ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 252, à Montpellier [Hérault];

Chez M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer doivent être envoyés, francs de port, à la première de ces deux adresses.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Il en coûte moitié moins, pour six mois. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	144.
	II.		212.
	III.		332.
	IV.		360.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.
RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME TREIZIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55.

1822 ET 1823.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur la recherche des maxima *et* minima, *dans les formules intégrales indéterminées*;

Par M. GERGONNE.

« L'une des raisons principales qui éloignent
» ceux qui entrent dans les connaissances du
» véritable chemin qu'ils doivent suivre, est
» l'imagination qu'on prend d'abord que les
» bonnes choses sont inaccessibles, en leur
» donnant le nom de grandes, hautes, élevées,
» sublimes. Cela perd tout. Je les voudrais
» nommer basses, communes, familières ».

PASCAL.

JUSQU'À l'époque où Arbogast et Lagrange présentèrent, tour à tour, sous un point de vue tout-à-fait nouveau les principes du *Calcul différentiel*, cette branche d'analise n'avait guère été, aux yeux de la plupart des géomètres, qu'un mystérieux mécanisme, justifié seulement par la constante et rigoureuse exactitude des résultats qu'on en avait obtenus.

Peut-être n'est-ce point une exagération d'avancer qu'aujourd'hui même nous en sommes encore à peu près au même point à l'égard du *Calcul des variations*. Du moins, n'est-il pas rare de rencontrer des géomètres d'assez bonne foi pour convenir, sans détour, qu'ils emploient mécaniquement les procédés de ce calcul, sans être jamais parvenus à en bien saisir l'esprit ; ce qui doit probablement tenir à ce que, pour nous servir des expressions de d'Alembert, les auteurs qui en ont écrit « dédaignant de revenir sur leurs pas, » pour faciliter aux autres le chemin qu'ils avaient eu tant de peine à » se frayer eux-mêmes, ont préféré la gloire d'augmenter l'édifice » au soin d'en éclairer l'entrée ».

On dit communément que l'objet du calcul des variations est de différentier sous un point de vue des quantités qui ont déjà été différentiées sous un autre ; mais on ne fait pas attention que, d'une part, dans les applications de ce calcul, on différentie très-souvent sous le nouveau point de vue des équations de condition qui n'ont encore subi aucune autre sorte de différentiation ; et que, d'une autre part, dans le calcul différentiel partiel, on différentie sans cesse sous un point de vue des fonctions déjà différentiées sous un ou plusieurs autres, et qu'on en fait de même encore lorsque, dans un problème, on a recours à la différentiation des paramètres, sans que pour cela on puisse dire que l'on emploie le calcul des variations, et sans que l'on songe même aucunement à noter ces divers modes de différentiation par des caractéristiques différentes.

On présente aussi le calcul des variations comme le plus haut degré d'abstraction que la science du calcul puisse atteindre ; mais c'est peut-être là, au contraire, ce qu'on devrait soigneusement éviter ; attendu qu'une telle pensée ne peut que préoccuper l'esprit d'une manière fâcheuse et tout-à-fait propre à lui faire manquer le but, en lui faisant chercher trop haut ce qui est tout-à-fait à son niveau ; nous espérons faire voir, en effet, dans l'écrit que l'on va lire, qu'il n'est aucune des questions de *maxima* et de *minima* auxquelles il est d'usage d'appliquer le calcul des variations, et pour la solution desquelles ce calcul a été principalement inventé, qu'on ne puisse traiter d'une manière très-lumineuse et très-briève, par la simple application des procédés les plus vulgaires du calcul différentiel ordinaire, et en ne s'appuyant uniquement que sur la théorie des *maxima* et des *minima*, dans les fonctions déterminées d'une seule variable ; théorie sur laquelle il ne reste plus aujourd'hui le plus léger nuage dans l'esprit de tous ceux qui ont pris la peine de l'étudier dans les bonnes sources (*).

Bien que les notations dont nous allons nous servir ne soient pas dépourvues d'une certaine élégance, il se pourra fort bien que ceux à qui les procédés du calcul des variations sont familiers les trouvent moins simples et moins commodes que celles dont ce calcul fait usage ; mais il s'agit bien moins ici de notations que de principes ;

(*) On ne conçoit pas par quelle fatalité l'illustre auteur du *Calcul des fonctions*, si éminemment clair partout ailleurs, débute lui-même, dans l'exposition des principes du calcul des variations, par un véritable non-sens. « Soit, dit-il, » $\varphi(x, i)$ une fonction de x et de i qui devienne $\varphi(x)$, lorsque $i=0$ ». Il est sans doute bien vrai qu'une fonction de x et de i se réduit à une simple fonction de x, lorsque i devient nul ; mais cette dernière fonction peut-elle être notée par la même caractéristique que la première, et peut-on se permettre, dans une même question, d'employer la même caractéristique à désigner une fonction qui contient deux quantités distinctes et une autre qui n'en contient qu'une seule ? non sans doute. Que répondrions-nous, en effet, à quelqu'un qui, par exemple, après avoir posé $\frac{1+a^2}{1-a^2}=\varphi(a)$, nous demanderait de construire sur ce modèle $\varphi(a, b)$? Fort heureusement cette légère inadvertance n'a pas une influence nécessaire sur les développemens qui viennent à sa suite ; mais enfin, que veut-on que fasse celui qui, voulant étudier pour la première fois le calcul des variations, et ayant pris la résolution de ne rien laisser passer sans le bien saisir, vient, dès le début, se heurter contre un obstacle de cette nature ?

et il est tout simple que, voulant tout déduire du calcul différentiel ordinaire, il nous faille nous renfermer dans les seules notations que ce calcul puisse nous fournir. Nous ne doutons pas, au surplus, que ceux qui auront bien saisi ce qu'on va lire ne se servent ensuite sans aucun embarras des notations du calcul des variations proprement dit, dans lesquelles ils ne verront plus dès-lors que de simples abréviations.

Nous pourrions, dès l'abord, présenter la théorie dans toute sa généralité; mais il nous paraît convenir beaucoup mieux à notre but de nous élever graduellement des cas les plus simples à ceux qui le sont moins. L'obligation où se trouvera ainsi le lecteur de revenir à plusieurs reprises sur les mêmes idées, sur les mêmes considérations, ne pourra que les lui rendre beaucoup plus familières.

Bien que la théorie que nous allons développer puisse être considérée comme purement analitique, nous ne ferons pas difficulté néanmoins de parler quelquefois le langage de la géométrie et même de la mécanique, tant parce que cela fait image que parce qu'il en résulte plus de clarté et de concision dans le discours.

§. I.

1. Soit V une expression de forme connue quelconque, composée de la variable indépendante x, d'une fonction y de cette variable et des coefficiens différentiels de cette fonction, jusqu'à celui de tel ordre qu'on voudra; et considérons l'intégrale

$$\int V\mathrm{d}x\ .$$

Si la composition de y en x était connue, rien ne serait plus aisé que de ramener cette intégrale à la forme $\int X\mathrm{d}x$, ou X serait une fonction connue de x seulement; et alors on pourrait, soit exactement soit par les séries, exécuter l'intégration entre telles limites qu'on voudrait.

Mais on suppose que l'expression de y en x n'est pas donnée ; on suppose qu'elle est l'inconnue du problème ; et on propose de la déterminer par cette condition qu'après la substitution de sa valeur et de celles de ses coefficiens différentiels dans V, l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$, qui alors aura la forme $\int X\mathrm{d}x$, prise entre deux limites données quelconques, et sous des conditions données, compatibles toutefois avec la nature du problème, soit plus grande ou plus petite que toutes celles qui pourraient résulter, entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, de toute autre valeur, fonction de x, prise pour y.

2. Comme nous n'avons ici qu'une seule variable indépendante x, il nous sera commode d'employer la notation introduite par Lagrange pour les fonctions dérivées; en conséquence,

$$y', \qquad y'', \qquad y''', \ldots\ldots$$

seront constamment les symboles respectifs de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \ldots\ldots;$$

et, si Y est une autre fonction de x,

$$Y', \qquad Y'', \qquad Y''', \ldots\ldots$$

seront pareillement les symboles respectifs de

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3Y}{\mathrm{d}x^3}, \ldots\ldots;$$

Nous ne recourrons ainsi aux notations ordinaires du calcul différentiel que pour représenter les coefficiens différentiels partiels, dont la notation est trop embarrassée dans le système de Lagrange. Ainsi

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right), \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right), \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right), \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right), \ldots\ldots$$

seront les coefficiens différentiels qu'on obtient pour la fonction V, en n'y considérant successivement que

$$y, \qquad y', \qquad y'', \qquad y''', \ldots.$$

comme variables. En conséquence,

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)', \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)', \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)', \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)', \ldots\ldots$$

seront la même chose que

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)}{\mathrm{d}x}, \ldots.$$

Pareillement

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)'', \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'', \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'', \quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'', \ldots\ldots$$

seront la même chose que

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)}{\mathrm{d}t^2}, \ldots.$$

et ainsi de suite.

3. Pour en revenir présentement à notre problème ; quelle que soit la valeur de y en x qui doit le résoudre, on peut toujours la considérer comme l'ordonnée d'une certaine courbe dont x serait l'abscisse ; et le problème se réduit ainsi à trouver cette courbe, tout-à-fait déterminée, mais encore inconnue.

Suivant donc l'esprit de la méthode ordinaire *de maximis et minimis*, il faut, pour parvenir à l'équation de cette courbe, exprimer qu'elle est telle que, pour si peu qu'on la déforme, en tout ou en partie, d'une manière arbitraire, et même discontinue si l'on veut, l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$, toujours prise entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, deviendra *plus petite* dans le cas du *maximum*, et *plus grande* dans le cas du *minimum*.

4. Conservons y pour le symbole de l'ordonnée de la courbe cherchée; l'ordonnée correspondante, dans toutes les autres courbes dont il vient d'être question, pourra être représentée par la formule générale

$$y+iY,$$

dans laquelle Y représente une fonction de x tout-à-fait arbitraire, continue ou discontinue, , et où i est un nombre abstrait, positif ou négatif, si petit qu'on le voudra, sans pourtant être absolument nul. Il est évident, en effet, que, même en se donnant i à volonté, on pourra encore profiter de l'indétermination de la fonction Y de manière que cette formule devienne l'ordonnée de telle courbe donnée qu'on voudra, et qu'ensuite on pourra diminuer graduellement le nombre i, de telle sorte que cette courbe devienne si peu différente de la courbe cherchée qu'on voudra. D'où l'on voit que, si l'on traçait à la main une courbe aussi voisine de la courbe cherchée qu'on le voudrait, on pourrait toujours considérer $y+iY$ comme exprimant l'ordonnée de cette courbe; en sorte qu'en supposant Y arbitraire et i d'une petitesse illimitée, la formule $y+iY$ exprime l'ordonnée de la totalité des courbes que nous devons comparer à la courbe cherchée.

5. Remarquons pourtant, avant d'aller plus loin, qu'il se pourrait, en vertu de certaines conditions de la question, que la fonction Y ne dût point être tout-à-fait arbitraire, ou du moins ne dût l'être que sous certaines restrictions : c'est, par exemple, ce qui arriverait si la courbe cherchée devait passer par deux points donnés;

car alors on n'aurait à lui comparer que les autres courbes qui passeraient par ces deux mêmes points ; mais nous allons voir bientôt qu'on est toujours à temps d'avoir égard à ces restrictions à la fin du calcul, et que jusques-là on peut regarder la fonction arbitraire Y comme absolument indéterminée.

6. Par le changement de y en $y+iY$,

$$\left.\begin{array}{c} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \\ \text{»} \end{array}\right\} \text{ deviendront respectivement } \left\{\begin{array}{l} y\ +iY\ , \\ y'\ +iY'\ , \\ y''\ +iY''\ , \\ y'''+iY'''\ , \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En conséquence, on trouvera, par l'application de la série de Taylor au développement des fonctions des polynomes, que V doit devenir

$$V+\left\{\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''+\ldots\right\}\frac{i}{1}+\ldots;$$

en conséquence, $\int V\mathrm{d}x$ deviendra

$$\int V\mathrm{d}x+\frac{i}{1}\int\left\{\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''+\ldots\right\}\mathrm{d}x+\ldots$$

Afin donc que $\int V\mathrm{d}x$ soit *maximum* ou *minimum*, il faudra, suivant les principes connus, que le multiplicateur de i soit nul ; et alors $\int V\mathrm{d}x$ sera *maximum* ou *minimum*, suivant que le multiplicateur de i^2 sera constamment *négatif* ou constamment *positif*. La condition commune au *maximum* et *minimum* sera donc exprimée par l'équation

$\int$

$$\int\left\{\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''+\ldots\right\}dx=0\ ,$$

laquelle revient simplement à

$$0=\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''+\ldots \quad \text{(I)}$$

7. Cela posé, par la formule $(tu)'=ut'+tu'$, d'où $ut'=(tu)'-tu'$, on trouve facilement

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)Y=\left(\frac{dV}{dy}\right)Y\ ,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'Y\ ,$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''=\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)'Y\right]'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''Y\ ,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''=\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'Y'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''Y,$$

. . . .

Au moyen de quoi l'équation (I) devient

$$\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots\right]Y$$

$$+\left\{\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\ldots\right]Y\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots\right\}'=0\ ; \quad \text{(II)}$$

or, tout ce qui suit la première ligne du premier membre de cette équation étant une dérivée exacte, quelle que soit Y; tandis que cette première ligne, considérée comme telle, aurait une fonction primitive qui changerait avec Y, il s'ensuit que cette équation ne saurait subsister qu'autant que la première ligne de son premier membre sera nulle d'elle-même; ce qui donne, en divisant par l'arbitraire Y,

$$o=\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots \quad \text{(III)}$$

équation en x et y seulement, qui est conséquemment l'équation différentielle de la courbe cherchée. Son intégration donnera la valeur de y en fonction de x et d'un certain nombre de constantes arbitraires, et nous allons voir tout à l'heure comment ces constantes doivent être déterminées.

8. En supprimant donc la première ligne du premier membre de l'équation (II), et passant ensuite aux fonctions primitives, il viendra

$$Const.=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\ldots\right]Y$$

$$+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots \quad \text{(IV)}$$

En mettant dans cette équation pour y sa valeur en x et en constantes, déduite de l'équation (III), les coefficiens de Y, Y', Y'', ... n'y seront plus que des fonctions de x et de ces mêmes constantes.

9. Soient a_0 et a_1 les limites de l'intégrale; c'est-à-dire, supposons qu'il soit question de rendre *maximum* ou *minimum* l'intégrale $\int V dx$, prise depuis $x=a_0$ jusqu'à $x=a_1$; marquons respectivement des indices 0, 1, les valeurs des diverses quantités qui entrent dans l'équation (IV), lorsqu'on y met pour x les valeurs respectives a_0, a_1, nous aurons ainsi

$$\text{Const.}=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots\right]Y_0+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots\right]Y'_0+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots\right]Y''_0+\ldots,$$

$$\text{Const.}=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots\right]Y_1+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots\right]Y'_1+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots\right]Y''_1+\ldots;$$

d'où en retranchant,

$$=\left\{\begin{aligned}&\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots\right]Y_1+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots\right]Y'_1+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots\right]Y''_1+\ldots\\ -&\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots\right]Y_0-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots\right]Y'_0-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots\right]Y''_0-\ldots\end{aligned}\right\}\quad\text{(V)}$$

équations que nous appellerons à l'avenir *équation aux limites*, et qui, comme l'on voit, ne renferme plus, outre les valeurs encore indéterminées de Y, Y', Y'', ... aux deux extrémités de l'intégrale, que les deux limites a_0, a_1 et les constantes introduites par l'intégration de l'équation (III).

10. Cela posé, si aucune condition particulière n'a été prescrite relativement aux limites, les fonctions

$$Y_0\,,\quad Y'_0\,,\quad Y''_0\,,\ldots\ldots\ldots\; Y_1\,,\quad Y'_1\,,\quad Y''_1\,,\ldots\ldots\ldots;$$

devront conserver l'indépendance la plus absolue. L'équation (V) ne pourra donc alors subsister qu'autant que les coefficiens de ces diverses fonctions seront séparément nuls; cette équation (V) se partagera donc dans les suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots\ldots, && 0=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots\ldots,\\
&=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots\ldots, && 0=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots\ldots,\\
&=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots\ldots, && 0=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots\ldots,\\
&=\ldots\ldots, && 0=\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\}\quad\text{(VI)}$$

lesquelles seront généralement en même nombre que les constantes introduites, et serviront à en assigner les valeurs.

11. Mais si, au contraire, on exige qu'à l'une ou à l'autre limites, ou à toutes les deux, il existe, entre y et ses divers coefficiens différentiels, une ou plusieurs relations données ; Y, toujours indéterminée, ne sera plus dès-lors tout-à-fait arbitraire. Représentons, en effet, une de ces équations par

$$\mathrm{f}(y, y', y'', \ldots\ldots\ldots) = L = 0 ; \qquad \text{(VII)}$$

on devra avoir, pour les diverses courbes que l'on considère,

$$\mathrm{f}(y+iY, y'+iY', y''+iY'', \ldots\ldots) = 0 ;$$

ou, en développant,

$$L + \left\{\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}\right)Y + \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y'}\right)Y' + \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y''}\right)Y'' + \ldots ;\right\}\frac{i}{1} + \ldots = 0,$$

d'où en retranchant l'équation (VII) et exprimant que l'équation résultante a lieu quel que soit i,

$$\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}\right)Y + \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y'}\right)Y' + \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y''}\right)Y'' + \ldots = 0 ; \qquad \text{(VIII)}$$

Il faudra d'abord substituer dans (VII, VIII) pour y sa valeur en x et en constantes, déduite de l'équation (III); puis, en supposant, par exemple, qu'il s'agit de la première limite, mettre pour x sa valeur a_0, ce qui changera ces équations en celles-ci :

$$L_0 = 0, \quad \text{(IX)} \quad \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}\right)_0 Y_0 + \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y'}\right)_0 Y'_0 + \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y''}\right)_0 Y''_0 + \ldots = 0. \text{ (X)}$$

On pourra avoir plusieurs couples de semblables équations, tant pour l'une que pour l'autre limites; et on se servira de (X) et de ses analogues pour éliminer de (V) le plus grand nombre possible des fonctions Y_0, Y'_0, Y''_0, ... Y_1, Y'_1, Y''_1, ... ; après quoi on égalera séparément à zéro les coefficiens de celles qui n'auront pas disparu. A la vérité, le nombre des équations qui devaient servir à déterminer les constantes se trouvera ainsi réduit; mais toutes les équations qu'on aura de moins se trouveront exactement remplacées par l'équation (IX) et ses analogues; de sorte que ces constantes se trouveront toujours déterminées, et le seront seulement par d'autres conditions.

12. Au surplus, au lieu d'éliminer de l'équation (V) le plus grand nombre possible des fonctions Y_0, Y'_0, Y''_0, ... Y_1, Y'_1, Y''_1, ... au moyen des équations de condition telles que (X), il reviendra au même, et il sera peut-être plus élégant de prendre la somme tant de l'équation (V) que des produits de ces équations de condition par des multiplicateurs indéterminés; d'égaler ensuite séparément à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de toutes les fonctions Y_0, Y'_0, Y''_0, ..., Y_1, Y'_1, Y''_1, ..., et d'éliminer enfin les multiplicateurs indéterminés entre les équations résultantes.

13. Hâtons-nous, avant d'aller plus avant, d'éclaircir ces principes par un exemple.

PROBLÈME I. Quelle est la plus courte ligne plane, entre deux parallèles données?

Solution. Soient pris l'axe des x perpendiculaire et celui des y parallèle aux deux droites données, dont nous supposerons les équations

$$x=a_0\,, \qquad x=a_1\,;$$

la question se trouvera ainsi réduite à assigner la valeur de y en x qui rend l'intégrale $\int dx\sqrt{1+y'^2}$ *minimum*, entre les limites a_0 et a_1.

Nous aurons donc ici $V=\sqrt{1+y'^2}$, d'où

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)=0\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)=0\,,\ldots.$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'=0\,,\ldots.$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)''=0\,,\ldots.$$

en conséquence, l'équation (III) deviendra

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,,\qquad \text{ou}\qquad \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{1}{0}=\infty\,;$$

le rayon de courbure de la ligne cherchée est donc infini; cette ligne est donc une droite; et l'on peut prendre pour son équation

$$y=Mx+G\,,\qquad \text{d'où}\qquad y'=M\,,\quad y''=0\,;$$

M et G étant des constantes arbitraires.

L'équation aux limites sera ici

$$\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}(Y_1-Y_0)=0\,;$$

d'où l'on voit d'abord que la constante G, qui n'entre pas dans cette équation, demeurera tout-à-fait arbitraire; ce qui revient à dire que les parties de parallèles interceptées entre d'autres parallèles sont de même longueur.

Les coefficiens de Y_0 et Y_1 étant les mêmes, au signe près, on ne saurait établir des conditions distinctes pour l'une et pour l'autre limites; ce qui revient à dire qu'une droite qui coupe des parallèles fait avec elles des angles égaux.

Si aucune condition n'est prescrite pour l'une et l'autre limites Y_0 et Y_1 devront demeurer tout-à-fait indépendans; on ne pourra donc poser $Y_1-Y_0=0$, l'équation aux limites ne pourra donc subsister qu'autant qu'on aura $M=0$; de sorte que l'équation de notre droite se reduira simplement à $y=G$, où G demeurera indéterminé. Cela revient à dire que toutes les perpendiculaires entre deux parallèles sont égales et en mesurent la plus courte distance.

Supposons qu'on exige qu'aux deux limites de l'intégrale on ait respectivement

$$y=b_0\,, \qquad y=b_1\,,$$

ce qui revient à faire passer la ligne cherchée par les deux points $(a_0\,,b_0)$, $(a_1\,,b_1)$; les équations analogues à (IX) seront

$$Ma_0+G-b_0=0\,, \qquad Ma_1+G-b_1=0\,;$$

et les équations analogues à (X)

$$Y_0=0\,, \qquad Y_1=0\,;$$

ce qui vérifie l'équation aux limites; les deux autres équations donnent M et G qui, substituées dans l'équation générale de la ligne cherchée, la font devenir

$$\frac{y-b_0}{b_1-b_0}=\frac{x-a_0}{a_1-a_0}\,;$$

ce qui revient à dire que *le plus court chemin entre deux points donnés est la droite qui joint ces deux points.*

Mais, si l'on demandait le plus court chemin d'un point à une courbe ou d'une courbe à une autre, nos méthodes actuelles ne seraient pas suffisantes pour résoudre ces sortes de problèmes; attendu que les limites a_0 et a_1 que nous avons essentiellement supposées constantes, devraient réellement varier dans ce cas, pour toutes les courbes que nous sommes obligés de considérer concurremment avec la ligne cherchée. Nous verrons plus loin comment on peut parer à cet inconvénient.

14. Il est des problèmes qui, bien que beaucoup plus compliqués en apparence que celui qui vient de nous occuper, s'y ramènent pourtant avec la plus grande facilité. Soient $U, P, Q, R, \ldots$ des quantités composées d'une manière connue quelconque en x, y, y', y'', ... On peut se demander d'assigner, parmi les diverses valeurs de y en x qui, entre des limites déterminées, donnent

$$\int P\mathrm{d}x=a\ , \qquad \int Q\mathrm{d}x=b\ , \qquad \int R\mathrm{d}x=c\ , \ldots\ldots \qquad \text{(XI)}$$

où a, b, c sont des constantes données, quelle est celle qui, entre les mêmes limites, rend $\int U\mathrm{d}x$ *maximum* ou *minimum*.

15. Pour résoudre cette question, on considérera que puisque, entre les limites dont il s'agit, $\int P\mathrm{d}x$, $\int Q\mathrm{d}x$, $\int R\mathrm{d}x$, ... doivent être constantes, il doit en être de même de $A\int P\mathrm{d}x$, $B\int Q\mathrm{d}x$, $C\int R\mathrm{d}x$, ... où A, B, C, ... sont de nouvelles constantes; il en sera donc aussi de même de la somme

$$A\int P\mathrm{d}x+B\int Q\mathrm{d}x+C\int R\mathrm{d}x+\ldots\ldots\ ;$$

d'où il suit que la même relation de y à x qui, entre les limites assignées, rendra *maximum* ou *minimum* l'intégrale $\int U\mathrm{d}x$ devra aussi rendre telle, entre les mêmes limites, la somme

$$\int U\mathrm{d}x+A\int P\mathrm{d}x+B\int Q\mathrm{d}x+C\int R\mathrm{d}x+\ldots\ldots\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\int(U+AP+BQ+CR+\ldots\ldots)\mathrm{d}x\ ;$$

en posant donc

$$V=U+AP+BQ+CR+\ldots\ldots$$

la question se trouvera réduite au cas où il s'agit simplement de rendre $\int V\mathrm{d}x$ *maximum* ou *minimum*, entre des limites données; avec

avec cette seule différence que l'équation cherchée en x et y, outre les constantes introduites par l'intégration, renfermera aussi les constantes A, B, C, ...; mais on aura, pour en assigner les valeurs, les équations de condition (XI) qui sont précisément en même nombre. Donnons un exemple des questions de ce genre.

16. *PROBLÈME II. Entre toutes les courbes qui retranchent une même portion déterminée de l'espace indéfini compris entre deux parallèles et une perpendiculaire qui leur est commune, quelle est celle dont l'arc intercepté entre ces parallèles a la moindre longueur ?*

Solution. Soit prise pour axe des x la perpendiculaire commune aux deux parallèles, dont nous supposerons, comme ci-dessus, que les équations sont

$$x=a_0\,, \qquad x=a_1\,.$$

Soit c^2 l'aire qui doit être comprise entre la courbe cherchée, les deux parallèles et l'axe des x; on devra avoir ainsi, entre a_0 et a_1,

$$\int y\mathrm{d}x=c^2\,;$$

de plus, entre les mêmes limites, $\int\mathrm{d}x\sqrt{1+y'^2}$ devra toujours, comme ci-dessus, être un *minimum*. Il ne s'agira donc (15) que de rendre telle, entre a_0 et a_1, l'intégrale

$$\int(\sqrt{1+y'^2}+Ay)\mathrm{d}x\,,$$

sauf ensuite à déterminer convenablement la constante A.

Nous aurons donc ici $V=\sqrt{1+y'^2}+Ay$, d'où

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)=A,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)=0\,,\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'=0\,,\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)''=0\,,\ldots$$

en conséquence, l'équation différentielle de la courbe cherchée sera

$$A-\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{1}{A};$$

son rayon de courbure doit donc être constant; cette courbe est donc un arc de cercle.

En conséquence, nous pourrons prendre pour intégrale de l'équation ci-dessus

$$(x-G)^2+(y-H)^2=R^2;$$

où des trois constantes G, H, R, deux sont censées introduites par l'intégration, tandis que la troisième remplace la constante A, et doit être déterminée par la condition $\int y\mathrm{d}x=c^2$. On tire d'ailleurs de cette équation

$$y=H\pm\sqrt{R^2-(x-G)^2},\quad y'=\mp\frac{x-G}{\sqrt{R^2-(x-G)^2}},\quad y''=\mp\frac{R^2}{[R^2-(x-G)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Quant à l'équation aux limites, on trouvera qu'elle est, dans le cas actuel

$$\frac{a_1-G}{R}Y_1-\frac{a_0-G}{R}Y_0=0;$$

Si donc aucune condition particulière n'a été imposée pour les limites, Y_0 et Y_1 devant demeurer absolument indépendans, cette équation ne pourra être satisfaite qu'autant qu'on aura, à la fois,

$$\frac{a_0-G}{R}=0; \qquad \frac{a_1-G}{R}=0;$$

équations qui ne pourront subsister ensemble qu'autant qu'on aura R infini; ce qui réduit la ligne cherchée à une ligne droite, comme dans le précédent problème, avec cette différence pourtant qu'en prenant comme alors $y=G$ pour l'équation de cette droite, la constante G sera déterminée, puisque, entre les limites a_0 et a_1 on devra avoir

$$\int y\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int G\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad Gx+C=c^2 ,$$

ce qui donne

$$G(a_1-a_0)=c^2 , \qquad \text{d'où} \qquad G=\frac{c^2}{a_1-a_0} ,$$

de manière que l'équation sera

$$y=\frac{c^2}{a_1-a_0} .$$

Supposons, en second lieu, qu'on exige qu'aux limites de l'intégrale la courbe coupe les deux parallèles à l'axe des y sous des angles dont les cotangentes tabulaires soient m_0 et m_1 ; on devra avoir ainsi

$$m_0=y'_0 , \qquad m_1=y'_1 ;$$

c'est-à-dire,

$$m_0=\mp\frac{a_0-G}{\sqrt{R^2-(a_0-G)^2}} , \qquad m_1=\mp\frac{a_0-G}{\sqrt{R^2-(a_1-G)^2}} ;$$

équations d'où on tirera les valeurs des constantes G et R ; celle de H se déterminera ensuite par la condition $\int y\mathrm{d}x=c^2$.

Si enfin les deux limites étaient fixes, de telle sorte qu'aux valeurs a_0 et a_1 de x dussent répondre respectivement les valeurs b_0 et b_1 de y ; on aurait, pour déterminer deux des trois constantes G, H, R en fonction de la troisième, les deux équations

$$(a_0-G)^2+(b_0-H)^2=R^2 \quad ,$$

$$(a_1-G)^2+(b_1-H)^2=R^2 \quad ;$$

et cette troisième constante se déterminerait toujours par la condition $\int y\mathrm{d}x=c^2$.

17. On voit donc qu'entre toutes les lignes qui, se terminant à deux points donnés, comprennent un même espace entre elles, les ordonnées de ces deux points et l'axe des abscisses, la plus courte est un certain arc de cercle passant par ces deux points ; or, l'espace compris entre la corde de cet arc, les ordonnées de ses deux extrémités et l'axe des x, est aussi donné ; donc l'espace compris entre l'arc et sa corde l'est également ; d'où il suit que *de tous les arcs de courbes qui ont la même corde et comprennent le même espace entre eux et cette corde, l'arc de cercle est celui qui a la moindre longueur*; d'où il est est facile de conclure, à l'inverse, que *de tous les arcs de courbes de même longueur qui ont la même corde, l'arc de cercle est celui qui renferme le plus grand espace entre lui et cette corde.*

18. Et, comme ces propriétés sont indépendantes de la longueur de la corde, elles doivent également avoir lieu lorsque cette longueur est nulle, auquel cas l'arc devient une circonférence entière ; ainsi *le cercle jouît de la double propriété d'être la figure de moindre périmètre, entre toutes celles de même surface, et de plus grande surface, entre toutes celles de même périmètre.*

19. Dans les questions qui viennent de nous occuper, il ne se trouvait, sous le signe d'intégration, qu'une seule fonction de la variable indépendante, avec ses diverses dérivées. Examinons présentement ce qu'il y aura à faire lorsqu'il s'y en trouvera plusieurs.

§. II.

