ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

W. H. TALBOT

Analise transcendante. Note sur l'article de la page 88 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 187-190
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__187_1>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur l'article de la page 88 *du présent volume* ;

Par M. W. H. TALBOT, membre de la société philosophique de Cambridge.

Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR,

PERMETTEZ-MOI de relever quelques légères inexactitudes qui se sont glissées dans l'impression de l'article de la page 88 de votre XIV.e volume.

En posant

$$S=\frac{\text{Cos.}x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos.}5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\text{Cos.}7x}{7}+\ldots.$$

on trouve

$$S=\tfrac{1}{2}\text{Arc}(\text{Sin.}=2\sqrt{\text{Sin.}x-\text{Sin.}^2x})\ ;$$

à ce sinus répond le cosinus

$$\sqrt{1-4\text{Sin.}x+4\text{Sin.}^2x}=\pm(1-2\text{Sin.}x)\ ;$$

ce qui donnerait en général

$$S=\frac{1}{2}\,\text{Arc}\{\text{Cos.}=\pm(1-2\text{Sin.}x)\}.$$

Mais, d'après la forme de la série, aux valeurs $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$ doivent répondre respectivement $S=\frac{\pi}{2}$ et $S=0$, d'où il suit que c'est le signe inférieur qu'il faut prendre, et qu'on doit avoir

$$\frac{\text{Cos.}x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos.}5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\text{Cos.}7x}{7}+\ldots=\frac{1}{2}\,\text{Arc}(\text{Cos.}=2\text{Sin.}x-1)$$

et non pas $\frac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos.}=1-2\text{Sin.}x)$, comme il avait été annoncé au bas de la page 94. Je remarquerai, en passant, que, dans la note de la page 91, on a mis une première fois $\frac{\pi}{1}$ au lieu de $\frac{\pi}{2}$.

Par de semblables considérations, on trouve pour la somme de la série de la page 95,

$$\frac{a\text{Cos.}x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{a^3\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{a^5\text{Cos.}5x}{5}+\ldots=\frac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos.}=\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2\text{Cos.}^2x}-a^2)$$

et non pas $\frac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos.}=a^2-\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2\text{Cos.}^2x})$ comme dans le texte, où d'ailleurs on a écrit a pour a^2 hors du radical; car il faut que cette somme rentre dans la précédente en y faisant $a=1$.

A la même page 95, dans le dénominateur du second membre de la première équation, un signe plus a été omis entre Cos.^2x et Cos.^2y.

Même page encore, à la troisième équation, le premier membre doit être

$$\frac{\text{Cos.}^2x}{1}-\frac{\text{Cos.}^22x}{2}+\frac{\text{Cos.}^23x}{3}-\frac{\text{Cos.}^24x}{4}+\ldots=\frac{1}{2}\text{Log.}4\text{Cos.}x.$$

Enfin, dans la dernière équation de la même page un a^2 a pris la place de a, et ce second membre doit être

$$\frac{1}{4}\text{Log.}\{(1-a^2)^2+4a(1+a)^2\text{Cos.}^2x\}.$$

On vérifie cette correction en posant $x=0$, d'où $\text{Cos}.x=1$, il vient ainsi

$$\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\ldots.=\tfrac{1}{4}\text{Log}.(1+a)^4=\text{Log}.(1+a)\ ,$$

comme cela doit être.

J'allais fermer ma lettre lorsque la remarque suivante m'a frappé. On a, comme l'on sait,

$$\text{Cos}.2p=2\text{Cos}.^2p-1\ ,$$

d'où il résulte

$$\text{Arc}(\text{Cos}.=p')=\tfrac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos}.=2p'^2-1)\ :$$

puis donc qu'on a

$$\frac{\text{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos}.=2\text{Sin}.x-1),$$

on aura aussi

$$\frac{\text{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\ldots=\text{Arc}(\text{Cos}.=\sqrt{\text{Sin}.x})\ ,$$

résultat extrêmement simple.

Voici une singulière conséquence de ce résultat. On a

$$\text{Arc}(\text{Cos}.=p)=\frac{\pi}{2}-\text{Arc}(\text{Sin}.=p)=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{p}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{p^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{p^5}{5}+\ldots.\right),$$

en faisant donc $p=\sqrt{\text{Sin}x}$ on aura

$$\frac{\text{Cos}\,x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\ldots=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\text{Sin}.^{\frac{1}{2}}x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Sin}.^{\frac{3}{2}}x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Sin}.^{\frac{5}{2}}x}{5}+\ldots\right)$$

équation d'où on tire cette valeur remarquable du quart de la circonférence

$$\frac{\pi}{2}=\left\{\begin{array}{l}
\quad(\mathrm{Cos.}\,x+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x)\\
+\frac{1}{2}(\mathrm{Cos.}3x+\mathrm{Sin.}\tfrac{3}{2}x)\\
+\frac{1\,3}{2.4}(\mathrm{Cos.}5x+\mathrm{Sin.}\tfrac{5}{2}x)\\
+\frac{1.3.5}{2.4.6}(\mathrm{Cos.}7x+\mathrm{Sin.}\tfrac{7}{2}x)\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

quel que soit l'arc x (*).

Agréez, etc.

Milan, octobre 1823.

(*) Nous saisissons avec empressement cette occasion de déclarer que l'erreur signalée par M. W. H. Talbot, dans la note de la page 91 du présent volume, n'est point le fait de M. Querret, comme nous nous en sommes assurés en consultant son manuscrit ; elle ne doit être attribuée qu'à une correction d'épreuve faite un peu trop à la hâte.

J. D. G.