ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

Analise transcendante. Essai sur la sommation d'une classe très-générale de séries

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 361-384
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__361_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur la sommation d'une classe très-générale de séries ;

Par M. Querret, chef d'institution à St-Malo.

1. Par les premiers principes de la théorie des fonctions circulaires, on a

$$2\text{Cos}.t\text{Cos}.u=\text{Cos}.(t+u)+\text{Cos}.(t-u) ;$$

d'où, en multipliant par $2\text{Cos}.v$,

$$4\text{Cos}.t\text{Cos}.u\text{Cos}.v=2\text{Cos}.(t+u)\text{Cos}.v+2\text{Cos}.(t-u)\text{Cos}.v :$$

Mais si, dans la première équation, on change successivement t en $t+u$ et en $t-u$ et u en v, il viendra

$$2\text{Cos}.(t+u)\text{Cos}\,v=\text{Cos}.(t+u+v)+\text{Cos}.(t+u-v) ;$$

$$2\text{Cos}.(t-u)\text{Cos}.v=\text{Cos}.(t-u+v)+\text{Cos}.(t-u-v) ;$$

ce qui donnera, en substituant dans la seconde équation,

$$\begin{aligned}4\text{Cos}.t\text{Cos}.u\text{Cos}.v=\text{Cos}.(t+u+v)&+\text{Cos}.(t+u-v)\\&+\text{Cos}.(t-u+v)\\&+\text{Cos}.(t-u-v)\end{aligned}$$

En multipliant de nouveau celle-ci par $2\text{Cos.}x$, il viendra

$$8\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v\text{Cos.}x=2\text{Cos.}(t+u+v)\text{Cos.}x+2\text{Cos.}(t+u-v)\text{Cos.}x\,;$$
$$+2\text{Cos.}(t-u+v)\text{Cos.}x$$
$$+2\text{Cos.}(t-u-v)\text{Cos.}x$$

mais, par la première équation,

$$2\text{Cos.}(t+u+v)\text{Cos}\,x=\text{Cos.}(t+u+v+x)+\text{Cos.}(t+u+v-x)\,,$$

$$2\text{Cos.}(t+u-v)\text{Cos.}x=\text{Cos.}(t+u-v+x)+\text{Cos.}(t+u-v-x)\,,$$

$$2\text{Cos.}(t-u+v)\text{Cos.}x=\text{Cos.}(t-u+v+x)+\text{Cos.}(t-u+v-x)\,,$$

$$2\text{Cos.}(t-u-v)\text{Cos.}x=\text{Cos.}(t-u-v+x)+\text{Cos.}(t-u-v-x)\,;$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$8\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v\text{Cos.}x=\text{Cos.}(t+u+v+x)+\text{Cos.}(t+u+v-x)+\text{Cos.}(t+u-v-x)\,;$$
$$+\text{Cos.}(t+u-v+x)+\text{Cos.}(t-u+v-x)$$
$$+\text{Cos.}(t-u+v+x)+\text{Cos.}(t-u-v+x)$$
$$+\text{Cos.}(t-u-v-x)$$

et on pourrait ainsi pousser le procédé si loin qu'on voudrait.

2. Si présentement on fait s égal à $t+u$ dans la première, à $t+u+v$ dans la seconde, à $t+u+v+x$ dans la troisième, et qu'en outre on fasse $x=s$ dans l'équation $\text{Cos.}t=\text{Cos.}t$, on aura

Pour un arc, $\text{Cos.}t=\text{Cos}\,s$,

Pour deux, $$2\text{Cos.}t\text{Cos.}u=\text{Cos.}s+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}(s-2t)\,,$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}(s-2u)$$

Pour trois ; $$4\text{Cos.}t\,\text{Cos.}u\,\text{Cos.}v=\text{Cos.}s+\text{Cos.}(s-2t),$$
$$+\text{Cos.}(s-2u)$$
$$+\text{Cos.}(s-2v)$$

Pour quatre, $$8\text{Cos.}t\,\text{Cos.}u\,\text{Cos.}v\,\text{Cos.}x=\text{Cos.}s+\text{Cos.}(s-2t)+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(t+u)];$$
$$+\text{Cos.}(s-2u)+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(t+v)]$$
$$+\text{Cos.}(s-2v)+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(u+v)]$$
$$+\text{Cos.}(s-2x)+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(t+x)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(u+x)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(v+x)]$$
et ainsi de suite.

3. Si, dans les résultats auxquels nous venons de parvenir, on change respectivement t, u, v, x en $\frac{1}{2}\varpi-t$, $\frac{1}{2}\varpi-u$, $\frac{1}{2}\varpi-v$, $\frac{1}{2}-x$, il viendra

Pour un arc, $$\text{Sin.}t=+\text{Sin.}s;$$

Pour deux, $$2\text{Sin.}t\,\text{Sin.}u=-\text{Cos.}s+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}(s-2t),$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}(s-2u)$$

Pour trois, $$4\text{Sin.}t\,\text{Sin.}u\,\text{Sin.}v=-\text{Sin.}s+\text{Sin.}(s-2t);$$
$$+\text{Sin.}(s-2u)$$
$$+\text{Sin.}(s-2v)$$

Pour quatre, $8\,\mathrm{Sin}.t\,\mathrm{Sin}.u\,\mathrm{Sin}.v\,\mathrm{Sin}.x = +\mathrm{Cos}.s - \mathrm{Cos}.(s-2t) + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}.[s-2(t+u)]$,

$$-\mathrm{Cos}.(s-2u) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,[s-2(t+v)]$$
$$-\mathrm{Cos}.(s-2v) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}.[s-2(u+v)]$$
$$-\mathrm{Cos}.(s-2x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}.[s-2(t+x)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}.[s-2(u+x)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}.[s-2(v+x)]$$

et ainsi de suite.

