ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Optique. De la vision, à travers les verres plans, d'une épaisseur constante

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__1_0>

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

De la vision, à travers les verres plans, d'une épaisseur constante ;

Par M. GERGONNE.

On sait qu'en général l'effet commun des lentilles convexes, comme des miroirs concaves, est d'amplifier les images des objets, et que l'effet commun des lentilles concaves, comme des miroirs convexes, est au contraire de les faire paraître plus petits ; or, comme il est d'ailleurs connu que les miroirs plans ne changent absolument rien à l'aspect des objets, c'est sans doute pour cela qu'on en aura conclu, sans y regarder de trop près, que les lentilles qui ne sont ni concaves ni convexes, c'est-à-dire, les verres plans, à faces parallèles, ne devaient rien y changer non plus, et qu'il en devait être de même des verres sphériques d'une épaisseur constante, du moins lorsque l'œil est placé au centre commun des deux surfaces qui les terminent.

Mais M. JEAN MILE, professeur de physique à l'université de Varsovie, dans une lettre en date du 20 juin 1821, insérée dans le *Journal de physique, de chimie et d'histoire naturelle* (novembre 1822), vient de battre en ruine la première de ces deux suppositions. Il a prouvé en effet, par des considérations géométriques de la plus grande simplicité, que, lorsqu'on regarde un objet à travers un verre sphérique d'une épaisseur constante, c'est-à-dire à faces concentriques, 1.° si la concavité est tournée vers l'objet, l'angle visuel est toujours amplifié; 2.° si, au contraire, c'est la convexité qui est tournée vers l'objet, l'angle visuel est amplifié, demeure le même ou est diminué, suivant que le centre de courbure est en arrière de l'œil, à l'œil même ou devant lui.

Or comme, lorsqu'on interpose un verre plan entre l'œil et un objet, il est toujours permis de considérer ce verre comme un verre sphérique d'une épaisseur constante et d'un rayon infini; et comme alors on peut toujours supposer que c'est sa concavité qui est tournée vers l'objet, et qu'en admettant même que ce fût sa convexité, le centre de courbure se trouverait alors en arrière de l'œil, il s'ensuit que l'*interposition d'un verre plan, à faces parallèles, entre l'œil et un objet, amplifie toujours l'angle visuel sous lequel l'objet s'offrirait à l'œil nu, et cela d'autant plus que le verre est plus épais et que sa substance jouit d'un pouvoir réfringent plus énergique*; proposition qu'au surplus M. J. Mile démontre d'abord directement.

Quelque évidente que soit la démonstration de M. Mile, il ne se croit pas pour cela dispensé d'appuyer son assertion d'une expérience facile et décisive, fort propre à convaincre les physiciens, malheureusement encore en assez grand nombre, aujourd'hui même, qui n'entendent rien en géométrie. Prenez, dit-il, un tube de fer-blanc, assez gros et long, aux deux extrémités duquel vous mastiquerez bien exactement et perpendiculairement à son axe deux disques de verre plan; et montez ce tube sur un pied, comme vous le feriez d'un télescope grégorien, de telle sorte que son axe soit horizontal. Placez ce tube de manière que son axe soit perpendiculaire à une muraille blanche et éclairée, sur laquelle vous tracerez deux traits noirs verticaux, assez rapprochés les uns des autres, et de manière que le prolongement de l'axe du tube aille rencontrer la muraille à distance égale de l'une et de l'autre. Si alors vous regardez les deux parallèles à travers le tube, vous les verrez à peu près comme à l'œil nu, à raison de la petite épaisseur des deux verres qui le terminent. Mais si, auparavant, vous remplissez le tube jusqu'à sa moitié, c'est-à-dire, jusqu'à la hauteur de son axe, au moyen d'un orifice ménagé à sa partie supérieure, d'un liquide bien transparent, d'eau ou d'alcohol, par exemple, et que vous compariez alors la distance entre les portions de parallèles vues dans l'air à la distance entre leurs prolongemens vus dans le liquide, cette dernière paraîtra beaucoup plus grande que l'autre.

Jusqu'ici tout est parfaitement exact; mais, de ce que l'interposition d'un verre plan à faces parallèles entre l'œil et un objet le fait voir sous un plus grand angle, M. J. Mile paraît en inférer qu'elle le fait voir plus gros, et c'est précisément le contraire. Il arrive seulement qu'en le faisant voir plus petit elle le rapproche en même temps de l'œil; que ce rapprochement fait plus que compenser la diminution des dimensions; de sorte qu'en dernière analise l'angle optique est réellement amplifié.

