ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

Démonstration de deux théorèmes de géométrie, énoncés à la page 248 du XIII.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 17-23

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__17_0>

Démonstration de deux théorèmes de géométrie, énoncés à la page 248 du XIII.e volume des Annales ;

Par M. Ch. Sturm.

Théorèmes. Soit une lemniscate , *lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère dont les diamètres principaux sont égaux à* 2a *sur les tangentes à la courbe. Sur l'axe transverse de cette hyperbole comme grand axe soit décrite une ellipse dont le petit axe soit égal à la distance entre ses foyers.*

Désignons par D *l'excès fini de l'asymptote infinie de l'hyperbole , comptée du centre , sur le quart infini de cette courbe , c'est-à-dire, sur la moitié de l'une de ses branches , comptée de son sommet. Soient en outre* q *le quart du périmètre de la lemniscate et* Q *le quart du périmètre de l'ellipse ; on aura*

$$1.^\circ \quad D+q=Q\sqrt{2}\,, \qquad 2.^\circ \quad Dq=\frac{\varpi}{4}a^2\,.$$

Démonstration. En représentant par a et b les deux demi-diamètres principaux d'une hyperbole , son équation est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1\,; \qquad (1)$$

l'équation de sa tangente en un point (x',y'), pris sur la courbe, est

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1\,; \qquad (2)$$

équation dans laquelle x' et y' sont liées par la condition

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1\,. \qquad (3)$$

L'équation de la perpendiculaire menée du centre sur cette tangente est

$$a^2xy'+b^2yx'=0 \ . \qquad (4)$$

Son pied étant donné par le système des équations (2, 4), dans lesquelles x' et y' sont liées par la relation (3) ; il s'ensuit qu'en éliminant x', y' entre ces trois équations, l'équation résultante en x et y sera celle du lieu des pieds de toutes les perpendiculaires menées du centre de la courbe sur ces tangentes.

Or, on tire des équations (2 et 4)

$$\frac{x'}{a}=+\frac{ax}{x^2+y^2} \ , \qquad \frac{y'}{b}=-\frac{by}{x^2+y^2} \ ,$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (3), donnent pour celle du lieu cherché

$$a^2x^2-b^2y^2=(x^2+y^2)^2 \ ;$$

c'est l'équation générale de la lemniscate.

Pour passer à son équation polaire, nous poserons

$$x=l\text{Cos.}u \ , \qquad y=l\text{Sin.}u \ ,$$

et cette équation polaire sera ainsi

$$l^2=a^2\text{Cos.}^2u-b^2\text{Sin.}^2u \ .$$

Quant à l'hyperbole, en appelant h son rayon vecteur répondant à l'angle u, son équation deviendra

$$h^2(b^2\text{Cos.}^2u-a^2\text{Sin.}^2u)=a^2b^2 \ .$$

Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, et où il s'agit d'une hyperbole équilatère, on a $b=a$; en sorte que l'équation polaire de l'hyperbole devient simplement

$$a^2=h^2\text{Cos.}2u \ , \qquad (5)$$

et celle de la lemniscate

$$l^2=a^2\text{Cos.}2u \ ; \qquad (6)$$

d'où résulte, entre les longueurs des rayons vecteurs correspondans des deux courbes l'équation de relation

$$lh=a^2 .$$

On peut déduire de ces équations une construction simultanée des deux courbes.

Sur le demi-axe transverse CA (fig. 6) soit décrite une circonférence, à laquelle soit menée la tangente AD. Soient menées arbitrairement, par le centre, les deux droites CE, CE′ faisant des angles égaux avec CA, et coupant le cercle en F et F′. Soit pris l'arc FG=FA, et soit portée la corde CG de C en K. Soit élevée à CA la perpendiculaire KM rencontrant la circonférence en M et soit menée CM, coupant AD en N. Si alors du point C comme centre commun, et avec CM et CN pour rayon, on décrit deux cercles concentriques, le plus grand coupera nos arbitraires en quatre points H, H′, H″, H‴, qui appartiendront à l'hyperbole, et le plus petit coupera ces mêmes droites en quatre autres points L, L′, L″, L‴, qui appartiendront à la lemniscate.