4. Pour écrire ces formules sous une forme plus briève et pouvoir en généraliser l'expression, adoptons les notations que voici : t, u, v, x, ... étant des quantités en nombre quelconque, et F la caractéristique d'une fonction quelconque ; nous poserons

$$\Sigma F(t) = F(t) + F(u) + F(v) + F(x) + \ldots\ldots$$
$$\Sigma F(t,u) = F(t,u) + F(t,v) + F(u,v) + F(t,x) + F(u,x) + F(v,x) + \ldots\ldots$$
$$\Sigma F(t,u,v) = F(t,u,v) + F(t,u,x) + F(t,v,x) + F(u,v,x) + \ldots\ldots$$

. . . .

On voit d'après cela que, si les quantités t, u, v, x, ... sont au nombre de n,

$\Sigma F(t)$ aura $\frac{n}{1}$ termes ;

$\Sigma F(t,u)$ aura $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$ termes,

$\Sigma F(t,u,v)$ aura $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$ termes,

$\Sigma F(t,u,v,x)$ aura $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}$ termes,

. . . .

On voit assez, d'après cela, ce que signifieront

$$\Sigma\,\text{Sin.}(s-2t)\,,\ \Sigma\,\text{Sin.}[s-2(t+u)]\,,\ \Sigma\,\text{Sin.}[s-2(t+u+v)]\,,\ldots\ldots$$

$$\Sigma\text{Cos.}(s-2t)\,,\ \Sigma\text{Cos.}[s-2(t+u)]\,,\ \Sigma\text{Cos.}[s-2(t+u+v)]\,,\ldots\ldots$$

et toutes les autres expressions analogues.

5. Au moyen de ces notations, les résultats auxquels nous sommes parvenus ci-dessus (2, 3) pourront être écrits comme il suit :

Pour un arc, $\text{Cos.}t=\text{Cos.}s$,

Pour deux, $2\text{Cos.}t\text{Cos.}u=\text{Cos.}s+\frac{1}{2}\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$,

Pour trois, $4\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v=\text{Cos.}s+\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$;

Pour quatre, $8\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v\text{Cos.}x=\text{Cos.}s+\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$

$$+\tfrac{1}{2}\Sigma\text{Cos.}[s-2(t+u)]\,.$$

Pour un arc, $\text{Sin.}t=+\text{Sin.}s$;

Pour deux, $2\text{Sin.}t\text{Sin.}u=-\text{Cos.}s+\frac{1}{2}\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$;

Pour trois, $4\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v=-\text{Sin.}s+\Sigma\text{Sin.}[s-2t]$;

Pour quatre, $8\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v\text{Sin.}x=+\text{Cos.}s-\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$

$$+\tfrac{1}{2}\Sigma\text{Cos.}[s-2(t+u)]$$

6. La loi de ces divers résultats devenant ainsi manifeste, nous pourrons, en la généralisant, parvenir aux trois lemmes que voici :

t, u, v, x, ... étant des arcs en nombre quelconque n; et leur somme s,

LEMME I.

On a, quel que soit n;

$$2^{n-1}\operatorname{Cos}.t\operatorname{Cos}.u\operatorname{Cos}.v\operatorname{Cos}.x\ldots\ldots=\operatorname{Cos}.s+\Sigma\operatorname{Cos}.[s-2t]$$

$$+\Sigma\operatorname{Cos}.[s-2(t+u)]+\Sigma\operatorname{Cos}[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots$$

la suite devant être poussée à autant de termes qu'on pourra le faire, sans que le nombre des arcs t, u, v, ..., dont le double de la somme se trouve retranché à s, excède la moitié du nombre n, et le dernier terme devant être réduit à sa moitié, lorsque n est un nombre pair.

LEMME II.

Lorsque n est un nombre pair, on a

$$\pm 2^{n-1}\operatorname{Sin}.t\operatorname{Sin}.u\operatorname{Sin}.v\operatorname{Sin}.x\ldots\ldots=\operatorname{Cos}.s-\Sigma\operatorname{Cos}[s-2t]$$

$$+\Sigma\operatorname{Cos}.[s-2(t+u)]-\Sigma\operatorname{Cos}.[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant que n est de la forme $4i$ ou de la forme $4i+2$, la série devant s'arrêter au terme dans lequel le nombre des arcs t, u, v, ..., dont le double de la somme est retranché à s, sera précisément égal à la moitié de n, et ce dernier terme devant être réduit à sa moitié seulement.

LEMME III.

Lorsque n est un nombre impair, on a

$$\pm 2^{n-1}\operatorname{Sin}.t\operatorname{Sin}.u\operatorname{Sin}.v\operatorname{Sin}.x\ldots\ldots=\operatorname{Sin}.s-\Sigma\operatorname{Sin}.[s-2t]$$

$$+\Sigma\operatorname{Sin}.[s-2(t+u)]-\Sigma\operatorname{Sin}.[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris suivant que n est de la forme $4i+1$ ou de la forme $4i+3$, et la série devant être poussée à autant de termes qu'on pourra le faire sans que le nombre des arcs t, u, v, ..., dont le double de la somme se trouve retranché à s, excède la moitié du nombre n.

7. Si présentement nous supposons tous les arcs t, u, v, ... égaux entre eux et au premier, ce qui donnera $s=nt$, nous déduirons, comme corollaires de ces trois lemmes, les formules connues que voici:

Corollaire I.