L'erreur de M. J. Mile en ceci vient de ce que, à l'exemple de la plupart des physiciens qui ne considèrent les phénomènes d'optique que d'une manière vague, il prend l'angle visuel pour la mesure de la grandeur apparente, sans aucun égard au lieu réel de l'image, ce qui ne saurait être toléré que pour des objets placés assez loin pour que l'œil cesse de pouvoir estimer l'intervalle qui l'en sépare. D'après cette manière d'envisager les choses, M. J. Mile doit penser aussi que la vision à travers un verre sphérique d'une épaisseur constante, tellement situé que l'œil se trouve au centre commun de ses deux surfaces, doit s'opérer comme à l'œil nu, et c'est encore là une erreur, comme nous le ferons voir plus loin.

On ne saurait trop répéter que c'est dans la considération des caustiques, et non autre part, qu'il faut chercher la solution du problème de la vision par l'intermédiaire des rayons réfractés et réfléchis, et que cette considération peut seule donner la mesure précise de toutes les circonstances du phénomène.

En particulier, le cas de l'interposition d'un verre plan à faces parallèles entre l'œil et l'objet a déjà été traité et discuté dans le V.e volume du présent recueil (pag. 294); et voici les résultats que nous avons obtenus, en cet endroit, d'une analise rigoureuse.

1.° Les rayons de lumière émanés d'un même point, et situés dans un même plan, perpendiculaire aux deux faces d'un verre plan, d'une épaisseur constante, après avoir traversé ce verre, deviennent tous normaux à une même ellipse, dont le grand axe est perpendiculaire aux deux faces du verre, et dont la situation et les dimensions sont tout-à-fait indépendantes de la distance de ce verre au point fixe d'où l'on suppose que ces rayons sont émanés.

2.° Ce même point est un des foyers de l'ellipse, dont le centre est du même côté de ce foyer que le verre, et dont l'excentricité est précisément égale à son épaisseur.

3.° En outre, si l'on suppose que le rapport du sinus d'incidence dans l'air au sinus de réfraction dans le verre soit celui de p à q, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{p}{q}=m\,, \quad \frac{p^2-q^2}{q^2}=n^2\,, \quad \text{d'où} \quad m^2=1+n^2\,;$$

$2me$ et $2ne$ seront les deux axes de cette ellipse.

4.° Tous les rayons, à leur sortie du verre, sont donc tangens à la développée de cette ellipse, développée qui est conséquemment la caustique à laquelle donne naissance le point dont il s'agit; de sorte que, pour un œil situé de l'autre côté du verre, le lieu de l'image de ce point sera le point de contact de cette caustique, avec la tangente qu'on lui menera de ce même œil.

5.° Mais il est essentiel de remarquer que si, par le centre commun de l'ellipse et de sa développée, on conçoit un plan parallèle à la surface du verre, la moitié de la développée située du côté de ce plan opposé au verre sera seule utile à la question, et devra seule conséquemment être réputée la caustique dont il s'agit.

6.° De ces principes résulte, en particulier, cette conséquence digne de remarque que, si l'on fait marcher le verre, parallèlement à lui-même, entre l'œil et un objet, l'image de cet objet n'en éprouvera aucun changement de forme ou de situation.

Ces choses ainsi entendues, soit $P'P''$ (fig. 1) une droite, et soit O un œil situé en l'un des points de la perpendiculaire sur son milieu P. Supposons qu'on interpose entre l'un et l'autre un verre plan à faces parallèles, perpendiculaire au plan de la figure et parallèle à la droite $P'P''$, et examinons sous quel aspect se présentera cette droite, vue à travers un tel verre.

Des extrémités P', P'' de la droite $P'P''$, élevons-lui du côté de l'œil des perpendiculaires $P'C'$, $P''C''$, d'une longueur égale à l'épaisseur du verre ; prolongeons ces perpendiculaires du côté opposé en S' et S'' de manière qu'on ait $C'S'=C''S''=me$, e étant l'épaisseur du verre et m le rapport du sinus d'incidence dans l'air au sinus de réfraction dans le verre. Soient construites deux demi-ellipses dont les centres soient en C' et C'', les foyers en P' et P'' et les sommets en S' et S''. Soient construites aussi les développées de ces demi-ellipses, dont les points de rebroussement soient K' et K'', tellement situés que $K'S'$ et $K''S''$ sont égales au demi-paramètre ; ces développées seront les caustiques relatives aux points P' et P''. Si donc du point O on leur mène des tangentes, leurs points de contact I' et I'' seront ceux où l'œil croira voir les points P' et P''.

