4) et (5) doit être un des points de la circonférence d'un tel cercle.

Si l'on prend la dérivée de l'équation (4) par rapport à t, u, t', u', considérés comme quatre paramètres variables, liés entre eux par les deux équations $V=0$, $V'=0$ et par l'équation (2); ou, ce qui revient au même, si on la différentie par rapport à t', en y considérant t, u, u', comme des fonctions de cette variable indépendante, et x et y comme constans, en observant que $\frac{du}{dt'}=\frac{du}{dt}\,\frac{dt}{dt'}=p\frac{dt}{dt'}$, il viendra

$$\{(x-x')+p(y-y')\}\frac{dt}{dt'}=\frac{n^2}{m^2}\{[(t-t')+p(u-u')]\frac{dt}{dt'}-[(t-t')+p'(u-u')]\}\ ;$$

ou simplement, en vertu de l'équation (2), et en divisant par $\frac{dt}{dt'}$

$$(x-x')+p(y-y')=\frac{n^2}{m^2}\{(t-t')+p(u-u')\}\ ;$$

c'est-à-dire, l'équation (5) elle-même; donc, suivant la théorie des enveloppes, les valeurs de x et y données par les équations (4) et (5) sont les coordonnées du point où le cercle donné par l'équation (4) est touché par l'enveloppe de tous les cercles décrits sous les mêmes conditions; donc le rayon réfracté, qui part du centre de ce cercle, est normal à l'enveloppe en ce point; donc les rayons réfractés ne sont autre chose que les normales aux différens points de l'enveloppe; donc la caustique formée par les intersections consécutives de ces rayons, c'est-à-dire, la courbe à laquelle ils sont tangens, n'est autre que la développée de cette enveloppe: or c'est précisément en cela que consiste le *Théorème II*; ce théorème est donc complètement démontré; le *Théorème I* l'est donc également, puisqu'il n'est qu'un cas particulier de celui-là.

Si, au lieu de donner la surface séparatrice on donnait l'enveloppe, c'est-à-dire, la trajectoire orthogonale de tous les rayons réfractés, en éliminant x et y entre l'équation de cette trajectoire et les équations (4) et (5), puis t' et u' entre l'équation résultante, l'équation $V'=0$ et l'équation (2); l'équation qu'on obtiendrait, en t, u, p serait l'équation différentielle de la courbe séparatrice inconnue.

Si, la courbe séparatrice et la trajectoire orthogonale des rayons réfractés étant données, on demandait la trajectoire orthogonale des rayons incidens, entre l'équation de la première trajectoire et les équations (4) et (5), on éliminerait d'abord x et y; on éliminerait ensuite t et u entre l'équation résultante, l'équation $V=0$ et l'équation (2); et l'équation en t', u', p' à laquelle on parviendrait ainsi serait celle de la trajectoire orthogonale des rayons incidens.

Ainsi, de ces trois courbes, la trajectoire orthogonale des rayons incidens, la courbe séparatrice des milieux et la trajectoire orthogonale des rayons réfractés, deux quelconques étant connus, on peut toujours déterminer la troisième. On voit même que chacun des trois problèmes compris sous cet énoncé général est susceptible d'une infinité de solutions.

Dans un prochain article, nous ferons l'application de la théorie qui vient d'être développée à quelques exemples particuliers, qui montreront combien elle facilite les calculs.

GÉOMÉTRIE.

Réclamation relative à l'article de la page 257 du présent volume;

Par l'AUTEUR de l'article de la page 132, du tome XIII.e

À Monsieur le Rédacteur des *Annales*;

MONSIEUR,

J'AI lu, dans le numéro des Annales de février 1825, les réflexions d'un anonyme sur la propriété de *minimum* dont jouit la surface de la sphère, entre celles de tous les corps de même volume.

L'auteur (pag. 260) s'exprime ainsi: « or, en appliquant littéralement le raisonnement que l'auteur de la démonstration dont » il s'agit applique à la surface de la sphère, on serait conduit

» à conclure que la surface *minimum* doit être telle, dans tous » les cas, que les plans tangens aux deux extrémités de l'une » quelconque de ses cordes et le plan perpendiculaire sur son mi- » lieu, se coupent tous trois suivant une même droite ».

L'objection de l'auteur des réflexions serait concluante, si l'on cherchait à appliquer les propriétés du tronc de prisme triangulaire isocèle au corps qu'il considère, et dont une section est une ellipse ; mais il est évident que les propriétés de ce tronc de prisme ne sauraient être susceptibles d'une telle application, puisque ses faces latérales sont des trapèzes isocèles qui ne sauraient être inscrits à une ellipse qu'autant que ses arêtes latérales seraient parallèles à l'un des diamètres principaux de cette courbe ; l'objection tombe donc d'elle-même, toutes les fois que la base donnée est différente d'un cercle ; puisque le cercle est la seule figure plane à laquelle on puisse inscrire un trapèze isocèle dans toutes sortes de directions. On voit en même temps que le corps de volume donné dont la surface est *minimum* doit avoir toutes ses sections planes circulaires ou n'en doit avoir aucune ; et il n'en faut pas davantage pour prouver, sans calcul, que, lorsque sa base plane est une ligne du second ordre, différente du cercle, sa surface ne saurait être une surface du second ordre ; puisqu'une telle surface peut toujours être coupée circulairement par des plans, dans deux directions différentes.

Je partage d'ailleurs pleinement, Monsieur, l'opinion de l'auteur des réflexions, sur l'abus que l'on fait des notations fonctionnelles, et je pense comme lui qu'une question ne doit être réputée résolue qu'autant que ces symboles ont été éliminés des résultats obtenus.

J'ignore si vous avez appris la mort de M. Durrande, enlevé par une maladie de poitrine, dans la nuit du 6 au 7 de ce mois. C'est une véritable perte pour les sciences mathématiques qu'il cultivait avec tant de succès ; il peut même en être regardé comme le martyr ; car il ne cessait de s'en occuper, au milieu de ses souffrances ; ce qui, joint au trop de confiance qu'il accordait peut-être aux médecins, n'aura pas peu contribué à abréger ses jours (*).

Agréez, etc.

Marseille, le 22 février 1825.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur le Mémoire de M. Vernier, inséré à la page 165 du présent volume,

Par M. Gergonne.

Quelqu'un vient de nous faire observer que plusieurs des résultats obtenus par M. Vernier, dans son Mémoire, inséré à la page 165 du présent volume, se trouvent implicitement contenus dans des résultats plus généraux, antérieurement publiés par M. Cauchy. L'auteur de cette observation est loin de prétendre, en la faisant, déprécier le travail de M. Vernier ; il veut seulement 1.° montrer toute la fécondité des résultats obtenus par M. Cauchy ; 2.° offrir à

(*) M. Durrande, âgé de moins de 28 ans, s'était formé absolument seul, dans une très-petite ville de la Guienne, où il n'avait d'autres secours que celui des livres. Il préparait un traité purement géométrique des surfaces du second ordre ; nous ignorons dans quel état il aura laissé cet ouvrage.

J. D. G.

M. Vernier une sorte de vérification de ses formules qui ne pourra que lui inspirer un nouveau degré de confiance dans les résultats de ses recherches.

Par exemple, dans le *Bulletin des sciences* pour 1822 (pag. 169), M. Cauchy a donné la formule

$$\int_0^\varpi \frac{f(\mathrm{Cos}.p+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.p)}{F(\mathrm{Cos}.p+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.p)}dp=\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\frac{f(r)}{rF(r)}dr+\text{etc.},$$

où les termes qui suivent le premier, dans le second membre, ne doivent point être employés dans le cas particulier que M. Vernier considère. Or, si l'on pose, en général, $\frac{f(u)}{uF(u)}=\varphi(u)$, d'où $\frac{f(u)}{F(u)}=u\varphi(u)$, et qu'on ne garde que le premier terme du second membre, il viendra

$$\int_0^\varpi(\mathrm{Cos}.p+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.p)\varphi(\mathrm{Cos}.p+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.p)\mathrm{d}p=\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\varphi(r)\mathrm{d}r;$$

ou bien

$$\int_0^\varpi e^{p\sqrt{-1}}.\,\varphi\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)\mathrm{d}p=\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\varphi(r)\mathrm{d}r\ ;$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(r)\mathrm{d}r=-\sqrt{-1}\int_0^\varpi e^{p\sqrt{-1}}.\,\varphi\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)\mathrm{d}p\ ;$$

qui est exactement, aux notations près, la formule (P), donnée par M. Vernier, à la page 180.