On a, quel que soit le nombre entier positif n;

$$2^{n-1}.\mathrm{Cos.}^n t=\mathrm{Cos.}nt+\frac{n}{1}\,\mathrm{Cos.}(n-2)t+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\mathrm{Cos.}(n-4)t$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,\mathrm{Cos.}(n-6)t+.....$$

série qu'il faudra pousser aussi loin qu'on pourra le faire, sans admettre d'arcs négatifs, et où il ne faudra prendre seulement que la moitié du dernier terme, si n est un nombre pair.

Corollaire II.

Lorsque n est un nombre pair, on a

$$\pm 2^{n-1}.\mathrm{Sin.}^n t=\mathrm{Cos.}nt-\frac{n}{1}\,\mathrm{Cos.}(n-2)t+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\mathrm{Cos.}(n-4)t$$

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,\mathrm{Cos.}(n-6)t+.....$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant que n sera de la forme $4i$ ou de la forme $4i+2$, et la série devant être poussée aussi loin qu'on pourra le faire sans y admettre d'arcs négatifs, en réduisant son dernier terme à sa moitié seulement.

Corollaire III.

Lorsque n est un nombre impair, on a

$$\pm 2^{n-1}.\text{Sin.}^n x = \text{Sin.}nx - \frac{n}{1}\,\text{Sin.}(n-2)x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\text{Sin.}(n-4)x$$

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,\text{Sin.}(n-4)x + \ldots\ldots$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant que n sera de la forme $4i+1$ ou de la forme $4i+3$, et la série devant être poussée aussi loin qu'on pourra le faire sans y admettre d'arcs négatifs.

8. Soit

$$\mathrm{f}[a] = A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + A_4 a^4 + \ldots\ldots$$

une série infinie que l'on sache sommer, et dans laquelle A_1, A_2, A_3, …… sont des coefficiens numériques; on aura les deux remarques suivantes:

Remarque I.

La somme finie de la série infinie

$$A_1 a\,\text{Cos.}t + A_2 a^2\,\text{Cos.}2t + A_3 a^3\,\text{Cos.}3t + A_4 a^4\,\text{Cos.}4t + \ldots\ldots$$

est

$$\frac{\mathrm{f}[a(\text{Cos.}t + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)] + \mathrm{f}[a(\text{Cos.}t - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]}{2}.$$

Remarque II.

La somme de la série infinie

$A_1 a$

$$A_1 a \mathrm{Sin}.t + A_2 a^2 \mathrm{Sin}.2t + A_3 a^3 \mathrm{Sin}.3t + A_4 a^4 \mathrm{Sin}.4t + \ldots\ldots$$

est

$$\frac{\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)]-\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)]}{2\sqrt{-1}}.$$

En effet, 1.° suivant la définition de $\mathrm{f}[a]$, les sommes des deux séries

$$A_1 a(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)+A_2 a^2(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)^2+A_3 a^3(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)^3+\ldots;$$

$$A_1 a(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)+A_2 a^2(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)^2+A_3 a^3(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)^3+\ldots.$$

ou de leurs équivalentes

$$A_1 a(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)+A_2 a^2(\mathrm{Cos}.2t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2t)+A_3 a^3(\mathrm{Cos}.3t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.3t)+\ldots;$$

$$A_1 a(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)+A_2 a^2(\mathrm{Cos}.2t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2t)+A_3 a^3(\mathrm{Cos}.3t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.3t)+\ldots$$

sont respectivement

$$\mathrm{f}[a\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)]\,,\qquad \mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)]\,,$$

donc la demi-somme de ces deux séries et le quotient de leur demi-différence par $\sqrt{-1}$, lesquelles ne sont autre chose que les deux séries proposées, doivent avoir respectivement pour sommes la demi-somme de leurs sommes respectives et le quotient de la demi-différence de ces mêmes sommes par $\sqrt{-1}$, ainsi que nous l'avons annoncé.

9. Soient respectivement $\mathrm{F}[t]$, $\mathrm{F}'[t]$ les fonctions auxquelles se réduisent

$$\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)]+\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)]\,,$$

$$\frac{\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,t)]-\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)]}{\sqrt{-1}}\,;$$

lorsqu'on les a débarrassées des imaginaires qu'elles contiennent, au aura les théorèmes suivans :

THÉORÈME I.

La somme de la série infinie

$$A_1 a\operatorname{Cos}.t\operatorname{Cos}.u\operatorname{Cos}.v\ldots\ldots+A_2 a^2\operatorname{Cos}.2t\operatorname{Cos}.2u\operatorname{Cos}.2v\ldots\ldots$$

$$+A_3 a^3\operatorname{Cos}.3t\operatorname{Cos}.3u\operatorname{Cos}.3v\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

dans laquelle on suppose les arcs t, u, v,...... au nombre de n et leur somme s, a pour expression finie

$$\frac{1}{2^n}\left\{F[s]+\Sigma F[s-2t]+\Sigma F[s-2(t+u)]+\Sigma F[s-2(t+u+v)+\ldots\ldots\right\}$$

en observant, par rapport à la limitation de cette série, ce qui a déjà été dit (*Lemme I*).

THÉORÈME II.

Si n est un nombre pair, la somme de la série infinie

$$A_1 a\operatorname{Sin}.t\operatorname{Sin}.u\operatorname{Sin}.v\ldots\ldots+A_2 a^2\operatorname{Sin}.2t\operatorname{Sin}.2u\operatorname{Sin}\,2v\ldots\ldots$$

$$+A_3 a^3\operatorname{Sin}.3t\operatorname{Sin}.3u\operatorname{Sin}.3v\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\pm\frac{1}{2^n}\left\{F[s]-\Sigma F[s-2t]+\Sigma F[s-2(t+u)]-\Sigma F[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots\right\};$$

en observant, pour le signe et la limitation de cette série, ce qui a été prescrit (*Lemme II*).

THÉORÈME III.