20. Soit V une expression de forme connue quelconque, composée de la variable indépendante z, de deux fonctions x et y de cette variable et des coefficiens différentiels de ces fonctions, jusqu'à ceux de tels ordres on voudra; et considérons l'intégrale

$$\int V\mathrm{d}z .$$

Si la composition de x et y en z était connue; rien ne serait plus aisé que de ramener cette intégrale à la forme $\int Zz$, où Z serait une fonction de z seulement; et alors on pourrait, soit exactement, soit par les séries, exécuter l'intégration entre telles limites on voudrait.

Mais on suppose que les expressions de x et y en z ne sont pas données; on suppose qu'elles sont les inconnues du problème; et on propose de les déterminer par cette condition qu'après la substitution de leurs valeurs et de celles de leurs coefficiens différentiels dans V, l'intégrale $\int V\mathrm{d}z$, qui alors aura la forme $\int Z\mathrm{d}x$, prise entre deux limites données quelconques, et sous des conditions données, compatibles toutefois avec la nature du problème, soit *plus grande* ou *plus petite* que toutes celles qui pourraient résulter, entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, de toutes autres valeurs, fonctions de z, prises pour x et y.

21. Comme nous n'avons encore ici qu'une seule variable indépendante z, il nous sera commode d'employer la notation de Lagrange pour les fonctions dérivées; en conséquence,

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots\ldots, \quad y', \quad y'', \quad y''', \ldots\ldots\ldots;$$

seront constamment les symboles respectifs de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\,;\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}z^3}\,,\ldots\ldots,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}z^3}\,,\ldots\ldots;$$

et, si X et Y sont d'autres fonctions de z,

$$X',\quad X'',\quad X''',\ldots\ldots\ldots\quad Y',\quad Y'',\quad Y''',\ldots\ldots\ldots;$$

seront pareillement les symboles respectifs de

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}z^3}\,,\ldots\ldots,\quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}z}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3Y}{\mathrm{d}z^3}\,,\ldots\ldots.$$

Nous ne recourrons ainsi aux notations du calcul différentiel ordinaire que lorsqu'il s'agira de représenter des coefficiens différentiels partiels. Ainsi

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right),\ldots\ldots\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right),\ldots\ldots.$$

seront les coefficiens différentiels partiels que l'on obtient pour la fonction V, en n'y considérant successivement que

$$x;\quad x',\quad x'',\ldots\ldots.\quad y,\quad y',\quad y''$$

comme variables. En conséquence, les expressions

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)',\ldots\ldots\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)',\ldots\ldots$$

seront la même chose que

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)}{\mathrm{d}z},\ldots\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)}{\mathrm{d}z},\ldots$$

Pareillement, les expressions

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)'',\ \left(\frac{dV}{dx'}\right)'',\ \left(\frac{dV}{dx''}\right)'',\ldots\ \left(\frac{dV}{dy}\right)'',\ \left(\frac{dV}{dy'}\right)'',\ \left(\frac{dV}{dy''}\right)'',\ldots$$

seront la même chose que

$$\frac{d^2\left(\frac{dV}{dx}\right)}{dz^2},\ \frac{d^2\left(\frac{dV}{dx'}\right)}{dz^2},\ \frac{d^2\left(\frac{dV}{dx''}\right)}{dz^2},\ldots\ \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy}\right)}{dz^2},\ \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy'}\right)}{dz^2},\ \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy''}\right)}{dz^2},\ldots$$

et ainsi de suite.

22. Pour en revenir présentement à notre problème, quelles que soient les valeurs de x et y en z qui doivent le résoudre, on peut toujours les considérer comme deux des coordonnées d'une certaine courbe à double courbure dont la troisième coordonnée est z; et le problème se réduit ainsi à trouver cette courbe, tout-à-fait déterminée, mais encore inconnue.

Suivant donc l'esprit de la méthode ordinaire *de maximis et minimis*, il faut, pour parvenir aux équations de cette courbe, exprimer qu'elle est telle que, pour si peu qu'on la déforme, en tout ou en partie, d'une manière arbitraire, et même discontinue si l'on veut, l'intégrale $\int V dz$, toujours prise entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, deviendra *plus petite* dans le cas du *maximum*, et *plus grande* dans le cas du *minimum*.

23. Conservons x et y pour symboles des deux coordonnées fonctions de z qui, conjointement avec cette troisième coordonnée z, appartiennent à la courbe cherchée; les deux coordonnées correspondant à z, dans toutes les autres courbes dont il vient d'être question, pourront être respectivement représentées par les formules générales

$$x+iX, \qquad y+iY,$$

dans lesquelles X et Y représentent des fonctions de z tout-à-fait arbitraires, continues ou discontinues, et où i est toujours, comme ci-dessus, un nombre abstrait, positif ou négatif, si petit qu'on le voudra, sans pourtant être absolument nul. Il est évident, en effet, que, même en se donnant i à volonté, on pourra encore profiter de l'indétermination des fonctions X et Y, de manière que ces formules deviennent, conjointement avec z, les coordonnées de telle courbe donnée à double courbure qu'on voudra, et qu'ensuite on pourra diminuer graduellement le nombre i de telle sorte que cette courbe devienne si peu différente de la courbe cherchée qu'on voudra. D'où l'on voit que, si l'on traçait à volonté dans l'espace une courbe aussi voisine de la courbe cherchée qu'on le voudrait; on pourrait toujours considérer $x+iX$, $y+iY$ comme étant, concurremment avec z, les trois coordonnées de cette courbe ; de sorte qu'en supposant X et Y arbitraires et i d'une petitesse illimitée, les trois formules z, $x+iX$, $y+iY$ expriment les coordonnées de toutes les courbes que nous devons comparer à la courbe cherchée.

24. Remarquons pourtant, avant d'aller plus loin, qu'il se pourrait, dans des cas particuliers, en vertu de certaines conditions de la question, que les fonctions X et Y ne dussent point être tout-à-fait arbitraires, ou du moins ne dussent l'être que sous certaines restrictions : c'est, par exemple, ce qui arriverait si la courbe cherchée devait passer par deux points donnés; car alors on n'aurait à lui comparer que les autres courbes qui passeraient par ces deux mêmes points ; mais nous avons déjà vu (§. I.) qu'on était à temps à la fin du calcul d'avoir égard à ces sortes de limitations ; et nous allons voir bientôt qu'il en est exactement de même ici.

25. Par le changement respectif de x et y en $x+iX$; $y+iY$,

$$\left.\begin{array}{l} x \\ x' \\ x'' \\ \text{»} \\ y \\ y' \\ y'' \\ \text{»} \end{array}\right\} \text{deviendront respectivement} \left\{\begin{array}{l} x+iX\ ; \\ x'+iX'\ , \\ x''+iX''\ , \\ \ldots\ldots\ , \\ y+iY\ , \\ y'+iY'\ , \\ y''+iY''\ , \\ \ldots\ldots\ . \end{array}\right.$$

On trouvera conséquemment, par l'application de la série de Taylor au développement des fonctions des polynomes, que, par le même changement, V doit devenir

$$V+\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)X+\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''+\ldots+\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\ldots\right\}\frac{i}{1}+\ldots\ ;$$

en conséquence, $\int V dz$ deviendra

$$\int V dz+\frac{i}{1}\int\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)X+\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''+\ldots+\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\ldots\right\}dz+\ldots$$

Afin donc que $\int V dz$ soit *maximum* ou *minimum*, il faudra, suivant les principes connus, que le multiplicateur de i soit nul; et alors $\int V dz$ sera *maximum* ou *minimum*, suivant que le multiplicateur de i^2 sera constamment *négatif* ou constamment *positif*. La condition commune au *maximum* et au *minimum* sera donc exprimée par l'équation

$$\int\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)X+\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''+\ldots+\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\ldots\ldots\right\}dz=0,$$

laquelle revient simplement à

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)X+\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''+\ldots+\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\ldots\ldots=0. \quad \text{(XII)}$$

26. Cela posé, par la formule $(tu)'=tu'+ut'$, d'où $ut'=(tu)'-tu'$, on trouve facilement

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)X=\left(\frac{dV}{dx}\right)X,$$

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'=\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)X\right]'-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'X,$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''=\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)X'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)'X\right]'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''X;$$

$$\left(\frac{dV}{dx'''}\right)X'''=\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)X''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'X'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''X\right]'-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''X,$$

. . . .

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)Y=\left(\frac{dV}{dy}\right)Y,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'Y,$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''=\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)'Y\right]'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''Y,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''=\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'Y'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''Y,$$

. . . .

au moyen de quoi l'équation (XII) deviendra

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots\dots\right]X\right.\\
\quad\left.+\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots\dots\right]Y\right\}\\
+\left\{\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''-\dots\dots\dots\dots\right]X\right.\\
\quad\left.+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'+\dots\right]X'+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)-\dots\right]X''+\dots\right\}'\\
+\left\{\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\dots\dots\dots\dots\right]Y\right.\\
\quad\left.+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'+\dots\right]Y'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)-\dots\right]Y''+\dots\right\}'
\end{array}\right\}=0 \quad \text{(XIII)}$$

or, les quatre dernières lignes du premier membre de cette équation sont des derivées exactes, quels que soient X, X', X'', ... Y, Y', Y'', ... tandis que, si l'on voulait considérer comme telles les deux premières lignes, leurs fonctions primitives changeraient avec la forme de ces mêmes quantités X, X', X'', ... Y, Y', Y'', ... Afin donc que cette équation signifie quelque chose, il faut d'abord que ces deux premières lignes soient tout-à-fait nulles ; ce qui donne

$$\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots\dots\right]X\\
+\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots\dots\right]Y=0\,. \qquad \text{(XIV)}
\end{array}$$

26. Si la courbe n'est assujettie à d'autres conditions que de rendre $\int V dz$ *maximum* ou *minimum*, entre les limites assignées, les fonctions X et Y, qui pourront fort bien d'ailleurs être liées

entre elles et même déterminées à ces limites, devront être; dans tout le reste de l'intégrale, tout-à-fait indépendantes; l'équation (XIV) se partagera donc alors dans les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 0&=\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots, \\ 0&=\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots; \end{aligned}\right\} \quad \text{(XV)}$$

lesquelles, ne contenant plus dès-lors que z, x, x', x'', ... y, y', y'', ..., seront les deux équations différentielles de la courbe cherchée.

27. Mais au lieu de chercher quelle est, entre toutes les courbes, celle qui rend $\int V\mathrm{d}z$ *maximum* ou *minimum*, on pourrait demander quelle est celle qui jouit de cette propriété, parmi celles qui satisfont à une équation de relation donnée entre x, y et z, ou, ce qui revient au même, parmi celles qui sont sur la surface courbe exprimée par cette équation; il est clair qu'alors la courbe cherchée, dans ses diverses déformations, ne devrait pas quitter cette surface; d'où il suit que les fonctions X et Y, toujours arbitraires d'ailleurs, ne seraient plus dès-lors indépendantes. Soit, en effet,

$$\mathrm{F}(x, y, z)=M=0; \qquad \text{(XVI)}$$

l'équation de cette surface; on devra avoir, pour la courbe déformée,

$$\mathrm{F}(x+iX, y+iY, z)=0;$$

ou, en développant,

$$0=M+\left\{\left(\frac{dM}{dx}\right)X+\left(\frac{dM}{dy}\right)Y\right\}\frac{i}{1}+\dots\dots;$$

ou,

ou, en retranchant (XVI), divisant par i et exprimant ensuite que l'équation résultante doit avoir lieu quel que soit i,

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)X+\left(\frac{dM}{dy}\right)Y=0\,; \qquad \text{(XVII)}$$

équation de relation entre X et Y, au moyen de laquelle on pourra faire disparaître l'une ou l'autre de ces deux fonctions de l'équation (XIV) qui, étant ensuite divisée par l'autre fonction devenue alors facteur de tous ses termes, sera l'équation différentielle d'une certaine surface qui coupera la surface (XVI) suivant la courbe cherchée.

28. On pourra aussi, si l'on veut, ajouter à l'équation (XIV) le produit de l'équation (XVII) par un multiplicateur indéterminé ; égaler séparément à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de X et Y, et éliminer ensuite le multiplicateur indéterminé entre les deux équations résultantes ; ce qui conduira évidemment au même but.

29. Tout ceci suppose, au surplus, que x et y doivent être réellement des fonctions déterminées de z ; mais ils pourraient fort bien ne l'être que d'une manière purement fictive ; c'est-à-dire, qu'il se pourrait que, y étant fonction de x seulement, on ait voulu, comme cela est permis, les considérer comme étant tous deux des fonctions d'une troisième variable z, sans rien statuer d'ailleurs sur la nature de cette troisième variable et sur ses relations avec chacune des deux autres. Alors l'intégrale $\int V dz$ pourrait être considérée comme provenant d'une autre intégrale $\int U dx$, dans laquelle U aurait été simplement fonction de x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... et où l'on aurait après coup changé la variable indépendante, en y considérant x et y comme des fonctions d'une troisième variable z ; on ne devrait donc parvenir alors, comme dans le §. I, qu'à une équation différentielle unique entre x et y ; il faudrait donc que les équations (XV) eussent un facteur commun sans z, c'est-à-dire, ne ren-

fermant simplement que x, x', x'',..... y, y', y'',..... lequel, égalé à zéro, satisferait à l'équation (XIV), indépendamment de toutes relations entre les fonctions X, Y; en supposant donc, dans cette équation unique, $x=z$, ce qui rendrait nuls x'', x''',.... on obtiendrait la différentielle de l'équation cherchée en x et y.

30. Retournons présentement au cas général. En intégrant les deux équations (XV), on en déduira les valeurs de x et y en z, lesquelles contiendront l'une et l'autre un nombre plus ou moins grand de constantes arbitraires. Il s'agit maintenant de voir comment on déterminera ces constantes.

31. La première ligne du premier membre de l'équation (XIII) se trouvant annullée, comme nous l'avons dit, par l'équation (XIV), cette équation, en passant aux fonctions primitives, devient

$$Const.=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''-\ldots\right]X\\ +\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'+\ldots\right]X'+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)-\ldots\right]X''+\ldots\\ +\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\ldots\right]Y\\ +\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots\end{array}\right\}; \quad \text{(XVIII)}$$

En y mettant pour x et y leurs valeurs en z et en constantes, déduites de l'intégration des équations (XV), les coefficiens de X, X', X'',..... Y, Y', Y'',..... n'y seront plus que des fonctions de z et de ces mêmes constantes.

32. Soient c_0 et c_1 les deux limites de l'intégrale; c'est-à-dire, supposons qu'il soit question de rendre *maximum* ou *minimum* l'intégrale $\int V dz$, prise depuis $z=c_0$ jusqu'à $z=c_1$; marquons respectivement des indices 0 et 1 les valeurs que prennent les diverses quantités qui entrent dans l'équation (XVIII), lorsqu'on y met pour z les valeurs respectives c_0 et c_1, nous aurons ainsi

$$Const. = \left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0 + \left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] X_0 \\
+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0 + \ldots\right] X'_0 + \left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0 - \ldots\right] X''_0 + \ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0 + \left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] Y_0 \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0 + \ldots\right] Y'_0 + \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0 - \ldots\right] Y''_0 + \ldots
\end{array}\right\},$$

$$Const. = \left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1 + \left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] X_1 \\
+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1 + \ldots\right] X'_1 + \left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_1 - \ldots\right] X''_1 + \ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1 + \left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] Y_1 \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1 + \ldots\right] Y_1 + \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1 - \ldots\right] Y''_1 + \ldots
\end{array}\right\};$$

d'où, en retranchant,

$$0 = \left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1 + \left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1 - \ldots\right] X_1 + \left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1 + \ldots\right] X'_1 + \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1 - \ldots\right] X''_1 + \ldots \\
-\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0 + \left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0 - \ldots\right] X_0 - \left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0 + \ldots\right] X'_0 - \left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0 - \ldots\right] X''_0 - \ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1 + \left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1 - \ldots\right] Y_1 + \left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1 + \ldots\right] Y'_1 + \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1 - \ldots\right] Y''_1 + \ldots \\
-\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0 + \left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0 - \ldots\right] Y_0 - \left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0 + \ldots\right] Y'_0 - \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0 - \ldots\right] Y''_0 - \ldots
\end{array}\right\}; \text{(XIX)}$$

équation que nous appellerons à l'avenir *équation aux limites*; et qui, comme l'on voit, ne renferme plus, outre les valeurs encore indéterminées de X, X', X'', ... Y, Y', Y'', ... aux deux limites de l'intégrale, que les deux limites c_0, c_1 et les constantes introduites par l'intégration des équations (XV).

33. Cela posé, si aucune condition particulière n'a été prescrite relativement aux limites, les fonctions

$$X_0\,,\ X'_0\,,\ X''_0\,,\ \ldots\ldots,\ Y_0\,,\ Y'_0\,,\ Y''_0\,,\ \ldots\ldots\ldots$$

$$X_1\,,\ X'_1\,,\ X''_1\,,\ \ldots\ldots,\ Y_1\,,\ Y'_1\,,\ Y''_1\,,\ \ldots\ldots\ldots$$

devront conserver l'indépendance la plus entière. L'équation (XIX) ne pourra donc alors subsister qu'autant que les coefficiens de ces diverses fonctions seront séparément nuls; cette équation (XIX) se partagera donc dans les suivantes :

$$o=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0-\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0+\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\ldots,$$

$$o=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots,$$

$$o=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1-\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1+\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\ldots,$$

$$o=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots,$$

lesquelles seront, en général, en même nombre que les constantes introduites, et serviront à en assigner les valeurs.

34. Mais si, au contraire, on exige qu'à l'une ou à l'autre limites, ou à toutes les deux, il existe, entre x et y et leurs divers coefficiens différentiels, une ou plusieurs relations données; X et Y, toujours indéterminés, ne seront plus dès-lors tout-à-fait

fait arbitraires. Représentons, en effet, une de ces équations par

$$f(x\,,x'\,,x''\,,\ldots\ldots,y\,,y'\,,y''\,,\ldots\ldots)=L=0\,; \qquad \text{(XX)}$$

on devra avoir, pour les diverses courbes que l'on considère, concurremment avec la courbe cherchée

$$f(x+iX\,,x'+iX'\,,x''+iX''\,,\ldots,y+iY\,,y'+iY'\,,y''+iY''\,,\ldots)=0\,;$$

ou, en développant,

$$L+\left\{\left(\frac{dL}{dx}\right)X+\left(\frac{dL}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dL}{dx''}\right)X''+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{dL}{dy}\right)Y+\left(\frac{dL}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dL}{dy''}\right)Y''+\ldots\right\}\frac{i}{1}+\ldots\ldots=0$$

d'où, retranchant l'équation (XX) et exprimant que l'équation résultante a lieu quelque petite que soit i,

$$0=\left(\frac{dL}{dx}\right)X+\left(\frac{dL}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dL}{dx''}\right)X''+\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{dL}{dy}\right)Y+\left(\frac{dL}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dL}{dy''}\right)Y''+\ldots\ldots \qquad \text{(XXI)}$$

Il faudra d'abord substituer dans (XX, XXI) pour x et y leurs valeurs en z et en constantes déduites des équations (XV); puis, en supposant, par exemple, qu'il soit question de la première limite, mettre pour z sa valeur c_0, ce qui changera ces équations en celles-ci :

$$L_0=0\,,\ \text{(XXII)} \quad 0=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dL}{dx}\right)_0X_0+\left(\frac{dL}{dx'}\right)_0X'_0+\left(\frac{dL}{dx''}\right)_0X''_0+\ldots\\ \left(\frac{dL}{dy}\right)_0Y_0+\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0Y'_0+\left(\frac{dL}{dy''}\right)_0Y''_0+\ldots\end{array}\right\} \ \text{(XXIII)}$$

On pourra avoir plusieurs couples de semblables équations, tant pour l'une que pour l'autre limites; et on se servira de (XXII) et de ses analogues pour éliminer de (XIX) le plus grand nombre possible des fonctions X_0, X'_0, X''_0, ..., Y_0, Y'_0, Y''_0, ..., X_1, X'_1, X''_1, ..., Y_1, Y'_1, Y'', ...; après quoi on égalera séparément à zéro les coefficiens de celles qui n'auront pas disparu. A la vérité, le nombre des équations qui devaient servir à déterminer les constantes se trouvera ainsi réduit; mais toutes les équations qu'on aura de moins se trouveront exactement remplacées par l'équation (XXII) et ses analogues; de sorte que ces constantes se trouveront toujours déterminées, et le seront seulement par d'autres conditions.

35. Au surplus, au lieu d'éliminer de l'équation (XIX) le plus grand nombre possible des fonctions X_0, X'_0, X''_0, ... Y_0, Y'_0, Y''_0, ... X_1, X'_1, X''_1, ... Y_1, Y'_1, Y''_1, ..., au moyen des équations de condition telles que (XXIII), il reviendra au même, et il sera peut-être plus élégant de prendre la somme tant de l'équation (XIX) que des produits de ces équations de condition par des multiplicateurs indéterminés; d'égaler ensuite séparément à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de toutes les fonctions X_0, X'_0, X''_0, ... Y_0, Y'_0, Y''_0, ... X_1, X'_1, X''_1, ... Y_1, Y'_1, Y''_1, ... et d'éliminer enfin les multiplicateurs indéterminés entre les équations résultantes.

36. Appliquons présentement ces divers procédés à un exemple.

PROBLÈME III. *Quelle est la plus courte ligne entre deux plans parallèles donnés?*

Solution. Soient pris l'axe des z perpendiculaire et le plan des xy parallèles aux deux plans donnés, dont nous supposerons les équations

$$z=c_0\,, \qquad z=c_1\,;$$

les axes des x et des y étant supposés rectangulaires, mais dirigés d'ailleurs comme on le voudra, la question se trouvera ainsi réduite à assigner pour x et y des valeurs, fonctions de z qui rendent

$$\int dz\sqrt{1+x'^2+y'^2}$$

minimum, entre les limites c_0 et c_1.

Nous aurons donc ici

$$V=\sqrt{1+x'^2+y'^2};$$

d'où (21)

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{dV}{dx'}\right)=\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}},\quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)=0,\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+y'^2}},\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)=0,\ldots$$

et de là

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)'=\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)'=0,\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)'=\frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)'=0,\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)''=0,\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)''=0,\ldots$$

au moyen de quoi l'équation (XIV) deviendra

$$\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}X+\frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}Y=0.$$

Si la courbe n'est assujettie à aucune autre condition qu'à celle d'être *minimum* entre les deux plans donnés, X et Y devront demeurer indépendans, et conséquemment cette équation se partagera en ces deux-ci :

$$\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

qu'on pourra mettre ensuite sous cette forme

$$\frac{(1+x'^2+y'^2)x''-(x'x''+y'y'')x'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \frac{(1+x'^2+y'^2)y''-(x'x''+y'y'')y'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0;$$

ou, en continuant d'employer les notations de Lagrange,

$$\frac{(1+x'^2+y'^2)x''-(1+x'^2+y'^2)'x'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \frac{(1+x'^2+y'^2)y''-(1+x'^2+y'^2)'y'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

ou encore

$$\frac{x''\sqrt{1+x'^2+y'^2}-x'(\sqrt{1+x'^2+y'^2})'}{1+x'^2+y'^2}=0, \frac{y''\sqrt{1+x'^2+y'^2}-y'(\sqrt{1+x'^2+y'^2})'}{1+x'^2+y'^2}=0$$

ou enfin

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'=0, \quad \left(\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'=0,$$

ce qui donne

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=A; \quad \frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=B:$$

En considérant, dans ces équations, x' et y' comme deux inconnues, on en tire, en transformant les constantes,

$$x'=\frac{A}{\sqrt{1-A^2-B^2}}=M; \quad y'=\frac{B}{\sqrt{1-A^2-B^2}}=N;$$

d'où enfin

$$x=Mz+G; \quad y=Nz+H,$$

c'est-à-dire que la ligne cherchée est une ligne droite, comme on pouvait bien s'y attendre.

L'équation aux limites (XIX) devient, dans le même cas,

$$\frac{M}{\sqrt{1+M^2+N^2}}(X_1-X_0)+\frac{N}{\sqrt{1+M^2+N^2}}(Y_1-Y_0)=0;$$

de sorte que les constantes G et H demeurent tout-à-fait arbitraires ; ce qui revient à dire que les parties de parallèles interceptées entre des plans parallèles sont de même longueur.

Les coefficiens des deux fonctions X_0 et X_1, ainsi que ceux des deux fonctions Y_0 et Y_1 étant les mêmes aux deux limites, il s'ensuit qu'on ne saurait établir des conditions indépendantes pour ces deux limites, ce qui revient à dire qu'une droite qui perce deux plans parallèles fait des angles égaux avec l'un et l'autre.

S'il n'y a aucune condition particulière prescrite pour les limites, l'indépendance absolue des fonctions X_0, Y_0, X_1, Y_1 ne permettant de poser ni $X_1-X_0=0$ ni $Y_1-Y_0=0$, l'équation aux limites ne pourra être satisfaite qu'en posant simultanément $M=0$, $N=0$, au moyen de quoi les équations de notre droite se réduiront simplement à $x=G$, $y=H$; ce qui revient à dire que, de toutes les droites menées entre les deux mêmes plans parallèles, la perpendiculaire commune, indéterminée d'ailleurs de situation, est la plus courte.

Si les limites étaient des points fixes, tellement situés sur nos deux plans qu'on eût, pour le premier, $x=a_0$, $y=b_0$, et pour le second, $x=a_1$, $y=b_1$; en exprimant que ces valeurs et celles de z satisfont aux deux équations

$$x=Mz+G, \qquad y=Nz+H,$$

on aurait

$$a_0=Mc_0+G, \qquad b_0=Nc_0+H;$$

$$a_1=Mc_1+G, \qquad b_1=Nc_1+H;$$

éliminant donc, entre ces six équations, les quatre constantes M, N, G, H, on obtiendrait pour les équations de la droite cherchée

$$\frac{x-a_0}{a_1-a_0}=\frac{y-b_0}{b_1-b_0}=\frac{z-c_0}{c_1-c_0};$$

ce qui revient à dire que *le plus court chemin entre deux points de l'espace est la ligne droite qui joint ces deux points.*

Au lieu de points fixes, on pourrait donner pour limites des courbes planes tracées sur les deux plans parallèles. Conservons le point fixe (a_0, b_0, c_0) sur le premier plan, et donnons-nous pour limite, sur le second, la courbe plane suivant laquelle il est coupé par la surface cylindrique dont l'équation est

$$\mathrm{f}(x, y)=L=0;$$

nous devrons avoir (34) l'équation de condition

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1 X_1+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1 Y_1=0.$$

en ajoutant le produit de cette équation par un multiplicateur indéterminé λ à l'équation aux limites, après avoir fait dans cette dernière $X_0=0$, $Y_0=0$, ainsi qu'on le doit, puisqu'ici la première limite est fixe; il viendra

$$\left\{\frac{M}{\sqrt{1+M^2+N^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\right\}X_1+\left\{\frac{N}{\sqrt{1+M^2+N^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right\}Y=0.$$

Egalant présentement à zéro les multiplicateurs de X_1 et Y_1, nous aurons les deux équations

$$\frac{M}{\sqrt{1+M^2+N^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,\quad \frac{N}{\sqrt{1+M^2+N^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0,$$

entre lesquelles éliminant λ, il viendra finalement

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1 N=\left(\frac{dL}{dy}\right)_1 M\ ;$$

mais, en différentiant l'équation $L=0$, il vient

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1 dx+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1 dy=0,$$

qui, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}\ ;$$

mais les équations de notre droite étant, dans le cas actuel,

$$x-a_0=M(z-c_0)\ , \qquad y-b_0=N(z-c_0)\ ,$$

l'équation de sa projection sur le plan de la courbe sera

$$y-b_0=\frac{N}{M}(x-a_0)\ ;$$

d'où l'on voit que cette projection, et par conséquent la droite elle-même sera normale à la courbe.

Il demeure donc établi par là que *le plus court chemin d'un point de l'espace à une courbe plane est la normale menée de ce point à cete courbe*; et il est facile d'en conclure que *le plus court chemin entre deux courbes planes situées dans deux plans parallèles, ou même dans un même plan, est la normale qui leur est commune.*

Nous voilà donc parvenus ici à la solution d'un problème que précédemment (13) nous avions vainement tenté de résoudre; et l'on voit que cela tient à ce qu'alors y était, dès-l'abord, supposée fonction de x, tandis que x, y sont supposés fonctions d'une troisième variable z; ce qui permet d'établir ensuite telle relation on veut entre x et y. Mais nous éprouverions ici une difficulté du même genre si nous nous proposions d'assigner le plus court chemin, soit entre des courbes à double courbure, soit entre des surfaces courbes ; puisqu'il est de l'essence de la question que nous traitons actuellement que les limites c_0 et c_1 demeurent invariables. On peut déjà soupçonner, au surplus, et nous verrons bientôt d'ailleurs ce qu'il y a à faire pour surmonter cette difficulté.

