ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie élémentaire. Démonstration d'un théorème énoncé dans le Philosophical Magazine, pour septembre 1823

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 334-336
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__334_1>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème énoncé dans le Philosophical Magazine, *pour septembre* 1823;

Par M. GERGONNE.

EUCLIDE et la plupart des géomètres de nos jours, pour démontrer la propriété des carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle, tirent des droites des sommets des deux angles aigus du triangle dont il s'agit aux sommets opposés des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit, et abaissent en outre du sommet de ce dernier angle une perpendiculaire sur l'hypothénuse.

Dans le numéro de septembre 1823 du *Philosophical Magazine* (pag. 236), M. *J. HAMETT* propose de démontrer que ces trois droites se coupent en un même point: c'est là une chose très-facile, comme on va le voir.

Soient C le sommet de l'angle droit, A celui du plus grand des deux angles aigus et B le sommet du plus petit.

Soient P le sommet opposé à A du carré construit sur CB et Q le sommet opposé à B du carré construit sur CA.

Menons AP et BQ, coupant respectivement CB et CA en A′ et B′, et abaissons du sommet C, sur l'hypothénuse AB, la perpendiculaire CC′.

Les triangles rectangles semblables PBA′ et ACA′ donneront

$$\frac{BA'}{CA'}=\frac{BP}{CA}=\frac{CB}{CA} .$$

Les triangles rectangles semblables QAB′ et BCB′ donneront pareillement

$$\frac{CB'}{AB'}=\frac{CB}{AQ}=\frac{CB}{CA} .$$

On a enfin, par la propriété connue du triangle rectangle,

$$\frac{AC'}{BC'}=\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2} .$$

En multipliant ces trois équations membre à membre, il vient, en réduisant,

$$\frac{AC'.CB'.BA'}{CA'.AB'.BC'}=1 ,$$

c'est-à-dire

$$AC'.CB'.BA'=CA'.BC'.AB' ;$$

or, il est connu de tous ceux qui n'ont pas cru devoir borner leurs études géométriques aux élémens d'Euclide, que, lorsque trois points A′, B′, C′ sont situés sur les côtés respectifs BC, CA, AB d'un triangle ABC, de manière à satisfaire à cette condition, les droites AA′, BB′, CC′ se coupent toutes trois au même point. Le théorème se trouve donc complètement démontré.

Cette démonstration, quelque simple et rigoureuse qu'elle soit, pourra fort bien ne pas complètement remplir l'attente de M. Hamett, qui désire qu'on ne s'y appuie sur aucune proposition postérieure à la XLVII.e d'Euclide; mais il y en a dans Euclide, avant celle-là, beaucoup plus qu'il n'en faut pour démontrer les propriétés des triangles semblables, desquelles on déduit ensuite immédiatement le théorème sur lequel nous nous sommes appuyés. Il n'y a donc point de cercle vicieux dans tout ceci, et il ne s'agira que de disposer les propositions d'Euclide dans un ordre un peu différent; ce qu'on peut sans doute se permettre sans se rendre coupable de sacrilége.