ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

# Solution de deux des problèmes de géométrie, proposés à la page 304 du XIII.e volume des Annales

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 14 (1823-1824), p. 24-27
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__24_0>

## *Solution de deux des problèmes de géométrie, proposés à la page 304 du XIII.e volume des* Annales ;

### Par M. C. G. (*).

PROBLÈME I. *Deux angles mobiles donnés étant assujettis à tourner sur un plan autour de leurs sommets fixes, de telle sorte qu'un côté de l'un et un côté de l'autre se coupent constamment sur une droite donnée, quelle est la courbe que décrira sur ce plan l'intersection mobile des deux autres côtés de ces angles ?*

*Solution.* Soit prise pour axe des $x$ la droite indéfinie sur laquelle doivent se couper constamment deux côtés de ces angles, en prenant pour axe des $y$ une perpendiculaire quelconque à cette droite. Soient alors $(a\,,\,b)$ et $(a'\,,\,b')$ les deux sommets fixes, $m$ et $m'$ les tangentes tabulaires des angles correspondans, et enfin $t$ la distance variable de l'origine au point de l'axe des $x$ où deux côtés de ces angles doivent se couper.

Représentons les équations des côtés des deux angles ainsi qu'il suit :

(*) M. C. G. nous a aussi adressé une démonstration du théorème énoncé à la page 212 du tome XIII.e, mais, comme elle est en tout semblable à celle qu'a donné M. Querret à la page 321 du même volume, il nous suffira de la mentionner ici.

*J D. G.*

$y-b$

$$y-b=M(x-a)\ ,\qquad y-b'=M'(x-a')\ ;$$

$$y-b=N(x-a)\ ,\qquad y-b'=N'(x-a')\ ;$$

les équations de la dernière ligne étant celles des côtés qui doivent se couper sur l'axe des $x$, à une distance $t$ de l'origine. Nous aurons

$$m=\frac{M-N}{1+MN}\ ,\qquad m'=\frac{M'-N'}{1+M'N'}\ .$$

mais, en mettant $t$ pour $x$ et $0$ pour $y$ dans les équations de la dernière ligne, elles doivent être satisfaites; d'où il suit qu'on doit avoir

$$-b=N(t-a)\ ,\qquad -b'=N'(t-a')$$

Substituant donc les valeurs de $N$ et $N'$, tirées de ces deux équations dans les expressions de $m$ et $m'$, celles-ci deviendront

$$m=\frac{Mt+(b-Ma)}{t-(a+Mb)}\ ,\qquad m'=\frac{M't+(b'-M'a')}{t-(a'+M'b')}\ ;$$

ce qui donne

$$(M-m)t=(a+mb)M-(b-ma)\ ;$$

$$(M'-m')t=(a'+m'b')M'-(b'-m'a')\ ;$$

équations entre lesquelles éliminant $t$, il viendra

$$\begin{aligned}&\{(mb-m'b')+(a-a')\}MM'\\&+\{(b'-mm'b)-m'(a+a')\}M\\&-\{(b-mm'b')-m(a+a')\}M'\\&-\{(mb'-m'b)+mm'(a-a')\}=0\ ;\end{aligned}$$

mettant enfin dans celle-ci pour $M$ et $M'$ les valeurs données par les équations de la première ligne, et chassant les dénominateurs, nous aurons, pour l'équation de la courbe demandée,

$$\{(mb'-m'b)+mm'(a-a')\}(x-a)(x-a')$$
$$-\{(mb-m'b')+(a-a')\}(y-b)(y-b')$$
$$+\{(b-mm'b')-m(a+a')\}(x-a)(y-b')$$
$$-\{(b'-mm'b)-m'(a+a')\}(x-a')(y-b)=0\ ;$$

cette courbe est donc une ligne du second ordre, et on voit de plus qu'elle passe par les sommets des deux angles.

Il est aisé de voir que cette courbe peut être une quelconque des sections coniques. On trouve, en particulier, qu'elle est un cercle, si l'on a

$$(1+mm')(a-a')+(m-m')(b+b')=0\ .$$

*PROBLÈME II. Quelle est la courbe plane de chacun des points de laquelle menant des droites à deux points fixes de son plan, ces droites interceptent entre elles des portions égales d'une droite indéfinie donnée sur le même plan?*

*Solution.* Soient prises pour axe des $x$ la droite indéfinie donnée, et pour axe des $y$ une perpendiculaire quelconque à cette droite. Soient $(a, b)$ et $(a', b')$ les deux points fixes donnés, $t$ et $t'$ les distances variables de l'origine aux deux points où l'axe des $x$ est coupé par les droites qui, partant d'un même point de la courbe, passent par les deux points fixes; et soit enfin $k$ la portion de l'axe des $x$ qui doit être interceptée par ces deux droites.

En prenant pour équations respectives des droites mobiles

$$y-b=M(x-a)\ , \qquad y-b'=M'(x-a')\ ,$$

il faudra d'abord exprimer qu'elles sont satisfaites en y mettant $t$ et $t'$ pour $x$ et zéro pour $y$, ce qui donnera

$$-b=M(t-a)\ , \qquad -b'=M'(t'-a')\ ,$$

d'où

$$t=\frac{aM-b}{M}\ , \qquad t'=\frac{a'M'-b'}{M'}\ ;$$

mais on doit avoir

$$t-t'=k\ ;$$

donc, en substituant,

$$(a-a'-k)MM'+b'M-bM'=0\ ;$$

substituant enfin dans cette dernière équation, pour $M$ et $M'$ les valeurs données par les équations des deux droites, il viendra, en chassant les dénominateurs, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$(a-a'-k)(y-b)(y-b')+b'(y-b)(x-a')-b(y-b')(x-a)=0\ ,$$

équation qui appartient essentiellement à une hyperbole passant par les deux points donnés.

Il est clair que, pour chacun de ces deux points, l'une des droites qui devront intercepter la longueur donnée sur l'axe des $x$ sera la droite passant par l'une et l'autre, tandis que l'autre sera la tangente au point dont il s'agit, laquelle conséquemment doit couper l'axe des $x$ à une distance $k$ du point où il est coupé par la droite qui contient les deux points fixes.

Quelle que soit la longueur $k$, on peut toujours par les points fixes conduire deux droites parallèles entre elles qui interceptent cette même longueur sur l'axe des $x$ ; ces parallèles indiqueront évidemment la direction de l'une des asymptotes qui sera la parallèle à ces droites également distante de l'une et de l'autre ; quant à l'autre asymptote, ce sera toujours l'axe des $x$. On voit par là que si la distance $a-a'$ entre les projections des points fixes sur l'axe des $x$ était égale à $k$, l'hyperbole serait équilatère.

Si les deux points fixes étaient sur une parallèle à la droite donnée ; c'est-à-dire, si l'on avait $b=b'$, l'hyperbole se changerait en deux parallèles à l'axe des $x$ ; ce qu'il est d'ailleurs facile de vérifier par des considérations géométriques.