ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FAUQUIER

Dynamique. Démonstration de la proportionnalité des forces aux vitesses

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 370-373
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__370_1>

DYNAMIQUE.

Démonstration de la proportionnalité des forces aux vitesses ;

Par M. Fauquier, capitaine de génie, ancien élève de l'école polytechnique.

Une observation de tous les instans prouve que les phénomènes du mouvement sont les mêmes, soit à bord d'un navire, soit à la surface de la terre, quels que soient la vitesse du navire ou celle de la terre ; de sorte que l'on peut admettre, comme principe d'expérience, que *le mouvement relatif des corps n'est aucunement influencé par l'action d'une vitesse qui leur est commune.*

Ce principe admis, soient M un mobile quelconque, V sa vitesse due au mouvement de la terre, et F la force dont il est animé, en vertu de cette vitesse ; on aura généralement $F=\mathrm{f}(V)$ d'où $V=\psi(F)$; mais, comme F et V doivent s'évanouir en même temps, nous pourrons écrire

$$V = F\varphi(F) .$$

Soit décomposée la force F en trois autres a, b, c, parallèles à trois axes rectangulaires, et soient x, y, z les vitesses du mobile suivant ces trois axes, nous aurons

$$x = a\varphi(a) , \quad y = b\varphi(b) , \quad z = c\varphi(c) . \qquad (1)$$

Si nous supposons en outre ce même mobile M soumis à l'action d'une autre force F', étrangère au mouvement de la terre, et dont a', b', c' soient les composantes, suivant les trois mêmes axes; ce mobile sera sollicité, suivant ces axes, par les forces

$$a + a' , \quad b + b' , \quad c + c' ;$$

sa vitesse, suivant le premier de ces axes, résultant de l'action simultanée des deux forces F, F' sera donc

$$(a + a')\varphi(a + a') ,$$

de sorte qu'en désignant par x' l'accroissement de vitesse dû à la force F', on aura

$$x + x' = (a + a')\varphi(a + a') ; \qquad (2)$$

mais, en développant par rapport à a', on a

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi'(a) \cdot \frac{a'}{1} + \varphi''(a) \cdot \frac{a'^2}{1.2} + \ldots\ldots ;$$

en substituant donc dans (2) et développant, on obtiendra un résultat de cette forme

$$x+x'=a\varphi(a)+Aa'^{\alpha}+Ba'^{\beta}+Ca'^{\gamma}+\ldots\ldots.$$

où A, B, C,...... seront des fonctions de a sans a'. Retranchant enfin de cette dernière la première des équations (1), on aura

$$x'=Aa'^{\alpha}+Ba'^{\beta}+Ca'^{\gamma}+\ldots\ldots. \qquad (3)$$

et il s'agira de déterminer les quantités A, B, C,....... α. β, γ,.......

Or, puisque le premier membre de cette équation exprime la vitesse relative du mobile, et que cette vitesse doit être indépendante de la vitesse de la terre, le second membre devra aussi en être indépendant, et conséquemment ne pas contenir a; les coefficiens A, B, C,....... doivent donc être des quantités constantes.

Mais, d'un autre côté, au lieu de substituer, dans l'expression $a\varphi(a)$, $a+a'$ à la place de a, ce qui donne, comme nous l'avons vu,

$$a\varphi(a)+Aa'^{\alpha}+Ba'^{\beta}+Ca'^{\gamma}+\ldots\ldots.;$$

il revient évidemment au même d'y changer d'abord a en $a+\frac{1}{2}a'$, ce qui donne

$$a\varphi(a)+A(\tfrac{1}{2}a')^{\alpha}+B(\tfrac{1}{2}a')^{\beta}+C(\tfrac{1}{2}a')^{\gamma}+\ldots\ldots..$$

et de changer ensuite de nouveau, dans le résultat, a en $a+\frac{1}{2}a'$; ce qui donnera, à cause de A, B, C,...... indépendans de a,

$$x'=a\varphi(a)+2A(\tfrac{1}{2}a')^{\alpha}+2B(\tfrac{1}{2}a')^{\beta}+2C(\tfrac{1}{2}a')^{\gamma}+\ldots..; \qquad (4)$$

comparant donc (4) à (3), on devra avoir

2

$$2(\tfrac{1}{2}a')^{\alpha}=a'^{\alpha}\,,\quad 2(\tfrac{1}{2}a')^{\beta}=a'^{\beta}\,,\quad 2(\tfrac{1}{2}a')^{\gamma}=a'^{\gamma}\,,\ldots\ldots$$

ce qui ne saurait avoir lieu qu'autant que les exposans $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\ldots\ldots$ seront tous égaux à l'unité.

En posant donc, pour abréger,

$$A+B+C+\ldots\ldots\ldots=K\,,$$

nous aurons, pour la vitesse relative, suivant le premier de nos trois axes, $x'=Ka'$; les vitesses relatives suivant les trois axes seront donc respectivement

$$x'=Ka'\,,\qquad y'=Kb'\,,\qquad z'=Kc'\,,$$

K étant une constante.

Si donc un corps quelconque est sollicité par une force quelconque f, qui lui imprime une vitesse v, on aura généralement

$$v=Kf\,,$$

où K sera une constante; *les forces sont donc, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelles aux vitesses qu'elles impriment.*

Nîmes, le 18 août 1823.