En effet, 1.° en abaissant la perpendiculaire GP sur le diamètre, on aura

$$\overline{CH}^2=\overline{CN}^2=\overline{CA}^2+\overline{AN}^2=\overline{CA}^2+\left(\frac{CA.KM}{CK}\right)^2=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CK}^2+\overline{KM}^2}{CK^2}=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CK}^2},$$

ou bien

$$\overline{CH}^2=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CG}^2}=\overline{CA}^2.\frac{CK}{CP}=\overline{CA}^2.\frac{CG}{CP};$$

c'est-à-dire,

$$z^2=a^2\text{Sec}.2u, \qquad \text{ou} \qquad a^2=z^2\text{Cos}.2u.$$

On aura, 2.°

$$\overline{CL}^2=\overline{CM}^2=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CK}^2}{\overline{CM}^2}=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CG}^2}{\overline{CM}^2}=\overline{CA}^2.\frac{CP}{CK}=\overline{CA}^2.\frac{CP}{CG};$$

c'est-à-dire,

$$l^2=a^2\text{Cos}.2u.$$

Si l'hyperbole était déjà tracée, la construction de la lemniscate deviendrait beaucoup plus facile; H étant le point où cette hyperbole serait coupée par l'arbitraire CE, l'arc HN, décrit du point C comme centre, déterminerait le point N de AD; la droite CN déterminerait le point M de la circonférence; et enfin l'arc ML, décrit encore du point C comme centre, déterminerait le point L de la lemniscate.

On tire des équations (5, 6)

$$\mathrm{d}u=+\frac{a^2\mathrm{d}h}{h\sqrt{h^4-a^4}}\,, \qquad \mathrm{d}u=-\frac{l\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,,$$

en observant que, pour la dernière courbe, le rayon vecteur décroît lorsque u augmente. Mais on sait que s étant l'arc d'une courbe dont le rayon vecteur r fait un angle u avec l'axe, on a

$$s=\int\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}u^2}\;;$$

donc, en représentant respectivement par H, L les arcs de nos deux courbes, nous aurons

$$H=\int\frac{h^2\mathrm{d}h}{\sqrt{h^4-a^4}}\,, \qquad L=\int-\frac{a^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,,$$

les arcs étant comptés à partir du sommet de l'hyperbole. Mais, à cause de la relation trouvée ci-dessus, $lh=a^2$, on peut exprimer H en l, et il vient ainsi

$$H=\int-\frac{a^4\mathrm{d}l}{l^2\sqrt{a^4-l^4}}=\frac{\sqrt{a^4-l^4}}{l}+\int\frac{l^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,.$$

Remarquons présentement que l'excès de l'asymptote de l'hyperbole sur le quart de cette courbe n'est autre chose que ce que devient l'excès $h-H$ ou $\frac{a^2}{l}-H$ du rayon vecteur sur l'arc correspondant, compté depuis le sommet, lorsque ce rayon vecteur devient infini, ou, ce qui revient au même, lorsque $l=0$, d'où il suit qu'on doit avoir

$$p=\frac{a^2}{l}-\frac{\sqrt{a^4-l^4}}{l}-\int\frac{l^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,. \qquad \left[\begin{matrix}l=a\\ l=0\end{matrix}\right]$$

Or, en remarquant que $\frac{a^2}{l}-\frac{\sqrt{a^4-l^4}}{l}=\frac{a^2}{l}\left\{1-\sqrt{1-\frac{l^4}{a^4}}\right\}$, on voit que la quantité qui précède le signe $\int$ s'évanouit aux deux limites, de sorte qu'on a simplement

$$D=\int-\frac{l^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,. \qquad \begin{bmatrix}l=a\\ l=0\end{bmatrix},$$

On aura de même, pour le quart de la lemniscate,

$$q=\int-\frac{a^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,; \qquad \begin{bmatrix}l=a\\ l=0\end{bmatrix}$$

en intervertissant donc l'ordre des limites, on trouvera

$$D+q=\int\left\{\frac{l^2}{\sqrt{a^4-l^4}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^4-l^4}}\right\}\mathrm{d}l=\int\mathrm{d}l\sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}}\,. \qquad \begin{bmatrix}l=0\\ l=a\end{bmatrix}$$