On voit donc que la droite $P'P''$ qui, avant l'interposition du verre, était vue sous l'angle $P'OP''$, sera vue, par l'effet de cette interposition, sous l'angle $I'OI''$ évidemment plus grand que celui-là, comme l'a trouvé M. J. Mile ; mais on voit en même temps que cette droite paraîtra plus petite et plus rapprochée de l'œil qu'elle ne l'est réellement, comme nous l'avions annoncé.

On voit en outre que son image ne sera point une ligne droite; car si, pour le point milieu P, on fait la même construction que pour les extrémités P′ et P″, le point I de contact de la tangente menée à la nouvelle caustique par le point O se confondra avec son point de rebroussement; l'image I du point P sera donc plus rapprochée de ce point que les images I′ et I″ des points P′ et P″ ne le seront de ceux-ci; d'où l'on voit que l'image I′II″ de la droite P′PP″ sera un peu concave vers l'œil. Il est aisé de voir que sa courbure aura pour asymptote la droite C′CC″, qui contient les centres des diverses caustiques.

Pour opposer expérience à expérience, nous dirons que, si l'on fait avancer ou reculer la lunette de M. J. Mile dans le sens de son axe, sans que l'œil change de situation, l'aspect des portions de parallèles qui sont vues à travers le liquide n'en éprouvera aucun changement. Si ensuite le spectateur, ayant ramené l'instrument près de lui, promène son œil le long du diamètre horizontal de l'oculaire de cette espèce de lunette, en fixant à la fois son attention sur les portions de parallèles vues dans l'air et leurs portions vues dans le liquide, il s'assurera bientôt de l'existence d'une parallaxe, du genre de celle qu'on remarque lorsqu'on regarde, à travers un cristal de chaux carbonaté posé sur du papier, les deux images d'un trait qu'on y a tracé; et il sera dès-lors impossible de douter que les images des deux parallèles, vues à travers le liquide, ne soient en avant de ces parallèles elles-mêmes.

On voit donc que les verres à faces planes partagent avec les lentilles convexes la propriété d'augmenter l'angle optique sous lequel les objets nous apparaissent; d'où résultent ces diverses conséquences, 1.° qu'à courbure égale des deux surfaces, une lentille convexe amplifie d'autant plus cet angle qu'elle est plus épaisse; 2.° que, pour qu'une lentille n'amplifie aucunement l'angle sous lequel les objets nous apparaissent, il est nécessaire qu'elle soit un peu concave, et d'autant plus qu'elle sera plus épaisse ; 3.° que conséquemment à courbure et épaisseur égales les lentilles convexes doivent plus amplifier l'angle sous lequel nous voyons les objets que les lentilles concaves ne doivent le réduire.

Si l'on conçoit que les points P′ et P″ se rapprochent peu à peu du point P, de manière à diminuer de plus en plus la longueur de la droite P′P″ ; ou bien, si l'on conçoit que le point O s'éloigne peu à peu, en demeuraut toujours sur la droite PC ; ou enfin si l'on imagine que ces deux circonstances aient lieu à la fois ; il est clair que l'angle I′OI″ diminuera sans cesse ; que par conséquent les points I′ et I″ marcheront respectivement vers K′ et K″, de sorte que OI′ et OI″ tendront à se prolonger suivant K′P′ et K″P″, et que l'image I′II″ de la droite P′PP″ tendra sans cesse à se redresser et à se confondre avec la droite K′IK″, qui lui est égale et parallèle.

Ainsi, lorsqu'un objet est vu sous un fort petit angle, ce qui peut également provenir de sa petitesse réelle ou de son éloignement de l'œil ou de ces deux causes à la fois ; l'interposition d'un verre plan à faces parallèles entre l'œil et un tel objet, quelle qu'en puisse être d'ailleurs l'épaisseur, n'a d'autre effet apparent que de rapprocher l'image de cet objet de l'œil, d'une quantité moindre pourtant que l'épaisseur du verre, sans le déformer et sans altérer sensiblement l'angle sous lequel il est vu.

