CH. STURM

Solution du problème de statique énoncé à la page 28 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 381-389
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__381_1>

Solution du problème de statique énoncé à la page 28 *du présent volume ;*

Par M. CH. STURM.

PROBLÈME. *Un fil non pesant, parfaitement flexible et inextensible, d'une longueur déterminée, est attaché, par ses extrémités, à deux points fixes dont la distance donnée est moindre que sa longueur. Tous ses points sont attirés ou repoussés par un centre fixe, suivant une fonction déterminée de la distance. On demande l'équation la plus simple de la courbure du fil en équilibre? On demande, en particulier, ce que devient cette équation, lorsque l'attraction ou la répulsion suit la raison inverse du quarré de la distance?*

Solution. Soit rapportée la courbe du fil à trois axes rectangulaires passant par le centre d'attraction ou de répulsion, et soient x, y, z les coordonnées de l'un quelconque des points de sa longueur ; soient r la distance de ce point au même centre, s la portion de la longueur de ce fil comptée depuis le même point jusqu'à la première de ces deux extrémités fixes.

Les équations connues de l'équilibre d'un fil parfaitement flexible et inextensible sont

$$\left.\begin{aligned} -T\frac{dx}{ds} &= A+\int X ds\,, \\ -T\frac{dy}{ds} &= B+\int Y ds\,, \\ -T\frac{dz}{ds} &= C+\int Z ds\,; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dans lesquelles T représente la tension au point (x, y, z) de la courbure du fil ; tension dirigée suivant la tangente à cette courbure en ce point ; et où X, Y, Z sont les forces parallèles aux axes qui sollicitent ce même point, tandis que A, B, C sont les composantes, parallèles aux mêmes axes, de la force par laquelle le premier des deux points extrêmes est retenu, et qui, lorsque ce point est fixe, exprime la pression qu'il supporte. Les intégrales qui entrent dans ces équations doivent toujours être prises depuis ce premier point jusqu'à celui que l'on considère, c'est-à-dire, le point (x, y, z).

En différentiant les équations (1), on trouve

$$\left.\begin{aligned}-\mathrm{d}T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}-T\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}&=X\mathrm{d}s\,,\\-\mathrm{d}T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-T\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}&=Y\mathrm{d}s\,,\\-\mathrm{d}T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}-T\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}&=Z\mathrm{d}s\,;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

dont la somme des produits respectifs par $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ est

$$-\mathrm{d}T=X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z\,.\qquad(3)$$

Lorsqu'on suppose que les particules du fil sont sollicitées par une force R qui émane de l'origine, on a

$$X=\frac{Rx}{r}\,,\quad Y=\frac{Ry}{r}\,,\quad Z=\frac{Rz}{r}\,.$$

Avec ces valeurs et observant que

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\,,$$

l'équation (3) deviendra

$$-\mathrm{d}T=R\mathrm{d}r\,,$$

d'où

$$T=c-\int R\mathrm{d}r\,;\qquad(4)$$

c étant la constante arbitraire. Or, la force R étant supposée une fonction de r, $\int R\mathrm{d}r$ en sera une aussi, de sorte que, dans l'état d'équilibre, *la tension du fil en chacun de ses points dépend uniquement de la distance de ce point au centre attirant.*

Si l'on substitue les valeurs de X, Y, Z dans les équations (2), on reconnaît qu'elles admettent une intégrale de la forme

$$z=ax+by\ .$$

En effet, en mettant cette valeur de z dans la dernière de ces trois équations, elle se trouvera, en vertu des deux premières, satisfaite indépendamment des constantes arbitraires a et b. On voit donc que *le fil en équilibre est tout entier dans le plan conduit par ses deux extrémités fixes et par le centre d'où émanent les forces*, ce qu'il était d'ailleurs facile de prévoir, puisque tout est égal de part et d'autre de ce plan. En exprimant que le plan dont il s'agit contient les deux extrémités fixes, on déterminera les deux constantes a et b.