En second lieu ; dans le XIX.[e] cahier du *Journal de l'École polytechnique* (pag. 575) , si , dans la formule (7) de M. Cauchy , on fait $v'=0$, $v''=\varpi$, $u'=1$, $u''=0$, elle devient

$$\int_{+1}^{0}\left\{e^{\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}\left(ue^{\varpi\sqrt{-1}}\right)-\mathrm{f}(u)\right\}\mathrm{d}u=-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi}\left\{\mathrm{f}\left(e^{v\sqrt{-1}}\right)\right\}e^{v\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}v\ ,$$

qui se réduit à

$$\int_{0}^{1}\left\{\mathrm{f}(-u)+\mathrm{f}(u)\right\}\mathrm{d}u=-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi}\left\{\mathrm{f}\left(e^{v\sqrt{-1}}\right)\right\}e^{v\sqrt{-1}}\mathrm{d}v\ ;$$

ou bien

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{f}(u)\mathrm{d}u=-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi}e^{v\sqrt{-1}}\mathrm{f}\left(e^{v\sqrt{-1}}\right)\mathrm{d}v\ ;$$

on néglige ici Δ , à cause de l'hypothèse de M. Vernier ; et l'on retombe encore , comme on voit , aux notations près sur sa formule (P)

Maintenant , si , dans la formule (3) du même mémoire (pag. 574) , on fait $\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}=u.e^{-v+v\sqrt{-1}}$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1})}{\mathrm{d}u}=e^{-v+v\sqrt{-1}}\ ,\quad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1})}{\mathrm{d}v}=(-1+\sqrt{-1})ue^{-v+v\sqrt{-1}}\ ;$$

ce qui change les fonctions χ et ψ de cette formule en deux autres qui , substituées dans la formule (5) de ce même mémoire , donnent

$$\int_{u'}^{u''}\left\{\frac{e^{v''\sqrt{-1}}}{e^{v''}}\,\mathrm{f}\left(\frac{ue^{v''\sqrt{-1}}}{e^{v''}}\right)-\frac{e^{v'\sqrt{-1}}}{e^{v'}}\,\mathrm{f}\left(\frac{ue^{v'\sqrt{-1}}}{e^{v'}}\right)\right\}\mathrm{d}u$$

$$=(-1+\sqrt{-1})\int_{v'}^{v''}\left\{\frac{u''e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\,\mathrm{f}\left(\frac{u''e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\right)-\frac{u'e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\,\mathrm{f}\left(\frac{u'e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\right)\right\}\mathrm{d}v.$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $v'=0$, $v''=\infty$, $u'=0$, $u''=1$, on aura

$$\int_0^1 -\mathrm{f}(u)\mathrm{d}u=(-1+\sqrt{-1})\int_0^\infty\left\{\frac{e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\,\mathrm{f}\left(\frac{e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\right)\right\}\mathrm{d}v\ ;$$

d'où

$$\int_0^\infty\frac{e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\,\mathrm{f}\left(\frac{e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{f}(u)\mathrm{d}u+\frac{\sqrt{-1}}{2}\int_0^1\mathrm{f}(u)\mathrm{d}u.$$

C'est aux notations près la formule (Q) de M. Vernier, (pag. 185).

OPTIQUE.

Sur une nouvelle doctrine de la vision.

(Extrait d'une lettre au Rédacteur des *Annales.*)

. . . .
. . . .

Il y a, Monsieur, déjà plus d'un an que j'ai lu, dans les feuilles publiques, que M. C. J. Lehot, ingenieur des ponts et chaussées, à ce que je crois, trouvant sans doute de graves inconvéniens à ce que de simples images des objets extérieurs fussent appliqués tout à plat sur la rétine, avait décidé souverainement que désormais ces objets se peindraient, en relief, aux différens points de l'humeur vitrée; que, pour de bonnes raisons sans doute, il s'était adressé à l'Académie de médecine, de préférence à celle des sciences, pour y faire enregistrer son édit sur ce sujet; et que cette société savante l'avait engagé à poursuivre ses travaux sur le phénomène de la vision.

M. Lehot paraît avoir mis ce conseil à profit, car je lis, dans le *Bulletin universel* de M. le Baron de Férussac (février 1825, pag. 104, n.° 125) qu'il croit avoir découvert, par des expériences qu'il a faites l'an dernier, la LOI MATHÉMATIQUE qui détermine la grandeur apparente des corps, loi qu'il exprime ainsi : *Les grandeurs apparentes des corps sont en raison composées de* *la directe des grandeurs réelles, de la directe des logarithmes des distances réelles et de l'inverse de ces mêmes distances.*

M. Lehot pense qu'on pourra traiter, à l'aide de son principe, une multitude de problèmes dont on avait donné jusqu'ici que des solutions erronées; qu'on pourra, par son secours, non seulement expliquer, mais même mesurer mathématiquement la plupart des phénomènes connus sous le nom d'*illusions optiques*; tels, par exemple, que celle de l'allée d'arbres de Taquet, dont vous vous êtes occupé, Monsieur, dans le volume de l'*Académie du Gard* pour 1807; et qu'en un mot ce principe doit donner naissance à une science tout à fait nouvelle; et je ne puis me refuser à penser, avec M. Lehot, que cette science sera très-nouvelle en effet.

Soit un corps placé à une distance variable de l'œil, représentée par x; et soit, à cette distance, y sa grandeur apparente. Suivant M. Lehot, on devra avoir

$$y=A\,\frac{\text{Log.}x}{x}\;;$$

A étant une constante à déterminer par l'expérience. Je ne dirai rien du cas où le corps en expérience serait situé derrière la tête de l'observateur; nous rencontrerions alors les courbes ponctuées et pointillées de M. Vincent (*), et il arriverait ainsi des choses tout à fait merveilleuses. Mais, en se bornant aux seules valeurs positives de x, on voit que cette équation est celle d'une courbe, qui, ayant pour première asymptote l'axe des y négative, vient couper l'axe des x positives, passe de l'autre côté de cet axe, s'en éloigne jusqu'à un certain terme, puis redescend lentement vers lui, pour en faire son asymptote.

(*) Voyez la page 1.re du présent volume.

J. D. G.

Ainsi, il demeure décidé par M. Lehot qu'il y a toujours une distance de l'œil à laquelle la grandeur apparente de chaque objet est *maximum*, de telle sorte qu'en partant de cette distance, soit qu'on l'approche soit qu'on l'éloigne du spectateur, sa grandeur apparente diminue également; mais que, tandis qu'il faut l'éloigner à l'infini pour que sa grandeur apparente devienne nulle, il ne le faut rapprocher de l'œil, au contraire, que d'une quantité médiocre, pour obtenir le même résultat; qu'en le rapprochant un peu plus de l'œil, il reparaît et grandit sans cesse, mais sous un aspect renversé, jusqu'à ce qu'enfin il soit tout à fait appliqué contre l'œil, auquel cas son image est infini.

Quelque piquans que soient ces résultats, j'ai grand'peur, Monsieur, qu'ils n'obtiennent pas une faveur générale, et que beaucoup de gens ne s'obstinent à penser que les jugemens que nous portons sur la grandeur des objets éloignés, se composant à la fois et de l'angle sous lequel ils s'offrent à nous, indépendamment de notre volonté, et de l'opinion souvent erronée que nous nous formons sur l'intervalle qui nous en sépare; et qu'une multitude de circonstances accidentelles pouvant faire varier le dernier de ces élémens, en plus ou en moins, c'est perdre tout à fait son temps et ses peines que de chercher ici une loi mathématique.

Ces gens-là continueront donc à croire que, par exemple, si le peuple se figure le soleil et la lune à peu près de même grandeur, c'est qu'il voit ces deux astres à peu près sous le même angle, et qu'il les croit fixés à la même voûte; et que si la lune leur paraît à eux-mêmes d'une grandeur démesurée à l'horizon, bien que pourtant elle soit vue là sous un plus petit angle qu'en tout autre point de son cours, c'est que, par l'effet de diverses causes, faciles à décrire, il s'exagère alors l'intervalle qui les en sépare. Qui sait même si, trop dominé par l'ascendant des préjugés mathématiques, vous ne persisterez pas vous-même, Monsieur, à penser, comme vous le faisiez en 1807, que, du moins dans les circonstances les plus ordinaires, pour que les deux rangées d'arbres d'une avenue paraissent parrallèles, il faut tout bonnement qu'elles le soient en effet.

Je vais plus loin, Monsieur, et j'appréhende fort que quelques raisonneurs obstinés ne prétendent que, puisque des couleurs appliquées, avec tant soit peu d'art, tout à plat sur une toile, suffisent pour nous faire éprouver le sentiment du relief; il se pourrait, en toute rigueur, que l'auteur de la nature n'eût pas mis plus de finesse dans l'organisation de l'œil, et qu'une peinture faite tout à plat sur la rétine fût également suffisante pour nous avertir de la présence des corps extérieurs, et pour nous en faire connaître les formes réelles. Voilà donc des gens qui pourront bien ne faire qu'un cas fort médiocre de la nouvelle théorie de la vision, présentée l'an dernier à l'Académie de médecine par M. Lehot; je ne vois pas même trop comment l'auteur pourra les ramener à son opinion; de sorte qu'il se trouvera contraint, comme l'auteur de la *Philosophie générale*, d'en appeler à la postérité.

Quant à son principe mathématique sur la grandeur apparente des objets, c'est une toute autre affaire; et, attendu qu'il est bien connu qu'en toutes choses expérience passe science, je conseillerai à M. Lehot, afin de convaincre les plus incrédules, de faire planter une avenue d'arbres conformément à son principe, et d'appeler le public comme juge entre lui et ses adversaires. Il ne s'agit, en effet, que de planter ces arbres suivant la courbe dont l'équation serait

$$y=A\,\frac{x}{\log.x},$$

et suivant une autre courbe qui serait symétrique avec elle, par rapport à l'axe des x, et de se placer à l'origine des coordonnées. Cette courbe n'est autre chose que celle de la figure 12 du Mémoire de M. Vincent déjà cité.