Il n'est pas même nécessaire, pour cela, que le verre interposé soit perpendiculaire à la direction des rayons visuels ; car, soit la droite PP′ (fig. 2) vue à l'œil nu, par une spectateur infiniment éloigné, suivant les parallèles PQ, P′Q′ ; si ayant interposé, parallèlement à PP′, entre celle droite et le spectateur, un verre plan à faces parallèles, on trace les caustiques qui répondent aux points P et P′ ; en leur menant des tangentes IL et I′L′, parallèles à PQ et P′Q′, leurs points de contact I et I′ seront les images des points P et P′ ; de sorte que, par l'effet de l'interposition du verre, la droite PP′ semblera être devenue II′, qui lui est égale et parallèle ; il arrivera donc seulement ici que la droite, en paraissant s'être avancée, parallèlement à elle-même, paraîtra en même temps avoir glissé dans le sens de sa longueur et du côté du spectateur.

Si l'on considère maintenant que le diamètre du soleil et celui de la lune, vus de la terre, soutendent dans le ciel des arcs de grands cercles qui ne s'écartent jamais guère d'un demi-degré, et que le plus voisin de ces deux astres est éloigné de de nous plus de 80000 lieues, on sera fondé à conclure de ce qui précède que l'interposition d'un verre plan bien transparent à faces parallèles, d'une dixaine de lieues d'épaisseur, entre ces astres et nous, ne changerait sensiblement rien à leur aspect; puisqu'elle ne produirait d'autre effet que de les rapprocher de notre œil d'une quantité moindre que dix lieues, c'est-à-dire, d'une quantité qu'on peut négliger vis-à-vis l'excessive distance où nous sommes de ces astres.

Le but principal de M. J. Mile, dans la lettre à laquelle ceci se rattache, est de prouver qu'il y a quelque chose de plus qu'une simple illusion dans l'extrême grandeur que nous attribuons au soleil et à la lune, à l'époque de leur lever et de leur coucher, et de mettre à profit la remarque, très-curieuse d'ailleurs, qu'il a faite sur l'effet des verres plans ou sphériques à surfaces parallèles, pour tenter d'expliquer comment l'interposition de l'atmosphère entre nous et ces astres peut occasioner un accroissement réel dans l'angle sous lequel nous les voyons, lorsqu'ils sont fort près de l'horizon.

Mais d'abord la discussion dans laquelle nous venons d'entrer ci-dessus paraît ruiner complètement toutes les inductions qu'on voudrait tirer des remarques de M. J. Mile. En second lieu, M. J. Mile ignore-t-il que l'effet de l'interposition de l'atmosphère sur l'aspect du ciel est aujourd'hui connu à la précision des secondes; que cet effet est journellement employé sur tous les points de l'Europe par les astronomes comme correction des observations, et qu'à moins de s'inscrire en faux contre les élémens du système solaire, tous déduits d'observations ainsi corrigées, il faut admettre que les astres sont vus à l'horizon sous un angle plus petit que celui sous lequel ils nous apparaissent lorsqu'ils se trouvent plus voisins du zénith; car

car c'est là une conséquence rigoureuse des théories admises par tous les astronomes ; théories que probablement ils ne sont pas disposés à abandonner.

Il faut donc continuer à ne voir, dans le phénomène que M. J. Mile a tenté d'expliquer d'une manière nouvelle, que ce qu'on y a vu jusqu'ici ; c'est-à-dire, une pure illusion qui a sa source dans la combinaison de plusieurs de ces jugemens d'habitude qui nous sont si fréquens et contre lesquels il nous est si difficile de nous défendre.

Venons présentement à l'effet des verres sphériques à faces concentriques. Soit O l'œil (fig. 3), et soit $P'P''$ une droite dont P soit le milieu ; et supposons que le verre soit placé entre l'œil et cette droite, de manière que le centre commun de ses deux courbures soit en O. Il est certain que, par l'interposition de ce verre, aucun des rayons émanés des divers points de cette droite ne sera détourné de sa direction pour parvenir à l'œil ; mais les images de ces différens points seront toutes rapprochées du spectateur, d'une même quantité moindre que l'épaisseur du verre, comme elles le seraient par l'effet de l'interposition d'un verre plan à faces parallèles, perpendiculaire à la direction de ces mêmes rayons. Les points P, P', P'' seront donc vus en I, I', I'', sur OP, OP', OP'', de telle sorte qu'on aura $PI=P'I'=P''I''$; la droite $P'P''$ sera donc vue sous le même angle $I'OI''=P'OP''$ qu'à l'œil nu ; mais elle sera vue en $I'II''$, plus rapprochée de l'œil du spectateur, sous la figure d'une courbe convexe vers l'œil, laquelle sera évidemment une conchoïde, ayant le point O pour pôle et la droite $P'PP''$ pour asymptote.