Si n est un nombre impair, la somme de la série infinie

$$A_1 a\,\mathrm{Sin}.t\,\mathrm{Sin}.u\,\mathrm{Sin}\,v \ldots\ldots + A_2 a^2\,\mathrm{Sin}.2t\,\mathrm{Sin}.2u\,\mathrm{Sin}.2v \ldots\ldots$$

$$+ A_3 a^3\,\mathrm{Sin}.3t\,\mathrm{Sin}.3u\,\mathrm{Sin}.3v \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\pm \frac{1}{2^n}\Big\{F'[s] - \Sigma F'[s-2t] + \Sigma F'[s-2(t+u)] - \Sigma F'[s-2(t+u+v)] + \ldots\Big\};$$

en observant, pour le signe et la limitation de cette série, ce qui a été dit (*Lemme III*).

Il nous suffira de démontrer le premier de ces deux théorèmes pour faire voir de quelle manière doivent se démontrer les deux qui le suivent.

Par le *Lemme I*, on a successivement

$$2^{n-1}\mathrm{Cos}.t\,\mathrm{Cos}.u\,\mathrm{Cos}.v \ldots = \mathrm{Cos}.s + \Sigma\mathrm{Cos}.[s-2t] + \Sigma\mathrm{Cos}.[s-2(t+u)] + \ldots$$

$$2^{n-1}\mathrm{Cos}.2t\,\mathrm{Cos}.2u\,\mathrm{Cos}.2v \ldots = \mathrm{Cos}.2s + \Sigma\mathrm{Cos}.2[s-2t] + \Sigma\mathrm{Cos}.2[s-2(t+u)] + \ldots$$

$$2^{n-1}\mathrm{Cos}.3t\,\mathrm{Cos}.3u\,\mathrm{Cos}.3v \ldots = \mathrm{Cos}.3s + \Sigma\mathrm{Cos}.3[s-2t] + \Sigma\mathrm{Cos}.3[s-2(t+u)] + \ldots$$

. . . .

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $2A_1a$, $2A_2a^2$, $2A_3a^3$, ..., la somme des premiers membres sera la suite infinie proposée multipliée par 2^n; quant à la somme des seconds membres, elle sera composée de cette suite de séries infinies que voici :

$$2(A_1 a\text{Cos}.s+A_2 a^2\text{Cos}\,2s+A_3 a^3\text{Cos}.3s+\ldots\ldots)$$
$$+2\Sigma\{A_1 a\text{Cos}.[s-2t]+A_2 a^2\text{Cos}.2[s-2t]+A_3 a^3\text{Cos}.3[s-2t]+\ldots\}$$
$$+2\Sigma\{A_1 a\text{Cos}[s-2(t+u)]+A_2 a^2\text{Cos}2[s-2(t+u)]+A_3 a^3\text{Cos}3[s-2(t+u)]+\ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, d'après la définition de la fonction F et la *Remarque I*, la somme de la première série est $\frac{F(s)}{2}$ et les sommes des autres séries, sous le signe Σ, sont successivement

$$\frac{F[s-2t]}{2}, \quad \frac{F[s-2(t+u)]}{2}, \ldots\ldots\ldots$$

en les ajoutant donc et divisant ensuite par 2^n, on obtiendra la somme annoncée de la série proposée.

On démontrera les deux autres théorèmes, à l'aide des *Lemmes II* et *III*, comme nous avons démontré celui-là à l'aide du *Lemme I*.

10. En supposant, dans nos trois théorèmes, que les arcs t, u, v,......... deviennent égaux entre eux et au premier, ce qui donne $s=nt$, on en conclut les trois corollaires que voici :

Corollaire I.

Quel que soit le nombre entier positif n, la somme de la série infinie

$$A_1 a\text{Cos.}^n t+A_2 a^2\text{Cos.}^n 2t+A_3 a^3\text{Cos.}^n 3t+\ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\frac{1}{2^n}\left\{F[nt]+\frac{n}{1}F[(n-2)t]+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}F[(n-4)t]+\ldots\ldots\right\};$$

en observant les limitations prescrites (7, *Corollaire I*).

Corollaire II.

Si n est un nombre pair, la somme de la série infinie

$$A_1 a \operatorname{Sin.}^n t + A_2 a^2 \operatorname{Sin.}^n 2t + A_3 a^3 \operatorname{Sin.}^n 3t + \ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\pm \frac{1}{2^n} \left\{ \mathrm{F}[nx] - \frac{n}{1} \mathrm{F}[(n-2)x] + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \mathrm{F}[(n-4)x] - \ldots\ldots \right\}$$

en observant, pour le choix du signe et pour le nombre des termes, ce qui a été prescrit (7, *Corollaire II*).

Corollaire III.

Si n est un nombre impair, la somme de la série infinie

$$A_1 a \operatorname{Sin.}^n t + A_2 a^2 \operatorname{Sin.}^n 2t + A_3 a^3 \operatorname{Sin.}^n 3t + A_4 a^4 \operatorname{Sin.}^n 4t + \ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\pm \frac{1}{2^n} \left\{ \mathrm{F}'[nx] - \frac{n}{1} \mathrm{F}'[(n-2)x] + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \mathrm{F}'[(n-4)x] - \ldots\ldots \right\};$$

en observant, pour le choix du signe et le nombre des termes du développement, ce qui a été prescrit (7, *Corollaire III*).

Remarque générale.

11. Comme toutes les séries que nous avons considérées (8, 9, 10) sont dépourvues de leur premier terme, il faudra avoir soin, lorsque le contraire arrivera, d'ajouter ce premier terme à la somme donnée par ce qui précède

APPLICATION I.