Agréez, etc.

Lyon, le 15 mars 1825.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Probabilité.

I. On suppose qu'un point inconnu de l'espace devant se trouver au concours de quatre plans qu'on peut construire, il résulte des erreurs inévitablement attachées aux procédés graphiques que ces quatre plans forment un tétraèdre : on suppose qu'on n'a aucun motif de suspecter davantage d'erreur la direction d'aucun de ces plans que les directions des trois autres, et on demande où se serait le plus probablement trouvé le point demandé, si l'on avait opéré avec une exactitude rigoureuse ?

II. On suppose qu'un plan inconnu devant être déterminé par quatre points de sa direction qu'on sait construire, il résulte des erreurs inévitablement attachées aux procédés graphiques que ces trois points sont aux trois sommets d'un tétraèdre ; on suppose que l'on n'a aucun motif de suspecter davantage d'erreur la situation de l'un de ces points que celle de chacun des trois autres ; et on demande quelle aurait été le plus probablement la direction du plan demandé, si l'on avait opéré avec une exactitude rigoureuse ?

Problème de Géométrie.

On donne l'une des faces latérales d'un tronc de prisme triangulaire, la longueur de l'arête latérale opposée, la section du tronc par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales, et par suite le volume du tronc ; et l'on demande quelle doit être la disposition de l'arête latérale dont la longueur est donnée, pour que la somme des aires des deux bases du tronc soit un *minimum* ?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Analogie entre les facultés numériques et les puissances ; Démonstration génerale de la formule du Binôme de Newton ; Developpement des fonctions exponentielles et circulaires ;

Par M. Ampère, de l'Académie royale des sciences de Paris, professeur de physique au Collége de France, etc.

M. Kramp a donné le nom de *Factorielles* ou de *Facultés numériques* aux produits de la forme

$$x(x+p)(x+2p)(x+3p).....(x+\overline{n-1}.p)\,,$$

qui, sous la dénomination de *Puissances du second ordre*, avaient été déjà l'objet des travaux de Vandermonde (*). Le nombre des facteurs est ce qu'on appelle le *degré de la faculté*, de sorte que

$$x\,,\ x(x+p)\,,\ x(x+p)(x+2p)\,,\ ....\ x(x+p)(x+2p)....(x+\overline{n-1}.p)\,,$$

sont dites les facultés du premier, du second, du troisième, ... du $n.^{me}$ degré. Nous indiquerons généralement la faculté du $n.^{me}$

(*) Voyez la page 1.re du III.e volume du présent recueil.

J. D. G.

degré par $[\overset{n}{x}]$; p étant une quantité prise à volonté, entière ou fractionnaire, positive ou négative.

Il suit de cette notation que

$$\left.\begin{aligned} &[\overset{1}{x}]=x\,, \\ &[\overset{2}{x}]=[\overset{1}{x}](x+p)\,, \\ &[\overset{3}{x}]=[\overset{2}{x}](x+2p)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[\overset{m+1}{x}]=[\overset{m}{x}](x+mp)\,. \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

On peut énoncer ces facultés en disant : x faculté 1, x faculté 2, x faculté 3, ..., x faculté n, pour $[\overset{1}{x}]$, $[\overset{2}{x}]$, $[\overset{3}{x}]$, ... $[\overset{n}{x}]$.

Ces notations admises, il existe entre les facultés numériques et les puissances une analogie remarquable qui consiste en ce que *la faculté d'un degré quelconque d'un binôme s'obtient en substituant aux puissances des deux termes du binôme, dans le développement de la puissance du même degré de ce binôme, les facultés des mêmes degrés de ses deux termes* ; de telle sorte qu'en général

$$[x\overset{m}{+}y]=\left\{\begin{aligned} &[\overset{m}{x}]+\frac{m}{1}[\overset{m-1}{x}][\overset{1}{y}]+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}[\overset{m-2}{x}][\overset{2}{y}]+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+2}{n-1}[\overset{m-n+1}{x}][\overset{n-1}{y}] \\ &+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}[\overset{m-n}{x}][\overset{n}{y}]+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}[\overset{2}{x}][\overset{m-2}{y}]+\frac{m}{1}[\overset{1}{x}][\overset{m-1}{y}]+[\overset{m}{y}]\,. \end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

La proposition est d'abord évidente pour les facultés des premiers degrés. On a en effet (1)

$$[x\overset{1}{+}y]=x+y=[\overset{1}{x}]+[\overset{1}{y}]\,,$$

$$[x\overset{2}{+}y]=(x+y)(x+y+p)=x(x+p)+2xy+y(y+p)=[\overset{2}{x}]+2[\overset{1}{x}][\overset{1}{y}]+[\overset{2}{y}]\;;$$

de sorte que la démonstration de cette proposition se réduit à faire voir que, si elle a lieu pour la faculté du $m.^{\text{me}}$ degré, elle sera vraie aussi pour celle du $(m+1).^{\text{me}}$

Pour y parvenir, multiplions la quantité $x+y+mp$ par les deux membres de l'équation (2). Il est d'abord clair que le premier membre de l'équation-produit sera $\overset{m+1}{[x+y]}$. Pour exécuter la multiplication par le second membre de l'équation (2), considérons tour à tour le multiplicande $x+y+mp$ comme

$(x+mp)+y$,	pour la multiplication par le 1.er terme,
$(x+\overline{m-1}\,p)+(y+p)$,	pour la multiplication par le 2.e,
$(x+\overline{m-2}.p)+(y+2p)$,	pour la muliplication par le 3.e,
. . . .	,
$(x+\overline{m-n+1}.p)+(y+\overline{n-1}.p)$,	pour la multiplication par le $n.^{\text{me}}$,
$(x+\overline{m-n}.p)+(y+n.q)$,	pour la multiplication par le $(n+1)^{\text{me}}$;

on trouvera d'abord, pour les premiers termes du résultat,

$$\begin{aligned}\overset{m+1}{[x+y]} = \overset{m+1}{[x]} &+ \overset{m}{[x]}\overset{1}{[y]}\\ &+\frac{m}{1}\overset{m}{[x]}\overset{1}{[y]}+\frac{m}{1}\overset{m-1}{[x]}\overset{2}{[y]}\\ &+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\overset{m-1}{[x]}\overset{2}{[y]}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\overset{m-2}{[x]}\overset{3}{[y]}\\ &+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\overset{m-2}{[x]}\overset{3}{[y]}+\ldots;\end{aligned}$$

ce qui donne en effet, en opérant la réduction, entre les termes qui renferment les mêmes facultés,

$$[\overset{m+1}{x+y}]=[\overset{m+1}{x}]+\frac{m+1}{1}[\overset{m}{x}][\overset{1}{y}]+\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}[\overset{m-1}{x}][\overset{2}{y}]+\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{3}[\overset{m-2}{x}][\overset{3}{y}]+\ldots$$

qui est bien ce que devient l'équation (2), lorsqu'on y change m en $m+1$.

Mais, afin qu'il n'y ait point d'induction dans tout ceci, remarquons que

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+2}{n-1}[\overset{m-n+1}{x}][\overset{n-1}{y}]\times(y+\overline{n-1}.p)=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+2}{n-1}[\overset{m-n+1}{x}][\overset{n}{y}],$$

et que

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}[\overset{m-n}{x}][\overset{n}{y}]\times(x+\overline{m-n}p)=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}[\overset{m-n+1}{x}][\overset{n}{y}],$$

et que ces termes du second membre seront les seuls en $[\overset{m-n+1}{x}][\overset{n}{y}]$; or, en les réduisant en un seul, il vient

$$\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\cdots\frac{m-n+2}{n}[\overset{m-n+1}{x}][\overset{n}{y}],$$

qui est bien ce que devient le $(n+1)$.me terme du second membre de l'équation (2), lorsqu'on y change m en $m+1$; il demeure donc établi que, si la proposition est vraie pour $[\overset{m}{x+y}]$, elle le sera également pour $[\overset{m+1}{x+y}]$; or, nous avons prouvé qu'elle était vraie pour $[\overset{1}{x+y}]$ et pour $[\overset{2}{x+y}]$; cette proposition est donc vraie, quel que soit le nombre entier positif m.