Pour simplifier nos formules, faisons coïncider ce plan avec celui des xy, en posant $z=0$, d'où $x^2+y^2=r^2$ et $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}s^2$. Laissant donc de côté la troisième des équations (2) et éliminant $\mathrm{d}T$ entre les deux autres, nous aurons

$$T\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x\ . \qquad (5)$$

Pour intégrer cette équation, nous passerons aux coordonnées polaires, en posant

$$x=r\mathrm{Cos}.u\ , \qquad y=r\mathrm{Sin}.u\ ;$$

d'où résultera

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=r^2\mathrm{d}u\ ,$$

et par suite

$$X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x=\frac{R(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{r}=Rr\mathrm{d}u\ .$$

Posons encore

$$\frac{dx}{ds}=\text{Cos.}\varphi\,, \qquad \frac{dy}{ds}=\text{Sin.}\varphi\,,$$

nous aurons

$$\frac{dx}{ds}\,d.\,\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}\,d.\,\frac{dx}{ds}=d\varphi\;;$$

mais, on trouve

$$\text{Tang.}(\varphi-u)=\frac{\text{Tang.}\varphi-\text{Tang.}u}{1+\text{Tang.}\varphi\text{Tang.}u}=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{ydy}{xdx}}=\frac{xdy-ydx}{xdx+ydy}=\frac{rdu}{dr}\;;$$

posant donc

$$\frac{rdu}{dr}=z\,, \qquad \text{d'où} \qquad du=\frac{zdr}{r}\,, \qquad (6)$$

on aura

$$\varphi-u=\text{Arc}(\text{Tang.}=z)\,, \qquad d\varphi=du+\frac{dz}{1+z^2}\,.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation (5) devient

$$(T-Rr)du+\frac{Tdz}{1+z^2}=0\;;$$

puis, en mettant pour du sa valeur (6) et décomposant,

$$\frac{dr}{r}-\frac{Rdr}{T}+\frac{dz}{r}-\frac{zdz}{1+z^2}=0\,.$$

A cause de $dT=-Rdr$, l'intégration par logarithmes donnera

$$\frac{Trz}{\sqrt{1+z^2}}=h\;; \qquad (7)$$

h étant la constante arbitraire.

Comme, en vertu de l'équation (6), z est la tangente tabulaire de l'angle que fait la courbe, en chacun de ses points avec son rayon vecteur, il s'ensuit que $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ est le sinus de cet angle, indépendamment du signe de z ; l'équation (7) signifie donc que *le moment de la tension, pris par rapport au centre fixe, est une quantité constante.*

Si l'on résout l'équation (7) par rapport à z, et qu'on remplace ensuite z par sa valeur (6), on trouvera

$$\mathrm{d}u=\pm\frac{h\mathrm{d}r}{r\sqrt{(Tr)^2-h^2}}\,. \qquad (8)$$

Dans cette expression de $\mathrm{d}u$, il faudra prendre le signe supérieur pour toute la portion de la courbe où le rayon vecteur croît en même temps que l'angle qu'il fait avec l'axe. Ce rayon sera un *maximum* ou un *minimum*, et aura sa direction normale à la courbe, quand on aura $(Tr)^2-h^2=0$, ou $Tr=\pm h$.

En intégrant l'équation (8), dans laquelle les deux variables sont séparées, on aura l'équation polaire de la courbe cherchée.

Quant à sa rectification, en substituant l'expression de $\mathrm{d}u$ dans la formule $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}u^2}$, on trouvera à intégrer

$$\mathrm{d}s=\pm\frac{Tr\mathrm{d}r}{\sqrt{(Tr)^2-h^2}}\,. \qquad (9)$$

Examinons présentement le cas particulier où la force R agit en raison inverse du quarré de la distance. Faisons, en conséquence, $R=\frac{f}{r^2}$, f étant une constante, qui devra être supposée positive ou négative, suivant que la force R sera supposée répulsive ou attractive. Les formules (4) et (9) deviendront alors

$$T=c+\frac{f}{r}\;,\qquad s=\frac{\sqrt{(cr+f)^2-h^2}}{c}+\text{Const.}$$

L'équation (8) deviendra, dans le même cas,

$$du=\pm\frac{h\,dr}{r\sqrt{(cr+f)^2-h^2}}\;. \qquad (10)$$

Nous nous dispenserons d'en écrire l'intégrale, qu'on peut obtenir facilement, en posant $r=\frac{1}{r'}$, et qui prendra trois formes différentes suivant qu'on aura

$$f^2-h^2>0 \quad \text{ou} \quad =0 \quad \text{ou} \quad <0\;.$$

La détermination des constantes arbitraires introduites par les intégrations se fera en exprimant que la courbe passe par les deux points fixes extrêmes, et qu'elle a, entre ces deux points, une longueur donnée.