12. On sait que

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \ldots ;$$

d'où

$$e^a - 1 = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \ldots ;$$

de sorte qu'on a ici

$$\mathrm{f}[a] = e^a - 1 ;$$

donc, 1.° la somme de la série

$$\frac{a\mathrm{Cos}.t}{1} + \frac{a^2\mathrm{Cos}.2t}{1.2} + \frac{a^3\mathrm{Cos}.3t}{1.2.3} + \frac{a^4\mathrm{Cos}.4t}{1.2.3.4} + \ldots$$

sera (*Remarque I.*)

$$\frac{\left\{e^{a(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.t)} - 1\right\} + \left\{e^{a(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.t)} - 1\right\}}{2},$$

ou bien

$$e^{a\mathrm{Cos}.t} . \frac{e^{+\sqrt{-1}a\mathrm{Sin}.t} + e^{-\sqrt{-1}a\mathrm{Sin}.t}}{2} - 1 = e^{a\mathrm{Cos}.t}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.t) - 1 ;$$

de sorte qu'en ajoutant 1 de part et d'autre, on a

$$e^{a\mathrm{Cos}.t}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.t) = 1 + \frac{a\mathrm{Cos}.t}{1} + \frac{a^2\mathrm{Cos}.2t}{1.2} + \frac{a^3\mathrm{Cos}.3t}{1.2.3} + \frac{a^4\mathrm{Cos}.4t}{1.2.3.4} + \ldots$$

2.° La somme de la série

$$\frac{a\mathrm{Sin}.t}{1} + \frac{a^2\mathrm{Sin}.2t}{1.2} + \frac{a^3\mathrm{Sin}3t}{1.2.3} + \frac{a^4\mathrm{Sin}.4t}{1.2.3.4} + \ldots$$

sera (*Remarque II*).

$$\frac{\{e^{a(\mathrm{Cos}.t+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)}-1\}-\{e^{a(\mathrm{Cos}.t-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)}-1\}}{2\sqrt{-1}},$$

ou bien

$$e^{a\mathrm{Cos}.t}.\frac{e^{+\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.t}-e^{-\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.t}}{2\sqrt{-1}}=e^{a\mathrm{Cos}.t}.\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}.t)$$

de sorte qu'on aura

$$e^{a\mathrm{Cos}.t}.\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}.t)=\frac{a\mathrm{Sin}\,t}{1}+\frac{a^2\mathrm{Sin}.2t}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Sin}.3t}{1.2.3}+\frac{a^4\mathrm{Sin}.4t}{1.2.3.4}+\ldots\text{ (*)}$$

13. D'après cela, on aura ici

$$\mathrm{F}[t]=2\{e^{a\mathrm{Cos}.t}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.t)-1\},\quad \mathrm{F}'[t]=2e^{a\mathrm{Cos}.t}.\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}.t);$$

substituant donc ces valeurs dans les formules ci-dessus (9, 10), nous aurons, par le *Théorème I*, quel que soit n,

$$1+\frac{a\mathrm{Cos}.t\mathrm{Cos}.u\mathrm{Cos}.v\ldots}{1}+\frac{a^2\mathrm{Cos}.2t\mathrm{Cos}.2u\mathrm{Cos}.2v\ldots}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Cos}.3t\mathrm{Cos}.3u\mathrm{Cos}.3v\ldots}{1.2.3}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\{e^{a\mathrm{Cos}.s}.\mathrm{Cos}[a\mathrm{Sin}.s]+\Sigma e^{a\mathrm{Cos}.(s-2t)}.\mathrm{Cos}.[a\mathrm{Sin}.(s-2t)]$$

$$+\Sigma e^{a\mathrm{Cos}.(s-2t-2u)}.\mathrm{Cos}.[a\mathrm{Sin}.(s-2t-2u)]+\ldots\};$$

par le *Théorème II*, pour n pair,

(*) Nous ne connaissions pas encore le *Cours d'analise* de M. CAUCHY, où la première de ces deux séries se trouve sommée, lorsque nous en avons donné la somme, à la page 107 du présent volume.

$$\frac{a\text{Sin}.t\text{Sin}.u\text{Sin}.v\ldots}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2t\text{Sin}.2u\text{Sin}.2v\ldots}{2}+\frac{a^3\text{Sin}.3t\text{Sin}.3u\text{Sin}.3v\ldots}{3}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\{e^{a\text{Cos}.s}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.s]-\Sigma e^{a\text{Cos}.(s-2t)}\text{Cos}.[a\text{Sin}.(s-2t)]$$

$$+\Sigma e^{a\text{Cos}.(s-2t-2u)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(s-2t-2u)]-\ldots\};$$

par le *Théorème III*, pour n impair,

$$\frac{\text{Sin}.t\text{Sin}.u\text{Sin}v\ldots}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2t\text{Sin}\,2u\text{Sin}.2v}{1}+\frac{a^3\text{Sin}.3t\text{Sin}.3u\text{Sin}.3v\ldots}{3}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\{e^{a\text{Cos}.s}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.s]-\Sigma e^{a\text{Cos}.(s-2t)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(s-2t)]$$

$$+\Sigma e^{a\text{Cos}.(s-2t-2u)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(s-2t-2u)]-\ldots\};$$

par le *Corollaire I*, quel que soit n,

$$1+\frac{a\text{Cos}.^nt}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.^n2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.^n3t}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.^n4t}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left\{e^{a\text{Cos}.nt}\text{Cos}.[a\text{Sin}\,nt]+\frac{n}{1}e^{a\text{Cos}.(n-2)t}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(n-2)t]\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}e^{a\text{Cos}.(n-4)t}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(n-4)t]+\ldots\ldots\right\};$$

par le *Corollaire II*, pour n pair,

$$\frac{a\text{Sin}.^nt}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.^n2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.^n3t}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin}.^n4t}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\left\{e^{a\text{Cos}.nt}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.nt]-\frac{n}{1}e^{a\text{Cos}.(n-1)t}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(n-2)t]\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}e^{a\text{Cos}.(n-4)t}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(n-4)t]+\ldots\ldots\right\};$$

et

et par le *Corollaire III*, pour n impair,

$$\frac{a\text{Sin.}^n t}{1}+\frac{a^2\text{Siu.}^n 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}^n 3t}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin.}^n 4t}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\left\{e^{a\text{Cos.}nt}.\text{Sin.}[a\text{Sin.}nt]-\frac{n}{1}e^{a\text{Cos.}(n-2)t}.\text{Sin.}[a\text{Sin.}(n-2)t]\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}e^{a\text{Cos.}(n-4)t}.\text{Sin.}[a\text{Sin.}(n-4)t]+\ldots\ldots\right\};$$