Adoptons $m!$, avec M. Kramp, comme le symbole du produit $1.2.3\ldots\ldots m$; en divisant, tour à tour, les deux membres du développement de $(x+y)^m$ et de $[\overset{m}{x+y}]$ par $m!$, il vient

$$\frac{(x+y)^m}{m!}=\frac{x^m}{m!}+\frac{y}{1}\cdot\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}+\ldots\ldots+\frac{y^n}{n!}\cdot\frac{x^{m-n}}{(m-n)!}+\ldots\ldots+\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{y}{1}+\frac{y^m}{m!}\,. \quad (3)$$

$$\frac{\overset{m}{[x+y]}}{m!}=\frac{\overset{m}{[x]}}{m!}+\frac{\overset{1}{[y]}}{1}\cdot\frac{\overset{m-1}{[\ x\ ]}}{(m-1)!}+\ldots\ldots+\frac{\overset{n}{[y]}}{n!}\cdot\frac{\overset{m-n}{[\ x\ ]}}{(m-n)!}+\ldots\ldots+\frac{\overset{m-1}{[\ y\ ]}}{(m-1)!}\cdot\frac{\overset{1}{[x]}}{1}+\frac{\overset{m}{[y]}}{m!}\,. \quad (4)$$

A l'aide de ces résultats, on peut démontrer commodément un théorème très-fecond en belles conséquences; lequel consiste en ce que, si l'on a

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{f}(t)&=1+\frac{t}{1}z+\frac{t}{1}\cdot\frac{t+p}{2}z^2+\frac{t}{1}\cdot\frac{t+p}{2}\cdot\frac{t+2p}{3}z^3+\frac{t}{1}\cdot\frac{t+p}{2}\cdot\frac{t+2p}{3}\cdot\frac{t+3p}{4}z^4+\ldots\ldots\\
\mathrm{f}(u)&=1+\frac{u}{1}z+\frac{u}{1}\cdot\frac{u+p}{2}z^2+\frac{u}{1}\cdot\frac{u+p}{2}\cdot\frac{u+2p}{3}z^3+\frac{u}{1}\cdot\frac{u+p}{2}\cdot\frac{u+2p}{3}\cdot\frac{u+3p}{4}z^4+\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

on aura

$$\mathrm{f}(t).\mathrm{f}(u)=\mathrm{f}(t+u).\ (*) \qquad (6)$$

Les équations (5) peuvent. en effet, être écrites ainsi

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{f}(t)&=1+\frac{\overset{1}{[t]}}{1}z+\frac{\overset{2}{[t]}}{2!}z^2+\frac{\overset{3}{[t]}}{3!}z^3+\frac{\overset{4}{[t]}}{4!}z^4+\ldots\ldots+\frac{\overset{n}{[t]}}{n!}z^n+\ldots\ldots,\\
\mathrm{f}(u)&=1+\frac{\overset{1}{[u]}}{1}z+\frac{\overset{2}{[u]}}{2!}z^2+\frac{\overset{3}{[u]}}{3!}z^3+\frac{\overset{4}{[u]}}{4!}z^4+\ldots\ldots+\frac{\overset{n}{[u]}}{n!}z^n+\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

(*) C'est le théorème de M. de Stainville, démontré à la page 229 du IX.e volume du présent recueil, généralisé à la pag. 270 du XIII.e vol., et reproduit postérieurement comme sien, avec les mêmes notations, par M. le professeur J. Wallace, de Colombie (*Americ. Journ. of. sciences*, fev. 1824, p. 278).

J. D. G.

En les multipliant alors membre à membre, il viendra

$$f(t).f(u)=1+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overset{1}{[t]}}{1}\\[2ex] +\dfrac{\overset{1}{[u]}}{1}\end{array}\right| z+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overset{2}{[t]}}{2!}\\[2ex] +\dfrac{\overset{1}{[t]}}{1}\dfrac{\overset{1}{[u]}}{1}\\[2ex] +\dfrac{\overset{2}{[u]}}{2!}\end{array}\right| z^2+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overset{3}{[t]}}{3!}\\[2ex] +\dfrac{\overset{2}{[t]}}{2!}\dfrac{\overset{1}{[u]}}{1}\\[2ex] +\dfrac{\overset{1}{[t]}}{1}\dfrac{\overset{2}{[u]}}{2!}\\[2ex] +\dfrac{\overset{3}{[u]}}{3!}\end{array}\right| z^3+\ldots\ldots+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overset{n}{[t]}}{n!}\\[2ex] +\dfrac{\overset{n-1}{[\;t\;]}}{(n-1)!}\cdot\dfrac{\overset{1}{[u]}}{1}\\[2ex] +\dfrac{\overset{n-2}{[\;t\;]}}{(n-2)!}\cdot\dfrac{\overset{2}{[u]}}{2!}\\[2ex] +\ldots\ldots\ldots\\[2ex] +\dfrac{\overset{2}{[t]}}{2!}\cdot\dfrac{\overset{n-2}{[\;u\;]}}{(n-2)!}\\[2ex] +\dfrac{\overset{1}{[t]}}{1!}\cdot\dfrac{\overset{n-1}{[\;u\;]}}{(n-1)!}\\[2ex] +\dfrac{\overset{n}{[u]}}{n!}\end{array}\right| \begin{array}{l} z^n+\ldots\ldots\\[2ex] +\ldots\ldots\\[2ex] +\ldots\ldots\\[2ex] +\ldots\ldots\\[2ex] +\ldots\ldots\\[2ex] +\ldots\ldots\\[2ex] +\ldots\ldots\end{array}$$

développement qui, à l'aide de la formule (4), peut être écrit ainsi

$$f(t).f(u)=1+\frac{\overset{1}{[t+u]}}{1}z+\frac{\overset{2}{[t+u]}}{2!}z^2+\frac{\overset{3}{[t+u]}}{3!}z^3+\ldots\ldots+\frac{\overset{n}{[t+u]}}{n!}z^n+\ldots\ldots;$$

mais si, dans la première des formules (7) on change t en $t+u$, elle deviendra

$$f(t+u)=1+\frac{\overset{1}{[t+u]}}{1}z+\frac{\overset{2}{[t+u]}}{2!}z^2+\frac{\overset{3}{[t+u]}}{3}z^3+\ldots\ldots+\frac{\overset{n}{[t+u]}}{n!}z^n+\ldots\ldots;$$

donc, en effet,

$$f(t).f(u)=f(t+u)\,, \qquad (6)$$

comme nous l'avions annoncé.

Si, dans cette dernière formule, on change u en $u+v$, on aura

$$f(t).f(u+v)=f(t+u+v)\ ;$$

mais, en vertu de la même formule, on peut, dans le premier membre, remplacer $f(u+v)$ par $f(u).f(v)$; donc

$$f(t).f(u).f(v)=f(t+u+v)\ .$$

On peut de même, dans celle-ci, changer v en $v+x$, en remplaçant ensuite, dans le premier membre, $f(v+x)$ par $f(v).f(x)$; puis dans l'équation résultante, changer x en $x+y$ et ensuite $f(x+y)$ en $f(x).f(y)$ et ainsi de suite, de sorte qu'on a généralement

$$f(t).f(u).f(v).f(x)\ldots\ldots=f(t+u+v+x+\ldots\ldots) \qquad (8)$$

Si l'on suppose les quantités t, u, v, x, ... toutes égales entre elles et à x, et leur nombre égal à n, cette équation deviendra

$$\{f(x)\}^n=f(nx)\ . \qquad (9)$$

Or, comme ici x est quelconque, on peut changer x en $\frac{x}{n}$ ce qui changera nx en x et donnera en substituant, extrayant la racine et renversant

$$\sqrt[n]{f(x)}=f\left(\frac{x}{n}\right)\ . \qquad (10)$$

En changeant, dans cette dernière équation, x en mx, elle devient

$$\sqrt[n]{f(mx)}=f\left(\frac{m}{n}x\right);$$

mais, en supposant m un nombre entier positif, on a (9)

$$f(mx)=\{f(x)\}^m,$$

donc finalement

$$\sqrt[n]{\{f(x)\}^m} \quad \text{ou} \quad \{f(x)\}^{\frac{m}{n}}=f\left(\frac{m}{n}x\right). \qquad (11)$$

Voilà donc la formule (9), qui n'étoit d'abord démontrée que pour un exposant entier positif, qui se trouve l'être présentement pour un exposant fractionnaire positif, et par suite pour un exposant positif quelconque.

Si, dans l'équation (6), on fait $u=-t=-x$, elle deviendra

$$f(x).f(-x)=f(x-x)=f(0);$$

or il est aisé de voir (5) que $f(0)=1$; donc

$$f(-x)=\frac{1}{f(x)}. \qquad (12)$$

Si ensuite nous changeons x en mx, nous aurons, en renversant,

$$\frac{1}{f(mx)}=f(-mx);$$

mais nous venons de prouver que, quelque nombre positif, entier ou fractionnaire ou même incommensurable qu'on prenne pour x, on a toujours

$$f(mx)=\{f(x)\}^m,$$

donc, en substituant

$$\frac{1}{\{f(x)\}^m} \quad \text{ou} \quad \{f(x)\}^{-m}=f(-mx). \qquad (13)$$

Ainsi la formule (9), qui n'était démontrée que pour une valeur positive de l'exposant, se trouve l'être présentement pour une valeur réelle quelconque de cet exposant.