En vertu d'un théorème connu, la courbure du fil en équilibre ne changerait pas, si l'on supposait le centre unique d'attraction remplacé par celui d'une sphère homogène dont tous les points jouiraient de la même propriété que lui.

La courbe à laquelle appartient l'équation (8) jouit d'une propriété assez remarquable; elle est entre toutes les courbes de même longueur et passant par les mêmes points extrêmes, celle qui rend l'intégrale $\int ds\int r dr$ un *minimum* ou un *maximum.* Cette propriété, remarquée par Euler, dépend d'une propriété plus générale, qui se rattache elle-même au principe des vitesses virtuelles. En voici toutefois l'exposé direct :

« Toutes les notations employées dans l'équation (1) étant ad-
» mises, si la formule $Xdx+Ydy+Zdz$ est une différentielle

» exacte à trois variables ; et qu'on représente par U son intégrale, la courbe formée par le fil en équilibre sera entre toutes les courbes de même longueur et se terminant aux mêmes points, celle qui rendra l'intégrale $\int U\mathrm{d}s$ prise entre ces points, un *minimum* ou un *maximum* ».

Cherchons en effet la courbe qui remplit cette dernière condition. En suivant la méthode générale des variations, il faudra égaler à zéro la variation de la formule

$$\int U\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}+a\int\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}\,,$$

dans laquelle a désigne un nombre qui doit être déterminé par la condition d'avoir, entre les limites données,

$$\int\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}=l\ .$$

Posons donc

$$\delta\int(U+a)\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}=0\ ;$$

nous en tirerons

$$\int\Big\{\delta U\mathrm{d}s+(U+a)\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\delta x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\delta y+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\delta z\Big)\Big\}=0\ .$$

Faisant disparaître $\mathrm{d}\delta x$, $\mathrm{d}\delta y$, $\mathrm{d}\delta z$, au moyen de l'intégration par parties, il viendra

$$(U+a)\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\delta x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\delta y+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\delta z\Big)$$

$$+\int\Big\{\delta U\mathrm{d}s-\delta x\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}-\delta y\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\delta z\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\Big\}=0\ .$$

Mais, par hypothèse, la formule $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$ est une différentielle exacte à trois variables, et l'on a

$\mathrm{d}U$

$$\mathrm{d}U = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z\ ,\quad \text{d'où}\quad \delta U = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\ ;$$

au moyen de quoi l'équation ci-dessus devient

$$(U+a)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\delta y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\delta z\right)$$

$$+\int\left\{\left[X\mathrm{d}s - \mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right]\delta x + \left[Y\mathrm{d}s - \mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right]\delta y + \left[Z\mathrm{d}s - \mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right]\delta z\right\} = 0$$

Les deux points extrêmes de la courbe étant fixes, la partie hors du signe intégral du premier membre de cette équation doit s'évanouir ; et, en égalant séparément à zéro les quantités multipliées par δx, δy, δz, sous ce même signe intégral, on obtient, pour les trois équations de la courbe cherchée,

$$\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = X\mathrm{d}s\ ,$$

$$\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = Y\mathrm{d}s\ ,$$

$$\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = Z\mathrm{d}s\ .$$

Deux de ces équations doivent comporter la troisième ; et c'est en effet ce qui résulte de la relation $\mathrm{d}U = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$.

En posant $T = -(U+a)$, ces équations deviennent identiques avec les équations (1), et par conséquent la courbe qu'elles représentent est celle qu'affecte le fil flexible en équilibre, sous l'action des forces X, Y, Z, sollicitant chacun de ses points ; ce qu'il fallait démontrer.