Pour donner un exemple du cas mentionné ci-dessus (27), reprenons l'équation

$$\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}X+\frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}Y=0\,,$$

et supposons qu'au lieu de chercher quelle est absolument la plus courte ligne entre nos deux plans, on cherche seulement quelle est la plus courte entre toutes celles qui, se terminant à ces deux plans, sont situées sur une sphère ayant pour équation

$$x^2+y^2+z^2-r^2=M=0\,.$$

On aura ici

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\right)=2x\,,\qquad \left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\right)=2y\,,$$

de sorte que l'équation de condition (XVII) sera

$$xX+yY=0;$$

ajoutant le produit de cette équation par un multiplicateur indéterminé λ à celle ci-dessus, il viendra

$$\left\{\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\lambda x\right\}X+\left\{\frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\lambda y\right\}Y=0\,,$$

égalant alors séparément à zéro les multiplicateurs des fonctions X et Y, il en résultera les deux équations

$(1+y'^2)$

$$\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\lambda x=0\,, \qquad \frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\lambda y=0\,,$$

qui, d'après le précédent calcul, reviennent à

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'+\lambda x=0\,, \qquad \left(\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'+\lambda y=0\,,$$

entre lesquelles éliminant λ, il vient

$$x\left(\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'=y\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'\,;$$

ou, en développant et transposant,

$$\frac{(xy''-yx'')\sqrt{1+x'^2+y'^2}-(xy'-yx')(\sqrt{1+x'^2+y'^2})'}{1+x'^2+y'^2}=0\,,$$

ou encore $$\frac{(xy'-yx')'\sqrt{1+x'^2+y'^2}-(xy'-yx')(\sqrt{1+x'^2+y'^2})'}{1+x'^2+y'^2}=0\,,$$

ou enfin $$\left(\frac{xy'-yx'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'=0\,,$$

ce qui donne, en intégrant, $$\frac{xy'-yx'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=C\,. \qquad (\alpha)$$

telle est donc l'équation différentielle de la surface qui doit couper la sphère dont l'équation est $x^2+y^2+z^2=r^2$, (β)
suivant la ligne cherchée. Or, soit un plan passant par le centre de cette sphère et ayant pour équation $Ax+By=z$; (γ)
les équations (β, γ) donneront par différentiation

$$xx'+yy'=-z\,, \qquad Ax'+By'=+1\,;$$

d'où $$x'=+\frac{y+Bz}{Ay-Bx}\,, \qquad y'=-\frac{x+Az}{Ay-Bx}\,;$$

de là, en ayant égard aux équations (β, γ),

$$xy'-yx'=-\frac{r^2}{Ay-Bx}\,, \qquad \sqrt{1+x'^2+y'^2}=\frac{r\sqrt{1+A^2+B^2}}{Ay-Bx}\,,$$

et par suite $$\frac{xy'-yx'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=-\frac{r}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\,;$$

équation qui équivaut à l'équation (α) ; d'où il suit que le système des équations (β, γ) équivaut au système des équations (α, β); puis donc que les premières appartiennent à un grand cercle de la sphère, il doit en être de même des dernières; la ligne cherchée est donc un arc du grand cercle donné par les deux équations

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \; , \qquad Ax+By=z \; ;$$

dans lesquelles on peut profiter de l'indétermination des deux constantes A et B pour assujettir la courbe à se terminer à des points donnés sur les intersections de la sphère avec les deux plans parallèles entre lesquels cette courbe doit se trouver comprise. Il demeure donc établi, par ce qui précède, que *le plus court chemin, sur la sphère, entre deux points de sa surface, est l'arc de grand cercle qui joint ces deux points.*

37. On peut, comme nous l'avons fait (14), ramener à la question qui nous occupe, d'autres questions qui semblent d'abord beaucoup plus compliquées. Soient U, P, Q, R, ... des quantités composées d'une manière connue quelconque en z, x, y, x', y', x'', y'', ... On peut se demander d'assigner, parmi les diverses valeurs de x et y en z qui, entre des limites déterminées, donnent

$$\int P\mathrm{d}z=a \; , \qquad \int Q\mathrm{d}z=b \; , \qquad \int R\mathrm{d}z=c \; , \ldots\ldots \qquad \text{(XXIV)}$$

où a, b, c, ... sont des constantes données, quelles sont celles qui, entre les limites, rendent $\int U\mathrm{d}z$ *maximum* ou *minimum*? Or, en raisonnant comme nous l'avons fait à l'endroit cité, on verra qu'en posant

$$V=U+AP+BQ+CR+\ldots\ldots \; ,$$

où A, B, C sont de nouvelles constantes, la question se réduit à rendre $\int V\mathrm{d}z$ *maximum* ou *minimum*, entre les limites dont il s'agit, et à déterminer ensuite les constantes A, B, C, ... à l'aide des conditions (XXIV). Voici un exemple.

38 *PROBLÈME IV. Entre toutes les courbes qui, se terminant à deux plans parallèles, sont telles que l'ensemble des perpendiculaires entre ces plans, terminées à l'un et à l'autre, qui passent par les divers points de ces courbes, forme une portion de surface*

cylindrique dont l'aire est donnée, quelle est celle qui, entre ces deux mêmes plans, a la moindre longueur?

Solution. Soient toujours, comme dans le précédent problème, l'axe des z perpendiculaire et le plan des xy parallèle aux deux plans donnés, que nous supposerons encore avoir pour équations

$$z=c_0\ , \qquad z=c_1\ .$$

Soit k^2 l'aire donnée de la portion de surface cylindrique formée par toutes les perpendiculaires entre les plans parallèles menées par les points de la courbe cherchée ; nous aurons, entre les limites c_0 et c_1,

$$(c_1-c_0)\int dz\sqrt{x'^2+y'^2}=k^2\ ;$$

de plus, nous devrons avoir, entre les mêmes limites,

$$\int dz\sqrt{1+x'^2+y'^2}$$

minimum ; d'où l'on voit (37) que tout se réduira à rendre *minimum*, entre les limites dont il s'agit, l'intégrale

$$\int\{\sqrt{1+x'^2+y'^2}+A(c_1-c_0)\sqrt{x'^2+y'^2}\}dz\ ;$$

sauf ensuite à déterminer convenablement la constante A.

En posant, pour abréger, $A(c_1-c_0)=C$, nous aurons donc ici

$$V=\sqrt{1+x'^2+y'^2}+C\sqrt{x'^2+y'^2}\ ,$$

d'où

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{dV}{dx'}\right)=\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}+\frac{Cx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}+\frac{Cy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)'=\frac{x''(1+y'^2)-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{Cy'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)'=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)'=\frac{y''(1+x'^2)-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{Cx'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)'=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)''=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)''=0,\ldots.$$

en conséquence, l'équation (XIV) deviendra

$$\left\{\frac{x''(1+y'^2)-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{Cy'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}X$$
$$+\left\{\frac{y''(1+x'^2)-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{Cx'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}Y=0\,.$$

Si donc la courbe cherchée ne doit être assujettie à aucune autre condition, les coefficiens de X et Y devront être séparément nuls, ce qui donnera, pour les deux équations différentielles de la courbe dont il s'agit

$$\frac{x''(1+y'^2)-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{Cy'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,,$$
$$\frac{y''(1+x'^2)-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{Cx'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,;$$

ou bien

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'+\left(\frac{Cx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'=0\,,$$
$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'+\left(\frac{Cy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'=0\,;$$

ce qui donne, par une première intégration,

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}+\frac{Cx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=A\,;$$
$$\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}+\frac{Cy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=B\,;$$

on tirera évidemment de là

$$x'=M\,,\qquad y'=N\,;$$

M et N étant deux nouvelles constantes, fonctions de A, B, C, on aura donc, en intégrant de nouveau,

$$x=Mz+G\,,\qquad y=Nz+H\,;$$

la ligne cherchée est donc une droite; la surface cylindrique dont l'aire doit être égale à k^2 se réduit donc à un plan rectangulaire ayant cette droite pour diagonale.

§. III.

39. Dans tout ce qui précède, nous avons constamment supposé qu'il n'y avait dans V qu'une seule variable indépendante ; examinons présentement ce qu'il y aura à faire lorsqu'il y en aura plusieurs, et que la quantité à rendre *maximum* ou *minimum* sera une intégrale multiple. Soit V une expression de forme connue quelconque, composée de deux variables indépendantes x et y, d'une fonction z de ces deux variables et des divers coefficiens différentiels partiels de cette fonction, jusqu'à ceux de tel ordre on voudra ; et considérons l'intégrale double

$$\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Si la composition de z en x et y était connue, rien ne serait plus aisé que de ramener cette intégrale à la forme $\int\int Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où Z serait une fonction de x et y seulement ; et alors on pourrait, soit exactement, soit par les séries, exécuter l'intégration entre telles limites constantes ou variables qu'on voudrait.

Mais on suppose que l'expression de z en x et y n'est pas donnée, on suppose qu'elle est l'inconnue du problème ; et on propose de la déterminer par cette condition qu'après la substitution de sa valeur et de celles de ses divers coefficiens différentiels partiels dans $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, qui alors prendra la forme $\int\int Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, cette intégrale, prise entre des limites données quelconques, constantes ou variables, et sous des conditions données, compatibles toutefois avec la nature du problème, soit *plus grande* ou *plus petite* que toutes celles qui pourraient résulter, entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, de toute autre valeur, fonction de x et y, prise pour z.

40. Ici, où nous avons deux variables indépendantes, il nous serait incommode d'employer les notations de Lagrange ; en conséquence, nous adopterons les abréviations que voici :

$$\frac{dz}{dx}=l\,,\qquad \frac{d^2z}{dx^2}=n\,,\qquad \frac{d^3z}{dx^3}=q\,,\ \ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dz}{dy}=m\,;\qquad \frac{d^2z}{dxdy}=o\,,\qquad \frac{d^3z}{dx^2dy}=r\,,\ \ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=p\,,\qquad \frac{d^3z}{dxdy^2}=s\,,\ \ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^3z}{dy^3}=t\,,\ \ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ (*)$$

Quant aux différentielles partielles, nous poserons

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)=K\,,\ \left(\frac{dV}{dl}\right)=L\,,\ \left(\frac{dV}{dn}\right)=N\,,\ \left(\frac{dV}{dq}\right)=Q\,,\ \ldots\ldots;$$

$$\left(\frac{dV}{dm}\right)=M\,,\ \left(\frac{dV}{do}\right)=O\,,\ \left(\frac{dV}{dr}\right)=R\,,\ \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{dV}{dp}\right)=P\,,\ \left(\frac{dV}{ds}\right)=S\,,\ \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)=T\,,\ \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots;$$

(*) Nous aurions bien désiré de pouvoir employer les notations ordinaires ; c'est-à-dire, de faire $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, et ainsi du reste ; mais, dans le dessein où nous étions de pousser les développemens un peu plus loin qu'on ne le fait communément, cela devenait impossible.

et si nous avons quelques autres fonctions de x et y à considérer, nous en représenterons les divers coefficiens différentiels sans aucune abréviation.

41. Pour en revenir présentement à notre problème ; quelle que soit la valeur encore inconnue de z en x et y qui doit le résoudre, on peut toujours la considérer comme l'ordonnée d'une certaine surface courbe, dont les deux abscisses sont x et y ; et le problème se réduit ainsi à déterminer l'équation de cette surface.

Suivant donc l'esprit de la méthode ordinaire *de maximis et minimis*, il faut, pour parvenir à cette équation, exprimer que la surface cherchée est telle que, pour si peu qu'on la déforme, en tout ou en partie, d'une manière arbitraire, et même discontinue si l'on veut, l'intégrale $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, toujours prise entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, deviendra *plus petite* dans le cas du *maximum*, et *plus grande* dans le cas du *minimum*.

42. Conservons z pour le symbole de l'ordonnée de la surface qui doit résoudre le problème ; l'ordonnée correspondante, dans toutes les autres surfaces dont il vient d'être question, pourra être représentée par la formule générale

$$z+iZ\ ,$$

dans laquelle Z est supposé représenter une fonction de x et y tout-à-fait arbitraire, continue ou discontinue, et où i est encore, comme ci-dessus, un nombre abstrait, positif ou négatif, si petit qu'on le voudra, sans pourtant être absolument nul. Il est évident, en effet, que, même en se donnant i à volonté, on pourra encore profiter de l'indétermination de la fonction Z de manière que cette formule devienne l'ordonnée de telle surface qu'on voudra ; et qu'ensuite on pourra diminuer graduellement le nombre i de telle sorte que cette surface devienne si peu différente qu'on le voudra de la surface cherchée. D'où l'on voit que, si l'on construit arbitrairement une surface aussi voisine de la surface cherchée qu'on le voudra, on pourra toujours considérer $z+iZ$ comme exprimant l'ordonnée de cette surface. De sorte qu'en supposant Z arbitraire et i d'une petitesse illimitée, la formule $z+iZ$ exprime l'ordonnée de la totalité des surfaces que nous devons comparer à la surface cherchée.

43. Remarquons pourtant, avant d'aller plus loin, qu'il se pourrait, dans des cas particuliers, en vertu de certaines conditions de la question, que la fonction Z, toujours indéterminée, ne dût point être tout-à-fait arbitraire, ou du moins ne dût l'être que sous certaines restrictions : c'est, par exemple, ce qui arriverait si la surface cherchée devait passer par une courbe donnée, plane ou à double courbure, ou encore par un polygone donné, rectiligne, mixtiligne ou curviligne, plan ou gauche ; car alors on n'aurait à lui comparer que les autres surfaces qui passeraient par cette courbe ou par ce polygone ; mais nous avons déjà vu (§. I et II), et nous verrons bientôt de nouveau qu'on est toujours à temps, à la fin du calcul, d'avoir égard à ces sortes de limitations.

44. Par le changement de z en $z+iZ$, les quantités

$$\begin{array}{lllll}
z, & l, & n, & q, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & m, & o, & r, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & & p, & s, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & & & t, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & & & & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

deviennent respectivement

$$\begin{array}{lllll}
z+iZ, & l+i\dfrac{dZ}{dx}, & n+i\dfrac{d^2Z}{dx^2}, & q+i\dfrac{d^3Z}{dx^3}, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & m+i\dfrac{dZ}{dy}, & o+i\dfrac{d^2Z}{dxdy}, & r+i\dfrac{d^3Z}{dx^2dy}, & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

$$p+i\,\frac{d^2Z}{dy^2}\;,\quad s+i\,\frac{d^3Z}{dxdy^2}\;,\;\ldots\ldots\ldots$$

$$t+i\,\frac{d^3Z}{dy^3}\;,\;\ldots\ldots\ldots,$$

$$,\;\ldots\ldots\ldots;$$

en conséquence, on trouvera, par l'application de la série de Taylor au développement des fontions des polynomes, que V doit devenir (40)

$$V+\left\{\begin{array}{l} KZ+L\,\frac{dZ}{dx}+N\,\frac{d^2Z}{dx^2}+Q\,\frac{d^3Z}{dx^3}+\ldots\ldots \\ \quad +M\,\frac{dZ}{dy}+O\,\frac{d^2Z}{dxdy}+R\,\frac{d^3Z}{dx^2dy}+\ldots\ldots \\ \qquad +P\,\frac{d^2Z}{dy^2}+S\,\frac{d^3Z}{dxdy^2}+\ldots\ldots \\ \qquad\quad +T\,\frac{d^3Z}{dy^3}+\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +\ldots\ldots \end{array}\right\}\frac{i}{1}+\ldots\ldots$$

d'où il suit que $\int\int V dxdy$ deviendra

$$\int\int V dxdy+\frac{i}{1}\int\int\left\{\begin{array}{l} KZ+L\,\frac{dZ}{dx}+N\,\frac{d^2Z}{dx^2}+Q\,\frac{d^3Z}{dx^3}+\ldots\ldots \\ \quad +M\,\frac{dZ}{dy}+O\,\frac{d^2Z}{dxdy}+R\,\frac{d^3Z}{dx^2dy}+\ldots\ldots \\ \qquad +P\,\frac{d^2Z}{dy^2}+S\,\frac{d^3Z}{dxdy^2}+\ldots\ldots \\ \qquad\quad +T\,\frac{d^3Z}{dy^3}+\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +\ldots\ldots \end{array}\right\}dxdy+\ldots\ldots$$

afin donc que $\iint V \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ soit *maximum* ou *minimum*, il faudra, suivant les principes connus, que le multiplicateur de i soit nul; et alors le *maximum* ou le *minimum* aura lieu, suivant que le multiplicateur de i^2 sera constamment *négatif* ou constamment *positif*. La condition commune au *maximum* et au *minimum* sera donc exprimée par l'équation

$$\iint\left\{\begin{array}{r} KZ+L\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}+N\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}x^2}+Q\dfrac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x^3}+\ldots \\ +M\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y}+O\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}+R\dfrac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}+\ldots \\ +P\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}y^2}+S\dfrac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}+\ldots \\ +T\dfrac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}y^3}+\ldots \\ +\ldots \end{array}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

ou plus simplement, en différentiant,

$$\left.\begin{array}{r} 0=KZ+L\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}+N\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}x^2}+Q\dfrac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x^3}+\ldots \\ +M\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y}+O\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}+R\dfrac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}+\ldots \\ +P\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}y^2}+S\dfrac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}+\ldots \\ +T\dfrac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}y^3}+\ldots \\ +\ldots \end{array}\right\}\quad(\mathrm{XXV})$$

45. Cela posé, en ayant successivement égard à la variabilité de x et à celle de y, la formule $u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u$ donne

$KZ=KZ$;

$$L\frac{dZ}{dx}=-\frac{dL}{dx}Z+\frac{d(LZ)}{dx},$$

$$M\frac{dZ}{dy}=-\frac{dM}{dy}Z+\frac{d(MZ)}{dy},$$

$$N\frac{d^2Z}{dx^2}=+\frac{d^2N}{dx^2}Z-\frac{d\left(\frac{dN}{dx}Z-N\frac{dZ}{dx}\right)}{dx},$$

$$O\frac{d^2Z}{dxdy}=+\frac{d^2O}{dxdy}Z-\frac{d\left(\frac{dO}{dx}Z\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{dO}{dx}Z\right)}{dy}+\frac{d^2(OZ)}{dxdy},$$

$$P\frac{d^2Z}{dy^2}=+\frac{d^2P}{dy^2}Z-\frac{d\left(\frac{dP}{dy}Z-P\frac{dZ}{dy}\right)}{dy},$$

$$Q\frac{d^3Z}{dx^3}=-\frac{d^3Q}{dx^3}Z+\frac{d\left(\frac{d^2Q}{dx^2}Z-\frac{dQ}{dx}\frac{dZ}{dx}+Q\frac{d^2Z}{dx^2}\right)}{dx},$$

$$R\frac{d^3Z}{dx^2dy}=-\frac{d^3R}{dx^2dy}Z+\frac{d\left(\frac{d^2R}{dxdy}Z-\frac{dR}{dy}\frac{dZ}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{d^2R}{dx^2}Z\right)}{dy}$$
$$-\frac{d^2\left(\frac{dR}{dx}Z-R\frac{dZ}{dx}\right)}{dxdy},$$

$$S\frac{d^3Z}{dxdy^2}=-\frac{d^3S}{dxdy^2}Z+\frac{d\left(\frac{d^2S}{dy}Z\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{d^2S}{dx\,dy}Z-\frac{dS}{dx}\frac{dZ}{dy}\right)}{dy}$$
$$-\frac{d^2\left(\frac{dS}{dy}Z-S\frac{dZ}{dy}\right)}{dxdy},$$

$$T\frac{d^3Z}{dy^3}=-\frac{d^3T}{dy^3}Z+\frac{d\left(\frac{d^2T}{dy^2}Z-\frac{dT}{dy}\frac{dZ}{dy}+T\frac{d^2Z}{dy^2}\right)}{dy},$$

. . . .

Ces développemens, que l'on peut d'ailleurs vérifier en effectuant les différentiations indiquées, étant substitués dans l'équation (XXV), elle deviendra

$$0=\left\{\begin{array}{r} K-\frac{dL}{dx}+\frac{d^2N}{dx^2}-\frac{d^3Q}{dx^3}+\ldots. \\ -\frac{dM}{dy}+\frac{d^2O}{dxdy}-\frac{d^3R}{dxdy^2}+\ldots. \\ +\frac{d^2P}{dy^2}-\frac{d^3S}{dxdy^2}+\ldots. \\ -\frac{d^3T}{dy^3}+\ldots. \\ +\ldots. \end{array}\right\}Z$$

$$+\frac{d.}{dx}\left\{\left[\begin{array}{r} L-\frac{dN}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\ldots. \\ -\frac{dO}{dy}+\frac{d^2R}{dxdy}-\ldots. \\ +\frac{d^2S}{dy^2}-\ldots. \\ -\ldots. \end{array}\right]Z+\left\{\begin{array}{r} N-\frac{dQ}{dx}+\ldots. \\ -\frac{dR}{dy}+\ldots. \\ +\ldots. \end{array}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{array}{r} Q-\ldots. \\ -\ldots. \end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dx^2}+\ldots\right\}$$

$$+\frac{d.}{dy}\left\{\left[\begin{array}{r} M-\frac{dO}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\ldots. \\ -\frac{dP}{dy}+\frac{d^2S}{dxdy}-\ldots. \\ +\frac{d^2T}{dy^2}-\ldots. \\ -\ldots. \end{array}\right]Z+\left\{\begin{array}{r} P-\frac{dS}{dx}+\ldots. \\ -\frac{dT}{dy}+\ldots. \\ +\ldots. \end{array}\right\}\frac{dZ}{dy}+\left\{\begin{array}{r} T-\ldots. \\ -\ldots. \end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dy^2}+\ldots\right\}$$

$$+$$

$$+\frac{d^2.}{dxdy}\left\{\left\{\begin{matrix} O-\frac{dR}{dx}+\ldots \\ -\frac{dS}{dy}+\ldots \\ +\ldots \end{matrix}\right\}Z+\left\{\begin{matrix} R-\ldots \\ -\ldots \end{matrix}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{matrix} S-\ldots \\ -\ldots \end{matrix}\right\}\frac{dZ}{dy}+\ldots\right\}. \quad \text{(XXVI)}$$

46. L'équation étant mise sous cette forme, on voit qu'une partie de son second membre est une dérivée exacte par rapport à x, tout-à-fait déterminée quel que soit Z, tandis qu'au contraire, si l'on voulait considérer l'autre partie de ce second membre comme une dérivée par rapport à x, cette dérivée changerait de forme avec Z; d'où il suit que cette équation ne peut subsister qu'autant que la partie de son second membre qui est une dérivée exacte par rapport à x et celle qui ne l'est pas seront séparément nulles. Egalant donc d'abord cette dernière partie à zéro, il viendra

$$o=\left\{\begin{matrix} K-\frac{dL}{dx}+\frac{d^2N}{dx^2}-\frac{d^3Q}{dx^3}+\ldots \\ -\frac{dM}{dy}+\frac{d^2O}{dxdy}-\frac{d^3R}{dx^2dy}+\ldots \\ +\frac{d^2P}{dy^2}-\frac{d^3S}{dxdy^2}+\ldots \\ -\frac{d^3T}{dy^3}+\ldots \\ +\ldots \end{matrix}\right\}Z$$

$$+\frac{d.}{dy}\left\{\left\{\begin{array}{l} M-\frac{dO}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\ldots \\ \quad -\frac{dP}{dy}+\frac{d^2S}{dxdy}-\ldots \\ \qquad\qquad +\frac{d^2T}{dy^2}-\ldots \\ \qquad\qquad\qquad -\ldots \end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l} P-\frac{dS}{dx}+\ldots \\ \quad -\frac{dT}{dy}+\ldots \\ \qquad\qquad +\ldots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dy}+\left\{\begin{array}{l} T-\ldots \\ \quad -\ldots \end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dy^2}+\ldots\right\}. \quad \text{(XXVII)}$$

Cette partie étant ainsi supprimée, dans l'équation (XXVI), elle deviendra, en passant aux fonctions primitives,

$$Y=\left\{\begin{array}{l} L-\frac{dN}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\ldots \\ \quad -\frac{dO}{dy}+\frac{d^2R}{dxdy}-\ldots \\ \qquad\qquad +\frac{d^2S}{dy^2}-\ldots \\ \qquad\qquad\qquad -\ldots \end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l} N-\frac{dQ}{dx}+\ldots \\ \quad -\frac{dR}{dy}+\ldots \\ \qquad\qquad +\ldots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{array}{l} Q-\ldots \\ \quad -\ldots \end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dx^2}+\ldots$$

$$+\frac{d.}{dx}\left\{\left\{\begin{array}{l} O-\frac{dR}{dx}+\ldots \\ \quad -\frac{dS}{dy}+\ldots \\ \qquad\qquad +\ldots \end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l} R-\ldots \\ \quad -\ldots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{array}{l} S-\ldots \\ \quad -\ldots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dy}+\ldots\right\}. \quad \text{(XXVIII)}$$

47. Or, présentement, les mêmes considérations qui nous ont conduits à partager l'équation (XXVI) dans les équations (XXVII) et (XXVIII) conduisent également à décomposer chacune de ces

dernières en deux autres ; de sorte que finalement l'équation (XXVI) donne naissance aux quatre suivantes :

$$\left.\begin{array}{r}
0=K-\dfrac{dL}{dx}+\dfrac{d^2N}{dx^2}-\dfrac{d^3Q}{dx^3}+\ldots\\
-\dfrac{dM}{dy}+\dfrac{d^2O}{dxdy}-\dfrac{d^3R}{dx^2dy}+\ldots\\
+\dfrac{d^2P}{dy^2}-\dfrac{d^3S}{dxdy^2}+\ldots\\
-\dfrac{d^3T}{dy^3}+\ldots\\
+\ldots
\end{array}\right\}\quad\text{(XXIX)}$$

$$X=\left\{\begin{array}{r}
M-\dfrac{dO}{dx}+\dfrac{d^2R}{dx^2}-\ldots\\
-\dfrac{dP}{dy}+\dfrac{d^2S}{dxdy}-\ldots\\
+\dfrac{d^2T}{dy^2}-\ldots\\
+\ldots
\end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{r}
P-\dfrac{dS}{dx}+\ldots\\
-\dfrac{dT}{dy}+\ldots\\
+\ldots
\end{array}\right\}\frac{dZ}{dy}+\left\{\begin{array}{r}
T-\ldots\\
-\ldots
\end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dy^2}+\ldots\ ;\quad\text{(XXX)}$$

$$Y=\left\{\begin{array}{r}
L-\dfrac{dN}{dx}+\dfrac{d^2Q}{dx^2}-\ldots\\
-\dfrac{dO}{dy}+\dfrac{d^2R}{dxdy}-\ldots\\
+\dfrac{d^2S}{dy^2}-\ldots\\
-\ldots
\end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{r}
N-\dfrac{dQ}{dx}+\ldots\\
-\dfrac{dR}{dy}+\ldots\\
+\ldots
\end{array}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{array}{r}
Q-\ldots\\
-\ldots
\end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dx^2}+\ldots\ ;\quad\text{(XXXI)}$$

$$C=\left\{\begin{array}{l} O-\dfrac{dR}{dx}+\ldots \\ -\dfrac{dS}{dy}+\ldots \\ \qquad\quad +\ldots \end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l} R-\ldots \\ \;-\ldots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{array}{l} S-\ldots \\ \;-\ldots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dy}+\ldots;\,(\text{XXXII})$$

X étant une fonction arbitraire de x sans y, Y une fonction arbitraire de y sans x et C une constante arbitraire. A la vérité, il semblerait, au premier abord, qu'au lieu de C on dût avoir une autre fonction arbitraire de x sans y; mais remarquons qu'en commençant les intégrations par rapport à y au lieu de les commencer par rapport à x, on serait conduit à conclure qu'au lieu de C on doit avoir une fonction arbitraire de y sans x; d'où l'on voit que C ne doit renfermer ni x ni y, et ne saurait être conséquemment qu'une simple constante arbitraire.

48. L'équation (XXIX) ne renfermant plus ainsi que les données primitives du problème sera conséquemment l'équation différentielle partielle de la surface cherchée. En l'intégrant, on en déduira la valeur de z exprimée en x, y, fonctions et constantes arbitraires, de laquelle on conclura ensuite celles de k, l, m, n, o, p,..... exprimées également en x, y, fonctions et constantes arbitraires. On substituera ces valeurs, ainsi que celle de z, dans les trois équations (XXX, XXXI, XXXII), qui dès-lors ne renfermeront plus que x, y, des fonctions arbitraires de ces deux variables, des constantes arbitraires, Z et ses divers coefficiens différentiels, les deux fonctions arbitraires X et Y et la constante C. Ces équations, ainsi transformées, serviront à déterminer les constantes et fonctions arbitraires introduites par l'intégration de l'équation (XXIX), de manière à satisfaire aux conditions relatives aux limites. Mais, comme des détails sur ce sujet nous entraîneraient trop loin, nous nous bornerons à donner un exemple de la recherche de

l'équation différentielle partielle, en nous proposant le problème suivant :

PROBLÈME V. Quelle est la moindre surface, entre toutes celles qui sont interceptées par une même surface prismique ou cylindrique indéfinie donnée ?

Solution. Soient pris le plan des xy perpendiculaire et l'axe des z parallèles aux arêtes ou élémens rectilignes de la surface cylindrique ou prismique donnée ; les axes des x et des y, dirigés d'ailleurs comme on le voudra dans leur plan, étant néanmoins perpendiculaires l'un à l'autre. La question se réduira à rendre *minimum* l'intégrale $\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+l^2+m^2}$, bornée à la surface du prisme et du cylindre.

Nous aurons donc ici $V=\sqrt{1+l^2+m^2}$, d'où (40)

$$K=0\,,\quad L=\frac{l}{\sqrt{1+l^2+m^2}}\,,\quad N=0\,,\ldots\ldots,$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{1+l^2+m^2}}\,,\quad O=0\,,\ldots\ldots;$$

$$P=0\,,\ldots\ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots;$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=\frac{(1+m^2)n-lmo}{(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}x^2}=0\,,\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=\frac{(1+l^2)p-lmo}{(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2O}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=0\,,\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}=0\,,\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots;$$

En conséquence, l'équation (XXIX) deviendra

$$(1+m^2)n-2lmo+(1+l^2)p=0\ ;$$

et telle sera l'équation différentielle partielle de la surface cherchée.

Or, il est connu qu'en représentant par ρ l'un des deux rayons de courbure principaux d'une surface quelconque, en l'un quelconque de ses points, ces deux rayons sont donnés par l'équation

$$(np-o^2)\rho^2+[(1+m^2)n-2lmo+(1+l^2)p](1+l^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\rho+(1+l^2+m^2)^2=0\ ;$$

donc l'équation ci-dessus est celle de toutes les surfaces qui, en chacun de leurs points, ont leurs deux courbures principales égales et de signes contraires. Il n'y a donc que des surfaces de ce genre qui puissent résoudre le problème que nous nous sommes proposé. Leur espèce particulière dépendra, dans chaque cas, de la nature des conditions prescrites pour les limites de l'intégrale (*).

Afin donc de pouvoir compléter la solution du problème, il faudrait, avant tout, intégrer l'équation

$$(1+m^2)n-2lmo+(1+l^2)p=0\ ;$$

malheureusement, comme l'observe Lagrange, les intégrales qu'on en a obtenues jusqu'ici ne sont pas sous une forme qui puisse se prêter aux applications.

50. Si l'on avait proposé de déterminer la surface de moindre étendue, entre toutes celles qui se terminent à la même courbe plane ou à double courbure donnée, la question serait rentrée dans la précédente, puisqu'on peut toujours imaginer une telle courbe comme tracée sur une surface ayant toutes ses arêtes ou élémens

(*) Voyez, sur ce sujet, une dissertation insérée à la page 143 du VII.e volume du présent recueil.

rectilignes parallèles à l'axe des z, et il en serait encore de même si la limite donnée était un polygone plan ou gauche.

51. Mais si l'on demandait la surface de moindre étendue entre toutes celles qui se terminent à d'autres surfaces données, nos méthodes actuelles ne seraient plus applicables, attendu qu'elles supposent essentiellement que x et y ont aux limites des valeurs ou une relation indépendantes de la valeur de z. Nous dirons bientôt comment on pourrait éluder cette difficulté.

52. Soient P, Q, R, ... des fonctions données de x, y, z, l, m, n, ..., et a, b, c, ... des constantes données. Si l'on demande, entre toutes les valeurs de z fonction de x et y qui, entre des limites données, rendent

$$\int\!\!\int P\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\ ,\quad \int\!\!\int Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b\ ,\quad \int\!\!\int R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\ ,\ldots.. \qquad \text{(XXXIII)}$$

quelle est celle qui, entre les mêmes limites, rend *maximum* ou *minimum* l'intégrale

$$\int\!\!\int U\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

où U est aussi une fonction donnée de x, y, z, l, m, n, ...; en raisonnant comme nous l'avons déjà fait (14, 15 et 37), on verra qu'en posant

$$V=U+AP+BQ+CR+\ldots\ldots\ ;$$

tout se réduit à rendre $\int\!\!\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *maximum* ou *minimum*, entre les mêmes limites, sauf ensuite à déterminer les constantes A, B, C, ... à l'aide des conditions (XXXIII). Voici un exemple d'un problème de ce genre.