On doit remarquer, au surplus, qu'ici, comme dans le premier cas, si la droite $P'P''$ était fort distante du point O ou très-petite, son image lui serait sensiblement égale et parallèle, et conséquemment rectiligne, mais seulement plus rapprochée du spectateur ; et encore le rapprochement serait-il insensible, si la distance de l'œil à la droite était incomparablement plus grande que l'épaisseur du verre.

L'appareil de M. J. Mile semble pouvoir être employé, avec quelque avantage, à la détermination du pouvoir refringent des divers liquides. Qu'avec le diamant on trace sur son objectif une suite de cordes verticales également espacées ; les distances entre ces verticales paraîtront amplifiées dans la partie inférieure de cet objectif, par l'effet de l'interposition du liquide ; et en plaçant l'œil contre l'oculaire, on pourra juger du nombre rond d'espaces entre les verticales supérieures nécessaires pour correspondre à un nombre rond d'espaces entre les verticales inférieures. Supposons qu'il en faille un nombre p des premiers pour répondre à un nombre q des derniers : il n'en faudra pas davantage pour déterminer le nombre m, qui exprime le rapport du sinus d'incidence dans l'air au sinus de réfraction dans le liquide, ainsi qu'on va le voir.

Soient l la longueur connue de la lunette et a la distance réelle de l'une des verticales à celle qui passe par le centre de l'objectif $\frac{a}{l}$ sera la tangente tabulaire de l'angle sous lequel cette distance sera aperçue par un œil placé au centre de l'oculaire. Or, comme nous supposons l très-grand par rapport à a, et conséquemment cet angle très-petit, nous pourrons prendre $\frac{a}{l}$ pour l'angle lui-même.

Prenons pour le plan de la caustique le plan de la surface supérieure du liquide, c'est-à-dire, le plan horizontal conduit par l'axe de la lunette. Prenons cet axe pour axe des y, et le diamètre horizontal de l'oculaire pour axe des x ; de manière que l'origine soit à la fois le centre de cet oculaire et le lieu de l'œil. L'image du point par lequel notre verticale plonge dans le liquide sera donc le point de contact de la caustique avec la tangente menée à cette courbe par l'origine. Désignons par x', y' les coordonnées de ce point de contact ; pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous pourrons considérer $\frac{y'}{x'}$ comme exprimant sensiblement l'angle sous lequel la distance a est aperçue à travers le liquide et conséquemment nous devrons avoir

$$\frac{y'}{x'}:\frac{a}{l}::p:q\ ,$$

d'où

$$pax'-qly'=0\ , \qquad (1)$$

première équation du problème.

Présentement, comme ici l'œil est sur l'une des faces parallèles même du milieu réfringent et l'objet sur l'autre, l'équation de la caustique sera, d'après ce que nous avons dit ci-dessus,

$$\left\{\frac{n(x-a)}{l}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{my}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ ;\ (*)$$

et, comme le point (x',y') est sur cette courbe, on aura, pour la seconde équation du problème,

$$\left\{\frac{n(x'-a)}{l}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{my'}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ . \qquad (2)$$

En différentiant l'équation de la caustique, on en tire

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sqrt[3]{\frac{n^2y}{m^2(x-a)}}\ ,$$

ce qui donne pour l'équation de sa tangente par le point (x',y')

$$(x-x')\sqrt[3]{n^2y'}+(y-y')\sqrt[3]{m^2(x'-a)}=0\ ;$$

mais, cette tangente devant en outre passer par l'origine, il faut

(*) Voyez *Annales*, tom. V, pag. 288, ou tom. XI, pag. 235.

que son équation soit satisfaite en y mettant zéro pour x et pour y; ce qui donne, pour la troisième équation du problème

$$x'\sqrt[3]{n^2y'}+y'\sqrt[3]{m^2(x'-a)}=0 \,,$$

ou

$$n^2x'^3+m^2y'^2(x'-a)=0\,, \qquad (3)$$

en mettant dans celle-ci pour y' sa valeur donnée par l'équation (1), elle donne

$$x'=\frac{m^2p^2a^2}{n^2q^2l^2+m^2p^2a^2}\,, \quad x'-a=-\frac{n^2q^2l^2a}{n^2q^2l^2+m^2p^2a^2}\,;$$

on trouve ensuite, par l'équation (1),

$$y'=\frac{m^2p^3a^4}{ql(n^2q^2l^2+m^2p^2a^2)}\,.$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation (2), elle deviendra

$$a^2(m^2p^2a^2-n^2q^2l^2)^3-q^2l^4(n^2q^2l^2+m^2p^2a^2)^2=0\,,$$

et, comme on a d'ailleurs $n^2=m^2-1$, on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer m.