Au moyen de ces résultats, la formule du binôme de Newton se trouve démontrée pour toute valeur réelle de l'exposant. On a, en effet, par ce qui précède, quelque valeur réelle qu'on attribue à m,

$$\{f(x)\}^m=f(mx) ;$$

c'est-à-dire (5)

$$\left\{1+\frac{x}{1}z+\frac{x}{1}\cdot\frac{x+p}{2}z^2+\frac{x}{1}\cdot\frac{x+p}{2}\cdot\frac{x+2p}{3}z^3+\ldots\ldots\right\}^m$$

$$=1+\frac{mx}{1}z+\frac{mx}{1}\cdot\frac{mx+p}{2}z^2+\frac{mx}{1}\cdot\frac{mx+p}{2}\cdot\frac{mx+2p}{3}z^3+\ldots\ldots+\frac{mx}{1}\cdot\frac{mx+p}{2}\cdots\frac{mx+(n-1)p}{n}z^n+\ldots \quad (14)$$

Faisant dans cette équation $x=1$ et $p=-1$, elle deviendra

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1}z+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}.z^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}z^3+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ldots\frac{m-n+1}{n}z^n+\ldots$$

Changeant ensuite z en $\frac{a}{x}$, et multipliant les deux membres par x^m, on obtiendra, quel que soit le nombre réel m

$$(x+a)^m=x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}a^nx^{m-n}+\ldots \quad (15)$$

Cette formule peut au surplus, pour le cas de l'exposant entier négatif, être déduite *à priori* de la théorie des combinaisons par un raisonnement fort analogue à celui que l'on emploie pour le cas de l'exposant entier positif; et nous nous arrêterons d'autant plus volontiers à le faire voir, que cela nous donnera, chemin faisant, l'interprétation des coefficiens qui affectent alors les termes du développement, et la solution d'une question très-intéressante dans l'analise : celle du nombre des termes d'un polynôme homogène de degré quelconque, formé d'un nombre de lettres également quelconque.

Employons, avec Vandermonde, par abréviation, les symboles (A^α), $(A^\alpha B^\beta)$, $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$, ... comme les équivalens respectifs des polynômes homogènes symétriques

$$a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha+d^\alpha+e^\alpha+f^\alpha+g^\alpha+\ldots\ldots\,,$$

$$a^\alpha b^\beta+a^\beta b^\alpha+a^\alpha c^\beta+a^\beta c^\alpha+b^\alpha c^\beta+b^\beta c^\alpha+\ldots\ldots\,,$$

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma+a^\alpha b^\gamma c^\beta+a^\beta b^\alpha c^\gamma+a^\beta d^\gamma c^\alpha+a^\gamma b^\alpha c^\beta+\ldots\ldots\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

nous trouverons alors, en exécutant la multiplication,

$$\begin{array}{lllllll}
\multicolumn{7}{l}{(1+a+a^2+a^3+\ldots)(1+b+b^2+b^3+\ldots)(1+c+c^2+c^3+\ldots)\ldots}\\
=1+(A) & +(A^2) & +(A^3) & +(A^4) & +(A^5) & +\ldots\\
 & +(AB) & +(A^2B) & +(A^3B) & +(A^4B) & +\ldots\\
 & & +(ABC) & +(A^2B^2) & +(A^3B^2) & +\ldots\\
 & & & +(A^2BC) & +(A^3BC) & +\ldots\\
 & & & +(ABCD) & +(A^2B^2C) & +\ldots\\
 & & & & +(A^2BCD) & +\ldots\\
 & & & & +(ABCDE) & +\ldots
\end{array}$$

Si donc nous représentons généralement par S_n la somme des termes du n.me degré de ce développement, nous aurons

$$(1+a+a^2+a^3+\ldots)(1+b+b^2+b^3+\ldots)(1+c+c^2+c^3+\ldots)\ldots \\ =1+S_1+S_2+S_3+S_4+\ldots\ldots+S_n+\ldots\ldots \qquad (16)$$

Supposons présentement que toutes les lettres a, b, c, ... deviennent égales entre elles et à z, que les facteurs du premier membre sont au nombre de m, et représentons généralement par P_n le nombre des produits de n facteurs que l'on peut faire avec m sortes de facteurs donnés, en admettant dans chaque produit la répétition d'une même sorte de facteur autant de fois qu'on voudra; on aura ainsi

$$S_1=P_1z\,,\quad S_2=P_2z^2\,,\quad S_3=P_3z^3\,,\ldots\ldots S_n=P_nz^n\,,\ldots$$

et en conséquence l'équation (16) deviendra

$$(1+z+z^2+z^3+\ldots)^m \text{ ou } \left(\frac{1}{1-z}\right)^m \text{ ou } \frac{1}{(1-z)^m} \text{ ou enfin}$$

$$(1-z)^{-m}=1+P_1z^1+P_2z^2+P_3z^3+\ldots\ldots+P_nz^n+\ldots\ldots\,; \qquad (17)$$

voyons quelles sont les valeurs de P_1, P_2, P_3 ...... P_n, ... en fonction de m; et pour cela cherchons d'abord comment P_n peut se déduire de P_{n-1}.

Distinguons dans S_n les termes qui contiennent un ou plusieurs facteurs égaux à a et ceux qui sont indépendans de cette lettre. Si dans ceux de la première sorte on supprime un facteur a, on obtiendra évidemment S_{n-1}; de sorte que l'ensemble de ces termes revient à aS_{n-1}, et que conséquemment leur nombre est P_{n-1}.

Si, dans ces mêmes termes affectés de a, on met tour à tour à la place de a ou de ses puissances, les mêmes puissances de chacune des $m-1$ autres lettres, on formera un nombre de termes du n.me degré, indépendans de a égal à $(m-1)P_{m-1}$. Or, il est aisé de voir que, par un tel procédé, chacun des termes indépendans de a aura été formé n fois. Considérons en effet un quelconque $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots$ des termes de cette dernière sorte, où l'on doit avoir $\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=n$, on l'aura formé, tour à tour, par le changement

$$\text{de } a \text{ en } b, \text{ dans les } \beta \text{ produits } \left\{\begin{array}{l} a^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{\beta-1} b c^\gamma d^\delta \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a b^{\beta-1} c^\gamma d^\delta \ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

$$\text{de } a \text{ en } c, \text{ dans les } \gamma \text{ produits } \left\{\begin{array}{l} a^\gamma b^\beta d^\delta \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{\gamma-1} c b^\beta d^\delta \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a c^{\gamma-1} b^\beta d^\delta \ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

$$\text{de } a \text{ en } d, \text{ dans les } \delta \text{ produits } \left\{\begin{array}{l} a^\delta b^\beta c^\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{\delta-1} d b^\beta c^\gamma \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a d^{\delta-1} b^\beta c^\gamma \ldots\ldots; \end{array}\right.$$

et ainsi de suite. Le produit $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots$ sera donc répété $\beta+\gamma+\delta+\ldots$ fois ou n fois, et il en sera de même de chacun des autres produits indépendans de a. Donc, puisque le nombre total des produits indépendans de a que nous avons formés est $(m-1)P_{n-1}$, et que chacun d'eux se trouve répété n fois, il en résulte que le nombre des produits réellement différens de n facteurs qui ne renferment pas a est seulement $\frac{m-1}{n}P_{n-1}$; en y ajoutant donc le nombre P_{n-1} des produits de n facteurs qui renferment cette lettre, nous aurons, pour le nombre total P_n des différens produits de n facteurs, $P_{n-1}+\frac{m-1}{n}P_{n-1}$ ou $\frac{m+n-1}{n}P_{n-1}$; c'est-à-dire, que nous aurons

$$P_n=\frac{m+n-1}{n}P_{n-1}. \qquad (18)$$

Observant donc que $P_1=m=\frac{m}{1}$, et faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, ..., il viendra

$$P_1=\frac{m}{1},$$

$$P_2=\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2},$$

$$P_3=\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n=\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdots\cdots\frac{m+n-1}{n};$$

au moyen de quoi l'équation (17) deviendra

$$(1-z)^{-m}=1+\frac{m}{1}z+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}z^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}z^3+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdots\frac{m+n-1}{n}z^n+\ldots$$

ou en changeant z en $-\frac{a}{x}$, et multipliant ensuite les deux membres par x^{-m}.

$$(x+a)^{-m}=x^{-m}\left(1-\frac{m}{1}\cdot\frac{a}{x}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{a^2}{x^2}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{a^3}{x^3}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdots\cdots\frac{m+n-1}{n}\cdot\frac{a^n}{x^n}+\ldots\ldots\right). \qquad (19)$$

Ainsi, tandis que les coefficiens des termes du développement de $(x+a)^m$ sont les nombres de produits différens d'un, de deux, de trois, ... de n facteurs que l'on peut faire avec m sortes de facteurs, *en excluant* l'admission de plusieurs facteurs d'une même sorte dans un même produit, les coefficiens des termes du développement de $(x+a)^{-m}$ sont, au contraire, les nombres de produits différens d'un, de deux, de trois, ... de n facteur que l'on peut faire avec m sortes de facteurs *en admettant* la répétition indéfinie de chaque sorte de facteurs dans chacun de ces produits.

Soit une équation complète du n.me degré, entre m inconnues, si l'on introduit dans chacun de ses termes une puissance d'une $(m+1)$me inconnue, telle que tous ses termes se trouvent être alors du n.me degré ; il est clair qu'alors ces termes seront, abstraction faite des coefficiens, les différens produits de n facteurs qu'on peut faire avec $m+1$ sorte de facteurs, en admettant la répétition indéfinie de chaque sorte de facteurs dans un même produit ; d'où il suit que le nombre des termes d'une équation complète du n.me degré entre m inconnue, n'est autre chose que ce que devient la valeur de P_n, lorsqu'on y change m en $m+1$, c'est-à-dire,

$$\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdots\cdots\frac{m+n}{n},$$

ou, en multipliant haut et bas par $1.2.3\ldots\ldots m$,

$$\frac{(m+n)!}{m!n!},$$

résultat dont la symétrie prouve qu'*il y a autant de termes dans une équation complète du* m.^{me} *degré entre* n *inconnues qu'il y en a dans une équation complète du* n.^{me} *degré entre* m *inconnues* (*).