Concevons présentement que, sur l'axe transverse de notre hyperbole, comme petit axe, on décrive une ellipse dont le grand axe soit $a\sqrt{2}$, en représentant par l l'abscisse de la courbe répondant à l'ordonnée y, son équation sera

$$2l^2+y^2=2a^2,$$

d'où on tirera

$$\mathrm{d}y=-\sqrt{2}.\frac{l\mathrm{d}l}{\sqrt{a^2-l^2}},$$

en conséquence, l'arc d'ellipse qui a pour expression $\int\sqrt{\mathrm{d}l^2+\mathrm{d}y^2}$, sera

$$\int\mathrm{d}l\sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}}\,;$$

et, pour avoir le quart du périmètre de la courbe, il faudra prendre cette intégrale entre les limites 0 et a; représentant donc cette longueur par Q', on aura

$$Q'=\int\mathrm{d}l\sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}}\,; \qquad \begin{bmatrix}l=0\\ l=a\end{bmatrix}$$

et par suite

$$D+q=Q'.$$

Mais, si l'on conçoit une ellipse qui ait l'axe transverse de l'hyperbole pour grand axe, et dont le petit axe soit égal à la distance entre ses foyers, son équation sera

$$l^2+2y^2=a^2\ ,$$

elle sera donc semblable à la précédente, et le rapport de leurs lignes homologues sera celui de $\sqrt{2}$ à 1 ; en représentant donc par Q le quart du périmètre de cette nouvelle courbe, on aura

$$Q'=Q\sqrt{2}\ ,$$

et, par suite,

$$D+q=Q\sqrt{2}\ ,$$

ce qui démontre déjà la première partie du théorème.

Présentement, dans la théorie des intégrales définies de la forme $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$ donnée par Euler (*), on rencontre l'équation suivante

---

(*) Voyez le *Traité dss différences et des séries* de M. Lacroix, dernière édition, page 426. On parviendrait également au but à l'aide des formules de la page 430 du même ouvrage, en y faisant $n=4$.

Le même résultat se présente aussi à la page 413 de ce traité ; mais il nous a paru que la démonstration n'était point exacte.

On sait que

$$\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\varpi}{2}\ ,\qquad\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

du moins en supposant r entier et positif. Si donc l'on pose $x=z^n$, n étant supposé positif, auquel cas les limites de z seront les mêmes que celles de x, on aura

$$n^2\int\frac{z^{2rn+n-1}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}\cdot\int\frac{z^{2rn+n-1}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}=\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\varpi}{2}\qquad\begin{bmatrix}z=0\\z=1\end{bmatrix}$$

d'où, en posant $2rn+n-1=p$, il viendra

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}\cdot\int\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}=\frac{2\varpi\text{Cot.}\frac{m\varpi}{n}}{n(n-2m)}\,,\qquad\left[\begin{array}{c}x=0\\x=1\end{array}\right]$$

en faisant donc $m=1$, $n=4$, $x=\frac{l}{a}$, on obtiendra

$$\int\frac{a^2dl}{\sqrt{a^4-l^4}}\cdot\int\frac{l^2dl}{\sqrt{a^4-l^4}}=\frac{\varpi a^2}{4}\,,\qquad\left[\begin{array}{c}l=0\\l=a\end{array}\right]$$

donc

$$qD=\frac{\varpi a^2}{4}\,,$$

deuxième partie du théorème (*).

Genève, le 15 avril 1823.

$$\int\frac{z^pdz}{\sqrt{1-z^{2n}}}\cdot\int\frac{z^{p+n}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}=\frac{1}{n(p+1)}\cdot\frac{\varpi}{2}\,;\qquad\left[\begin{array}{c}z=0\\z=1\end{array}\right]$$

mais il faut observer que p n'est point ici un nombre tout-à-fait arbitraire, à cause de l'équation $2rn+n-1=p$, dans laquelle r et n sont nécessairement des nombres positifs, et où r est un nombre entier. Si, par exemple, pour obtenir le produit

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}\cdot\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^4}}\,,$$

on voulait faire $p=0$ et $n=2$, il s'ensuivrait $4r+1=0$, ou $r=-\frac{1}{4}$, ce qu'on ne peut admettre ; il faut donc chercher ce produit par une autre voie.

(*) M. H. W. T. à qui on doit ces deux singuliers théorèmes en a donné une démonstration qui ne diffère guère de celle qu'on vient de lire qu'en ce que, dans ses calculs, il substitue l'angle u au rayon vecteur.

J. D. G.