14. Si, par exemple, ou suppose $n=2$, les première, deuxième, quatrième et cinquième formules deviendront, en ayant toujours égard aux limitations prescrites pour les seconds membres,

$$1.^\circ\quad 1+\frac{a\text{Cos.}t\text{Cos }u}{1}+\frac{a^2\text{Cos.}2t\text{Cos.}u}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos.}3t\text{Cos.}3u}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos.}4t\text{Cos.}4u}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{2}\{e^{a\text{Cos.}(t+u)}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(t+u)]+e^{a\text{Cos.}(t-u)}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(t-u)]\}.$$

$$2.^\circ\quad \frac{a\text{Sin.}t\text{Sin.}u}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}2t\text{Sin.}2u}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}3t\text{Sin.}3u}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin.}4t\text{Sin.}4u}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=-\tfrac{1}{2}\{e^{a\text{Cos.}(t+u)}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(t+u)]-e^{a\text{Cos.}(t-u)}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(t-u)]\};$$

$$3.^\circ\quad +1\frac{a\text{Cos.}^2 t}{1}+\frac{a^2\text{Cos.}^2 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos.}^2 3t}{1.2.3}+\ldots=+\tfrac{1}{2}\{e^{a\text{Cos.}2t}.\text{Cos.}(a\text{Sin.}2t)+e^a\}.$$

$$4.^\circ\quad \frac{a\text{Sin.}^2 t}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}^2 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}^2 3t}{1.2.3}+\ldots=-\tfrac{1}{2}\{e^{a\text{Cos.}2t}.\text{Cos.}(a\text{Sin.}2t)-e^a\};$$

Ces deux dernières formules avaient déjà été données par M. Stein, à la page 112 du présent volume.

15. Si l'on suppose $n=3$, les première, troisième, quatrième et sixième formules deviendront

1.° $$1+\frac{a\text{Cos}.t\text{Cos}.u\text{Cos}.v}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2t\text{Cos}.2u\text{Cos}.2v}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3t\text{Cos}.3u\text{Cos}.3v}{1.2.3}+\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} e^{a\text{Cos}.(t+u+v)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(t+u+)] \\ +e^{a\text{Cos}.(t+u-v)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(t+u-v)] \\ +e^{a\text{Cos}.(u+v-t)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(u+v-t)] \\ +e^{a\text{Cos}.(v+t-u)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(v+t-u)] \end{array}\right\}.$$

2.° $$\frac{a\text{Sin}.t\text{Sin}.u\text{Sin}.v}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2t\text{Sin}.2u\text{Sin}.2v}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.3t\text{Sin}.3u\text{Sin}.3v}{1.2.3}+\ldots$$

$$=-\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} e^{a\text{Cos}.(t+u+v)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(t+u+v)] \\ -e^{a\text{Cos}.(t+u-v)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(t+u-v)] \\ -e^{a\text{Cos}.(u+v-t)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(u+v-t)] \\ -e^{a\text{Cos}.(v+t-u)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(v+t-u)] \end{array}\right\}.$$

3.° $$1+\frac{a\text{Cos}.^3t}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.^32t}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.^33t}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{4}\left\{e^{a\text{Cos}.3t}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.3t)+3e^{a\text{Cos}.t}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.t)\right\}.$$

4.° $$\frac{a\text{Sin}.^3t}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.^32t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.^33t}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

$$=-\tfrac{1}{4}\left\{e^{a\text{Cos}.3t}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.3t)-3e^{a\text{Cos}.t}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.t)\right\}.$$

et ainsi de suite.

APPLICATION II.

16. On sait qu'en faisant usage des logarithmes naturels on a

$$\text{Log.}(1+a)=\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}-\ldots$$

de sorte qu'ici

$$\text{f}[a]=\text{Log.}(1+a)$$

donc, 1.° la somme de la série

$$\frac{a\text{Cos.}t}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}2t}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}3t}{3}-\frac{a^4\text{Cos.}4t}{4}+\ldots$$

sera (*Remarque I*)

$$\frac{\text{Log.}\{1+a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\text{Sin.}t)\}+\text{Log.}\{1+a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\text{Sin.}t)\}}{2},$$

ou bien

$$\frac{\text{Log.}\{(1+a\text{Cos.}t)+\sqrt{-1}a\text{Sin.}t\}\{(1+a\text{Cos.}t)-\sqrt{-1}a\text{Sin.}t\}}{2}=\frac{\text{Log.}\{(1+a\text{Cos.}t)^2+a^2\text{Sin.}^2t\}}{2}$$

ou enfin

$$\frac{\text{Log.}(1+2a\text{Cos.}t+a^2)}{2}=\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}t+a^2};$$