Passons au développement des fonctions exponentielles et logarithmiques. Si, dans l'équation (14) qui a lieu, quels que soient m, p, x, z, on fait $x=1$, $p=0$, $z=1$ et $m=At$, elle devient

$$\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots\right)^{At}=1+\frac{At}{1}+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\frac{A^4t^4}{4!}+\dots;$$

ou en représentant par e la série du premier membre,

$$e^{At} \text{ ou } (e^A)^t=1+\frac{At}{1}+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\frac{A^4t^4}{4!}+\dots\dots$$

Posant $e^A=a$, auquel cas A sera le logarithme Néperien de e, on aura

$$a^t=1+\frac{t\mathrm{l}a}{1}+\frac{t^2\mathrm{l}^2a}{2!}+\frac{t^3\mathrm{l}^3a}{3!}+\frac{t^4\mathrm{l}^4a}{4!}+\dots\dots \qquad (20)$$

puis, en changeant a en e

$$e^t=1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+\dots\dots \qquad (21)$$

qui aura lieu quel que soit t.

En changeant, dans la formule (20), a en $1+x$, elle devient

(*) On peut aussi consulter, sur ce sujet, la page 282 du XIII.^{e} volume du présent recueil.

J. D. G.

$$(1+x)^t=1+\frac{t\mathrm{l}(1+x)}{1}+\frac{t^2\mathrm{l}^2(1+x)}{2!}+\frac{t^3\mathrm{l}^3(1+x)}{3!}+\dots\dots$$

mais on a aussi (15)

$$(1+x)^t=1+\frac{t}{1}x+\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}x^2+\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t-2}{3}x^3+\dots$$

donc en égalant ces valeurs, supprimant l'unité de part et d'autre, et divisant ensuite par t,

$$\mathrm{l}(1+x)+t\left\{\frac{\mathrm{l}^2(1+x)}{2!}+\frac{t\mathrm{l}^3(1+x)}{3!}+\frac{t^2\mathrm{l}^4(1+x)}{4!}+\dots\right\}$$

$$=x+\frac{t-1}{2}x^2+\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t-2}{3}x^3+\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t-2}{3}\cdot\frac{t-3}{4}x^4+\dots$$

d'où en faisant $t=0$

$$\mathrm{l}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots\dots \quad (22)$$

tel est donc le développement du logarithme Néperien de $1+x$.

Terminons par le développement des fonctions circulaires (*). Si, dans l'équation (21), on fait $t=\pm x\sqrt{-1}$, elle deviendra

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\pm\sqrt{-1}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\right) \quad (23)$$

de sorte qu'en posant

(*) M. Ampère acquitte ici l'engagement qu'avait pris M. de Stainville, à la page 240 du IX.e volume du présent recueil.

J. D. G.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots,\\ \psi(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\ldots,\end{array}\right\}\quad(24)$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}e^{+x\sqrt{-1}}=\varphi(x)+\sqrt{-1}.\psi(x)\ ,\\ e^{-x\sqrt{-1}}=\varphi(x)-\sqrt{-1}.\psi(x)\ ;\end{array}\right\}\quad(25)$$

d'où, en multipliant,

$$1=\{\varphi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2\ ;\qquad(26)$$

de sorte que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont, pour chaque valeur de x, les sinus et cosinus d'un certain angle. Cherchons à le déterminer.

En posant $x=1$, dans les équations (24), elles donnent

$$\varphi(1)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots\ldots,$$

$$\psi(1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots\ldots;$$

ce qui donne, en faisant aussi $x=1$, dans l'équation (23),

$$e^{\pm\sqrt{-1}}=\varphi(1)\pm\sqrt{-1}.\psi(1)\ ,$$

d'où

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=\varphi(x)\pm\sqrt{-1}\psi(x)=\{\varphi(1)\pm\sqrt{-1}\psi(1)\}^x\ ;\qquad(27)$$

et, comme on a (26)

$$\{\varphi(1)\}^2+\{\psi(1)\}^2=1\ ,$$

il est permis de considérer $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ comme les sinus et cosinus d'un certain angle constant α, et de poser, conséquemment

$$\text{Cos.}\alpha=\varphi(1)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots\ldots$$

$$\text{Sin.}\alpha=\psi(1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots\ldots$$

l'équation (27) deviendra alors

$$\varphi(x) \pm \sqrt{-1}\,\psi(x) = \{\text{Cos}.\alpha \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\alpha\}^x ,$$

ou, en vertu du théorème d'Euler,

$$\varphi(x) \pm \sqrt{-1}.\psi(x) = \text{Cos}.\alpha x \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}.\alpha x ,$$

ce qui donne évidemment

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \text{Cos}.\alpha x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots , \\ \psi(x) &= \text{Sin}.\alpha x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots ; \end{aligned}\right\} (28)$$

il reste donc à déterminer l'angle constant α.

On a, comme l'on sait, en prenant x suffisamment petit,

$$\alpha x \left\{ \begin{aligned} &> \text{Sin}.\alpha x , \\ &< \text{Tang}.\alpha x = \frac{\text{Sin}\,\alpha x}{\text{Cos}.\alpha x} ; \end{aligned} \right.$$

donc on a

$$\frac{\text{Sin}.\alpha x}{\alpha x} \left\{ \begin{aligned} &< 1 , \\ &> \text{Cos}.\alpha x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots ; \end{aligned} \right.$$

ou, en mettant pour Sin. αx sa valeur $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \dots$,

$$\frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\dots\right) \left\{ \begin{aligned} &< 1 , \\ &> 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\dots \end{aligned} \right.$$

En supposant x décroissant indéfiniment, la première inégalité tendra sans cesse à devenir $\frac{1}{\alpha} < 1$ ou $\alpha > 1$, tandis que l'autre, au contraire, tendra sans cesse à devenir $\frac{1}{\alpha} > 1$ ou $\alpha < 1$; ces deux inégalités ne sauraient donc subsister à la fois qu'autant qu'on aura $x=1$; on a donc simplement (28)

$$\text{Cos.}x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots,$$

$$\text{Sin.}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots$$

GÉOMÉTRIE PURE.

Recherches nouvelles sur les sections du cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ces sections ;

Par M. G. DANDELIN, officier du génie, membre de l'académie royale des sciences de Bruxelles.

(Extrait ; par M. GERGONNE.)

SI quelquefois, dans ce recueil, nous avons montré une prédilection marquée pour l'emploi de l'*analise algébrique*, dans les recherches relatives aux propriétés de l'étendue ; cette prédilection ne va pourtant pas jusqu'à méconnaître le mérite des recherches de *géométrie pure*, lorsque ces recherches sont élégamment conduites, lorsqu'elles sont dégagées de tout emploi des proportions et du calcul, et sur-tout lorsqu'elles peuvent être aisément suivies sans qu'il soit nécessaire d'avoir une figure sous les yeux.

Persuadé que beaucoup de nos lecteurs sont de notre goût sur ce point, nous ne saurions nous refuser à leur faire partager le plaisir que vient de nous causer la lecture des recherches de M.

Dandelin, officier du génie militaire du royaume des Pays-Bas, sur l'hyperboloïde et les hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques; recherches destinées à faire partie du III.^{e} volume des *Mémoires de l'académie royale des sciences* de Bruxelles, qui s'imprime actuellement, et dont nous devons la communication à l'extrême obligeance de M. Quetelet, auteur lui-même d'un très-beau travail sur les caustiques, que nous avons mentionné récemment.

I. Soient deux droites indéfinies, non situées dans un même plan, invariablement liées l'une à l'autre. Si l'on conçoit que l'une d'elles tourne autour de l'autre prise pour axe, elle engendrera, dans son mouvement, une surface de révolution, connue sous le nom d'*hyperboloïde à une nappe*, dont les variétés dépendront, à la fois, et de la plus courte distance entre l'axe et la génératrice et de l'angle que formeront entre elles ces deux droites.

Mais la plus courte distance demeurant la même, la génératrice peut faire le même angle avec l'axe dans deux directions différentes; d'où il suit qu'une même hyperboloïde de révolution à une nappe peut être engendrée de deux manières différentes par une droite tournant autour d'un axe fixe.

Il résulte de là que, par chacun des points de cette surface, on peut toujours tracer deux droites indéfinies qui s'y trouvent entièrement situées; ou encore que cette surface est une sorte de tissu de deux séries d'élémens rectilignes, tels que deux élémens quelconques d'une même série, non situés dans un même plan, ne sauraient se rencontrer, tandis qu'au contraire chaque élément de l'une quelconque des deux séries est coupé, tour à tour, par tous les autres élémens de l'autre série; d'où il suit encore qu'une telle surface peut être considérée comme engendrée par une droite indéfinie qui se meut sur trois élémens quelconques d'une même série.

