ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

A. L. BOYER

Questions résolues. Solution du problème d'analise élémentaire proposé à la page 316 du XII.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 101-104
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__101_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème d'analise élémentaire proposé à la page 316 du XII.e volume des Annales ;

Par MM. A. L. Boyer, élève au collége royal de Montpellier,
Querret, chef d'institution à St-Malo,
Et Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

PROBLÈME. *Il a fallu* n *vis d'Archimède pour évacuer, dans le temps* t, *l'eau d'un bassin, dont la surface était* a, *dans lequel la pluie tombait, et qui était en outre alimenté par une source.*

Il a fallu n′ *vis d'Archimède pour évacuer, dans le temps* t′, *l'eau d'un second bassin, dont la surface était* a′, *dans lequel la pluie tombait, et qui était en outre alimenté par une source.*

Il a fallu n″ *vis d'Archimède pour évacuer, dans le temps* t″, *l'eau d'un troisième bassin, dont la surface était* a'' *, dans lequel la pluie tombait, et qui était en outre alimenté par une source.*

On demande, d'après cela, quel sera le nombre N *de vis d'Archimède nécessaires pour évacuer, dans le temps* T *, l'eau d'un quatrième bassin, dont la surface est* A*, dans lequel la pluie tombe, et qui est en outre alimenté par une source ?*

On suppose d'ailleurs que l'eau est à la même hauteur inconnue dans les quatre bassins au moment où l'opération commence, que la pluie y tombe avec une égale intensité, que les sources y amènent des quantités égales d'eau dans des temps égaux, et qu'enfin les vis d'Archimède ont toutes une même capacité d'évacuation.

Solution. Soit x la hauteur commune de l'eau dans les quatre bassins, lorsque les vis commencent à jouer.

Soit y la quantité dont la pluie qui tombe pourrait à elle seule, dans l'unité de temps, augmenter la hauteur de l'eau d'un bassin qui ne recevrait d'eau de nulle autre part, et qui n'en perdrait pas non plus.

Soit z le volume d'eau que fournit chacune des sources dans chaque unité de temps.

Soit enfin v le volume d'eau que peut évacuer une des vis dans une unité de temps.

La surface du quatrième bassin étant A, il se trouvera contenir, au commencement de l'opération, un volume d'eau exprimé par Ax.

A chaque unité de temps, il tombera dans ce même bassin un volume d'eau de pluie exprimé par Ay, ce qui fera, pour toute la durée de l'opération, un volume ATy.

Enfin, pendant cette même opération, il arrivera de la source dans le bassin un volume d'eau exprimé par Tz.

De sorte que le volume de l'eau à évacuer de ce quatrième bassin sera $Ax+ATy+Tz$.

Or, pendant la durée de l'opération, chaque vis d'Archimède évacuant un volume d'eau exprimé par Tv, le volume total de l'eau évacuée de ce bassin sera NTv.

Puis donc qu'à la fin de l'opération le bassin doit se trouver vide, on doit avoir

$$Ax+ATy+Tz=NTv\;; \qquad (1)$$

et, comme les circonstances sont exactement les mêmes pour chacun des trois autres bassins, on aura en outre

$$\left.\begin{array}{l} a\,x+a\,t\,y+t\,z=n\,t\,v\;, \\ a'x+a't'y+t'z=n't'v\;, \\ a''x+a''t''y+t''z=n''t''v\;; \end{array}\right\}\;(2)$$

tout se réduit donc à tirer de ces quatre équations la valeur de N, en fonction des données du problème.

Soient pris successivement la somme des produits des équations (2)

1.° Par $t't''(a'-a'')$, $t''t(a''-a)$, $tt'(a-a')$;

2° Par $t'a''-t''a$, $t''a-ta''$, $ta'-t'a$;

3.° Par $a'a''(t''-t')$, $a''a(t-t'')$, $aa'(t'-t)$;

en posant, pour abréger,

$$P=tt't''[n(a'-a'')+n'(a''-a)+n''(a-a')]\;,$$

$$Q=nt(t'a''-t''a')+n't'(t''a-ta'')+n''t''(ta'-t'a)\,,$$

$$R=nta'a''(t''-t')+n't'a''a(t-t'')+n''t''aa'(t'-t)\;,$$

$$S=t't''a(a'-a'')+t''ta'(a''-a)+tt'a''(a-a')\;,$$

il viendra

$$Sx=Pv\ ,$$

$$Sy=Qv\ ,$$

$$Sz=Rv\ ;$$

prenant enfin la somme des produits respectifs de ces dernières par A, AT et T, et ayant égard à l'équation (1), il viendra, en divisant par STv,

$$N=\frac{AP+ATQ+TR}{ST}\ ;$$

formule qui résout le problème (*).

M. Durrande observe que, comme la véritable inconnue du problème est un nombre abstrait, on peut, sans inconvénient, prendre une des quatre inconnues x, y, z, v pour unité, ce qui simplifie un peu les formules.

(*) Ce problème est, comme l'on voit, très-aisé à résoudre; il l'est pourtant moins que le Problème XI de l'*Arithmétique universelle*, dont il n'est qu'une extension; aussi n'avons-nous jamais bien compris pourquoi ce dernier passait pour difficile. C'est pourtant à tel point que, dans une Notice sur feu Mauduit, du collége de France, insérée dans le temps au Moniteur, le panégyriste crut devoir indiquer, comme un des titres de gloire de ce professeur, qu'il avait résolu le problème des bœufs d'une autre manière que Newton.

J. D. G.