53. *PROBLÈME VI. Entre toutes les surfaces qui retranchent d'un prisme ou d'un cylindre droit à base quelconque et d'une*

hauteur indéfinie une portion d'un volume donné ; quelle est celle dont l'aire, terminée à la surface latérale de ce prisme ou de ce cylindre est la moindre possible ?

Solution. Soit pris le plan de la base du prisme ou du cylindre pour celui des xy que nous supposerons rectangulaires, mais d'ailleurs de direction quelconque, et soit l'axe des z parallèle aux arêtes ou élémens rectilignes de ce même prisme ou de ce même cylindre. Soit c^3 le volume de la portion du cylindre interceptée du côté de sa base par la surface cherchée, nous devrons avoir, dans les limites déterminées par la surface laterale du prisme ou du cylindre

$$\int\int z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c^3 \;,$$

de plus, entre les mêmes limites, $\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+l^2+m^2}$ devra, comme ci-dessus, être un *minimum*. En conséquence, tout se réduira à rendre tel, toujours entre les mêmes limites, l'intégrale

$$\int\int(\sqrt{1+l^2+m^2}+Az)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;,$$

sauf à déterminer ensuite convenablement la constante A.

Nous aurons donc ici $V=\sqrt{1+l^2+m^2}+Az$, d'où

$$K=A\;,\quad L=\frac{l}{\sqrt{1+l^2+m^2}}\;,\quad N=0\;,\ldots\ldots;$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{1+l^2+m^2}}\;,\quad O=0\;,\ldots\ldots,$$

$$P=0\;,\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots,$$

donc

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{dL}{dx}=\frac{(1+m^2)n-lmo}{(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \frac{d^2N}{dx^2}=0\,,\ \ldots\ldots\,,$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{(1+l^2)p-lmo}{(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \frac{d^2O}{dxdy}=0\,,\ \ldots\ldots\,,$$

$$\frac{d^2P}{dy^2}=0\,,\ \ldots\ldots\,,$$

$$\ldots\ldots\,;$$

En conséquence, l'équation (XXIX) deviendra

$$(1+m^2)n-2lmo+(1+l^2)p=A(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}\,;$$

équation qu'on doit encore moins espérer d'intégrer d'une manière commode pour les applications que celle que nous avons obtenue ci-dessus. On s'assurera facilement qu'elle comprend comme cas particuliers la sphère ainsi que le cylindre et le cône de révolution.

54. Quelque étendus que puissent paraître les développemens que nous venons de donner, dans ce paragraphe et dans les deux précédens, ces développemens ne doivent néanmoins être considérés que comme une introduction à la véritable méthode qui va présentement nous occuper, et que comme un moyen d'en bien faire saisir l'esprit et de bien faire comprendre la nécessité des considérations qui lui servent de base.

55. On a vu que le problème de la plus courte distance entre deux courbes planes tracées sur un même plan, qui avait résisté aux méthodes du §. I, a cédé sans efforts à celles du §. II; et cela parce qu'ici, au lieu de considérer x et y comme fonction l'une de l'autre, nous les avions considérées toutes deux comme fonctions d'une troisième variable z; mais, dans ce même §. II, nous avons éprouvé un embarras pareil à celui que nous avons rencontré dans le §. I, du moment que nous avons voulu traiter

le problème de la plus courte distance entre deux surfaces courbes données ; et cet embarras s'est reproduit de nouveau, dans le présent paragraphe, pour la moindre surface entre des surfaces données. En se laissant guider par l'analogie, on est conduit à penser que cet obstacle ne se serait rencontré dans aucun de ces deux endroits si, au lieu de considérer x et y comme fonctions de z dans le premier cas, et z comme fonctions de x et y dans le second, nous les eussions considérées toutes trois, comme fonctions d'une quatrième variable, dans le premier, et comme fonctions de deux nouvelles variables dans le second, ce qui, comme l'on sait, est toujours permis ; et c'est ce que la suite montrera clairement.

56. Voilà donc notre plan tout naturellement tracé. Quel que soit le nombre tant des variables indépendantes que des fonctions de ces variables, et quel que soit en même temps l'ordre de l'intégrale à rendre *maximum* ou *minimum*, nous supposerons constamment toutes les variables, tant indépendantes que subordonnées, fonctions d'une ou de plusieurs variables nouvelles, en même nombre que les variables indépendantes primitives.

57. Nous allons appliquer successivement ces considérations aux divers cas que nous avons déjà traités ; mais comme d'ailleurs les raisonnemens théoriques demeurent exactement les mêmes qu'alors, nous nous dispenserons de les énoncer, ce qui rendra notre marche beaucoup plus rapide.

§. IV.

58. La variable y étant fonction de la seule variable indépendante x, et U étant une quantité composée d'une manière connue quelconque en x, en y et en coefficiens différentiels de cette dernière variable, proposons-nous d'assigner la valeur de y en x qui rend l'intégrale $\int U dx$ *maximum* ou *minimum*, entre des limites données ?

59. Pour résoudre cette question, nous commencerons par passer

par les moyens connus, de l'hypothèse de y fonction de x à celle de x et y fonctions d'une troisième variable t, ce qui fera prendre à notre intégrale la forme $\int V\mathrm{d}t$, où V sera fonction de x, y et des coefficiens différentiels

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3},\ldots\ldots\ldots,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3},\ldots\ldots\ldots$$

que nous représenterons respectivement, comme nous en sommes convenus plus haut, par

$$x',\ x'',\ x''',\ \ldots\ldots\ldots,\ y',\ y'',\ y''',\ \ldots\ldots\ldots$$

Supposant ensuite que x et y deviennent respectivement

$$x+iX,\qquad y+iY,$$

où X et Y sont des fonctions arbitraires de t, et i un nombre abstrait d'une petitesse illimitée, $\int V\mathrm{d}t$ deviendra alors

$$\int V\mathrm{d}t+\frac{i}{1}\int\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)X+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)X'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)X''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)X'''+\ldots\ldots\\+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)Y'''+\ldots\ldots\end{matrix}\right\}\mathrm{d}t+\ldots\ldots \quad (1)$$

En conséquence, la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera exprimée par l'équation

$$0=\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)X+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)X'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)X''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)X'''+\ldots\\+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)X'''+\ldots\end{matrix}\right\}. \quad (2)$$

66. Or, on a

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)X=\left(\frac{dV}{dx}\right)X\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'=\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)X\right]'-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'X\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''=\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)X'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)'X\right]'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''X\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dx'''}\right)X'''=\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)X''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'X'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''X\right]'-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''X,$$

. . . . ;

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)Y=\left(\frac{dV}{dy}\right)Y\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'Y\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''=\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)'Y\right]'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''Y\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''=\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'Y'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''Y,$$

. . . .

Ce qui donnera, en substituant,

$$(3)\qquad 0=\left\{\begin{aligned}&\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\ldots\right]X\\&+\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots\right]Y\end{aligned}\right\}.$$

$$
+\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''-\ldots\ldots\right]X\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'+\ldots\right]X'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)-\ldots\right]X''+\ldots\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''-\ldots\ldots\right]Y\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots
\end{array}\right\}';
$$

équation qui se décompose en ces deux-ci :

$$
\mathrm{o}=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)''-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'''+\ldots\right]X\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)''-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'''+\ldots\right]Y
\end{array}\right\} \quad (4)
$$

$$
Const.=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''-\ldots\ldots\right]X\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'+\ldots\right]X'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)-\ldots\right]X''+\ldots\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''-\ldots\ldots\right]Y\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots
\end{array}\right\}. \quad (5)
$$

61. Cela posé, les fonctions arbitraires X et Y de t devant conserver l'indépendance la plus entière dans toute l'étendue de l'intégrale, l'équation (4) donnera séparément

$$\left.\begin{aligned} 0&=\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)''-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'''+\ldots,\\ 0&=\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)''-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'''+\ldots,\end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

lesquelles seraient deux équations distinctes en x, y et t, si x et y étaient des fonctions déterminées de t; de sorte qu'il faudrait éliminer t entre leurs intégrales pour parvenir à la relation cherchée entre x et y; mais, comme ce n'est réellement que par une sorte de fiction que x et y sont considérés comme des fonctions de t, et que ces fonctions demeurent absolument indéterminées, il arrivera que les deux équations (6) devront admettre un facteur commun qui, égalé à zéro, sera de même forme qu'une équation primitive en x et y seulement qu'on aurait différentiée une ou plusieurs fois, en y considérant x et y comme des fonctions de t, et par conséquent en y faisant varier dx aussi bien que dy; en posant donc, dans cette équation, $t=x$, d'où $x'=1$, $x''=0$, $x'''=0$, ... on aura, sous forme différentielle, la relation cherchée entre x et y.

62. Marquons présentement des indices 0 et 1 ce que doivent devenir, aux deux limites de l'intégrale, toutes les diverses quantités dont se compose l'équation (5); cette équation devant avoir lieu à ces deux limites, comme dans tout le reste de l'intégrale, on devra avoir, à la fois,

$$Const.=\left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)_0-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'_0+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''_0-\ldots\ldots\ldots\ldots\right]X_0\\ &+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_0-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'_0+\ldots\right]X'_0+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_0-\ldots\right]X''_0+\ldots\\ &+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)_0-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'_0+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''_0-\ldots\ldots\ldots\ldots\right]Y_0\\ &+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_0-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'_0+\ldots\right]Y'_0+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_0-\ldots\right]Y_0''+\ldots\end{aligned}\right\},$$

$$Const.=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_1'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_1''-\ldots\ldots\ldots\right]X_1\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_1'+\ldots\right]X'_1+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_1-\ldots\right]X''_1+\ldots\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_1'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_1''-\ldots\ldots\ldots\right]Y_1\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_1'+\ldots\right]Y'_1+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_1-\ldots\right]Y''_1+\ldots
\end{array}\right\};$$

d'où, en retranchant, on conclura, pour l'*équation aux limites*,

$$0=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_1'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_1''-\ldots\right]X_1+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_1'+\ldots\right]X'_1+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_1-\ldots\right]X''_1+\ldots\\
-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)_0-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_0'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_0''-\ldots\right]X_0-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_0-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_0'+\ldots\right]X'_0-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_0-\ldots\right]X''_0-\ldots\\
+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_1'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_1''-\ldots\right]Y_1+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_1'+\ldots\right]Y'_1+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_1-\ldots\right]Y''_1+\ldots\\
-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)_0-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_0'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_0''-\ldots\right]Y_0-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_0-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_0'+\ldots\right]Y'_0-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_0-\ldots\right]Y''_0-\ldots
\end{array}\right\};\quad(7)$$

63. Cela posé, si aucune condition n'a été prescrite relativement aux limites de l'intégrale; c'est-à-dire, si les valeurs de x, x', x'',..... y, y', y'',..... peuvent être quelconques à ces limites, les fonctions X, Y, et par suite les dérivées X', Y', X'', Y'',..... devront, à ces mêmes limites, conserver toute leur indétermination et toute leur indépendance ; l'équation (7) ne pourra donc subsister alors qu'autant que les multiplicateurs de

$$X_0\ ,\ X'_0\ ,\ X''_0\ ,\ldots\ldots,\ Y_0\ ,\ Y'_0\ ,\ Y''_0\ ,\ldots\ldots\ldots$$
$$X_1\ ,\ X'_1\ ,\ X''_1\ ,\ldots\ldots,\ Y_1\ ,\ Y'_1\ ,\ Y''_1\ ,\ldots\ldots\ldots$$

seront séparément nuls ; on devra donc avoir séparément

$$\left.\begin{array}{l}
o=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0-\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0+\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\ldots,\quad \ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1-\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1+\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_1-\ldots,\quad \ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots,\quad \ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots;\quad \ldots
\end{array}\right\}(8$$

équations qui, en général, seront en même nombre que les constantes introduites par l'intégration, et qui serviront à en assigner les valeurs.

64. Si l'une des limites est fixe, la première par exemple ; c'est-à-dire, si les valeurs de x et y à cette limite sont données, il est clair qu'on devra avoir également $X_0=o$, $Y_0=o$, et l'on devrait avoir aussi $X'_0=o$, $Y'_0=o$, $X''_0=o$, $Y''_0=o$; .... si l'on exigeait qu'à la limite dont il s'agit x', y', x'', y'', ... eussent aussi des valeurs données, cela ferait disparaître autant de termes de l'équation (7) ; de sorte que, s'il devait en être de même à l'autre limite, cette équation se trouverait satisfaite d'elle-même ; mais alors les constantes introduites par l'intégration se détermineraient en exprimant qu'à l'une et à l'autre limites x, x', x'', ... y, y', y'', ... ont les valeurs assignées.

65. Enfin, l'une ou l'autre limite peut n'être ni absolument fixe, ni absolument arbitraire. On peut exiger, par exemple, qu'à la première limite, on ait, entre x et y et leurs coefficiens différentiels, une ou plusieurs équations de relation, telles que

$$\mathrm{F}(x\,,\,x'\,,\,x''\,,\ldots\ldots y\,,\,y'\,,\,y''\,,\ldots\ldots)=L=0\;;$$

il en résultera l'équation

$$0=\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right)_0 X_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x'}\right)_0 X'_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x''}\right)X''_0+\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}\right)_0 Y_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y'}\right)_0 Y'_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y''}\right)_0 Y''_0+\ldots\ldots;\quad (9)$$

et on pourra en avoir d'analogues pour l'autre limite. On ajoutera alors à l'équation (7) les produits de ces équations par des multiplicateurs indéterminés ; égalant ensuite à zéro dans l'équation somme, les coefficiens des diverses fonctions $X\,,\,X'\,,\,X''\,,\ldots\ldots$ $Y\,,\,Y'\,,\,Y''\,,\ldots\ldots$ et éliminant enfin les multiplicateurs indéterminés entre les équations résultantes, il en résultera des équations qui, conjointement avec

$$L_0=0 \qquad\qquad (10)$$

et ses analogues, serviront à déterminer les constantes.

66. Appliquons ces procédés à un exemple.

PROBLÈME VII. Quelle est la plus courte distance à une courbe plane d'un point situé sur le plan de cette courbe ?

Solution. Soient $(a\,,\,b)$ le point donné et $L=0$ l'équation de la courbe donnée en x et y ; la longueur de la distance cherchée sera $\int\mathrm{d}t\sqrt{x'^2+y'^2}$; de sorte que nous aurons $V=\sqrt{x'^2+y'^2}$, et par suite

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)=0\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)=0\,,\ \ldots\ldots\,,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)'=\frac{y'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'=0\,,\ \ldots\ldots\,,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)''=0\,;\ \ldots\ldots\,;$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)=0\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)=0\,,\ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'=-\frac{x'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'=0\,,\ldots\ldots;$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)''=0\,,\ldots\ldots,$$

En conséquence, les équations (6) deviendront

$$\frac{y'(x'y''-y'x'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,,\qquad \frac{x'(x'y''-y'x'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,,$$

et seront conséquemment satisfaites l'une et l'autre en posant

$$\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,,$$

qui sera conséquemment l'équation différentielle de la ligne cherchée.

Cette équation revient simplement à

$$x'y''-y'x''=0\,,\qquad \text{ou}\qquad \frac{y''}{y'}=\frac{x''}{x'}\;;$$

ce qui donne, par une première intégration

$$\mathrm{l}y'=\mathrm{l}Mx'\qquad \text{d'où}\qquad y'=Mx'\,,$$

et, par une nouvelle intégration,

$$y=Mx+G\;;$$

c'est-à-dire que la plus courte ligne que l'on puisse mener à une courbe plane d'un point situé dans le plan de cette courbe est, en général, une ligne droite. Voyons présentement quelle en doit être la direction.

D'après les précédentes déterminations, l'équation (7) devient

$$\frac{x'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}X_1-\frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0+y'^2_0}}X_0+\frac{y'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}Y_1-\frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0+y'^2_0}}Y_0=0\ ;$$

ou, en y mettant pour y'_0 et y'_1 leurs valeurs Mx'_0, Mx'_1,

$$\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}(X_1-X_0)+\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}(Y_1-Y_0)=0\ ;$$

or, comme à la première limite on doit avoir $x=a$, $y=b$, il s'ensuit qu'on doit avoir aussi (64) $X_0=0$, $Y_0=0$; de sorte que l'équation aux limites se réduit simplement à

$$\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}X_1+\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}Y_1=0;$$

mais, à la seconde limite, on doit avoir, entre x et y, l'équation de relation $L=0$, ce qui donnera (65)

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1Y_1=0.$$

Ajoutant le produit de cette équation par λ à la précédente, il viendra

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\right\}X_1+\left\{\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right\}Y_1=0;$$

égalant alors à zéro les coefficiens de X_1 et Y_1, on aura les deux équations

$$\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0;$$

$$\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0;$$

entre lesquelles éliminant λ, il viendra finalement

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1 M-\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0;$$

mais, d'un autre côté, en différentiant l'équation $L_1=0$, considérée comme équation en x et y, il vient

$$\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\frac{dy_1}{dx_1}+\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,$$

qui, combinée avec la précédente, donne

$$1+M\frac{dy_1}{dx_1}=0,$$

d'un autre côté, si dans l'équation

$$y=Mx+G,$$

on substitue les coordonnées du point (a, b), on aura, en retranchant,

$$y-b=M(x-a);$$

mettant donc dans cette dernière pour M la valeur donnée par l'équation ci-dessus, il viendra, pour l'équation de la ligne cherchée,

$(y-b)$

$$(y-b)\frac{dy_1}{dx_1}+(x-a)=0,$$

ce qui nous apprend que *la plus courte distance à une courbe plane d'un point situé sur le plan de cette courbe est la normale abaissée de ce point sur cette courbe.* Il est facile d'en conclure que *le plus court chemin entre deux courbes planes, tracées sur un même plan, est la normale qui leur est commune* (*).

67. On voit donc, ainsi que nous l'avions annoncé (55), qu'en considérant x et y comme fonction d'uue troisième variable t, le cas des limites variables n'offre plus aucun embarras.

§. V.

68. Les variables x et y étant fonctions de la seule variable indépendante z, et U étant une quantité composée d'une manière connue quelconque en z, x et y et en coefficiens différentiels de ces deux dernières variables, proposons-nous d'assigner les valeurs de x et y en z qui rendent l'intégrale $\int U\mathrm{d}z$ *maximum* ou *minimum*, entre des limites données?

69. Pour résoudre cette question, nous commencerons par passer, par les moyens connus, de l'hypothèse de x et y fonctions de z à celle de x, y, z fonctions d'une quatrième variable t; ce qui fera prendre à notre intégrale la forme $\int V\mathrm{d}t$, où V sera une fonction déterminée de x, y, z et des coefficiens différentiels

(*) On doit remarquer toutefois que la condition du *maximum* étant la même que celle du *minimum*, cette normale commune n'est proprement *minimum* qu'autant qu'elle se termine aux parties convexes des deux courbes.

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^3x}{dt^3},\ \ldots\ldots\ldots,\ \frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^3y}{dt^3},\ \ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{dz}{dt},\ \frac{d^2z}{dt^2},\ \frac{d^3z}{dt^3},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

que nous représenterons respectivement par

$$x',\ x'',\ x''',\ \ldots\ldots,\ y',\ y'',\ y''',\ \ldots\ldots,\ z',\ z'',\ z''',\ \ldots\ldots,$$

Supposant ensuite que x, y, z deviennent respectivement

$$x+iX,\qquad y+iY,\qquad z+iZ,$$

où X, Y, Z sont des fonctions arbitraires de t, et i un nombre abstrait d'une petitesse illimitée, $\int V\mathrm{d}t$ deviendra alors

$$\int V\mathrm{d}t+\frac{i}{1}\int\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)X+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)X'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)X''+\ldots\\ +\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\ldots\ldots\\ +\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)Z+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z'}\right)Z'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z''}\right)Z''+\ldots\ldots\end{matrix}\right\}\mathrm{d}t+\ldots \quad (11)$$

ce qui donnera, pour la condition commune au *maximum* et au *minimum*,

$$0=\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)X+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)X'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)X''+\ldots\ldots\\ +\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\ldots\ldots\\ +\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)Z+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z'}\right)Z'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z''}\right)Z''+\ldots\ldots\end{matrix}\right\}; \quad (12)$$

70. En traitant cette équation comme nous l'avons fait (60) de l'équation (2), elle deviendra

$$(13)\quad o=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots\right]X\\
+\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots\right]Y\\
+\left[\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\dots\right]Z
\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''-\dots\dots\right]X\\
+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'+\dots\right]X'+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)-\dots\right]X''+\dots\\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\dots\dots\right]Y\\
+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'+\dots\right]Y'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)-\dots\right]Y''+\dots\\
+\left[\left(\frac{dV}{dz'}\right)-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''-\dots\dots\right]Z\\
+\left[\left(\frac{dV}{dz''}\right)-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'+\dots\right]Z'+\left[\left(\frac{dV}{dz'''}\right)-\dots\right]Z''+\dots
\end{array}\right\}'.$$

71. De là on conclura d'abord l'équation

$$o=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots\right]X\\
+\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots\right]Y\\
+\left[\left(\frac{dV}{dz}\right)\;\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\dots\right]Z
\end{array}\right\}. \qquad (14)$$

Si aucune condition particulière n'a été imposée entre les limites de l'intégrale, les fonctions X, Y, Z devront, entre ces limites, conserver toute leur indépendance ; ce qui décomposera cette équation en ces trois-ci :

$$\left.\begin{aligned}
0&=\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\ldots,\\
0&=\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots,\\
0&=\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\ldots,
\end{aligned}\right\}, \quad (15)$$

desquelles on déduirait, par l'intégration, les valeurs générales de x, y, z en t, et constantes arbitraires, si x, y, z étaient réellement des fonctions déterminées de cette dernière variable ; mais, comme ce n'est que par une sorte de fiction qu'elles sont considérées comme telles, il arrivera, si toutefois le problème est possible, que chacune de ces trois équations se trouvera comportée par les deux autres ; que par conséquent elles n'équivaudront réellement qu'à deux, lesquelles ne seront autres que celles qu'on obtiendrait si, ayant deux équations de relation entre x, y, z, on les différentiait une ou plusieurs fois, en y considérant ces trois variables comme des fonctions de t ; de sorte qu'en posant dans ces équations $t=z$ d'où $z'=1$, $z''=0$, $z'''=0$, ... on aura, sous forme différentielle, les relations cherchées de x et y à z.

72. Mais il pourrait se faire qu'au lieu de demander les valeurs de x et y en z qui rendent $\int U dz$ ou $\int V dt$ *maximum* ou *minimum* absolu, on demandât de ne rendre cette intégrale telle que par des valeurs satisfaisant à une équation de relation donnée ; dès-lors X, Y, Z, toujours arbitraires, ne seraient plus absolument indépendans. En représentant, en effet, par $S=0$ l'équation de relation donnée, on devrait avoir

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)X+\left(\frac{dS}{dy}\right)Y+\left(\frac{dS}{dz}\right)Z=0\,. \qquad (16)$$

Ajoutant à l'équation (14) le produit de celle-ci par λ, il viendrait

$$0=\left\{\begin{array}{l}\left[\lambda\left(\frac{dS}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\ldots\right]X\\+\left[\lambda\left(\frac{dS}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots\right]Y\\+\left[\lambda\left(\frac{dS}{dz}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\ldots\right]Z\end{array}\right\} \quad (17)$$

égalant alors séparément à zéro les multiplicateurs de X, Y, Z; et éliminant λ entre les trois équations résultantes, on obtiendra la double équation

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\ldots}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}\\[2ex]=\dfrac{\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots}{\left(\frac{dS}{dy}\right)}\\[2ex]=\dfrac{\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\ldots}{\left(\frac{dS}{dz}\right)}\end{array}\right\}; \quad (18)$$

laquelle, dans l'hypothèse actuelle, ne devra compter que pour une seule, dont il faudra combiner l'intégrale avec $S=0$, pour obtenir les valeurs cherchées de x et y en fonction de z.

73. Quant à l'équation aux limites, elle sera évidemment ici

$$
0=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1-\ldots\right]X_1+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1+\ldots\right]X'_1+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots\right]X''_1+\ldots \\
-\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0-\ldots\right]X_0-\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0+\ldots\right]X'_0-\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\ldots\right]X''_0-\ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots\right]Y_1+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots\right]Y'_1+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots\right]Y''_1+\ldots \\
-\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots\right]Y_0-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots\right]Y'_0-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots\right]Y''_0-\ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dz'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''_1-\ldots\right]Z_1+\left[\left(\frac{dV}{dz''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'_1+\ldots\right]Z'_1+\left[\left(\frac{dV}{dz'''}\right)_1-\ldots\right]Z''_1+\ldots \\
-\left[\left(\frac{dV}{dz'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''_0-\ldots\right]Z_0-\left[\left(\frac{dV}{dz''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'_0+\ldots\right]Z'_0-\left[\left(\frac{dV}{dz'''}\right)_0-\ldots\right]Z''_0-\ldots
\end{array}\right\};
$$

les indices 0 et 1 ayant ici la même signification que ci-dessus; et voici l'usage que l'on fera de cette équation.

74. Si aucune condition n'a été prescrite relativement aux limites de l'intégrale; c'est-à-dire, si à ces limites, les valeurs de x, x', x'', ... y, y', y'', ... z, z', z'', ... peuvent être quelconques, les fonctions X, Y, Z, et par suite leurs dérivées X', Y', Z', X'', Y'', Z'', ..., devront, à ces mêmes limites, conserver toute leur indétermination et toute leur indépendance; l'équation (19) ne pourra donc subsister alors qu'autant que les multiplicateurs de

$$X_0,\ X'_0,\ X''_0,\ \ldots,\ Y_0,\ Y'_0,\ Y''_0,\ \ldots,\ Z_0,\ Z'_0,\ Z''_0,\ \ldots$$

$$X_1,\ X'_1,\ X''_1,\ \ldots,\ Y_1,\ Y'_1,\ Y''_1,\ \ldots,\ Z_1,\ Z'_1,\ Z''_1,\ \ldots$$

seront séparément nuls; on devra donc avoir séparément

$$\left.\begin{array}{l}
o=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0-\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0+\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\ldots,\ \ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1-\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1+\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_1-\ldots,\ \ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots,\ \ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots,\ \ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dz}\right)_0-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''_0-\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dz''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'_0+\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dz'''}\right)_0-\ldots,\ \ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dz'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''_1-\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dz''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'_1+\ldots,\ o=\left(\frac{dV}{dz''}\right)_1-\ldots,\ \ldots
\end{array}\right\}(20)$$

équations qui, en général, seront en même nombre que les constantes introduites par l'intégration, et qui serviront à en assigner les valeurs.

75. Si l'une des limites est fixe, la première par exemple; c'est-à-dire, si les valeurs de x, y, z sont données à cette limite, il est clair que l'on aura $X_0=o$, $Y_0=o$, $Z_0=o$, et l'on devrait avoir également $X'_0=o$, $Y'_0=o$, $Z'_0=o$, $X''_0=o$, $Y''_0=o$, $Z''_0=o$, ..., si l'on exigeait qu'à la limite dont il s'agit x', y', z', x'', y'', z'', ... eussent aussi des valeurs données; cela ferait disparaître autant de termes de l'équation (19); de sorte que, s'il devait en être de même à l'autre limite, cette équation se trouverait satisfaite d'elle-même; mais alors les constantes introduites par l'intégration se détermineraient en exprimant qu'à l'une et à l'autre limites x, y, z, ... x', y', z', x'', y'', z'', ... ont les valeurs assignées.

76. Enfin, les limites de l'intégrale peuvent n'être ni absolument

fixes, ni absolument indéterminées. On peut exiger, par exemple, qu'à la première limite, on ait, entre x, y, z, et leurs coefficiens différentiels, une ou plusieurs équations de relation, telles que

$$\mathrm{F}(x\,,\,x'\,,\,x''\,,\ldots\ldots,\,y\,,\,y'\,,\,y''\,,\ldots\ldots,\,z\,,\,z'\,,\,z''\,,\ldots\ldots)=L=0\;;$$

il en résultera l'équation

$$0=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right)_0 X_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x'}\right)_0 X'_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x''}\right)_0 X''_0+\ldots\ldots\\ +\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}\right)_0 Y_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y'}\right)_0 Y'_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y''}\right)_0 Y''_0+\ldots\ldots\\ +\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z}\right)_0 Z_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z'}\right)_0 Z'_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z''}\right)_0 Z''_0+\ldots\ldots\end{array}\right\}; \qquad (21)$$

et on pourra en avoir d'analogues pour l'autre limite. On ajoutera alors à l'équation (19) les produits de ces équations par des multiplicateurs indéterminés ; égalant ensuite à zéro dans l'équation somme, les coefficiens des diverses fonctions X, X', X'',....... Y, Y', Y'', ... Z, Z', Z'',..... et éliminant enfin les multiplicateurs indéterminés entre les équations résultantes, il en résultera des équations qui, conjointement avec

$$L_0=0 \qquad (22)$$

et ses analogues, serviront à déterminer les constantes.

77. Appliquons présentement ces procédés à divers exemples.

PROBLÈME VIII. Quelle est la plus courte ligne entre deux points de l'espace ?

Solution. Soient $(a_0\,,\,b_0\,,\,c_0)$, $(a_1\,,\,b_1\,,\,c_1)$ les deux points donnés ; nous aurons ici $V=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, et par conséquent

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)=0\,,\quad \left(\frac{dV}{dx'}\right)=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,,\quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)=0\,,\ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)'=\frac{x''(x'^2+y'^2+z'^2)-x'(x'x''+y'y''+z'z'')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)'=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)''=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)=0\,,\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,;\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)'=\frac{y''(x'^2+y'^2+z'^2)-y'(x'x''+y'y''+z'z'')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)'=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)''=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)=0\,,\quad \left(\frac{dV}{dz'}\right)=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,,\quad \left(\frac{dV}{dz''}\right)=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dz'}\right)'=\frac{z''(x'^2+y'^2+z'^2)-z'(x'x''+y'y''+z'z'')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{dV}{dz''}\right)'=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dz''}\right)''=0\,,\ldots\ldots$$

En conséquence, l'équation (14) sera

$$\left.\begin{array}{r}[x''(x'^2+y'^2+z'^2)-x'(x'x''+y'y''+z'z'')]X\\ +[y''(x'^2+y'^2+z'^2)-y'(x'x''+y'y''+z'z'')]Y\\ +[z''(x'^2+y'^2+z'^2)-z'(x'x''+y'y''+z'z'')]Z\end{array}\right\}=0;$$

dans laquelle il faudra égaler séparément à zéro les coefficiens de X, Y, Z. Cela ne donnera que la double équation

$$\frac{x''}{x'}=\frac{y''}{y'}=\frac{z''}{z'}\ ;$$

ou, par une première intégration

$$x'=Mz'\ ,\qquad y'=Nz'\ ,$$

et ensuite

$$x=Mz+G\ ;\qquad y=Nz+H\ ,$$

exprimant ensuite que cette droite passe par les deux points donnés, on aura, en éliminant les constantes arbitraires, pour les équations de la ligne cherchée

$$\frac{x-a_0}{a_1-a_0}=\frac{y-b_0}{b_1-b_0}=\frac{z-c_0}{c_1-c_0}\ .$$

78. **PROBLÈME IX.** *Quelle est, dans l'espace, la plus courte ligne d'un point donné à une surface donnée ?*

Solution. Soit (a_0, b_0, c_0) le point donné, et soit $L=0$, l'équation en x, y, z de la surface donnée ; on aura d'abord, comme dans le précédent problème, pour les équations générales de la ligne cherchée

$$x=Mz+G, \qquad y=Nz+H.$$

En exprimant que cette droite passe par le point (a_0, b_0, c_0) ces équations deviendront

$$x-a_0=M(z-c_0), \qquad y-b_0=N(z-c_0),$$

et tout se déduira à déterminer les constantes M et N.