2.° la somme de la série

$$\frac{a\text{Sin.}t}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}2t}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3t}{3}-\frac{a^4\text{Sin.}4t}{4}+\ldots$$

sera (*Remarque II*)

$$\frac{\text{Log.}\{1+a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\text{Sin.}t)\}-\text{Log.}\{1+a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\text{Sin.}t)\}}{2\sqrt{-1}};$$

ou bien

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\text{Log}\,\frac{(1+a\,\text{Cos.}t)+\sqrt{-1}\,a\,\text{Sin.}t}{(1+a\,\text{Cos.}t)-\sqrt{-1}\,a\,\text{Sin.}t}\ .$$

En vertu de la formule connue

$$\text{Log.}\,\frac{p}{q}=2\left\{\frac{p-q}{p+q}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\ldots\right\},$$

cette somme devient

$$\frac{a\,\text{Sin.}t}{1+a\,\text{Cos.}t}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{a\,\text{Sin.}t}{1+a\,\text{Cos.}t}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{a\,\text{Sin.}t}{1+a\,\text{Cos.}t}\right)^5-\ldots$$

c'est-à-dire,

$$\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{a\,\text{Sin.}t}{1+a\,\text{Cos.}t}\right).$$

17. D'après cela, on aura ici

$$\text{F}[t]=2\,\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}t+a^2}\ ,\qquad \text{F}'[t]=2\,\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{a\,\text{Sin.}t}{1+a\,\text{Cos.}t}\right);$$

substituant donc ces valeurs dans les formules ci-dessus (9, 10), nous aurons, par le *Théorème I*, quel que soit n,

$$\frac{a\,\text{Cos.}t\,\text{Cos.}u\,\text{Cos}\,v\ldots}{1}-\frac{a^2\,\text{Cos.}2t\,\text{Cos.}2u\,\text{Cos.}2v\ldots}{2}+\frac{a^3\,\text{Cos.}3t\,\text{Cos.}3u\,\text{Cos.}3v\ldots}{3}-\ldots\ldots$$

$$=+\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}s+a^2}+\Sigma\,\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}(s-2t)+a^2}$$

$$+\Sigma\,\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}(s-2t-2u)+a^2}+\ldots\ldots\Big\}.$$

par le *Théorème II*, pour n pair,

$$\frac{a\,\text{Sin.}t\,\text{Sin.}u\,\text{Sin.}v\ldots}{1}-\frac{a^2\,\text{Sin.}2t\,\text{Sin.}2u\,\text{Sin.}2v\ldots}{2}+\frac{a^3\,\text{Sin.}3t\,\text{Sin.}3u\,\text{Sin.}3v\ldots}{3}-\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}s+a^2}-\Sigma\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}(s-2t)+a^2}$$

$$+\Sigma\text{Log}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}(s-2t-2u)+a^2}-\ldots\ldots\Big\}.$$

par le *Théorème III*, pour n impair,

$$\frac{a\,\text{Sin.}t\,\text{Sin.}u\,\text{Sin.}v\ldots}{1}-\frac{a^2\,\text{Sin.}2t\,\text{Sin.}2u\,\text{Sin.}2v\ldots}{2}+\frac{a^3\,\text{Sin.}3t\,\text{Sin.}3u\,\text{Sin.}3v\ldots}{3}-\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{\text{Arc}\Big[\text{Tang.}=\frac{a\,\text{Sin.}s}{1+a\,\text{Cos.}s}\Big]-\Sigma\text{Arc}\Big[\text{Tang.}=\frac{a\,\text{Sin.}(s-2t)}{1+a\,\text{Cos.}(s-2t)}\Big]$$

$$+\Sigma\text{Arc}\Big[\text{Tang.}=\frac{a\,\text{Sin.}(s-2t-2u)}{1+a\,\text{Cos.}(s-2t-2u)}\Big]-\ldots\Big\}.$$

par le *Corollaire I*, quel que soit n,

$$\frac{a\,\text{Cos.}^n t}{1}-\frac{a^2\,\text{Cos.}^n 2t}{2}+\frac{a^3\,\text{Cos.}^n 3t}{3}-\frac{a^4\,\text{Cos.}^n 4t}{4}+\ldots$$

$$=+\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}nt+a^2}+\frac{n}{1}\,\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}(n-2)t+a^2}$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}(n-4)t+a^2}+\ldots\Big\}.$$

par le *Corollaire II*, pour n pair,

$$\frac{a\,\text{Sin.}^n t}{1}-\frac{a^2\,\text{Sin.}^n 2t}{2}+\frac{a^3\,\text{Sin.}^n 3t}{3}-\frac{a^4\,\text{Sin.}^n 4t}{4}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^n}\Big\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}nt+a^2}-\frac{n}{1}\,\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}(n-2)t+a^2}$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\text{Log.}\sqrt{1+2a\,\text{Cos.}(n-4)t+a^2}-\ldots\Big\}.$$

par le *Corollaire III*, pour n impair,

$$\frac{a\mathrm{Sin.}^n t}{1}-\frac{a^2\mathrm{Sin.}^n 2t}{2}+\frac{a^3\mathrm{Sin.}^n 3t}{3}-\frac{a^4\mathrm{Sin.}^n 4t}{4}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^n}\left\{\mathrm{Arc}\left[\mathrm{Tang.}=\frac{a\mathrm{Sin}.nt}{1+a\mathrm{Cos}.nt}\right]-\frac{n}{1}\,\mathrm{Arc}\left[\mathrm{Tang.}=\frac{a\mathrm{Sin}.(n-1)t}{1+a\mathrm{Cos}.(n-2)t}\right]+\ldots\right\}$$