Toutes les sections d'une telle surface, par des plans perpendiculaires à son axe, sont, comme toutes les sections faites de cette manière, dans les surfaces de révolution, en général, des cercles de rayon variable, ayant leurs centres sur l'axe de révolution; et il est aisé de voir que toutes les portions d'élémens rectilignes de l'une et de l'autre séries, comprises entre deux tels cercles, sont de même longueur, puisque ce sont des droites également inclinées entre deux plans parallèles. Chacune des sections circulaires de l'hyperboloïde peut d'ailleurs être indistinctement considérée comme sa ligne de contact soit avec une sphère inscrite soit avec un cône droit inscrit; et il est clair qu'alors le centre de la sphère ou le sommet du cône est dans l'axe de révolution.

Dans le cas particulier où la génératrice serait perpendiculaire à l'axe de révolution, il est manifeste que la surface engendrée serait un plan. Si, au contraire, cette génératrice était parallèle à l'axe, la surface engendrée serait un cylindre droit. Enfin cette surface serait un cône droit, si la génératrice, n'étant ni perpendiculaire ni parallèle à l'axe, leur plus courte distance était d'une longueur nulle, c'est-à-dire, si la génératrice et l'axe se rencontraient. Ainsi, le plan, le cylindre droit et le cône droit ne sont que des cas particuliers de l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

II. Ces choses ainsi entendues, examinons la nature des sections planes faites dans une telle hyperboloïde. On voit d'abord clairement que, tant que le plan coupant fera avec l'axe un angle aigu plus grand que celui que fait avec lui la génératrice, la section sera une courbe fermée, tandis qu'au contraire lorsque le plan coupant fera avec l'axe un angle aigu plus grand que celui-là, la section sera formée de deux courbes séparées, ayant l'une et l'autre deux branches infinies.

Considérons, en particulier, une section de l'une ou de l'autre sorte; et par l'axe imaginons un plan perpendiculaire au plan de la section, lequel le coupera suivant une droite AA', les points A et A' étant tous deux sur l'hyperboloïde. Parmi toutes les sphères qu'il est possible d'inscrire à cette surface, il y en aura toujours deux qui seront tangentes au plan coupant ; et il est visible que leurs points de contact avec lui seront tous deux situés sur la droite AA'. Désignons par F le point de contact le plus voisin de A et par F' le plus voisin de A'.

Soit M un quelconque des points du périmètre de la section dont nous étudions la nature, et par lequel il passe, comme par tous les autres, deux élémens rectilignes de l'hyperboloïde. Considérons seulement un de ces élémens : soit P le point où cet élémens coupe la ligne de contact de l'hyperboloïde avec la sphère inscrite qui touche le plan coupant en F ; et soit P' celui où ce même élément coupe la ligne de contact de cette surface avec la sphère inscrite qui touche le plan coupant en F' ; alors PP' sera la portion d'élément interceptée entre les plans de deux sections perpendiculaires à l'axe, et conséquemment cette longueur sera constante quel que soit le point M sur le périmètre de la section oblique.

Soient menées présentement MF et MF' ; et remarquons que MF et MP sont deux tangentes menées à une même sphère d'un même point M, et qu'il en est de même de MF' et MP' ; d'où il suit qu'on doit avoir

$$MF=MP \;, \qquad MF'=MP' \;;$$

donc, si le point M se trouve situé entre P et P', on aura

$$MF+MF'=MP+MP'=PP'=\text{constante} \;;$$

et si, au contraire, le point M est sur le prolongement de PP' ; en le supposant situé au-delà de P', on aura

$$MF-MF'=MP-MP'=PP'=\text{constante} \;;$$

de sorte qu'on a ce théorème :

THÉORÈME I. De quelque manière qu'une hyperboloïde de révolution à une nappe soit coupée par un plan ; si l'on conçoit deux sphères à la fois inscrites à cette surface et tangentes au plan coupant ; la somme ou la différence des distances des différens points du périmètre de la section aux points de contact de son plan avec les deux sphères sera constante ; c'est-à-dire, que la *section sera une ellipse ou une hyperbole dont ces points de contact seront les deux foyers.*

Réciproquement, toute ellipse ou toute hyperbole, c'est-à-dire, toute courbe plane telle que la somme ou la différence des distances de ses différens points à deux points fixes pris sur son plan est constante peut, et même d'une infinité de manières différentes, être considérée comme l'une des sections planes faites dans une ellipsoïde de révolution à une nappe. Si, en effet, par l'un quelconque des points du périmètre de cette courbe on conduit une droite hors de son plan, et qu'ensuite on conçoive deux sphères à la fois tangentes au plan de la courbe en ses deux foyers et tangentes à la droite arbitraire; en faisant tourner tout le système autour de la droite qui joint les centres des deux sphères, l'arbitraire engendrera l'hyperboloïde demandée.

Il y a un cas particulier qui fait exception : c'est celui où le plan de la section fait avec l'axe de l'hyperboloïde un angle précisément égal à celui que fait avec lui la génératrice de cette surface. Ce plan ne peut alors être touché que par une seule des sphères inscrites ou, si l'on veut, la seconde a son centre infiniment éloigné et son rayon infini ; mais on démontre aisément que, dans ce cas, les distances des divers points de la courbe au point de contact de la sphère avec son plan croissent exactement de la même quantité que les projections de ces distances sur l'axe de cette courbe ; propriété qui appartient exclusivement à la parabole.

Si l'on se rappelle présentement que le cylindre droit et le cône droit ne sont que des cas particuliers de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, on conclura de ce qui précède les deux théorèmes suivans :

THÉORÈME II. Toute section plane faite dans un cylindre droit est une ellipse dont les foyers sont les points de contact du plan coupant avec deux sphères inscrites au cylindre.

THÉORÈME III. Toute section plane faite dans un cône droit est une ellipse ou une hyperbole dont les foyers sont les points *de contact du plan coupant avec deux sphères inscrites au cône. Dans le cas particulier où une seule sphère inscrite peut toucher le plan coupant, la section est une parabole, et le point de contact de cette sphère en est le foyer* (*).

Réciproquement, toute ellipse, hyperbole ou parabole peut être conçue comme l'une des sections planes d'un cône droit d'une espèce donnée (**), d'où il suit que ces courbes peuvent toujours être considérées comme des perspectives les unes des autres et du cercle, et réciproquement.

III. On peut toujours tracer, sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe, un hexagone rectiligne gauche, dont les côtés consécutifs devront appartenir alternativement aux deux séries d'élémens rectilignes de cette surface, puisqu'autrement ces côtés ne pourraient se couper; de manière que l'hexagone emploîra trois élémens de chacune des deux séries. Ses côtés opposés appartiendront aussi à des séries différentes; de sorte que deux côtés opposés quelconques concourront toujours en un certain point, et seront conséquemment dans un même plan.

Il suit de là que les trois couples de côtés opposés détermineront trois plans qui se couperont en un point; mais, si l'on mène les diagonales qui joignent les sommets opposés, chacune d'elles appartiendra à deux de ces plans, et sera par conséquent dans leur intersection; donc ces diagonales seront dirigées suivant les intersections deux à deux des trois plans dont il vient d'être question; d'ou il suit qu'elles concourront toutes trois à l'intersection de ces trois plans.

Soient A, A', A'' les élémens rectilignes de l'une des séries formant les côtés de rangs impairs de l'hexagone gauche, et soient B, B', B'' les trois élémens de l'autre série formant les côtés de

(*) Ce dernier théorème avait d'abord été directement découvert par M. Quetelet. M. Dandelin n'a fait que l'étendre à l'hyperboloïde.

(**) Voy. aussi, sur ce sujet, la pag. 126 du XIV.e vol. du présent recueil.

rangs pairs ; de telle sorte que A et B, A′ et B′, A″ et B″ soient les côtés opposés. Convenons de désigner les points, au nombre de neuf, où les trois élémens de l'une des séries sont coupés par les élémens de l'autre série, par les lettres des élémens qui y concourent, renfermées entre deux parenthèses. Alors, de ces neuf points, les trois (AB), (A′B′), (A″B″) seront ceux où concourent les directions des côtés opposés de l'hexagone ; et les six autres en seront les sommets. En supposant donc que les côtés consécutifs de cet hexagone soient A, B″, A′, B, A″, B′, ses sommets consécutifs seront

$$(AB''),\quad (B''A'),\quad (A'B),\quad (BA''),\quad (A''B'),\quad (B'A).$$

Remarquons présentement que le côté A de l'angle (AB″) et le côté B de son opposé (BA″) concourant en (AB), les plans de ces deux angles doivent se couper suivant une droite passant par ce point (AB) ; mais les côtés B″ et A″ de ces deux angles concourant au point (A″B″), l'intersection de leurs plans doit aussi passer par ce dernier point ; donc la droite qui joint les points (AB) et (A″B″) est l'intersection des plans des angles opposés (AB″) et (BA″).

Par un raisonnement tout à fait semblable, on prouvera que la droite qui joint les points (A″B″) et (A′B′) est l'intersection des plans des angles opposés (B″A′) et (A″B′), et que la droite qui joint les points (A′B′) et (AB) est l'intersection des plans des angles opposés (A′B) et (B′A).