A cause de la première limite fixe, l'équation aux limites sera simplement (19), en supprimant le dénominateur commun,

$$x'_1X_1+y'_1Y_1+z'_1Z_1=0 ;$$

ou, en mettant pour x' et y' leurs valeurs Mz', Nz', et divisant par z',

$$MX_1+NY_1+Z_1=0 ;$$

en y ajoutant le produit de l'équation

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dL}{dz}\right)_1Z_1=0;$$

par un multiplicateur indéterminé λ, et égalant ensuite séparément à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de X_1, Y_1; Z_1, il viendra

$$M+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,\quad N+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0,\quad 1+\lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)_1=0;$$

d'où on conclura, par l'élimination de λ,

$$M\left(\frac{dL}{dz}\right)_1=\left(\frac{dL}{dx}\right)_1;$$

$$N\left(\frac{dL}{dz}\right)_1=\left(\frac{dL}{dy}\right)_1;$$

mais, en différentiant l'équation $L_1=0$, on a

$$\left(\frac{dL}{dz}\right)_1\frac{dz_1}{dx_1}+\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,$$

$$\left(\frac{dL}{dz}\right)_1\frac{dz_1}{dy_1}+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0;$$

mettant donc dans ces dernières les valeurs de $\left(\frac{dL}{dx}\right)_1$ et $\left(\frac{dL}{dy}\right)_1$, tirées des précédentes, il viendra, en supprimant le facteur $\left(\frac{dL}{dz}\right)_1$,

$$M+\frac{dz_1}{dx_1}=0;\qquad N+\frac{dz_1}{dy_1}=0;$$

ce qui prouve que *la plus courte ligne d'un point à une surface courbe est la normale menée de ce point à cette surface*; d'où il est facile de conclure que *la plus courte ligne entre deux surfaces courbes est la normale qui leur est commune.*

79. ***PROBLÈME X.*** *Quelle est, dans l'espace, la plus courte ligne d'un point donné à une courbe donnée quelconque?*

Solution. Soit encore, comme ci-dessus, (a_0, b_0, c_0) le point donné, et soient $K=0$, $L=0$ les deux équations de la courbe dont il s'agit; nous aurons encore, comme dans le précédent problème, pour les équations générales de la ligne demandée

$$x-a_0=M(z-c_0)\,, \qquad y-b_0=N(z-c_0)\,,$$

et pour l'équation aux limites

$$MX_1+NY_1+Z_1=0\;;$$

en lui ajoutant les produits respectifs des équations

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dK}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dK}{dz}\right)_1Z'_1=0\,,$$

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dL}{dz}\right)_1Z_1=0\,,$$

par des multiplicateurs indéterminés λ et μ, et égalant séparant à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de X_1, Y_1, Z_1, il viendra

$$M+\lambda\left(\frac{dK}{dx}\right)_1+\mu\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,$$

$$N+\lambda\left(\frac{dK}{dy}\right)_1+\mu\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0,$$

$$1+\lambda\left(\frac{dK}{dz}\right)_1+\mu\left(\frac{dL}{dz}\right)_1=0;$$

d'où on conclura, par l'élimination de λ et μ;

$$0=\left\{\begin{array}{l} M\left[\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dz}\right)_1-\left(\frac{dK}{dz}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right] \\ +N\left[\left(\frac{dK}{dz}\right)_1\left(\frac{dL}{dx}\right)_1-\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dz}\right)_1\right] \\ +\ \left[\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1-\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\right] \end{array}\right\}.$$

mais, en différentiant le système des deux équations $K_1=0$; $L_1=0$, on a

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\frac{dx_1}{dz_1}+\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\frac{dy_1}{dz_1}+\left(\frac{dK}{dz}\right)_1=0,$$

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\frac{dx_1}{dz_1}+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\frac{dy_1}{dz_1}+\left(\frac{dK}{dz}\right)_1=0;$$

d'où on conclut

$$\left[\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1-\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right]\frac{dx_1}{dz_1}$$

$$=\left[\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dz}\right)_1-\left(\frac{dK}{dz}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right],$$

$$\left[\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1-\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\right]\frac{dy_1}{dz_1}$$

$$=\left[\left(\frac{dK}{dz}\right)_1\left(\frac{dL}{dx}\right)_1-\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dz}\right)_1\right],$$

au moyen de quoi l'équation ci-dessus, en M et N, deviendra, par substitution et suppression du facteur commun,

$$1+M\frac{dx_1}{dz_1}+N\frac{dy_1}{dz_1}=0,$$

ce qui prouve que *la plus courte ligne d'un point à une courbe est la normale menée de ce point à cette courbe* ; d'où il est facile de conclure que *la plus courte ligne entre deux courbes quelconques est la normale qui leur est commune.*

80. De ce résultat et de celui du précédent problème, on peut conclure également que *la plus courte ligne entre une courbe et une surface courbe quelconque est la normale commune à l'une et à l'autre.*

81. *PROBLÈME XI. Quelle est la plus courte ligne entre deux points sur une surface courbe donnée ?*

Solution. Soit $S=0$ l'équation de la surface courbe dont il s'agit; pour donner deux points sur cette surface, il suffira de donner leurs projections sur le plan des xy ; nous supposerons que ces projections sont (a_0, b_0), (a_1, b_1).

Nous aurons encore ici, comme dans le problème VIII,

$$\left.\begin{aligned}&[x''(x'^2+y'^2+z'^2)-x'(x'x''+y'y''+z'z'')]X\\ +&[y''(x'^2+y'^2+z'^2)-y'(x'x''+y'y''+z'z'')]Y\\ +&[z''(x'^2+y'^2+z'^2)-z'(x'x''+y'y''+z'z'')]Z\end{aligned}\right\}=0;$$

mais les fonctions X, Y, Z devront être liées entre elles par la condition (16)

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)X+\left(\frac{dS}{dy}\right)Y+\left(\frac{dS}{dz}\right)Z=0.$$

Ajoutant le produit de cette équation par λ à la précédente, et égalant à zéro les coefficiens de X, Y, Z, dans l'équation résultante, il viendra, après l'élimination de λ entre les trois équations auxquelles on sera parvenu,

$$\frac{x''(x'^2+y'^2+z'^2)-x'(x'x''+y'y''+z'z'')}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}$$

$$=\frac{y''(x'^2+y'^2+z'^2)-y'(x'x''+y'y''+z'z'')}{\left(\frac{dS}{dy}\right)}$$

$$=\frac{z''(x'^2+y'^2+z'^2)-z'(x'x''+y'y''+z'z'')}{\left(\frac{dS}{dz}\right)}.$$

Telles seront donc alors les deux équations différentielles de la ligne cherchée ; et il est aisé de se convaincre, comme nous l'avons annoncé (72), que, eu égard à l'équation $S=0$, elles n'équivalent qu'à une seule ou, ce qui revient au même, qu'elles comportent cette équation. Si, en effet, on différentie l'équation $S=0$, en y considérant x, y, z comme des fonctions de t, il viendra

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)x'+\left(\frac{dS}{dy}\right)y'+\left(\frac{dS}{dz}\right)z'=0:$$

or, si l'on substitue dans cette dernière équation les valeurs de $\left(\frac{dS}{dx}\right)$, $\left(\frac{dS}{dy}\right)$ tirées des deux premières, et qu'on supprime ensuite le facteur $\left(\frac{dS}{dz}\right)$, commun à tous les termes de l'équation résultante, cette équation sera tout-à-fait identique.

La double équation de la courbe cherchée donne, en réduisant,

$$\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)x'+\left(\frac{dS}{dz}\right)z'\right\}(z'x''-x'z'')-\left(\frac{dS}{dx}\right)y'(y'z''-z'y'')$$

$$=\left(\frac{dS}{dz}\right)y(x'y''-y'x''),$$

$$\left\{\left(\frac{dS}{dz}\right)z'+\left(\frac{dS}{dy}\right)y'\right\}(y'z''-z'y'')-\left(\frac{dS}{dy}\right)x'(z'x''-x'z'')$$

$$=\left(\frac{dS}{dz}\right)x'(x'y''-y'x'')\ ;$$

d'où l'on tire, en éliminant et réduisant de nouveau ;

$$z'x''-x'z''=\frac{y'}{z'}(x'y''-y'x'')\ ,\quad y'z''-z'y''=\frac{x'}{z'}(x'y''-y'x'')\ ;$$

mais il est connu que le plan osculateur de la courbe au point (α, β, γ) a pour équation

$$(y'z''-z'y'')(x-\alpha)+(z'x''-x'z'')(y-\beta)+(x'y''-y'x'')(z-c)=0\ ,$$

en y mettant donc ces valeurs et divisant ensuite par $x'y''-y'x''$, cette équation deviendra simplement

$$x'(x-\alpha)+y'(y-\beta)+z'(z-\gamma)=0\ ;$$

mais si, par ce même point, on mène un plan tangent à la surface sur laquelle cette courbe est tracée, l'équation de ce plan sera, comme l'on sait,

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)(x-\alpha)+\left(\frac{dS}{dy}\right)(y-\beta)+\left(\frac{dS}{dz}\right)(z-\gamma)=0\ ;$$

puis donc qu'on a, comme nous l'avons vu tout à l'heure,

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)x'+\left(\frac{dS}{dy}\right)y'+\left(\frac{dS}{dz}\right)z'=0\ ,$$

il en faut conclure qu'en chaque point de la courbe, son plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent au même point de la surface sur laquelle elle est tracée ; et que par conséquent son rayon de courbure absolu est partout normale à cette surface. C'est, au surplus, ce qu'on peut reconnaître aussi par des considérations mécaniques ; la courbe cherchée ne devant être autre que celle qu'affecterait un fil élastique que l'on tendrait entre les deux points donnés, et sur lequel la surface donnée n'exercerait aucune sorte de frottement.

82. *PROBLÈME XII. Quel est, sur une surface donnée, le plus court chemin d'un point donné à une courbe donnée ?*

Solution. Soit toujours $S=0$ l'équation de la surface donnée, et soit $R=0$ l'équation d'une autre surface qui la coupe suivant la courbe donnée. Soient enfin (a, b) les coordonnées de la projection sur le plan des xy du point donné sur la première des deux surfaces. L'équation générale de la ligne cherchée sera encore la même que ci-dessus, et il ne s'agira conséquemment que d'avoir égard aux conditions relatives aux limites.

Or, l'équation aux limites sera ici (73, 77) simplement

$$\frac{x'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1}}X_1+\frac{y'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1}}Y_1+\frac{z'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1}}Z_1=0;$$

puisque la première limite est absolument fixe. A la seconde, on devra avoir

$$R=0\,; \qquad S=0\,;$$

d'où (76)

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dR}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dR}{dz}\right)_1Z_1=0,$$

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dS}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dS}{dz}\right)_1Z_1=0,$$

Si, à l'équation aux limites, on ajoute les produits de ces deux-ci par λ et μ, et qu'après avoir égalé à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de X_1, Y_1, Z_1, on élimine λ et μ entre les équations résultantes, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} x'_1\left[\left(\frac{dR}{dy}\right)_1\left(\frac{dS}{dz}\right)_1-\left(\frac{dR}{dz}\right)_1\left(\frac{dS}{dy}\right)_1\right] \\ +y'_1\left[\left(\frac{dR}{dz}\right)_1\left(\frac{dS}{dx}\right)_1-\left(\frac{dR}{dx}\right)_1\left(\frac{dS}{dz}\right)_1\right] \\ +z'_1\left[\left(\frac{dR}{dx}\right)_1\left(\frac{dS}{dy}\right)_1-\left(\frac{dR}{dy}\right)_1\left(\frac{dS}{dz'''}\right)_1\right] \end{array}\right\}=0$$

mais, si l'on différentie les deux équations $R=0$, $S=0$, en y considérant x et y comme des fonctions de z, il viendra, en passant à la limite,

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)_1\frac{dx_1}{dz_1}+\left(\frac{dR}{dy}\right)_1\frac{dy_1}{dz_1}+\left(\frac{dR}{dz}\right)_1=0,$$

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)_1\frac{dx_1}{dz_1}+\left(\frac{dS}{dy}\right)_1\frac{dy_1}{dz_1}+\left(\frac{dS}{dz}\right)_1=0;$$

équations d'où l'on tirera

$$\left[\left(\frac{dR}{dy}\right)_1\left(\frac{dS}{dz}\right)_1-\left(\frac{dR}{dz}\right)_1\left(\frac{dS}{dy}\right)_1\right]$$

$$=\left[\left(\frac{dR}{dx}\right)_1\left(\frac{dS}{dy}\right)_1-\left(\frac{dR}{dy}\right)_1\left(\frac{dS}{dx}\right)_1\right]\frac{dx_1}{dz_1},$$

$$\left[\left(\frac{dR}{dz}\right)_1\left(\frac{dS}{dx}\right)_1-\left(\frac{dR}{dx}\right)_1\left(\frac{dR}{dz}\right)_1\right]$$

$$=\left[\left(\frac{dR}{dx}\right)_1\left(\frac{dS}{dy}\right)_1-\left(\frac{dR}{dy}\right)_1\left(\frac{dS}{dx}\right)_1\right]\frac{dy_1}{dz_1};$$

mettant les valeurs données par ces deux dernières dans l'équation ci-dessus, et supprimant le facteur commun dans l'équation résultante, il viendra, en divisant par z'_1,

$$1+\frac{x'_1}{z'_1}\frac{dx_1}{dz_1}+\frac{y'_1}{z'_1}\frac{dy_1}{dz_1}=0;$$

ce qui montre que *la plus courte ligne tracée sur une surface courbe, d'un point donné à une courbe donnée, doit couper cette courbe orthogonalement.* Il est facile d'en conclure que *la plus courte ligne tracée sur une surface courbe entre deux courbes données doit couper l'une et l'autre courbes orthogonalement*; la courbe doit d'ailleurs, dans l'un et l'autre cas, avoir ses rayons de courbure constamment normaux à la surface sur laquelle elle est tracée (*).

83. Pour compléter la tâche que nous nous sommes imposée, nous aurions encore à traiter des intégrales de la forme $\int\int U\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où z est fonction de x et y, et que, pour suivre l'analogie, il faudrait d'abord ramener à la forme $\int\int V\mathrm{d}t\mathrm{d}u$, dans laquelle x, y et z seraient tous trois fonctions de t et u; mais la longueur et la complication des calculs reculeraient, d'une manière notable, les bornes de ce mémoire, déjà excessivement long, et que même nous n'aurions pas entrepris, à travers une multitude de distractions sans cesse renaissantes, ou que du moins nous aurions remis à une époque plus favorable, si, dès l'abord, nous avions pu en prévoir l'étendue.

84. Que si présentement on nous demande quels avantages peuvent avoir nos notations et nos méthodes sur l'algorithme et les

(*) On ne doit pas perdre de vue, au surplus, qu'il n'y a proprement *minimum* que lorsque la courbe cherchée se termine à des parties convexes des courbes données.

procédés

procédés ordinaires du calcul des variations, et quelles vérités nouvelles nous avons ajoutées à celles qui étaient déjà découvertes, nous répondrons que tel n'a pas été notre but; que nous conseillerons même de préférer, dans la pratique, comme nous employons nous-mêmes pour notre propre usage, la méthode des variations proprement dite. Tout ce que nous nous sommes uniquement proposé, c'est de ramener la solution des problèmes qui ont donné naissance à cette méthode, à une forme qui n'exigeât que l'application des notions les plus communes, des théories les plus vulgaires; c'est en un mot de faire ensorte qu'en lisant ceci chacun demeure convaincu que les questions de *maxima* et de *minima*, dans les formules intégrales indéterminées, n'exigent pas, pour être résolues, plus de contention d'esprit que n'en demandent tant d'autres questions qui, jusqu'ici, n'ont pas passé pour difficiles; et nous n'aurons aucun regret de nos soins, si l'on trouve que nous ne sommes pas demeurés trop loin du but.

85. Nous devons, en terminant, réclamer l'indulgence du lecteur pour les négligences, nombreuses sans doute, et même pour les erreurs qui auront pu se glisser dans cet écrit. S'il en faut croire ce qu'on trouve dans un *Opuscule* de M. le D.r Prompt, imprimé en 1820, le travail de l'illustre Lagrange sur la même matière ne serait pas lui-même exempt de reproches. Les notations embarrassantes de ce grand géomètre d'une part, et de l'autre le laconisme de M. Prompt, ne nous ont pas encore permis de vérifier jusqu'à quel point ces reproches peuvent être fondés; mais c'est là un sujet sur lequel nous nous proposons de revenir dans une autre circonstance (*).

(*) Le lecteur est prié d'observer qu'à la page 6, ligne 7, en remontant, tous les dt doivent être changés en dx.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Éclaircissemens sur le développement de Cos.^{m}x, *en fonction des sinus et cosinus d'arcs multiples;*

Par M. Pagani Michel, ingénieur à Genève.

M. Poisson a fait connaître le premier que le développement de Cos.$^m x$, en fonction des sinus et des cosinus d'arcs multiples, composé de deux parties, l'une réelle et l'autre imaginaire, qui s'anéantit lorsque m est un nombre entier positif, doit, pour être exact, conserver ces deux parties, lorsque m est un nombre fractionnaire ou négatif; et que, par conséquent, le développement donné par Euler est en défaut pour ce cas. Si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$X=\text{Cos}.mx+\frac{m}{1}\text{Cos}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos}.(m-4)x+\ldots$$

$$X'=\text{Sin}.mx+\frac{m}{1}\text{Sin}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin}.(m-4)x+\ldots$$

on a l'équation

$$2^m.\text{Cos}.^m x=X\pm X'\sqrt{-1}\ .$$

Si $m=\frac{p}{q}$, les deux termes du second membre de cette équation subsistent, et l'on a pour $\sqrt[q]{2^p.\text{Cos}.^p x}$ deux valeurs imaginaires. D'après M. Poisson, ces deux valeurs sont deux racines distinctes;

et il a montré comment on pourrait les tirer toutes d'une même formule, en mettant à la place de x les arcs x, $x+2\varpi$, $x+4\varpi$, $x+6\varpi$, ... $x+2(q-1)\varpi$, dont le nombre est q, et qui, ayant tous le même cosinus que x, donnent la même valeur pour $\operatorname{Cos.}^p x$.

Cependant M. Lacroix, dans les additions à son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* (tom. III, pag. 605), observe que la théorie de M. Poisson, *quoique très-satisfaisante*, *laisse encore à désirer quelques éclaircissemens*, à quoi il ajoute plus loin : *une plus ample connaissance du sujet ne serait pas inutile ; car il présente encore d'autres difficultés, lorsqu'on y introduit la considération des équations différentielles.* Cela paraît d'autant plus nécessaire que, d'après un procédé de M. Deflers (voyez même volume, pag. 616), il semblerait que la quantité Y n'est que le développement d'une fonction toujours nulle, quel que soit m et quelque valeur que l'on donne à x.

Avant de développer mes observations sur ce sujet, je crois nécessaire de distinguer d'abord, dans toute fonction irrationnelle, la *quantité* et la *valeur*. Par *quantité* d'un radical, j'entends le nombre qui, multiplié par une expression de la racine du même degré de l'unité, positive ou négative, et élevé ensuite à la puissance du degré marqué par l'exposant de ce même radical, produit la fonction qui en est affectée. La quantité est donc toujours équivalente à un nombre réel et positif, et elle est unique, quel que soit son exposant. J'appelle *valeur* d'un radical, l'expression, soit réelle, soit imaginaire, qu'on obtient en multipliant la quantité du même radical par une quelconque des racines de l'unité, positive ou négative, et telle qu'en l'élevant à la puissance indiquée par le radical, on ait la fonction placée sous le signe. D'où l'on voit qu'un radical doit avoir autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant.

Cela posé, lorsqu'on veut obtenir, par les séries, la quantité d'un radical $\sqrt[n]{X}$, il est évident qu'il faut développer la fonction $(\pm X)^{\frac{1}{n}}$, d'après la formule du binome de Newton, en prenant le signe convenable pour avoir une série convergente ; et la limite de la série donne la quantité de $\sqrt[n]{X}$. Nommons Q cette limite, et nous aurons visiblement $\sqrt[n]{X}=Q\sqrt[n]{\pm 1}$; mais on voit que chaque valeur de $\sqrt[n]{\pm 1}$ est, en général, de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; d'où il suit que les n valeurs du radical $\sqrt[n]{X}$, seront toutes comprises dans la formule $Q(\alpha+\beta\sqrt{-1})$; pourvu que l'on donne à α et à β successivement toutes les valeurs dont ces lettres sont susceptibles, d'après le degré du radical.

Nous avons tacitement supposé que la fonction X avait une forme réelle; mais, si cette fonction avait une forme imaginaire, le développement par la formule du binome aurait lui-même une forme imaginaire, et l'on n'aurait plus la quantité, mais bien une valeur de $\sqrt[n]{X}$. Dans ce cas, toutefois, il ne serait pas difficile d'en obtenir la quantité, et par suite toutes les valeurs. En effet, soit $A+B\sqrt{-1}$ le développement de $\sqrt[n]{X}$. Nous avons vu plus haut que toutes les valeurs de $\sqrt[n]{X}$ sont comprises dans la formule $Q(\alpha+\beta\sqrt{-1})$, Q étant la quantité du radical, et $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ une des racines du degré n de $+1$ ou -1 ; il faut donc que, parmi ces racines, il s'en trouve une pour laquelle on ait

$$A+B\sqrt{-1}=Q(\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$

Cette équation nous donne

$$Q=\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}\,,\quad \text{d'où}\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{B}.$$

La dernière est une équation de condition qui doit avoir lieu toutes les fois que l'expression $A+B\sqrt{-1}$ est valeur d'une racine d'une fonction réelle, et fera connaître, dans ce cas, les nombres α et β ; après quoi on aura la quantité Q exprimée par $\frac{A}{\alpha}$ ou par $\frac{B}{\beta}$; Toutes les valeurs de $\sqrt[n]{X}$ seront donc données par l'une des deux formules

$$\frac{A}{\alpha}(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})\,, \qquad \frac{B}{\beta}(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})\,,$$

dans lesquelles il faudra mettre à la place de α et β les nombres qui satisfont à la condition $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{B}$, sans cesser cependant d'être compris parmi ceux qui expriment la racine n^{me} de $+1$ ou -1, et où il faudra de plus mettre successivement pour α' et β' toutes les valeurs qui répondent à cette même racine n^{me}.

Le développement de $2^m.\text{Cos.}^m x$ étant, comme nous l'avons dit, $X\pm X'\sqrt{-1}$; nous aurons ici $A=X$, $B=\pm X'$; et par conséquent la quantité de $2^m.\text{Cos.}^m x$ sera représentée par $\frac{X}{\alpha}$ ou par $\pm\frac{X}{\beta}$; d'où il suit que toutes les valeurs de $2^m.\text{Cos.}^m x$ seront comprises dans les formules

$$\frac{X}{\alpha}(\alpha'+\beta')\sqrt{-1}\,, \qquad \pm\frac{X'}{\beta}(\alpha'+\beta'\sqrt{-1}), \qquad (\nu)$$

Il ne nous sera pas difficile maintenant de rendre raison de toutes les singularités apparentes que présente le développement de la fonction $\text{Cos.}^m x$. Et d'abord on voit, par les formules (ν), que cette fonction est de la forme AX ou $A'X'$, A et A' étant deux constantes; et voilà pourquoi l'équation différentielle

$$ny\,\text{Sin.}x+\frac{dy}{dx}\text{Cos.}x=0$$

est satisfaite par la supposition de $y=A'X'$ aussi bien que par celle de $y=AX$.

En second lieu, l'équatiou $\frac{X}{\pm X'}=\frac{\alpha}{\beta}$ nous apprend qu'on a $\beta=0$ lorsque $X'=0$, et *vice versâ*. On voit donc pourquoi A', qui est égal à $\pm\frac{\alpha'+\beta'\sqrt{-1}}{\beta}$ devient infini toutes les fois qu'on a $X'=0$; et pourquoi aussi on a $X'=0$ pour tous les exposans de $2\text{Cos}.x$ qui ne sont point fractionnaires; puisqu'alors toutes les valeurs de β doivent être nulles.

Pour faire une application des formules (ν), je choisirai l'exemple même que M. Poisson a traité. On a, pour ce cas, $x=\pi$, $m=\frac{1}{3}$, et l'on obtient $X=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, $\pm X'=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}$; et, comme $2\text{Cos}.\pi=2X-1$, il faudra prendre, parmi toutes les valeurs de $\sqrt[3]{-1}$, celles qui satisfont à l'équation

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}};$$

il est aisé de conclure de là qu'il faut prendre

$$\alpha=\tfrac{1}{2}, \qquad \beta=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

donc la quantité de $\sqrt[3]{2\text{Cos}.\pi}$ est $\sqrt[3]{2}$, puisque $\frac{X}{\alpha}=\frac{\pm X'}{\beta}=\sqrt[3]{2}$; et toutes ses valeurs seront comprises dans la formule

$$(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})\sqrt[3]{2},$$

pourvu qu'on donne à α' et β' les valeurs qui conviennent à la racine cubique de -1. Nous aurons donc pour $\sqrt[3]{2\text{Cos}.\pi}$ l'une des trois expressions suivantes :

$$-\sqrt[3]{2}, \qquad \frac{1+\sqrt{3}\,\sqrt{-1}}{2}, \qquad \frac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2},$$

comme cela doit être.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à faire quelques remarques sur les observations de M. Deflers, d'après lesquelles il paraîtrait que la fonction X' est toujours nulle, quel que soit l'exposant de $2\mathrm{Cos}.x$. Son procédé se réduit au fond à démontrer que l'équation

$$o=n+\frac{n}{1}(n-2)+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-6)+\ldots.$$

est identique. Mais, si l'on fait attention que les deux premiers termes du second membre se réduisent à $n.\frac{n-1}{1}$, que les trois premiers donnent, pour leur somme $n.\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}$, et ainsi de suite; on se convaincra aisément que le second membre n'est autre chose que le produit des facteurs, en nombre infini,

$$n.\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdot\frac{n-4}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

or, ce produit ne peut être nul que pour des valeurs entières et positives de n; d'où il paraît résulter que la démonstration de M. Deflers, bien que fort ingénieuse, n'est pourtant point exacte.

Pour découvrir en quoi cette démonstration est fautive, observons qu'en posant l'équation

$$T=nt^n+\frac{n}{1}(n-2)t^{n-2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)t^{n-4}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-6)t^{n-6}+\ldots$$

M. Deflers remarque que le second membre pouvant être égal à

$$t.\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}t}\left\{t^n+\frac{n}{1}t^{n-2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}t^{n-4}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}t^{n-6}+\ldots\ldots\right\},$$

et que la série entre les parenthèses étant le développement de $(t+t^{-1})^n$, on peut écrire

$$T=t\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}t}(t+t^{-1})^n.$$

En exécutant donc la différentiation dans le second membre de cette équation, on aura

$$T=n(t+t^{-1})^{n-1}(t-t^{-1}).$$

On voit donc que M. Deflers suppose que le coefficient différentiel du développement d'une fonction est égal au développement du coefficient différentiel de cette fonction. On verra tout-à-l'heure si cette supposition est toujours permise. En l'admettant, on voit que la dernière valeur de T se réduit à zéro lorsqu'on fait $t=1$; mais on a aussi, dans ce cas,

$$T=n+\frac{n}{1}(n-2)+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-6)+\ldots.$$

comme il résulte de la première valeur de T; donc le second membre de cette dernière équation est nul. Telle est la conséquence qu'en a tirée M. Deflers.

Mais nous observerons que la fonction $n(t+t^{-1})^{n-1}(t-t^{-1})$ n'est pas égale à la première valeur de T; car, en développant le binome $(t+t^{-1})^{n-1}$ et en effectuant la multiplication par $t-t^{-1}$, on trouve, en s'arrêtant au quatrième terme

$$n(t+t^{-1})^{n-1}(t-t^{-1})=nt^n+\left.\begin{array}{l}n\frac{n-1}{1}\\ -n\end{array}\right|t^{n-2}+\left.\begin{array}{l}n.\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\\ -n.\frac{n-1}{1}\end{array}\right|t^{n-4}+\left.\begin{array}{l}n.\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\\ -n.\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\end{array}\right|t^{n-6}-n.\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}t^{n-8}$$

d'où l'on voit que, quelque loin qu'on pousse le développement, il restera toujours un terme dans la seconde ligne qui ne sera détruit par aucun de ceux de la première. Il est donc certain que, toutes réductions faites, on aura

$T=n$

$$T=n(t+t^{-1})^{n-1}(t-t^{-1})+n.\frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}.......\frac{n-\infty}{\infty}t^{n-\infty};$$

et, si l'on fait $t=1$, on trouvera pour T, mais d'une manière beaucoup plus simple, la valeur que nous avions déjà obtenue ci-dessus.

Genève, le 23 juin 1822.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème d'analise élémentaire proposé à la page 316 du XII.e volume des Annales;

Par MM. A. L. Boyer, élève au collége royal de Montpellier,
Querret, chef d'institution à St-Malo,
Et Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

PROBLÈME. *Il a fallu* n *vis d'Archimède pour évacuer, dans le temps* t, *l'eau d'un bassin, dont la surface était* a, *dans lequel la pluie tombait, et qui était en outre alimenté par une source.*

Il a fallu n′ *vis d'Archimède pour évacuer, dans le temps* t′, *l'eau d'un second bassin, dont la surface était* a′, *dans lequel la pluie tombait, et qui était en outre alimenté par une source.*

Il a fallu n″ *vis d'Archimède pour évacuer, dans le temps* t″, *l'eau d'un troisième bassin, dont la surface était a'', dans lequel la pluie tombait, et qui était en outre alimenté par une source.*

On demande, d'après cela, quel sera le nombre N *de vis d'Archimède nécessaires pour évacuer, dans le temps* T, *l'eau d'un quatrième bassin, dont la surface est* A, *dans lequel la pluie tombe, et qui est en outre alimenté par une source ?*

On suppose d'ailleurs que l'eau est à la même hauteur inconnue dans les quatre bassins au moment où l'opération commence, que la pluie y tombe avec une égale intensité, que les sources y amènent des quantités égales d'eau dans des temps égaux, et qu'enfin les vis d'Archimède ont toutes une même capacité d'évacuation.

Solution. Soit x la hauteur commune de l'eau dans les quatre bassins, lorsque les vis commencent à jouer.

Soit y la quantité dont la pluie qui tombe pourrait à elle seule, dans l'unité de temps, augmenter la hauteur de l'eau d'un bassin qui ne recevrait d'eau de nulle autre part, et qui n'en perdrait pas non plus.