18. Si, par exemple, on suppose $n=2$, les première, deuxième, quatrième et cinquième formules deviendront, en ayant toujours égard aux limitations prescrites pour les seconds membres,

$$1.^\circ\quad \frac{a\mathrm{Cos}.t\mathrm{Cos}.u}{1}-\frac{a^2\mathrm{Cos}.2t\mathrm{Cos}.2u}{2}+\frac{a^3\mathrm{Cos}.3t\mathrm{Cos}.3u}{3}-\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Log}.\sqrt{1+2a\mathrm{Cos}.(t+u)+a^2}+\mathrm{Log}.\sqrt{1+2a\mathrm{Cos}.(t-u)+a^2}\right\}.$$

$$2.^\circ\quad \frac{a\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.u}{1}-\frac{a^2\mathrm{Sin}.2t\mathrm{Sin}.2u}{2}+\frac{a^3\mathrm{Sin}.3t\mathrm{Sin}.3u}{3}-\ldots$$

$$=-\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Log}.\sqrt{1+2a\mathrm{Cos}.(t+u)+a^2}-\mathrm{Log}.\sqrt{1+2a\mathrm{Cos}.(t+u)+a^2}\right\}.$$

$$3.^\circ\quad \frac{a\mathrm{Cos}.^2 t}{1}-\frac{a^2\mathrm{Cos}.^2 3t}{2}+\frac{a^3\mathrm{Cos}.^2 3t}{3}-\frac{a^4\mathrm{Cos}.^2 4t}{4}+\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Log}.\sqrt{1+2a\mathrm{Cos}.2t+a^2}+\mathrm{Log}.(1+a)\right\}.$$

$$4.^\circ\quad \frac{a\mathrm{Sin}.^2 t}{1}-\frac{a^2\mathrm{Sin}.^2 2t}{2}+\frac{a^3\mathrm{Sin}.^2 3t}{3}-\frac{a^4\mathrm{Sin}.^2 4t}{4}+\ldots$$

$$=-\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Log}.\sqrt{1+2a\mathrm{Cos}.2t+a^2}-\mathrm{Log}.(1+a)\right\}.$$

19. Si l'on suppose $n=3$, les première, troisième, quatrième et sixième formules donneront

$$1.^\circ\quad \frac{a\mathrm{Cos}.t\mathrm{Cos}.u\mathrm{Cos}.v}{1}-\frac{a^2\mathrm{Cos}.2t\mathrm{Cos}.2u\mathrm{Cos}.2v}{2}+\frac{a^3\mathrm{Cos}.3t\mathrm{Cos}.3u\mathrm{Cos}.3v}{3}-\ldots$$

$$=+\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(t+u+v)+a^2}\\+\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(t+u-v)+a^2}\\+\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(u+v-t)+a^2}\\+\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(v+t-u)+a^2}\end{array}\right\};$$

2.° $$\frac{a\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}2t\text{Sin.}2u\text{Sin.}2v}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3t\text{Sin}\,3u\text{Sin.}3v}{3}-\dots$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\dfrac{a\text{Sin.}(t+u+v)}{1+a\text{Cos.}(t+u+v)}\right]\\-\text{Arc}\left[\text{Tang}=\dfrac{a\text{Sin.}(t+u-v)}{1+a\text{Cos.}(t+u-v)}\right]\\-\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\dfrac{a\text{Sin.}(u+v-t)}{1+a\text{Cos.}(u+v-t)}\right]\\-\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\dfrac{a\text{Sin.}(v+t-u)}{1+a(\text{Cos.}v+t-u)}\right]\end{array}\right\}.$$

3.° $$\frac{a\text{Cos.}^3t}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}^32t}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}^33t}{3}-\frac{a^4\text{Cos.}^34t}{4}+\dots$$

$$=+\frac{1}{4}\left\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}3t+a^2}+3\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos}\,t+a^2}\right\}.$$

4.° $$\frac{a\text{Sin.}^3t}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}^32t}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}^33t}{3}-\frac{a^4\text{Sin.}^34t}{4}+\dots$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}3t}{1+a\text{Cos.}3t}\right)-3\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}t}{1+a\text{Cos.}t}\right)\right\}.$$

20. Nous ne pousserons pas plus loin, pour le moment, ces applications qui n'ont, comme l'on voit, rien de bien difficile, et qui conduisent à des résultats très-remarquables. Il nous suf-

fisait d'établir les principes généraux et de montrer la marche du calcul. Mais, dans un supplément au présent mémoire, nous nous occuperons de la construction des formules générales servant à sommer les séries infinies de la forme

$$A_1a\text{Cos.}^\alpha t\text{Cos.}^\beta u\text{Cos.}^\gamma v\ldots\ldots+A_2a^2\text{Cos.}^\alpha 2t\text{Cos.}^\beta 2u\text{Cos.}^\gamma 2v\ldots\ldots$$

$$+A_3a^3\text{Cos.}^\alpha 3t\text{Cos.}^\beta 3u\text{Cos.}^\gamma 3v\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

$$A_1a\text{Sin.}^\alpha t\text{Sin.}^\beta u\text{Sin.}^\gamma v\ldots\ldots+A_2a^2\text{Sin.}^\alpha 2t\text{Sin.}^\beta 2u\text{Sin.}^\gamma 2v\ldots\ldots$$

$$+A_3a^3\text{Sin.}^\alpha 3t\text{Sin.}^\beta 3u\text{Sin.}^\gamma 3v\ldots\ldots+\ldots\ldots,$$

lorsqu'on sait sommer la série infinie

$$A_1a+A_2a^2+A_3a^3+A_4a^4+A_5a^5+\ldots\ldots \text{ (*)}$$

(*) Presque en même temps que ce qu'on vient de lire nous est parvenu, nous avons reçu de M. Sturm de Genève, sur la sommation de diverses classes de séries, un travail qui, sans être aussi étendu que celui de M. Querret, offre néanmoins quelques résultats curieux, et que nous ferons prochainement connaître.

J. D. G.

ANALISE.