Ainsi les intersections des plans des trois systèmes d'angles opposés (AB″) et (BA″), (B″A′) et (A″B′), (A′B) et (B′A) sont les trois côtés d'un triangle dont les sommets sont (AB), (A′B′), (A″B″), et conséquemment les trois intersections sont dans un même plan, qui est le plan même de ce triangle.

On a donc cet élégant théorème :

THÉORÈME IV. Si, sur une hyperboloïde de révolution à une nappe, on trace un hexagone rectiligne gauche, dont les côtés appartiennent alternativement aux élémens rectilignes de l'une et de *l'autre séries de cette surface 1.° les diagonales qui joindront les sommets opposés de cet hexagone concourront toutes trois en un même point ; les plans de ces angles opposés se couperont suivant des droites qui seront toutes trois dans un même plan* (*).

IV. Soit présentement un cercle sur la circonférence duquel soient pris arbitrairement six points désignés par a, b'', a', b, a'', b'. Ces six points pourront également être considérés, ou comme les sommets consécutifs d'un hexagone plan inscrit, ou comme les points de contact consécutifs d'un hexagone plan circonscrit.

Considérons ce cercle comme la section d'une hyperboloïde quelconque de révolution à une nappe, par un plan perpendiculaire à son axe, et considérons sur cette hyperboloïde les élémens rectilignes alternatifs A, B'', A', B, A'', B' qui passent respectivement par les six points de la circonférence de dénominations analogues, ces élémens formeront, comme ci-dessus, un hexagone gauche sur l'hyperboloïde, et les traces des plans des angles consécutifs (AB''), (B''A'), (A'B), (BA''), (A''B'), (B'A) de cet hexagone gauche sur le plan du cercle ne seront autre chose que les côtés consécutifs ab'', $b''a'$, $a'b$, ba'', $a''b'$, $b'a$ de l'hexagone plan inscrit à ce cercle. Or, par le précédent théorème, les plans des sommets opposés de l'hexagone gauche se coupent suivant trois droites situées dans un même plan, lesquelles doivent conséquemment percer le plan du cercle en trois points en lignes droites ; donc les traces de ces plans, c'est-à-dire, les directions des côtés opposés de l'hexagone inscrit au cercle doivent aussi concourir à ces trois points.

Considérons présentement notre cercle comme la ligne de con-

(*) Le théorème aurait également lieu pour l'hexagone rectiligne gauche tracé sur la paraboloïde hyperbolique ; et c'est à cela que reviennent à peu près les articles de MM. Servois et Rochat insérés aux pages 332 et 336 du tom. I.er du présent recueil. Il aurait lieu, plus généralement, pour tout hexagone gauche dont les côtés des rangs impairs seraient trois droites non situées deux à deux dans un même plan, et les côtés de rangs pairs trois autres droites posant sur celles-là.

tact de l'hyperboloïde avec un cône droit circonscrit, dont le sommet sera conséquemment dans l'axe de révolution. Si, par chacun des points a, b'', a', b, a'', b', on conduit un plan tangent à l'hyperboloïde, ce plan passera par le sommet du cône, contiendra l'élément rectiligne de l'hyperboloïde de dénomination analogue à celle de ce point, et coupera le plan du cercle suivant une tangente au même point. Les six plans tangens ainsi conduits seront donc les faces d'un angle hexaèdre circonscrit au cône, et sur lequel se trouvera tracé l'hexagone gauche; et cet angle hexaèdre sera coupé par le plan du cercle suivant un hexagone plan circonscrit à ce cercle; or, par le théorème qui vient d'être démontré, les diagonales qui joignent les sommets opposés de l'hexagone gauche concourent en un même point; donc les plans diagonaux qui joignent les arêtes opposés de l'angle hexaèdre se coupent suivant une même droite, menée de son sommet à ce point; donc enfin les diagonales qui joignent les sommets opposés de l'hexagone plan circonscrit au cercle doivent passer toutes trois par le point où son plan est percé par cette droite.

Il demeure donc prouvé, par ce qui précède, 1.° que, dans tout hexagone inscrit au cercle, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même ligne droite; 2.° que, dans tout hexagone circonscrit au cercle, les diagonales qui joignent les sommets opposés passent toutes trois par un même point.

Or, comme tout hexagone inscrit ou circonscrit à une section conique quelconque est la perspective d'un hexagone inscrit ou circonscrit au cercle; et comme, d'un autre côté, les perspectives des points en ligne droite et des droites qui concourent au même point sont aussi des points en ligne droite ou des droites qui concourent au même point, on a ces deux théorèmes :

THÉORÈME V. Dans tout hexagone inscrit à une section conique, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même ligne droite.

THÉORÈME VI. Dans tout hexagone circonscrit à une section conique, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point (*).

Ainsi se trouvent établis, sans calcul et par une sorte d'intuïtion les deux théorèmes de Pascal et de M. Brianchon, c'est-à-dire, les plus importans peut-être de tous ceux qui composent la théorie des sections coniques.

Si les recueils de l'académie royale des sciences de Bruxelles offrent souvent des mémoires du mérite de ceux de MM. Quetelet et Dandelin, ils ne pourront manquer d'être accueillis et recherchés par tous les amateurs de la belle géométrie.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de Géométrie.

Si, sur trois droites AB, $A'B'$, $A''B''$ de longueur quelconque, se coupant en un même point P, considérées deux à deux comme diagonales, on construit trois quadrilatères $A'A''B'B''$, $A''AB''B$, $AA'BB'$, ayant conséquemment, deux à deux, une diagonale commune; les points de concours des directions des côtés opposés de ces quadrilatères seront les six sommets d'un quadrilatère complet tel que chacun des points d'intersection de ses trois diagonales se trouvera sur la direction de l'une des trois droites données.

FIN DU QUINZIÈME VOLUME.

(*) Voy., sur le même sujet, deux articles insérés dans le IV.e volume du présent recueil, pag. 78 et 381.

TABLE

Des matières contenues dans le XV.e volume des Annales.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ARITHMÉTIQUE.

DYNAMIQUE.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES ET SURFACES.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

GNOMONIQUE.

HYDROSTATIQUE.

OPTIQUE.

STATIQUE.

TRIGONOMÉTRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tom. VIII, p. 380,	Problèmes I, II, III; résolus Tom. XV, pag.	124—129
Tom. XIII, p. 120,	Problème.	62—69
Tom. XIV, p. 196,	Problèmes I, II, III, IV.	——
Pag. 268,	Théorèmes I, II, III, IV.	100—104
Pag. 308	Problème I.	69—76
	Problèmes II, III.	——
Pag. 391	Théorèmes I, II.	129—132, 313—316
	Théorème III.	97—100
Tom. XV, p. 40,	Problème.	197—204
Pag. 76,	Problèmes I, II.	——
Pag. 104,	Problèmes I, II, III, IV.	——
Pag. 132	Problèmes I, II.	236—244
Pag. 164	Théorème.	——
Pag. 204	Problème.	——
Pag. 244,	Problèmes I, II, III.	——
Pag. 272	Problème.	——
	Théorème I.	320—326
	Théorème II.	——
	Théorème III.	313—315

ERRATA

Pour le quinzième volume des Annales.

TOM. XIV, pag. 391, ligne 4, en remontant — *Problèmes* lisez *Théorèmes*.

Tom. XV, pag. 44 — *ajoutez en note* :

Nous avons lu quelque part que le comte de Buquoy avait fait de ce procédé un instrument universel d'intégration.

J. D. G.

Page 54, ligne 11, — le premier membre doit porter l'exposant 2.

Page 116, ligne 9, en remontant — ayant une surface moindre que la sienne; *lisez* : sous une surface moindre.

Page 117, avant dernière ligne — *minimum* lisez *maximum*.

Page 130, ligne 8, — placez une virgule après le mot : *simultanément*.

Ligne 12, — placez une virgule après le mot : *sens*.

Page 136, ligne 7, en remontant — *au carré* ; lisez *au double du carré*.

Page 185, ligne 5, — fermez la parenthèse avant dx.

Page 245, au titre, — TRANSCENDANTE ; lisez DESCRIPTIVE.

Page 256, — *ajoutez en note au bas de la page*.

Il y a déjà long-temps que feu *Français* de Colmar, avait découvert ces théorèmes et beaucoup d'autres analogues, que l'on trouve énoncés, sans démonstration, à la page 341, du V.e volume du présent recueil.

J. D. G.

Page 272, au titre, — *Problèmes* ; lisez : *Problème*.

Après le problème, mettez en titre : *Théorèmes de géométrie*.

Ligne 9, en remontant — *après le mot* : tétraèdre ; *ajoutez*, dans lequel ces arêtes sont perpendiculaires les unes aux autres.

Page 319, ligne 8, en remontant — *des produits* ; lisez : *des doubles produits*.

Page 345, au titre — CAUTIQUES : *lisez* : CAUSTIQUES.

Page 348, ligne 8, — placez une virgule après le mot : *réflexion*.

Ligne 9, — supprimez la virgule après le mot : *rayonnant*.

Page 355, ligne 3, en remontant — (x,y) ; *lisez* : (t',u').

Page 356, avant dernière ligne, — $(x-x')+p(y-y')$; *lisez* : $(x-t)+p(y-u)$.

Page 357, ligne première, — $(x-x')+p(y-y')$; *lisez* : $(x-t)+p(y-u)$.