Soit z le volume d'eau que fournit chacune des sources dans chaque unité de temps.

Soit enfin v le volume d'eau que peut évacuer une des vis dans une unité de temps.

La surface du quatrième bassin étant A, il se trouvera contenir, au commencement de l'opération, un volume d'eau exprimé par Ax.

A chaque unité de temps, il tombera dans ce même bassin un volume d'eau de pluie exprimé par Ay, ce qui fera, pour toute la durée de l'opération, un volume ATy.

Enfin, pendant cette même opération, il arrivera de la source dans le bassin un volume d'eau exprimé par Tz.

De sorte que le volume de l'eau à évacuer de ce quatrième bassin sera $Ax+ATy+Tz$.

Or, pendant la durée de l'opération, chaque vis d'Archimède évacuant un volume d'eau exprimé par Tv, le volume total de l'eau évacuée de ce bassin sera NTv.

Puis donc qu'à la fin de l'opération le bassin doit se trouver vide, on doit avoir

$$Ax+ATy+Tz=NTv\ ; \qquad (1)$$

et, comme les circonstances sont exactement les mêmes pour chacun des trois autres bassins, on aura en outre

$$\left.\begin{array}{l} a\ x+a\ t\ y+t\ z=n\ t\ v\ , \\ a'x+a't'y+t'z=n't'v\ , \\ a''x+a''t''y+t''z=n''t''v\ ; \end{array}\right\}\ (2)$$

tout se réduit donc à tirer de ces quatre équations la valeur de N, en fonction des données du problème.

Soient pris successivement la somme des produits des équations (2)

1.° Par $t't''(a'-a'')$, $t''t(a''-a)$, $tt'(a-a')$;

2° Par $t'a''-t''a$, $t''a-ta''$, $ta'-t'a$;

3.° Par $a'a''(t''-t')$, $a''a(t-t'')$, $aa'(t'-t)$;

en posant, pour abréger,

$$P=tt't''[n(a'-a'')+n'(a''-a)+n''(a-a')]\ ,$$

$$Q=nt(t'a''-t''a')+n't'(t''a-ta'')+n''t''(ta'-t'a)\ ,$$

$$R=nta'a''(t''-t')+n't'a''a(t-t'')+n''t''aa'(t'-t)\ ,$$

$$S=t't''a(a'-a'')+t''ta'(a''-a)+tt'a''(a-a')\ ,$$

il viendra

$$Sx=Pv\,,$$

$$Sy=Qv\,,$$

$$Sz=Rv\,;$$

prenant enfin la somme des produits respectifs de ces dernières par A, AT et T, et ayant égard à l'équation (1), il viendra, en divisant par STv,

$$N=\frac{AP+ATQ+TR}{ST}\,;$$

formule qui résout le problème (*).

M. Durrande observe que, comme la véritable inconnue du problème est un nombre abstrait, on peut, sans inconvénient, prendre une des quatre inconnues x, y, z, v pour unité, ce qui simplifie un peu les formules.

(*) Ce problème est, comme l'on voit, très-aisé à résoudre; il l'est pourtant moins que le Problème XI de l'*Arithmétique universelle*, dont il n'est qu'une extension; aussi n'avons-nous jamais bien compris pourquoi ce dernier passait pour difficile. C'est pourtant à tel point que, dans une Notice sur feu Mauduit, du collége de France, insérée dans le temps au Moniteur, le panégyriste crut devoir indiquer, comme un des titres de gloire de ce professeur, qu'il avait résolu le problème des bœufs d'une autre manière que Newton.

J. D. G.

Solution du problème d'analise transcendante proposé à la page 321 du XII.e volume des Annales ;

Par MM. Pagani Michel, ingénieur à Genève,
M....s, à Berlin,
C. G., à Grenoble,
Stein, professeur au collége de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique,
Et Querret, chef d'institution à St-Malo.

Problème. *On demande la somme finie de la suite infinie*

$$1+\frac{a\text{Cos.}x}{1}+\frac{a^2\text{Cos.}2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos.}3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos.}4x}{1.2.3.4}+\ldots\ldots ?$$

Solution. La plupart des solutions qu'on a données de ce problème reviennent pour le fond à ce qu'il suit.

Si, dans le terme général,

$$\frac{a^n\text{Cos.}nx}{1.2.3\ldots n},$$

on met pour Cos.nx sa valeur connue

$$\text{Cos.}nx=\frac{(\text{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x)^n+(\text{Cos.}x-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x)^n}{2},$$

en faisant, pour abréger,

$$a(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x)=p\ , \qquad a(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x)=q\ ;$$

ce terme général deviendra

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^n+q^n}{1.2.3\ldots\ldots n}\ ;$$

donc la suite proposée est la somme de deux autres dont les termes généraux sont respectivement

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^n}{1.2.3\ldots\ldots n}\ , \qquad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q^n}{1.2.3\ldots\ldots n}\ ;$$

or, ces suites sont connues et sont les développemens respectifs de

$$\tfrac{1}{2}e^p\ , \qquad \tfrac{1}{2}e^q\ ;$$

donc, en désignant par S la somme de la suite proposée, on aura

$$2S=e^p+e^q\ ,$$

ou, en remettant pour p et q les fonctions dont ils sont les symboles,

$$2S=e^{a\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.x}+e^{a\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.x}\ ;$$

ou bien encore

$$2S=e^{a\mathrm{Cos}.x}.\left(e^{+\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.x}+e^{-\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.x}\right)\ ;$$

mais on sait que

$$e^{+\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.x}+e^{-\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.x}=2\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.x)\ ;$$

donc enfin

$$S=e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)\ .$$

M. Querret déduit ce résultat d'un théorème très-général. Si l'on sait, dit-il, sommer la suite

$$A_0+A_1a+A_2a^2+A_3a^3+A_4a^4+\ldots\ldots \qquad (1)$$

dans laquelle A_0, A_1, A_2, ... sont supposés des coefficiens numériques, et qu'on en représente la somme par $\mathrm{f}(a)$, on aura

$$\frac{\mathrm{f}[a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]+\mathrm{f}[a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]}{2}$$

pour la somme de la série

$$A_0+A_1a\text{Cos}.x+A_2a^2\text{Cos}.2x+A_3a^3\text{Cos}.3x+\ldots\ldots \qquad (2)$$

et

$$\frac{\mathrm{f}[a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]-\mathrm{f}[a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]}{2\sqrt{-1}}$$

pour la somme de la série

$$A_1a\text{Sin}.x+A_2a^2\text{Sin}.2x+A_3a^3\text{Sin}.3x+\ldots\ldots \qquad (3)$$

En effet, suivant la signification donnée à la caractéristique f, en changeant successivement a en

$$a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x) \qquad \text{et} \qquad a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\text{Sin}.x)\ ,$$

on a

$$\mathrm{f}[a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]$$

pour la somme de la série

$$A_0+A_1a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)+A_2a^2(\text{Cos}.2x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.2x)+\ldots \quad (4)$$

et

$$\text{f}[a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]$$

pour la somme de la série

$$A_0+A_1a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)+A_2a^2(\text{Cos}.2x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.2x)+\ldots \quad (5)$$

or, la série (2) est la somme des séries (4, 5) divisée par 2 ; et la série (3) est la différence de ces mêmes séries, divisée par $2\sqrt{-1}$, donc la somme de la série (2) doit être la somme des séries (4, 5) divisée par 2 ; et la série (3) doit être la difference de ces mêmes séries, divisée par $2\sqrt{-1}$.

L'application à la série proposée est facile ; on a, comme l'on sait,

$$e^a=1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots ;$$

donc $e^a=\text{f}(a)$; donc la somme de la série

$$1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.4x}{1.2.3.4}+\ldots$$

sera, d'après ce qui précède,

$$S=\frac{e^{a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)}+e^{a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)}}{2},$$

ou

$$S=\frac{e^{a\text{Cos}.x}\left(e^{+\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}+e^{-\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}\right)}{2} ;$$

c'est-à-dire

$S=$

$$S=e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)\ ;$$

comme ci-dessus ; résultat qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$\frac{e^{ae^{+x\sqrt{-1}}}+e^{ae^{-x\sqrt{-1}}}}{2}.$$

M. C. G. observe qu'au surplus le résultat

$$e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)=1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3}+\ldots.$$

peut se vérifier immédiatement par le développement. On sait, en effet, que

$$e^{a\text{Cos}.x}=1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.^2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.^3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.^4x}{1.2.3.4}+\ldots\ ;$$

$$\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)=1-\frac{a^2\text{Sin}.^2x}{1.2}+\frac{a^4\text{Sin}.^4x}{1.2.3.4}-\frac{a^6\text{Sin}.^6x}{1.2.3\ldots6}+\frac{a^8\text{Sin}.^8x}{1.2.3\ldots.8}-\ldots\ ;$$

multipliant ces équations membre à membre, ordonnant le second membre du produit par rapport à a, et faisant attention qu'en général

$$\text{Cos}.nx=\text{Cos}.^nx-\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\text{Sin}.^2x\text{Cos}.^{n-2}x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}\text{Sin}.^4x\text{Cos}.^{n-4}x-\ldots$$

il viendra

$$e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)=1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.4x}{1.2.3.4}+\ldots\ (*)$$

M. Stein observe que, par le même procédé, on se convaincra facilement que

$$e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Sin}\,(a\mathrm{Sin}.x)=\frac{a\mathrm{Sin}.x}{1}+\frac{a^2\mathrm{Sin}.2x}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Sin}.3x}{1.2.3}+\ldots; \qquad (\beta)$$

nous observerons, à notre tour, qu'en changeant x en $\frac{1}{2}\varpi-x$, on déduit de ces formules

$$e^{a\mathrm{Sin}.x}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Cos}.x)=1+\frac{a\mathrm{Sin}.x}{1}-\frac{a^2\mathrm{Cos}.2x}{1.2}-\frac{a^3\mathrm{Sin}.3x}{1.2.3}+\ldots. \qquad (\gamma)$$

$$e^{a\mathrm{Sin}.x}\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Cos}.x)=\frac{a\mathrm{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\mathrm{Sin}.2x}{1.2}-\frac{a^3\mathrm{Cos}.3x}{1.2.3}-\frac{a^4\mathrm{Sin}.4x}{1.2.3.4}+\ldots \qquad (\delta)$$

M. Querret déduit bien facilement le premier de ces trois derniers développemens de sa formule générale. En continuant, en effet, de faire $f(a)=c^a$, la série (3) deviendra

$$\frac{a\mathrm{Sin}.x}{1}+\frac{a^2\mathrm{Sin}\,2x}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Sin}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\mathrm{Sin}.4x}{1.2.3.4}+\ldots..$$

dont la somme sera conséquemment

$$\frac{e^{a(\mathrm{Cos}\,x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)}-e^{a(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)}}{2\sqrt{-1}},$$

ou bien

$$\frac{e^{a\mathrm{Cos}.x}.(e^{+\sqrt{-1}a\mathrm{Sin}.x}-e^{-\sqrt{-1}a\mathrm{Sin}.x})}{2\sqrt{-1}},$$

ou enfin

$$e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}.x).$$

M. C. G. observe que la formule

$$e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)=1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.4x}{1.2.3.4}+\ldots.$$

a cela de très-remarquable qu'elle renferme, comme cas particuliers, les développemens, tant des exponentiels que des fonctions circulaires. Si, en effet, on y fait successivement $x=0$ et $x=\frac{1}{2}\varpi$, on trouve

$$e^a=1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}+\ldots.,$$

$$\text{Cos}.a=1-\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^4}{1.2.3.4}-\frac{a^6}{1.2.3.\ldots.6}+\ldots.;$$

la formule

$$e^{a\text{Cos}.x}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.x)=\frac{a\text{Sin}.x}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin}.4x}{1.2.3.4}+\ldots.$$

donnera pareillement, en faisant $x=\frac{1}{2}\varpi$;

$$\text{Sin}.a=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^5}{1.2.3.4.5}-\frac{a^7}{1.2.3.\ldots.7}+\ldots.$$

M. Stein remarque, à son tour, que, connaissant la série proposée, on en peut déduire les sommes d'autres séries également remarquables. En y changeant, par exemple, x en $2x$, il vient

$$e^{a\text{Cos}.2x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.2x)=1+\frac{a\text{Cos}.2x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.4x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.6x}{1.2.3}+\ldots.;$$

or, le terme général $\frac{a^n.\text{Cos}.2nx}{1.2.3.\ldots\ldots n}$ de cette nouvelle série peut également être mis sous les deux formes

$$\frac{a^n}{1.2.3.....n}-\frac{2a^n\text{Sin.}^2nx}{1.2.3......n}\,,\qquad \frac{2a^n\text{Cos.}^2nx}{1.2.3\,......\,n}-\frac{a^n}{1.2.3....n}\,;$$

il viendra donc, en faisant successivement les deux substitutions,

$$e^{a\text{Cos.}2x}.\text{Cos}\,(a\text{Sin.}2x)=\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^3}{1.2.3}+....\right)$$

$$-2\left(\frac{a\text{Sin.}^2x}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}^22x}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}^23x}{1.2.3}+....\right)$$

$$e^{a\text{Cos.}2x}.\text{Cos.}(a\text{Sin.}2x)=2\left(\frac{a\text{Cos.}^2x}{1}+\frac{a^2\text{Cos.}^22x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos.}^23x}{1.2.3}+....\right)$$

$$+2-\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^3}{1.2.3}+....\right);$$

d'où on tirera, en transposant et remplaçant l'une des séries par sa valeur e^a,

$$\frac{a\text{Sin.}^2x}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}^22x}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}^23x}{1.2.3}+......=\frac{e^a-e^{a\text{Cos.}2x}.\text{Cos.}(a\text{Sin.}2x)}{2}\,,$$

$$1+\frac{a\text{Cos.}^2x}{1}+\frac{a^2\text{Cos.}^22x}{1.2.}+\frac{a^3\text{Cos.}^23x}{1.2.3}+....=\frac{e^a+e^{a\text{Cos.}3x}.\text{Cos.}(a\text{Sin.}2x)}{2}\,,$$

M. Stein remarque encore que, par des moyens semblables à ceux qui ont été appliqués à la série proposée, on parviendrait aussi à sommer la série

$$\frac{a\text{Sin.}x}{1}+\frac{a^2\text{Sin}\,2x}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3x}{3}+\frac{a^4\text{Sin.}4x}{4}+.....\,,$$

dont le terme général est $\frac{a^n\text{Sin}.nx}{n}$. Le résultat serait compliqué d'imaginaires qu'on ne pourrait faire disparaître que par des moyens peu directs ; et on trouverait finalement pour la somme cherchée

$$\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin}.x}{1-a\text{Cos}.x}\right);$$

aussi la série proposée n'est-elle autre chose que la valeur que l'on tire pour y de l'équation

$$\text{Tang}.y=\frac{a\text{Sin}.x}{1-a\text{Cos}.x},$$

très-usitée en géodesie.

M. Querret tire de sa méthode générale plusieurs autres sommations. Posant, par exemple, $f(a)=\text{Log}.(1+a)$ ou

$$f(a)=\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}-\ldots$$

il en conclut que la somme de la série

$$\frac{a\text{Cos}.x}{1}-\frac{a^2\text{Cos}.2x}{2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{3}-\frac{a^4\text{Cos}.4x}{4}+\ldots$$

doit être

$$\frac{\text{Log}.[1+a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]+\text{Log}.[1+a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]}{2},$$

ou encore

$$\frac{\text{Log}.(1+2a\text{Cos}.x+a^2)}{2};$$

de sorte qu'on a

$$\text{Log.}(1+2a\text{Cos.}x+a^2)=2\left(\frac{a\text{Cos.}x}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}2x}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}3x}{3}-\ldots\right).$$

En faisant successivement $a=+1$ et $a=-1$, il vient

$$\text{Log.}(1+\text{Cos.}x)=-\text{Log.}2+2\left(\frac{\text{Cos.}x}{1}-\frac{\text{Cos.}2x}{2}+\frac{\text{Cos.}3x}{3}-\frac{\text{Cos.}4x}{4}+\ldots\right),$$

$$\text{Log.}(1-\text{Cos.}x)=-\text{Log.}2-2\left(\frac{\text{Cos.}x}{1}+\frac{\text{Cos.}2x}{2}+\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{\text{Cos.}4x}{4}+\ldots\right);$$

développemens donnés par Euler (Voyez son *Calcul intégral*, tom. I, à la fin du chap. VI); il en déduit ensuite

$$\text{Log.Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\text{Log.}2+\text{Cos.}x-\tfrac{1}{2}\text{Cos.}2x+\tfrac{1}{3}\text{Cos.}3x-\tfrac{1}{4}\text{Cos.}4x+\ldots$$

$$\text{Log.Sin.}\tfrac{1}{2}x=-\text{Log.}2-\text{Cos.}x-\tfrac{1}{2}\text{Cos.}2x-\tfrac{1}{3}\text{Cos.}3x-\tfrac{1}{4}\text{Cos}\,4x-\ldots$$

$$\text{Log.Tang.}\tfrac{1}{2}x=-2(\text{Cos.}x+\tfrac{1}{3}\text{Cos.}3x+\tfrac{1}{5}\text{Cos.}5x+\tfrac{1}{7}\text{Cos.}7x+\ldots\ldots).$$

Solution du problème de géométrie proposé à la pag. 321 *du XII.e volume des* Annales ;

Par M. PAGANI MICHEL, ingénieur à Genève.

PROBLÈME. *On demande l'équation d'une courbe telle que, si de l'origine on mène un rayon vecteur quelconque et une perpendiculaire à la tangente à son extrémité*, 1.° *le cube construit sur le rayon vecteur soit double en volume du cube construit sur la perpendiculaire à la tangente* ; 2.° *que l'angle formé par la perpendiculaire avec l'axe des* x *soit le tiers de l'angle formé par le rayon vecteur avec la même droite* ?

Solution. Ce problème est évidemment un problème plus que déterminé ; non pas de ceux qui renferment seulement quelques conditions superflues ; mais bien de ceux dans lesquels les conditions sont incompatibles.

Soient, en effet, O l'origine, OX la direction de l'axe des x, M un quelconque des points de la courbe cherchée, et N le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en ce point. Puisque le rapport du cube de OM à celui de ON est donné, le rapport de ces deux droites est aussi donné; le triangle rectangle MNO est donc donné d'espèce ; l'angle MON de ce triangle est donc donné ; mais cet angle doit être les deux tiers de XOM et le double de XON ; donc ces derniers sont aussi donnés ; donc les directions OM et ON sont tout à-fait fixes et déterminées ; donc tous les points de la courbe cherchée devraient être sur la droite OM ; cette courbe devrait donc se confondre avec cette droite, ce qui est impossible, puisqu'alors ses tangentes ne pourraient être perpendiculaires à la direction ON.

On ne peut donc résoudre le problème qu'en faisant tour-à-tour abstraction de chacune des deux conditions ; et c'est aussi ce que nous allons faire successivement ; nous montrerons ensuite que les deux courbes obtenues sont essentiellement différentes.

I. Nous venons de voir qu'en exigeant seulement que le cube construit sur OM soit le double du cube construit sur ON, l'angle MON est tout-à-fait déterminé ; l'angle OMN l'est donc aussi ; la question revient donc alors simplement à trouver une courbe dans laquelle les rayons vecteurs fassent un angle constant avec la tangente à leur extrémité.

Soit a la tangente tabulaire de cet angle, et soit fait, suivant l'usage, $\frac{dy}{dx}=p$, l'angle que fait OM avec l'axe des x étant $\frac{y}{x}$, nous devrons avoir

$$\frac{p-\frac{y}{x}}{1+p\frac{y}{x}}=a \quad \text{ou} \quad (ay-x)p+(ax+y)=0$$

équation dont l'intégrale est

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{1}{a}\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right)}.$$

C'est l'équation d'une spirale logarithmique, comme l'on pouvait bien s'y attendre (*).

Dans le cas particulier qui nous occupe, on a

(*) Voyez la page 136 du VIII.e volume du présent recueil.

$$a=Tang.\mathrm{OMN}=\frac{\mathrm{OM}}{\sqrt{\overline{\mathrm{OM}}^2-\overline{\mathrm{ON}}^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}}\right)^2}}\;;$$

mais

$$\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}}=\sqrt[3]{\frac{\overline{\mathrm{ON}}^3}{\overline{\mathrm{OM}}^3}}=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\;;$$

donc

$$a=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}}\;;$$

de sorte que l'équation de la courbe sera

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\,\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Tang.}=\frac{y}{x}\right)}{\sqrt[3]{2}}}\;; \qquad (1)$$

où C est une constante arbitraire.

II. Supposons, en second lieu, qu'on ne veuille avoir égard qu'à la seconde condition seulement; il faudra qu'on ait

$$\mathrm{Ang.MOX}=3\mathrm{Ang.NOX}\;:$$

d'où

$$\mathrm{Tang.MOX}=\frac{3Tang.\mathrm{NOX}-Tang.^3\mathrm{NOX}}{1-3Tang.^2\mathrm{NOX}}\;;$$

mais on a

$$\mathrm{Tang.MOX}=\frac{y}{x}\;, \qquad \mathrm{Tang\,NOX}=-\frac{1}{p}\;;$$

donc

$$\frac{y}{x}=\frac{1-3p^2}{p^3-3p}.$$

cette équation donne d'abord la solution particulière $y=x$; mais il est clair qu'elle ne saurait convenir à la question qui nous occupe.

En éliminant y entre elle et sa différentielle, il vient, toutes réductions faites

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{3(p^2+1)\mathrm{d}p}{p(p^2-1)(p^2-3)},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$Cx=\frac{p(p^2-3)}{(p^2-1)^{\frac{3}{2}}};$$

C étant la constante arbitraire. Mais nous avons

$$\frac{y}{x}=\frac{1-3p^2}{p(p^2-3)},$$

ce qui donne, en multipliant,

$$Cy=\frac{1-3p^2}{(p^2-1)^{\frac{3}{2}}};$$

prenant donc la somme des quarrés des valeurs de x et y, il viendra, en réduisant,

$$C^2(x^2+y^2)=\left(\frac{p^2+1}{p^2-1}\right)^3,$$

d'où

$$\frac{p^2+1}{p^2-1}=\sqrt[3]{C^2(x^2+y^2)};$$

ce qui donne

$$p=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{C^2(x^2+y^2)+1}}{\sqrt[3]{C^2(x^2+y^2)-1}}};$$

substituant cette valeur dans l'équation

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1-3p^2}{p^2-3};$$

et changeant la constante C en $\frac{1}{k}$, il vient

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{k^2}}+2}{\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{k^2}}-2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{k^2}}-1}{\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{k^2}}+1}}. \qquad (2)$$

III. En passant, pour plus de simplicité, aux coordonnées polaires, les équations (1 et 2) deviennent

$$r=Ce^{\frac{t\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}}{\sqrt[3]{2}}}, \qquad (1)$$

$$\text{Tang}\,t=\frac{\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{2}{3}}+2}{\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{2}{3}}-2}\sqrt{\frac{\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{2}{3}}-1}{\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{2}{3}}+1}}; \qquad (2)$$

r étant le rayon vecteur et t l'angle qu'il fait avec l'axe des x.

On voit, à cause des constantes arbitraires C et k, qu'il y a une infinité de courbes qui résolvent le premier des deux problèmes, sans résoudre le second, et une infinité de courbes qui résolvent le second sans résoudre le premier.

Afin donc que le problème pût être résolu tel qu'il a été proposé, il faudrait que dans les deux séries de courbes il se trouvât une ou plusieurs courbes communes ; c'est-à-dire, qu'il faudrait que, par une détermination convenable des constantes C et k, on pût amener les équations (1 et 2) à être identiquement les mêmes : or, c'est une chose évidemment impossible, puisque la première de ces équations est toujours transcendante quel que soit C et la seconde toujours algébrique quel que soit k. Le problème, tel qu'il a été proposé, ne saurait donc être résolu, comme nous l'avons d'ailleurs déjà prouvé dès le début.

Genève, le 4 juin 1822.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

UNE des propriétés de la sphère est que les plans tangens aux deux extrémités de chacune de ses cordes font des angles égaux avec cette corde ; mais on conçoit que cette propriété peut fort bien n'être pas exclusive à la sphère. On propose donc d'examiner si elle ne convient pas également à d'autres surfaces, et de donner, dans le cas de l'affirmative, l'équation générale de ces surfaces ?

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Essai sur les forces qui déterminent les divers états des corps ;

Par M. H. G. Schmidten.

On peut regarder la matière comme un assemblage de points d'où émanent des forces répulsives et des forces attractives. Celles-ci sont constantes dans le même corps, mais celles-là sont variables. Faisant l'élément variable qui y entre $=r$, et la distance la plus courte entre deux centres de forces $=m$, on peut toujours faire répondre la valeur $r=0$ à la valeur $m=1$.

Désignant par $\varphi(m)$ la somme de toutes les forces attractives d'un corps sur un point C (fig. 1), dans la direction CD, et par $\psi(m, r)$ la somme des forces répulsives suivant la même direction, on a $\varphi(m)-\psi(m, r)$ pour l'expression de la force totale qui attire le point C vers D.

Actuellement, pour déterminer le volume du corps en état d'équilibre, on doit chercher m en fonction de l'élément variable r, par le principe des vitesses virtuelles. En effet, si l'on suppose CD$=0$: c'est-à-dire, si l'on suppose que le point C fait partie du corps, l'état d'équilibre de ce point se déterminera par l'équation

$$\varphi(m)-\psi(m, r)=maximum\text{, ou bien } \frac{d.\varphi(m)}{dm}-\frac{d.\psi(m, r)}{dm}=0\,.$$

On a ainsi une relation entre m et r, d'où l'on peut déduire le volume et la quantité $\varphi(m)-\psi(m, r)$, en fonction de r seule, et c'est sur-tout de la forme de cette dernière fonction que dépend celle du corps.

Dans l'ignorance où l'on est sur la nature de ces fonctions, on éclaircit ceci, autant qu'il est permis de le faire, par la considération des courbes où les abscisses représentent les diverses valeurs de m depuis o jusqu'à ∞, et où les ordonnées sont les fonctions $\varphi(m)-\psi(m, r)$ qui leur répondent, pour une valeur constante de r. Si l'on désigne les forces répulsives par des ordonnées négatives, on voit qu'à l'origine des abscisses l'ordonnée doit être $-\infty$; et qu'à l'abscisse infinie doit répondre l'ordonnée o. De plus, si la courbe a la forme $\alpha\beta\gamma$ (fig. 2), on voit que, dans l'état d'équilibre, la quantité m doit avoir la valeur AB; et $B\beta$ étant positive, le corps doit être solide. D'ailleurs, il est très-possible, et même vraisemblable, que la courbe contient plusieurs *maximums*, et que par conséquent ce corps pourrait avoir plusieurs équilibres stables.

Telle paraît devoir être l'explication des changemens brusques qui s'opèrent dans plusieurs corps, par un certain changement de température.

Maintenant, si l'on augmente l'action du principe dont l'intensité est désignée par r, il est naturel qu'en général les ordonnées positives deviennent de plus en plus petites au point de devenir enfin négatives, de sorte que le *maximum* positif devient un *minimum* négatif, et que la courbe prend la forme $\alpha\beta'\gamma$ ou $\alpha\beta''\gamma$ (fig. 3). Mais le corps n'étant plus solide, parce que l'ordonnée n'est plus positive, il faut absolument qu'il soit liquide; car l'état aériforme ne saurait répondre à aucune situation stable. Cependant, si l'on augmentait encore la quantité r, jusqu'à ce que le corps n'eût plus aucune situation stable, ou que la courbe eût la forme $\alpha\gamma$ (fig. 4), ce corps serait aériforme; et, comme il doit chercher un volume où l'ordonnée devienne un *minimum*, on voit qu'il n'aura jamais un équilibre stable, parce que le *minimum* vers lequel il tend répond à $m=\infty$. Ainsi les gaz peuvent seulement être en équilibre par l'action des forces extérieures, et ne comportent aucun rapport déterminé entre les quantités m et r, parce que l'équation

$$\frac{d.\varphi(m)}{dm}-\frac{d.\psi(m,r)}{dm}=0.$$

existe seulement pour la valeur $m=\infty$.

Le caractère des corps solides et liquides est donc de n'admettre qu'une variable indépendante r, tandis que les corps aériformes dépendent des deux variables m et r.

La quantité plus ou moins grande de r se fait remarquer par la température qui, dans les solides et les liquides, est fonction de r, tandis que, dans les substances aériformes, elle l'est de m et de r. Un fait général sur cette fonction est que deux corps à des températures inégales tendent toujours à partager le principe r entre eux, de sorte que finalement les températures deviennent égales.

Commençons par les solides et les liquides, en discutant, autant que possible, la nature de cette fonction entre r et la température t. Faisant, ce qui est permis, $t=0$ en même temps que $r=0$, on prend pour unité de r une quantité qui est en état de produire un certain effet, par exemple, de fondre une certaine masse de glace. Si les abscisses représentent les valeurs de r et les ordonnées celles de t qui leur répondent respectivement, on voit que ces ordonnées doivent, en général, augmenter avec les abscisses; mais, pour cela, il n'est pas impossible que la courbe ait un ou plusieurs *maximums*. Ce qu'on appelle chaleur spécifique n'est que le rapport de l'accroissement de t à celui de r ou $\frac{dr}{dt}$; et cette quantité doit être variable, à moins que la ligne ne soit droite ou qu'on ait

$$t = ar + b \ .$$

Les expériences, qui montrent que la chaleur spécifique augmente avec r, font voir que la courbe est concave vers l'axe des r; mais, dans les limites resserrées de nos expériences, sa courbure est peu considérable.

Un fait général pour tous les solides est qu'arrivés à un certain degré de température, cette température n'est plus augmentée par une augmentation de r, jusqu'à ce qu'un changement d'état l'ait rendu susceptible de recevoir un nouvel accroissement.

Si l'on regarde ce point comme répondant à un *maximum* dans la courbe des températures, ce qui convient avec la forme concave, on obtient une explication complète des phénomènes qui accompagnent le passage des corps d'un état à un autre. Soit, par exemple, la courbe des températures de la forme $\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 5); il faut que la température diminue, lorsque r devient plus grand que AB; mais, ayant égard à l'imparfaite conductibilité du principe r, on voit que cette circonstance doit donner lieu aux phénomènes qui se présentent dans la nature.

En effet, l'accroissement de r se communiquant d'abord à une très-petite partie du corps, doit y opérer un changement considérable, et y faire passer la température au *minimum*, jusqu'à une valeur égale à celle de l'autre partie de ce corps; mais alors il ne pourra monter plus haut sans le reperdre, à cause du principe de l'égalité des températures, jusqu'à ce que ce changement se soit opéré sur tout le corps, qui alors pourra augmenter de température comme à l'ordinaire. Supposant que la température va en diminuant, et que le corps est parvenu à l'état qui répond à la température $D\delta = B\beta$, on verra de même qu'en diminuant le principe r, d'abord une petite partie du corps, en passant par l'état qui répond à cette température, doit y rester jusqu'à ce que, dans tout le corps, le principe r se soit diminué de la quantité BD, Cependant, si le changement n'était ni très-considérable ni très-subit, il se pourrait que le corps ne changeât pas encore brusquement d'état ; mais qu'il diminuât de température jusqu'au *minimum* $C\gamma$, et qu'y étant arrivé, il dût passer subitement à l'état qui répond à $B\beta$. On voit ainsi une différence essentielle entre ces deux situations, savoir, le point de liquéfaction qui est fixe, et le point de congélation qui est susceptible de variations. C'est ainsi, par exemple, qu'on peut faire acquérir à l'eau une température fort inférieure à celle de la congélation, sans que pour cela elle cesse d'être liquide. Mais une question à laquelle il paraît impossible de répondre, dans l'ignorance où nous sommes de la forme des fonctions φ et ψ, est celle de savoir si un tel changement brusque doit toujours produire un passage de la solidité à la liquidité, et *vice versâ*, ou, ce qui revient au même, si le *maximum* de t doit toujours répondre à une valeur nulle ou à peu près nulle de la fonction qui constitue la solidité ou la liquidité, selon qu'elle est positive ou négative. En effet, il faut bien distinguer trois fonctions différentes de r, savoir, le volume proportionnel à m^3, la température t et la force $\varphi(m)-\psi(m, r)$. Les observations n'offrent que très-peu de données pour les déterminer, et les tables de la dilatation des corps pour des températures différentes donnent seulement la relation entre les deux fonctions inconnues t et m^3. La seule manière de déterminer l'une de ces fonctions serait de chercher les chaleurs spécifiques $\frac{dr}{dt}$, pour les diverses valeurs de r, d'où l'on conclurait t par l'interpolation et l'intégration ; mais il est très-difficile et presqu'impossible d'obtenir les expériences nécessaires pour cela.

Pour se faire une idée du passage d'un liquide à l'état aériforme, on doit se rappeler la courbe qui répond à la liquidité, savoir, $\alpha\beta\gamma$ (fig. 6), où les abscisses sont les valeurs de m : et les ordonnées celles de $\varphi(m)-\psi(m, r)$, pour une valeur constante de r. Or, si un accroissement de r venait à changer le *minimum* β en un point d'inflexion β', on détruirait nécessairement l'équilibre stable par un nouvel accroissement de r, quelque petit qu'il fût, et l'on contraindrait le corps à en chercher un autre qu'il n'obtiendrait dans ce cas que pour une valeur infinie de m ; c'est-à-dire que le corps deviendrait aériforme. On sait qu'il faut augmenter considérablement la quantité r pour faire passer un corps à cet état ; mais on verra néanmoins qu'un changement très-faible de cette quantité peut à la longue avoir le même effet, à cause de l'imparfaite conductibilité ; car l'accroissement de r, se communiquant d'abord à une petite partie du corps, la transforme avant que de s'être communiqué au reste ; et la partie transformée absorbe encore de ce principe, jusqu'à ce que l'égalité de température se soit établie ; mais la température des vapeurs étant fonction de r et du volume, on voit que la pression extérieure, aussi bien que la température du corps vaporisant, détermine la durée de la vaporisation. Il est d'ailleurs évident que, par exemple, la nature de la vapeur de la glace doit être la même que celle de la vapeur d'eau à la même température.

Nous avons déjà observé que le caractère des vapeurs est que la quantité m n'est pas fonction de r, ou qu'il n'y a pas d'équilibre stable ; si l'on veut éclaircir cette théorie par la considération des courbes, il faut choisir d'autres fonctions que celles que nous avons considérées plus haut. Pour cela, nous tracerons une courbe où les abscisses représentent, pour une valeur constante de r les valeurs de la quantité indépendante m, tandis que les ordonnées correspondantes sont les forces qui s'opposent, dans chaque point, aux forces extérieures qui tendent à comprimer la vapeur. Il est d'abord facile de voir que, lorsque $m=0$, l'ordonnée doit être $=-\infty$, tandis que pour $m=\infty$ cette ordonnée doit être nulle. Si cette courbe, que nous supposons être $\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 7) a un *maximum*, il est facile d'en déduire les conséquences. Si, en effet, les forces extérieures compriment la vapeur jusqu'à ce que $m=AC$, on voit qu'elles doivent, en vertu des forces intérieures, changer brusquement de forme, en passant à un état qui répond au *mini-*

mum $B\beta$; mais, dans la nature, cette opération est toujours plus compliquée, à cause du principe de l'égalité des températures; car celles-ci étant fonctions de m et r, il est facile de voir que, pour que t reste constant lorsque m varie, il faut que r varie aussi; mais, dans l'ignorance où l'on est sur la forme de cette fonction, on peut seulement savoir qu'en cette rencontre il se dégage une partie considérable de cette quantité.

Il est d'ailleurs évident que le point où la vapeur se convertit en liquide est fixe; mais que la vaporisation s'opère à toutes les températures. L'ordonnée $C\gamma$ représente la plus grande force élastique dans chaque point de la masse. La distinction qu'on établit entre les vapeurs et les gaz secs pourrait bien, au surplus, consister uniquement en ce que ceux-ci sont des vapeurs très-éloignées du *maximum*, ou en ce qu'ils sont représentés par une courbe de la forme $\alpha\beta\gamma$ (fig. 8); et dans ce cas, il serait absolument impossible de les réduire à l'état liquide, du moins tant que r resterait constante.

Dans tout ce qui précède, nous avons évité de faire des hypothèses sur la nature de la matière. Dans ce qui va suivre, nous allons seulement déduire quelques conséquences mathématiques de deux hypothèses contraires entre lesquelles les physiciens sont encore aujourd'hui partagés, savoir, celle de la continuité et celle de la discontinuité des parties. Dans la première, la plus courte distance entre deux centres de forces est infiniment petite; dans la seconde elle est finie. Les conséquences de la première peuvent donc se déduire de celles de la seconde, comme on déduit le calcul différentiel du calcul aux différences finies. Nous considérerons donc d'abord la première, comme la plus simple, en rappelant ce fait d'expérience que l'attraction moléculaire est insensible à une distance sensible du contact.

Soit donc un plan indéfini, à une distance s d'un point attiré. Supposons la matière dans l'état où $m=1$, et l'attraction d'un point à une distance x égale à $\varphi(x)$, alors l'attraction totale sur le point A (fig. 9), exercée par le plan, dans la direction perpendiculaire AB, sera $2\varpi s\Pi(s)$, en faisant

$$\int dx\varphi(x) \left\{ \begin{matrix} x=s \\ x=\infty \end{matrix} \right\} = \Pi(s) \; ;$$

d'où l'on conclut pour l'attraction exercée par le corps entier à la distance s,

$$2\varpi \int s\Pi(s) ds \left\{ \begin{matrix} s=s \\ s=\infty \end{matrix} \right\} .$$

Pour la valeur $s=0$; nous désignerons cette intégrale par $2\varpi C'$.

Maintenant, si m n'était plus égale à l'unité de son espèce, on voit qu'à cause du rapport infini entre s et la plus petite distance entre deux centres, il en résulterait seulement que l'attraction totale deviendrait alors $\frac{2\varpi C'}{m^3}$.

Si, au contraire, la matière n'est pas continue, il faudra avoir égard aux diverses positions des centres attirans, ce qui fera que m entrera sous le signe φ; et dans ce cas on ne pourra plus employer le calcul différentiel pour trouver la somme des attractions. Toute la théorie de l'action capillaire est fondée sur l'hypothèse de la continuité de la matière; et il paraît en effet permis de l'adopter, ou du moins de supposer la matière assez voisine de cet état pour qu'on puisse se permettre, sans erreur sensible, de substituer les différentielles aux différences finies. Si présentement on considère la force répulsive, en supposant qu'elle agit aussi à une distance finie, on pourra représenter par $\frac{B}{m^3}$ la force qui agit sur ce même point, en sens contraire de $\frac{2\varpi C'}{m^3}$, B étant celle qui répond à $m=1$,

et

et étant conséquemment uniquement fonction de r. Dans ce cas, pour déterminer les conditions de l'équilibre, il faudra faire $\frac{2\varpi C'-B}{m^3}$ *maximum* par rapport à m, ce qui est impossible, à moins qu'on ne fasse $m=0$. Il faut donc que la force répulsive ait une autre forme que la force attractive, relativement à m, ce qui n'est possible que lorsqu'elle n'agit pas à des distances finies ; de sorte que m doit entrer sous le signe ψ. Donc, en général, $\frac{2\varpi C'}{m^3}-\psi(m, r)=maximum$; ce qui donne lieu à toutes les recherches que nous venons d'exposer.

L'on voit ainsi qu'en admettant la continuité de la matière, l'action du corps à distance devient absolument indépendante du principe répulsif ; de sorte que la force de cohésion doit exister même dans les gaz. En effet, l'action d'un corps sur un point A à la distance s (fig. 10) étant $\frac{2\varpi\psi(s)}{m^3}$, celle qu'il exerce sur un élément de la même nature que le corps lui-même, parallèle au plan CD sera $\frac{2\varpi\psi(s)ds}{m^6}$; et celle du corps entier situé au-dessous du plan CD, sur celle qui est au-dessus du même plan sera $\frac{K}{m^6}$, où l'on a

$$K=2\varpi\int ds\,\psi(s)\begin{Bmatrix} s=0 \\ s=\infty \end{Bmatrix}.$$

La force répulsive n'agissant qu'à des distances infiniment petites, on voit que la force de cohésion est $\frac{K}{m^6}$, et par conséquent toujours positive.

Les différentes propriétés qui distinguent les corps les uns des autres sont encore l'*élasticité*, la *dureté*, la *ductilité*, qui dépendent de la forme des forces attractives et répulsives, et dont la dernière est parfaite dans les liquides. La *fragilité* dépend du plus ou moins rapide décroissement de la force attractive, à raison de l'accroissement des distances. La force de la *pesanteur* doit être fonction de quelque force élémentaire; et c'est de cette fonction que dépend le poids des atomes. Enfin les forces élémentaires d'un liquide, combinées avec celle de la pesanteur, produisent les phénomènes capillaires.

Quant aux substances aériformes, nous observerons que, dans la force $\frac{2\pi C'}{m^3}-\psi(m,r)$, la quantité m est beaucoup plus grande que dans les solides et dans les liquides, à température égale, et que r augmente avec m, à une température constante. Donc, si l'on voulait développer $\psi(m,r)$ en une série convergente, il faudrait faire en sorte que r n'en détruisît pas la convergence; observant donc que $\psi(m,r)$ est nul ou infini, suivant que m est à l'inverse infini ou nul, on peut faire

$$\psi(m,r)=\frac{\psi_1(m,r)}{m}+\frac{\psi_2(m,r)}{m^2}+\frac{\psi_3(m,r)}{m^3}+\ldots\ldots;$$

les fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... étant toujours comparables à une quantité constante, quelque grand que soit m. En conséquence, la force totale agissant sur un point quelconque de la masse sera ainsi

$$\frac{\psi_1(m,r)}{m}+\frac{\psi_2(m,r)}{m^2}+\frac{\psi_3(m,r)-2\pi C'}{m^3}+\ldots\ldots;$$

et l'on voit que, pour une valeur considérable de m, on peut rejeter, sans erreur sensible, vis-à-vis du premier terme, tous ceux qui le suivent; admettant de plus que $\psi_1(m,r)$ est proportionnelle à la température, on obtient la loi de Mariotte. Cette manière de se rendre compte de cette loi est loin, comme on le voit, d'être rigoureuse, et il serait bien difficile de parvenir à quelque chose de plus satisfaisant, dans l'ignorance où l'on est relativement à la forme de la fonction $\psi(m, r)$; toutefois, elle est peut-être aussi légitime que celle qu'on a employée dans la théorie du son, pour démontrer que son intensité est en raison inverse du quarré de la distance au centre de l'ébranlement.

Si l'on n'admettait pas la continuité de la matière, l'expression de la force attractive aurait en général la forme

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m^2}+\frac{c}{m^3}+\ldots\ldots;$$

et, pour obtenir la loi de Mariotte, il faudrait établir une nouvelle hypothèse propre à faire disparaître la quantité a.

J'ai essayé de faire voir jusqu'à quel point il serait possible, dans l'état actuel de l'analise mathématique et de la physique expérimentale, de se rendre compte des principaux phénomènes qui accompagnent les différens états des corps.

Dans l'ignorance où l'on se trouve relativement à la force des diverses fonctions qui doivent être envisagées dans ce genre de recherches, on se trouve contraint de se borner à des considérations beaucoup trop générales; combien donc les difficultés ne se trouveraient-elles pas encore accrues, si l'on voulait faire entrer en considération de nouvelles forces, telles, par exemple, que l'électricité, d'où dépendent les combinaisons chimiques, et dont la nature nous est encore plus cachée. L'on voit aussi combien malgré la simplicité des lois de la combinaison des corps et principalement des gaz, découvertes par l'expérience, il doit être difficile de trouver seulement une relation entre les chaleurs spécifiques et les quantités de chaleur absorbées ou dégagées par les transformations et les combinaisons.

Plombières, le 24 juillet 1822.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de la propriété de minimum *dont jouissent la circonférence du cercle, entre les périmètres des figures planes de même surface, et la surface de la sphère entre les surfaces des corps de même volume;*

Par un ABONNÉ.
GERGONNE

On a vu à la page 61 du présent volume, que, même en employant les puissans moyens que fournit la méthode des variations, il n'est pas du tout aisé d'établir la propriété dont jouit la sphère d'être le corps de moindre surface entre tous ceux de même volume, ou le corps de plus grand volume entre tous ceux de même surface. C'est pourtant là une propriété tellement saillante qu'on ne saurait trop s'efforcer d'en rendre la démonstration assez simple pour pouvoir l'introduire dans les élémens de géométrie, et tel est le but que nous nous proposons ici; Mais, comme la propriété dont jouit le cercle d'être la figure plane de moindre périmètre entre toute celle de même surface, ou la figure plane de plus grande surface entre celles de même périmètre, a une très-grande analogie avec celle-là, nous nous en occuperons également. Ce sujet a déja été traité à la page 338 du IV.e volume du présent recueil; et si nous y revenons de nouveau ici, c'est uniquement dans la vue de le présenter d'une manière plus simple.

LEMME I. De tous les triangles de même base et qui ont leur sommet sur une même droite indéfinie, celui dans lequel la somme des deux autres côtés est la moindre possible, est celui dans lequel ces deux côtés font des angles égaux avec la droite indéfinie.

Démonstration. Soient AB (fig. 11) la base commune à tous ces triangles, et DE la droite indéfinie sur la quelle leurs sommets doivent être situés ; de l'une quelconque A des extrémités de cette base soit abaissée sur DE une perpendiculaire AF, prolongée au-delà de cette droite d'une quantité $FG=FA$. En quelque point C de DE que l'on veuille placer le sommet de l'un des triangles dont il s'agit, on aura toujours $CG=CA$; donc $CA+CB$ sera la moindre possible, quand $CG+CB$ sera la moindre possible ; c'est-à-dire, lorsque le point C sera en ligne droite avec les points B et G ; mais alors les angles BCE et GCD seront égaux, comme opposés par le sommet ; puis donc que, par suite de la construction, les angles GCD et ACD sont aussi égaux ; il s'ensuit que les angles ACD et BCD doivent aussi être égaux, comme nous l'avons annoncé.

LEMME II. De tous les trapèzes qui ont bases égales et même hauteur, le trapèze isocèle, c'est-à-dire, celui dans lequel les deux côtés non parallèles sont égaux, est aussi celui dans lequel la somme des longueurs de ces deux côtés est la moindre possible.

Démonstration. Soit AA′ (fig. 12) la base commune à tous ces trapèzes, et soit DE la droite indéfinie sur laquelle doit se trouver l'autre base ; en portant la longueur de cette dernière sur AA′ de A′ en C, vers A, de quelque manière que l'on pose cette base BB′ sur DE, on aura toujours $BC=B'A'$; d'où il suit que, pour que $AB+A'B'$ soit la moindre possible, il sera nécessaire et il suffira que $AB+BC$ soit elle-même la plus petite possible ; donc (*Lemme I.*) les angles ABD et CBE devront être égaux ; il en sera donc de même de leurs alternes internes BAC et BCA ; on devra donc avoir $AB=CB$ et par conséquent $AB=A'B'$. Le trapèze devra donc être isocèle, ainsi qu'il avait été annoncé.

LEMME III. De toutes les pyramides triangulaires qui ont pour base commune un même trapèze et dans lesquelles le sommet se trouve situé sur une même parallèle aux côtés parallèles de cette base, celle dans laquelle la somme des aires des faces latérales qui ont pour base les deux côtés non parallèles de ce trapèze est la moindre possible, est celle dans laquelle les plans de ces deux faces sont également inclinés sur le plan du trapèze.

Démonstration. Soient AA′ et BB′ (fig. 13) les deux côtés parallèles d'un trapèze, base commune d'une suite de pyramides quadrangulaires de même hauteur, ayant toutes leurs sommets sur une même parallèle à ces deux droites, parallèle dont nous supposerons que la projection sur le plan de la base de la pyramide soit CC′ coupant en C et C′ respectivement les deux côtés non parallèles AB et A′B′ de cette base.

Des deux extrémités B et B′ de l'un BB′ des côtés parallèles du trapèze soient abaissées les perpendiculaires BD et B′D′ sur la direction du côté opposé AA′. Soient prolongés les côtés BA et B′A′ au-delà de A et A′ en E et E′, de telle sorte que CE et C′E′ soient égales à la hauteur commune de toutes nos pyramides. Des points E et E′ élevons des perpendiculaires sur CE et C′E′, terminées en F et F′ à leur rencontre avec les perpendiculaires élevées à CC′ en C et C′; enfin menons la droite FF′.

Considérons présentement une de nos pyramides, dont le sommet se projette au point G de CC′; menons, par ce point G, la droite KL perpendiculaire commune aux deux côtés parallèles du trapèze, et conséquemment égale à BD et B′D′. Menons les droites GF et GF′, et abaissons sur les directions de AB et A′B′ les perpendiculaires GH et GH′.

Si l'on joint le sommet de la pyramide au point H par une droite, cette droite sera évidemment la hauteur de la face latérale dont AB est la base; cette hauteur sera donc l'hypothénuse d'un triangle rectangle ayant GH pour l'un des côtés de l'angle droit et pour l'autre la hauteur de la pyramide, c'est-à-dire, une longueur égale à CE ; de sorte que la hauteur de cette face triangulaire aura pour expression

$$\sqrt{\overline{GH}^2+\overline{CE}^2}\ ;$$

or, les trois triangles rectangles semblables BDA, CEF et GHC donnent

$$AB : BD \text{ ou } KL :: \left\{\begin{array}{l} GC : GH = \dfrac{KL}{AB}.GC\ , \\[2ex] CF : CE = \dfrac{KL}{AB}.CF\ ; \end{array}\right.$$

donc

$$\overline{GH}^2+\overline{CE}^2=\left(\frac{KL}{AB}\right)^2.(\overline{GC}^2+\overline{CF}^2)=\left(\frac{KL.FG}{AB}\right)^2;$$

au moyen de quoi la hauteur de la face latérale dont la base est AB se trouvera simplement exprimée par

$$\frac{KL.FG}{AB}\ ;$$

et par conséquent l'aire de cette face aura pour expression

$$\frac{KL.FG}{2}\ .$$

Or, comme les circonstances sont absolument les mêmes de part et d'autre de la droite KL, il s'ensuit que l'aire de la face latérale dont la base est A′B′ devra avoir pour expression

$$\frac{KL.F'G}{2}\ ;$$

la somme des aires des deux faces latérales ayant pour bases AB et A′B′ aura donc pour expression

$$\frac{KL.FG}{2}+\frac{KL.F'G}{2} \text{ ou } \frac{KL}{2}.(FG+F'G)\ ;$$

à cause du facteur constant $\frac{KL}{2}$, il sera nécessaire et il suffira ; pour que cette somme soit la moindre possible, que la somme GF+GF′ le soit elle-même, ce qui exigera (*Lemme I*) que le point G soit tellement situé sur CC′ que les angles FGC et F′GC′ soient égaux entre eux.

Les deux triangles rectangles FCG et F′C′G devront donc être semblables ; de sorte qu'on devra avoir

$$GC : GC' :: CF : C'F' ;$$

mais les triangles rectangles semblables déjà employés donnent

$$GH : GC :: CE : CF ,$$

$$GC' : GH' :: C'F' : C'E' ,$$

multipliant donc ces proportions terme à terme, il viendra, en réduisant

$$GH : GH' :: CE : C'E' ;$$

or, par construction, les deux derniers termes de cette proportion sont egaux ; donc, on doit avoir $GH=GH'$, ce qui montre que le point G doit être l'intersection de CC′ avec la droite qui divise en deux parties égales l'angle formé par les directions des côtés non parallèles AB et A′B′ du trapèze, base de la pyramide.

On voit de plus que les triangles rectangles formés par la hauteur de la pyramide, les perpendiculaires égales GH et GH′ et les hauteurs des deux faces latérales ayant pour bases AB et A′B′ seront égaux ; d'où il suit que les plans de ces faces seront également inclinés sur celui de la base de la pyramide, ainsi qu'on l'avait annoncé.

LEMME IV. De tous les troncs de prismes triangulaires qui ont les trois mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à leur direction commune, celui dans lequel la somme des aires des deux bases est la moindre possible est le tronc de prisme triangulaire isocèle, c'est-à-dire, celui dans lequel le plan qui passe par les milieux des trois arêtes latérales est perpendiculaire à leur direction commune.

Démonstration. Soit *abc* (fig. 14) la section perpendiculaire aux arêtes AA′, BB′, CC′ d'un tronc de prisme triangulaire. Par l'un C′ des sommets de l'une des bases A′B′C′ soit conduit un plan

αβC

$\alpha\beta C'$, parallèle au plan de l'autre base ABC ; ce plan détachera du tronc une pyramide quadrangulaire, ayant pour base le trapèze $\alpha A'B'\beta$ et devant avoir son sommet en quelque point de la parallèle menée par le point c aux deux bases du trapèze. En outre, les deux triangles ACB et $\alpha C'\beta$ seront égaux ; de sorte que, la face latérale AA'B'B étant donnée, pour que la somme ACB+A'C'B' des aires des deux bases soit la moindre possible, il sera nécessaire et il suffira que la somme $\alpha C'\beta$+A'C'B' des aires des faces latérales de la pyramide, ayant pour bases les côtés non parallèles $\alpha\beta$ et A'B' du trapèze, soit la moindre possible, ce qui exigera (*Lemme III*) que l'arête CC' soit tellement située que les plans de ces deux faces ~~soient~~ également inclinés sur la base de ce trapèze ; d'où il résultera que les deux bases ACB et A'C'B' seront aussi également inclinées sur la face latérale ABB'A'.

Ainsi, les situations de deux des arêtes latérales du tronc étant données, la situation de la troisième qui rend *minimum* la somme des aires des deux bases est celle qui rend ces bases également inclinées sur le plan des deux autres arêtes ; d'où il suit que, pour que la somme des aires de ces bases soit un *minimum* absolu, il faut que leurs plans soient également inclinés sur celui de chacune des trois faces latérales ; or, c'est ce à quoi on parvient évidemment en plaçant les milieux a, b, c des trois arêtes AA', BB', CC' sur le plan de la section perpendiculaire à leur direction commune ou, en d'autres termes, en rendant le tronc isocèle.

THÉORÈME I. Entre toutes les figures planes de même surface, le cercle est celle qui a le moindre périmètre.

Démonstration. Si l'on nie cette proposition, il faudra admettre que, parmi les figures planes d'une même étendue donnée, celle de moindre périmètre est autre que le cercle ; et que c'est par conséquent une figure dans laquelle on pourra trouver deux cordes parallèles, infiniment voisines, qui n'auront pas leurs milieux sur une même perpendiculaire à leur direction commune.

Soit AA′ (fig. 15) une de ces cordes , et soit MN la perpendiculaire indéfinie menée à sa direction par son milieu a ; soit BB′ la corde consécutive à AA′, ayant son milieu b hors de MN ; si l'on fait glisser cette corde BB′, jusqu'à ce que son milieu se trouve sur cette droite, en faisant suivre le mouvement à toute la partie intérieure de la figure ; sa surface totale n'en aura éprouvé aucun changement, mais la somme AB+A′B′ et conséquemment le périmètre (*Lemme II*) sera devenu moindre ; d'où l'on conclura que la surface proposée n'est pas celle de moindre périmètre, entre toutes celles qui lui sont équivalentes.

Corollaire. Il suit de là qu'entre toutes les surfaces planes de même périmètre, le cercle est celle de plus grande étendue. Supposons en effet que l'on prétende que la surface de moindre étendue, sous un périmètre donné P, soit une surface S différente d'un cercle. Soit fait un cercle C équivalent à S ; son périmètre Q, par ce qui précède, sera $<P$; donc, si l'on fait un cercle C' dont le périmètre soit $=P$, ce cercle aura une surface plus grande que C et conséquemment plus grande que S ; d'où il résultera que S ne sera pas la plus grande surface contenue sous le périmètre P, comme on l'avait d'abord supposé.

THÉORÈME II. De toutes les courbes planes qui, ayant une corde commune, enferment le même espace entre elles et cette corde, l'arc de cercle est celle de moindre longueur.

Démonstration. Admettons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit l'arc de cercle A et un arc d'une autre courbe, d'une longueur $C<A$ enfermant le même espace S, et soit achevée la circonférence. Supposons que la longueur du surplus soit L, et qu'elle enferme un espace T ; nous aurions ainsi un même espace $S+T$ renfermé d'une part par une circonférence dont la longueur serait $A+L$, et d'une autre par une courbe non circulaire dont le périmètre serait $C+L<A+L$, ce qui est impossible (*Théorème I*).

Corollaire. Par un raisonnement tout semblable à celui dont nous avons fait usage dans le précédent corollaire, on démontrera qu'à l'inverse entre tous les arcs de courbes de même longueur, qui ont une corde commune, l'arc de cercle est celui qui renferme le plus grand espace entre lui et sa corde.

THÉORÈME III. Entre tous les corps de même volume, la sphère est celui qui a la moindre surface.

Démonstration. Si l'on nie cette proposition, il faudra admettre que, parmi tous les corps d'un même volume donné, celui de moindre surface est autre que la sphère, et que c'est par conséquent un corps dans lequel on pourra trouver trois cordes parallèles infiniment voisines, au moins, non situées dans un même plan, dont les milieux ne soient pas dans un même plan perpendiculaire à leur direction commune.

Soit c (fig. 16) le milieu d'une corde, et soit le plan de la figure un plan conduit par ce milieu, perpendiculairement à sa direction; soient a, b les points où ce plan est percé par deux autres cordes parallèles à celle-là qui en soient infiniment voisines et qui ne soient pas situées dans le même plan avec elle; et supposons que ces deux nouvelles cordes n'aient point leurs milieux en a et b. Concevons le plan de la figure partagé en un réseau de triangles infiniment petits, par les sommets desquels soient menées des cordes parallèles aux trois premières; ces cordes seront les arêtes latérales d'une suite de troncs de prismes triangulaires dont nos triangles seront des sections perpendiculaires aux arêtes.

Cela posé, on pourra faire glisser les cordes ou arêtes qui passent par a et b, jusqu'à ce qu'elles aient leurs milieux en ces points. En opérant ainsi de proche en proche sur toutes celles des autres cordes qui n'auront pas leur milieu sur notre plan, jusqu'à ce qu'on les ait amenées à les y avoir toutes, on n'aura point changé le volume du corps dont il s'agit, tandis qu'on en aura (*Lemme IV*) diminué la surface; d'où l'on conclura que cette surface n'était pas la moindre de toutes celles qui pouvaient contenir le volume donné.

Corollaire. Il suit de là qu'entre tous les corps de même surface, la sphère est celui du plus grond volume. Supposons, en effet, que l'on prétende que le volume de moindre étendue, sous une surface donnée S, soit un volume V différent de la sphère. Soit faite une sphère Σ équivalente à V, sa surface S' sera, par ce qui précède $<S$; donc, si l'on fait une sphère Σ' dont la surface soit égale à S, cette sphère aura un volume plus grand que Σ, et conséquemment $>V$; d'où il résulterait que V ne serait pas le plus grand volume contenu sous la surface S, ainsi qu'on l'avait supposé.

THÉORÈME IV. De toutes les surfaces courbes qui, se terminant à une même circonférence de cercle, renferment le même volume entre elles et le plan de ce cercle, la calotte sphérique est celle de moindre étendue.

Démonstration. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit la calotte sphérique C et une autre surface $S<C$ enfermant le même volume V et soit achevée la sphère. Supposons que la surface du surplus soit C' enfermant un volume V'; nous aurions donc ainsi un même volume $V+V'$ enfermé d'une part par une surface sphérique $C+C'$, et d'une autre par une surface moindre $S+C'$, ce qui est impossible (*Théorème III*) (*).

Corollaire. Par un raisonnement tout semblable à celui dont nous avons fait usage, dans le précédent corollaire, on démontrera qu'à l'inverse de toutes les surfaces courbes de même étendue, terminées à une même circonférence de cercle, la calotte sphérique est celle qui enferme le plus grand volume entre elle et ce cercle.

(*) Ceci explique, en particulier, pourquoi les bulles de savon sont sensiblement sphériques ; elles le seraient rigoureusement si elles étaient partout d'une épaisseur uniforme, et si la pesanteur n'existait pas.

J. D. G.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 321 du XII.e volume des Annales ;

Par MM. Pagani Michel, ingénieur à Genève,
Querret, chef d'institution à St-Malo,
Et Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

THÉORÈME. *La circonférence qui passe par les centres de trois quelconques des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle quelconque est double de celle qui passe par les trois sommets de ce triangle.*

Démonstration. Soient A, B, C (fig. 17) les trois sommets du triangle dont il s'agit. Concevons que l'on en ait divisé les trois angles en deux parties égales par des droites ; il est connu que ces droites concourront toutes en un même point O, centre du cercle inscrit. Par les sommets d'où partent ces droites, menons-leur respectivement des perpendiculaires, formant, par leur rencontre deux à deux, un nouveau triangle circonscrit au premier. Soient A′, B′, C′ les sommets qui, dans ce dernier, sont respectivement opposés aux sommets A, B, C du premier ; ces points seront, comme l'on sait, les centres des trois cercles ex-inscrits au triangle ABC ; c'est-à-dire, les centres de trois cercles dont chacun touche, à la fois, un côté du triangle et les prolongemens des deux autres.

Les points A′ et O, étant ainsi les centres de deux cercles inscrits à un même angle BAC, devront se trouver en ligne droite avec le sommet A de cet angle ; et, pour de semblables raisons, les points B′, O, B, ainsi que les points C′, O, C seront égales ment en ligne droite ; de sorte que le point O, intersection des droites qui divisent en deux parties égales les trois angles du triangle ABC, pourra aussi être considéré comme celui où se croisent les perpendiculaires abaissées de chaque sommet sur la direction du côté opposé, dans le triangle A′B′C′, et que le triangle ABC aura ses sommets aux pieds de ces perpendiculaires.

Remarquons présentement que, lorsque deux triangles ont un côté égal, et que l'angle opposé dans l'un est supplément de l'angle opposé dans l'autre, ces deux triangles sont nécessairement inscriptibles à un même cercle ou à des cercles égaux ; puisqu'en les opposant base à base, on formera un quadrilatère ayant deux angles opposés supplément l'un de l'autre, et conséquemment inscriptible au cercle ; et que le cercle qui lui sera circonscrit le sera en même temps aux deux triangles dont il s'agit.

Or, à cause des angles droits opposés en B et C, le quadrilatère OBA′C est inscriptible au cercle ; donc l'angle BOC, et conséquemment son opposé au sommet B′OC′ est supplément de l'angle A′ ; d'où il suit, par ce qui vient d'être dit ci-dessus, que les deux triangles B′A′C′ et B′OC′ sont inscriptibles à des cercles égaux ; et, comme on prouverait évidemment la même chose de chacun des deux triangles C′OA′, A′OB′, comparés au même triangle A′B′C′, il s'ensuit que *les circonférences qui passent par les centres de trois quelconques des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un même triangle sont toutes égales entre elles*, et ont conséquemment même rayon. Il reste donc à établir que le rayon de l'une d'elles, de celle qui est circonscrite au triangle A′B′C′, par exemple, est double du rayon de celle qui est circonscrite au triangle ABC.

Pour y parvenir, remarquons d'abord que le rayon du cercle circonscrit à un triangle étant égal au produit de ses trois côtés divisé par l'aire du triangle, et l'aire d'un triangle étant la moitié du produit de deux quelconques de ses côtés par le sinus de l'angle compris, il s'ensuit que *le rayon du cercle circonscrit à un triangle* *est égal à un de ses côtés divisé par le double du sinus de l'angle opposé* ; ce que l'on peut d'ailleurs démontrer directement d'une manière fort simple.

Cela posé, si l'on désigne par R et R', respectivement les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC et A'B'C', on aura

$$AB=2R\,Sin.C\,,\qquad A'B'=2R'Sin.C'\,.$$

Mais, si l'on circonscrit au triangle A'AB' un cercle, dont le rayon sera $\frac{1}{2}$A'B', ce cercle se trouvera aussi circonscrit au triangle AB'B; de sorte que son rayon pourra également être exprimé par $\frac{AB}{2Sin.AB'B}$; d'où il suit que

$$AB=A'B'Sin.AB'B\;;$$

mettant donc dans cette dernière équation pour AB et A'B' les valeurs trouvées ci-dessus, elle deviendra

$$R'Sin.C'Sin.AB'B=R\,Sin.C\,.$$

Or, parce que le quadrilatère OAB'C est inscriptible au cercle, l'angle AB'O ou AB'B doit être égal à ACO ou ACC' ou moitié de l'angle C ; au moyen de quoi la dernière équation ci-dessus devient

$$R'Sin.C'Sin.\tfrac{1}{2}C=R\,Sin.C=2R\,Sin.\tfrac{1}{2}C\,Cos.\tfrac{1}{2}C\;;$$

ce qui donne, en réduisant,

$$R'Sin.C'=2R\,Cos.\tfrac{1}{2}C\,.$$

Présentement, de même qu'on a $Ang.$C'B'B$=\frac{1}{2}$C, on doit avoir pareillement

$$Ang.B.C'C=\tfrac{1}{2}B\,,\qquad Ang.A'C'C=\tfrac{1}{2}A\;;$$

d'où, en ajoutant,

$$C'=\tfrac{1}{2}(A+B)=\tfrac{1}{2}\varpi-\tfrac{1}{2}C\;;$$

donc

$$Sin.C'=Cos.\tfrac{1}{2}C\;;$$

donc finalement

$$R'=2R\;;$$

ce qui complète la démonstration du théorème.

Telle est, en substance, la démonstration donnée par MM. Pagani et Querret. M. Durrande, en partant des mêmes préliminaires, emploie, pour parvenir au but, un très-élégant théorème de géométrie élémentaire, démontré par M. Poncelet, à la page 215 du XI.e volume du présent recueil; lequel consiste en ce que les pieds A, B, C des perpendiculaires abaissées des sommets A', B', C', d'un triangle (fig. 18) sur les directions des côtés opposés, les milieux A'', B'', C'', de ces mêmes côtés, et les milieux A''', B''', C''', des distances des sommets au point O où se croisent les trois perpendiculaires, sont *neuf* points appartenant à une même circonférence.

Il en résulte d'abord immédiatement que le cercle circonscrit au triangle ABC l'est également au triangle $A''B''C''$, semblable à $A'B'C'$ et ayant ses côtés moitié des siens; d'où il suit que le rayon du cercle circonscrit à ce dernier doit être double de celui du cercle circonscrit au triangle ABC.

En outre, le même cercle circonscrit à ABC l'est aussi à $A'''B'''C''$, semblable à $A'B'O$, et ayant ses côtés moitié des siens; d'où il résulte que le rayon du cercle circonscrit à ce dernier doit aussi être double de celui du cercle circonscrit à ABC, et conséquemment égal à celui du cercle circonscrit à $A'B'C'$; ce qui démontre complètement le théorème.

En renversant le théorème proposé, on obtient le suivant:

THÉORÈME. La circonférence du cercle circonscrit à un triangle est égale à celle de chacun des cercles qui passent par deux de ses sommets et par le point de concours des perpendiculaires abaissées de ces mêmes sommets sur les directions des côtés opposés; chacune d'elles est double de celle qui passe par les pieds des trois perpendiculaires.

Bien que ce dernier théorème se trouve suffisamment établi par ce qui précède, M. Durrande le démontre aussi directement, par les fonctions circulaires.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Solution nouvelle d'un problème énoncé dans la correspondance sur l'école polytechnique ;

Par M. Thomas de St-Laurent, lieutenant, aide-major du corps royal d'état major, au 7.e régiment d'artillerie à pied.

A la page 275 du II.e volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique*, on trouve ce qui suit :

« Un ancien élève, directeur des douanes à Fuligno, département » de Trazimène, M. Dubois-Aymé se promenait sur le bord de » la mer; il aperçut, à quelque distance, quelqu'un de sa connais- » sance, et se mit à courir pour l'atteindre; son chien, qui s'était » écarté, courut vers lui, en décrivant une courbe dont l'empreinte » resta sur le sable. M. Dubois, revenant sur ses pas, fut frappé » de la régularité de cette courbe, et il en chercha l'équation, » en supposant, 1.° que le chien se dirigeait constamment vers l'en- » droit où il voyait son maître; 2.° que le maître parcourait une » ligne droite; 3.° que les vitesses du maître et du chien étaient » uniformes.

» Prenant pour axe des y la ligne droite parcourue par le maître, » et pour axe des x la perpendiculaire abaissée sur cette droite » du point de départ du chien, on trouve, pour l'équation de la » courbe,

$$y=\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{n}{n-1}a^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{n-1}{n}}-a^{\frac{n-1}{n}}\right)\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\alpha\\ -\dfrac{n}{n+1}a^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{n+1}{n}}-a^{\frac{n+1}{n}}\right)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha\end{array}\right\};$$

» dans laquelle n est le rapport des vitesses du chien et de son » maître ; et α l'angle que fait l'axe des y avec la droite qui joint les » points de départ du maître et du chien (*).

» Cette courbe est telle que ses rayons de courbure sont pro- » portionnels aux abscisses des points auxquels ces rayons appar- » tiennent ».

En cherchant à me rendre compte de l'analise qui avait pu conduire à cette équation, elle m'a paru inexacte, et il m'a semblé que la courbe qui résout le problème ne pourrait, en particulier, jouir de la propriété annoncée. Je vais exposer ici la marche que j'ai suivie et les résultats que j'en ai obtenus ; en laissant au lecteur à prononcer entre ces résultats et ceux qui se trouvent consignés dans la *Correspondance*.

Quelle que soit la courbe décrite par le chien, on peut toujours supposer qu'à chaque instant il marche sur la tangente à cette courbe ; d'où il suit qu'à chaque instant aussi la tangente menée à la courbe qu'il décrit, par le point de cette courbe où il se trouve, va couper la droite décrite par son maître au point où celui-ci se trouve lui-même en cet instant.

Soit prise cette droite pour axe des y, les coordonnées étant

---

(*) On ne dit pas ce que a représente ; mais on peut présumer que c'est la distance de l'origine au point de départ du chien.

J. D. G.

rectangulaires et l'origine quelconque. Si l'on désigne par (x', y') le point de la courbe où se trouve le chien à un instant quelconque, la tangente en ce point, dirigée vers son maître, aura pour équation

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x') \; ; \qquad (1)$$

on aura donc la position du maître sur la droite qu'il décrit, ou sa distance à l'origine, en cherchant l'intersection de ce cette tangente avec l'axe des y, c'est-à-dire la valeur de son ordonnée qui répond à $x=0$; désignant donc par y'' cette ordonnée, on aura

$$y''=y'-x'\frac{dy'}{dx'} \; . \qquad (2)$$

Or, présentement, si l'on désigne par n le nombre d'unités de longueur que parcourt le maître pendant que son chien en parcourt une seule, et que, suivant l'usage, on représente par s' la longueur de l'arc de courbe commençant à un point quelconque et se terminant en (x', y'), on aura

$$\frac{dy''}{ds'}=n, \quad \text{ou} \quad \frac{dy''}{dx'}=n\frac{ds'}{dx'} \; ; \qquad (3)$$

mais, d'une part, en différentiant l'équation (2) et y considérant x' comme la variable indépendante, il vient

$$\frac{dy''}{dx'}=-x'\frac{d^2y'}{dx'^2} \; ;$$

d'une autre, on a, en remarquant que, s' croissant, x' diminue

$$\frac{ds'}{dx'}=-\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2} \; ;$$

substituant donc, et supprimant les accens, désormais inutiles, on obtiendra pour l'équation différentielle seconde de la courbe cherchée

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=n\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (4)$$

Remarquons d'abord, avant d'aller plus loin, que, d'après la manière dont nous avons procédé, cette équation ne suppose pas essentiellement que les vitesses du chien et de son maître soient constantes; mais seulement qu'elles sont à chaque instant dans le même rapport. On conçoit, en effet, que la nature de la courbe décrite par le chien ne saurait dépendre des vitesses absolues.

On sait qu'en représentant par r le rayon de courbure d'une courbe en l'un (x, y) de ses points, on a

$$r=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (5)$$

en mettant donc dans cette formule pour $\frac{d^2y}{dx^2}$ sa valeur (4), il viendra

$$r=\frac{x}{n}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}; \qquad (6)$$

d'où l'on voit qu'il n'est pas vrai que le rayon de courbure de la courbe dont il s'agit soit, comme on l'a annoncé dans la *Correspondance*, proportionnel à son abscisse. On voit en effet que ce rayon est proportionnel au produit de l'abscisse par le quarré de la co-sécante de son inclinaison sur l'axe des x.

Pour obtenir l'intégrale première de l'équation (4), faisons, suivant l'usage, $\frac{dy}{dx}=p$; elle deviendra ainsi

$$x\,\frac{dp}{dx}=n\sqrt{1+p^2}\;;$$

c'est-à-dire ;

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=n\,\frac{dx}{x}\;;$$

équation séparée dont l'intégrale est

$$\text{Log.}(p+\sqrt{1+p^2})=n\text{Log.}A+n\text{Log.}x=n\text{Log.}Ax=\text{Log.}(Ax)^n\;,$$

d'où

$$A=\frac{1}{x}\{p+\sqrt{1+p^2}\}^{\frac{1}{n}}\;; \qquad (7)$$

A étant la constante arbitraire.

Employons cette constante à fixer la position de l'origine, sur laquelle nous n'avons pas encore statué, en la prenant de la manière la plus propre à simplifier la forme de l'équation primitive. Remarquons pour cela que, les résultats auxquels nous sommes parvenus jusqu'ici étant absolument indépendans du temps, il nous est permis de ne pas considérer de point de départ, c'est-à-dire, de supposer que le maître et son chien marchent depuis quel temps on voudra ; d'après quoi on peut concevoir une époque où la tangente menée à la trajectoire par le point de cette trajectoire où le chien se trouvait alors était perpendiculaire à la droite indéfinie décrite par son maître, c'est-à-dire, à l'axe des y ; et où conséquemment le maître se trouvait au pied de cette perpendiculaire, c'est-à-dire, à l'origine. Prenons donc cette tangente pour axe des x, et supposons qu'alors la distance du chien à son maître est a ; cela reviendra à admettre que, tandis que le maître part de l'origine pour parcourir l'axe des y, dans le sens des y positives, son chien part d'un point de l'axe des x distant de cette origine de la quantité a: on devra donc avoir, en même temps, $x=a$ et $p=0$; au moyen de quoi l'équation (7) deviendra simplement

$$A=\frac{1}{a}\ ,$$

valeur qui, substituée dans cette même équation (7), la changera en celle-ci :

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{x}\left\{p+\sqrt{1+p^2}\right\}^{\frac{1}{n}},\quad \text{ou}\quad p+\sqrt{1+p^2}=\left(\frac{x}{a}\right)^n.$$

En transposant et faisant disparaître le radical, on tire de cette dernière

$$p=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n-\left(\frac{a}{x}\right)^n\right\}\ ; \qquad (8)$$

valeur qui devient également infinie, soit que x soit nul ou bien qu'il soit infini,

On tire de là successivement

$$p^2=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}-2+\left(\frac{a}{x}\right)^{2n}\right\},$$

$$1+p^2=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n\right\}^2\ ; \qquad (9)$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n\right\}\ ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$s+B=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\}.$$

Si l'on veut compter les arcs depuis le point que nous avons considéré comme point de départ du chien, on devra avoir à la fois $s=0$ et $x=a$, ce qui donnera

$$B=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\};$$

puis en retranchant

$$2\frac{s}{a}=\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}-\frac{1}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\}. \qquad (10)$$

D'après les formules (6 et 9), on aura

$$r=\frac{a}{4n}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2n+1}{2}}+\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right\}^2; \qquad (11)$$

d'où on tirera

$$\frac{dr}{dx}=\frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2n+1}{2}}+\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{2n+1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2n-1}{2}}-\frac{2n-1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right\}.$$

le rayon de courbure *maximum* ou *minimum* répondra donc au point pour lequel on aura l'une ou l'autre des deux équations

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2n+1}{2}}+\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2n-1}{2}}=0;$$

$$\frac{2n+1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2n-1}{2}}-\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2n+1}{1}}=0.$$

La première, qui revient à

$$1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}=0\,;$$

donne

$$x=a\sqrt[2n]{-1}\,, \qquad (12)$$

valeur qui ne sera réelle qu'autant que n sera une fonction ayant un dénominateur pair, et qui sera alors égale à $-a$. La seconde donne

$$x=a\sqrt[2n]{\frac{2n-1}{2n+1}}\,; \qquad (13)$$

valeur qui sera toujours réelle, lorsqu'on aura $n>\frac{1}{2}$; mais qui, dans le cas de $n<\frac{1}{2}$ ne sera réelle qu'autant que n sera une fraction ayant un dénominateur pair. Quant au rayon de courbure au point de départ du chien ou $x=a$, il sera $\frac{a}{n}$.

Passons enfin à la recherche de l'équation de la courbe. En remettant pour p sa valeur $\frac{dy}{dx}$ dans la formule (8), on a

$$y+C=\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n-\left(\frac{a}{x}\right)^n\right\}dx\,;$$

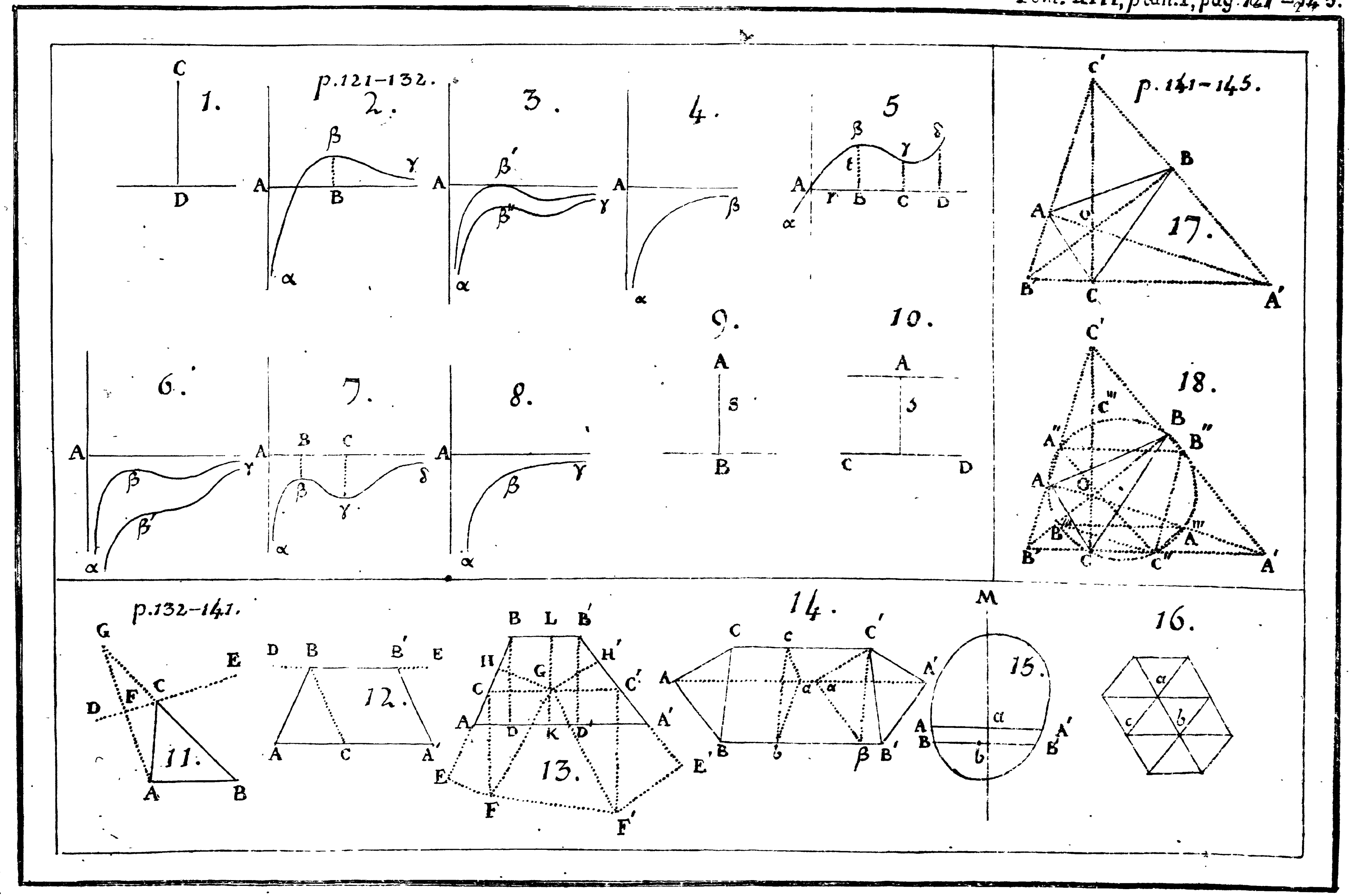
c'est-à-dire

$$y+C=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\}:$$

En se rappelant qu'à $y=0$ doit répondre $x=a$, on aura

$$C=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right\}\,;$$

d'où, en retranchant



J. D. G. fecit.

$$2\,\frac{y}{a}=\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}+\frac{1}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\}. \qquad (15)$$

Telle est donc l'équation de la courbe.

Cette équation peut être mise sous la forme suivante :

$$2\left(\frac{y}{a}+\frac{n}{n^2-1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}$$

de sorte qu'en portant l'origine au point de l'axe des y pour lequel on a

$$y=-\frac{na}{n^2-1}\,, \qquad (16)$$

cette équation deviendra simplement

$$y=\frac{a}{2}\left\{\frac{a}{n+1}\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}+\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\}. \qquad (17)$$

Si l'on pose

$$2y'=\frac{a}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}, \qquad 2y''=\frac{a}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}; \qquad (18)$$

on aura

$$y=y'+y''.$$

En construisant donc les courbes exprimées par les équations (18) ; ce qui sera facile au moyen des logarithmes, les ordonnées de la courbe cherchée seront la somme des leurs.

En désignant par y' la distance du maître à l'origine, lorsque son chien est au point (x, y), on a, pour la distance du chien à son maître,

$$\sqrt{x^2+(y'-y)^2} \ ;$$

mais la formule (2) donne

$$y'-y=-px \ ,$$

ce qui donne, en substituant,

$$x\sqrt{1+p^2} \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}x\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n\right\} ;$$

ou encore

$$\tfrac{1}{2}a\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\}. \qquad (19)$$

Après avoir ainsi déterminé les formules générales, venons à quelques cas particuliers. Supposons, en premier lieu, que la vitesse du chien soit égale à celle de son maître ; on aura alors $n=1$, ce qui rendra infinie une partie du second membre de l'équation de la courbe. Cette circonstance annonce un changement dans la forme de la fonction, et nous oblige de refaire une partie de nos calculs pour ce cas particulier.

Nous aurons ici

$$\frac{ds}{dx}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right\} ;$$

ce qui donnera, en intégrant

$$s+B=\tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a}+a\text{Log.}x\right) ;$$

en se rappelant toujours qu'à $s=o$ doit répondre $x=a$, on aura

$$B=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2a}+a\text{Log}.a\right);$$

d'où, en retranchant,

$$s=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{x^2-a^2}{2a}+a\text{Log}.\frac{x}{a}\right\};$$

ou encore

$$4\frac{s}{a}=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\text{Log}.\left(\frac{x}{a}\right)^2-1;$$

Nous aurons ensuite (11)

$$r=\frac{a}{4}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2;$$

ou bien

$$r=\frac{a}{4}\cdot\frac{\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right\}^2}{\frac{x}{a}};$$

l'abscisse du point pour lequel le rayon de courbure est le moindre, sera

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}};$$

et sa longueur sera

$$r=\frac{4\sqrt{3}}{9}.a:$$

Quant au rayon de courbure au point de départ du chien, il sera égal à a.

On aura enfin

$$y+C=\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)\mathrm{d}x\ ;$$

c'est-à-dire,

$$y+C=\tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a}-a\mathrm{Log}.x\right)\ ;$$

en se rappelant donc qu'à $y=0$ doit répondre $x=a$, on aura

$$C=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2a}-a\mathrm{Log}.a\right)\ ,$$

d'où, en retranchant,

$$4\frac{y}{a}=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\mathrm{Log}.\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\ .$$

Cette équation peut être écrite ainsi

$$y+\frac{a}{4}=\frac{x^2}{4a}-\frac{a}{2}\mathrm{Log}.\frac{x}{a}\ ;$$

d'où l'on voit qu'en descendant l'origine sur l'axe des y de la quantité $\frac{a}{4}$ l'équation de la courbe sera simplement

$$y=\frac{x^2}{4a}-\frac{a}{2}\mathrm{Log}.\frac{x}{a}\ ; \qquad (20)$$

de sorte qu'en posant

$$y'=\frac{x^2}{4a}, \qquad y''=\frac{a}{2}\mathrm{Log}.\frac{x}{a}\ , \qquad (21)$$

on aura

$$y=y'-y''\ .$$

En construisant donc les deux courbes exprimées par les équations (21), dont la première est une parabole ayant pour axe l'axe des y, son sommet à la nouvelle origine, et son foyer à une distance a au-dessus, tandis que la seconde est une logarithmique, les différences de leurs ordonnées correspondantes seront les ordonnées de la courbe cherchée.

On voit aisément, par la forme de l'équation (19), que la courbe est entièrement située du côté des x positives; elle l'est également du côté des y positives; car, pour que y pût être négatif, il faudrait qu'on pût avoir (19)

$$\frac{x^2}{4a} < \frac{a}{2} \text{Log.} \frac{x}{a}, \quad \text{ou} \quad e^{\left(\frac{x}{a}\right)^2} < \left(\frac{x}{a}\right)^2;$$

ce qui est impossible, puisqu'on a, en général, $e^{k^2} = 1 + \frac{k^2}{1} + \frac{k^4}{1.2} + .. > k^2$: Cette courbe est donc entièrement située dans l'angle des coordonnées positives. La valeur de p, qui est ici

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right),$$

fait voir d'ailleurs que x croissant de a à l'infini, p croîtra de zéro à l'infini positif, tandis que, x décroissant de a à zéro, p décroît de zéro à l'infini négatif; et comme d'un autre côté y devient également infinie, soit qu'on fasse x nul ou qu'on le fasse infini, on en doit conclure que la courbe, constamment convexe vers l'axe des x, a deux branches infinies comme la parabole, avec cette différence que ces deux branches n'ont pas la même courbure. On voit, en effet, que l'une d'elles est hyperbolique, ayant l'axe des y pour asymptote, tandis que l'autre a pour asymptote une parabole située du côté de sa concavité et ayant pour équation

$$x^2 = 4ay .$$

Enfin, l'expression générale (19) de la distance du chien à son maître devient, dans le cas actuel,

$$\tfrac{1}{2}a\left\{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\},$$

quantité qui tend sans cesse à se réduire à $\frac{1}{2}a$, à mesure que x devient plus petit. Ainsi, non seulement le chien n'atteindra jamais son maître, mais il en sera toujours à une distance plus grande que la moitié de celle qui l'en séparerait au moment du départ.

Il est facile de conclure de là que, si l'on développait la courbe décrite par le chien, en l'appliquant contre l'axe des y, son extrémité tomberait à une distance $\frac{1}{2}a$ au-dessous du point de départ du maître.

Pour second cas particulier, supposons que la vitesse du maître soit double de celle de son chien, c'est-à-dire, supposons $n=2$. Nous aurons d'abord (10)

$$2\frac{s}{a}=\tfrac{1}{3}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^3-1\right\}-\left\{\frac{a}{x}-1\right\};$$

ou encore

$$2\frac{s}{a}=\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)+3\left(\frac{a}{x}\right)+1\right\}.$$

Nous aurons ensuite (11)

$$r=\frac{a}{8}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2,$$

ou bien

$$r=\frac{a}{8}\cdot\frac{\left\{1+\left(\frac{x}{a}\right)^3\right\}^2}{\frac{x}{a}}.$$

L'abscisse du point pour lequel le rayon de courbure sera minimum, sera (14)

$$x=a\sqrt[4]{\tfrac{3}{5}}\ ;$$

et la longueur de ce rayon sera

$$r=\frac{a}{8}\left\{1+\sqrt[4]{\tfrac{27}{125}}\right\}^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\tfrac{5}{3}}\ .$$

L'équation de la courbe sera (15)

$$2\frac{y}{a}=\tfrac{2}{3}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^3-1\right\}+\left(\frac{a}{x}-1\right):$$

En portant l'origine (16) au point pour lequel on a

$$y=-\tfrac{2}{3}a\ ,$$

cette équation deviendra simplement (17)

$$y=\frac{a}{2}\left\{\tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{x}\right)\right\}\ ;$$

de sorte qu'en posant (18)

$$3\frac{y'}{a}=2\left(\frac{x}{a}\right)^3 \qquad 2\frac{y''}{a}\left(\frac{x}{a}\right)=1\ ,$$

on aura

$$y=y'+y''\ :$$

Les ordonnées de la courbe seront donc la somme de celles d'une parabole cubique et d'une hyperbole ordinaire ayant leur centre commun à la nouvelle origine et situées dans les deux angles des coordonnées de mêmes signes; les nouveaux axes étant les asymptotes de l'hyperbole et celui des x étant une tangente à la parabole cubique. La courbe cherchée aura donc aussi un centre à la nouvelle origine ; elle sera composée de deux parties séparées, parfaitement égales, situées dans les angles des coordonnées de mêmes signes, et ayant chacune deux branches infinies, comme la courbe qui répond au premier cas, dont l'une hyperbolique et l'autre parabolique. Les deux branches hyperboliques auront l'axe des y pour asymptote commune. L'asymptote commune des deux autres sera la parabole cubique. On sent d'ailleurs que la partie de la courbe située dans l'angle des coordonnées positives sera la seule utile au problème.

On trouvera enfin ici (19), pour l'expression générale de la distance du chien à son maître,

$$\tfrac{1}{2}a\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{x}\right)\right\};$$

quantité qui tend à devenir infinie, à mesure que x devient plus petit. Ainsi, l'avance du maître sur son chien croîtra ici indéfiniment.

Pour dernière application, supposons qu'à l'inverse la vitesse du chien soit double de celle de son maître, c'est-à-dire, supposons $n=\frac{1}{2}$. Nous aurons d'abord

$$2\frac{s}{a}=\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{4}{3}.$$

Nous aurons ensuite (11)

$$r=\frac{a}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right)^2;$$

d'où l'on voit que le rayon de courbure sera le plus petit possible lorsque x sera nul, et que sa longueur sera alors $\frac{1}{2}a$.

L'équation de la courbe sera ici (15)

$\frac{y}{a}$

$$2\frac{y}{a}=\tfrac{1}{3}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}-\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\};$$

mais en portant l'origine au point de l'axe des y pour lequel on a (16)

$$y=\tfrac{2}{3}a\ ,$$

elle deviendra simplement (17)

$$y=a\left\{\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\};$$

de sorte qu'en posant

$$y'=\tfrac{1}{3}a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad y''=a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}};$$

c'est-à-dire,

$$9\left(\frac{y'}{a}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^3, \qquad \left(\frac{y''}{a}\right)^2=\frac{x}{a}\ ,$$

on aura

$$y=y'-y''\ .$$

Il est aisé de conclure de là que la courbe est toute située du côté des x positives; qu'elle est symétrique par rapport au nouvel axe des x, qui en est un diamètre principal ; que la nouvelle origine est le sommet de ce diamètre ; que la courbe partant de ce point s'écarte également de l'axe des x, en dessus et en dessous, jusqu'à la distance a de l'axe des y, où il y a une double ordonnée *maximum* égale à $\frac{2}{3}a$; que, passé ce terme, les deux branches se rapprochent de l'axe des x où elles vont se couper à une distance $3a$ de l'origine, en faisant avec lui des angles de 30° ; et qu'ensuite elles se prolongent indéfiniment, en s'écartant de plus en plus de cet axe.

L'expression générale de la distance du chien à son maître (19) devient ici

$$\tfrac{1}{3}a\left(1+\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{x}{a}}\;,$$

qui est nulle en même temps que x. Le chien atteindra donc son maître ; et comme, abstraction faite du signe, pour $x=0$, on a

$$s=\tfrac{4}{3}a\;,$$

il s'ensuit que, lorsqu'il l'atteindra, le maître aura seulement parcouru les $\frac{2}{3}$ de l'intervalle a qui l'en séparait au moment du départ. Mais, afin que la loi de continuité soit maintenue, la figure de la courbe indique que le chien, après avoir atteint son maître, le fuira en conservant toujours une vitesse double de la sienne.

On voit donc, en résumé, qu'excepté le seul cas où les vitesses sont égales, la courbe décrite par le chien est toujours algébrique ; et que, sans qu'il soit nécessaire de faire disparaître les radicaux, ce qui quelquefois pourrait être assez difficile, on pourra toujours commodément la décrire, au moyen de deux courbes auxiliaires dont une sera de la famille comprise sous la formule générale

$$y^p=Ax^q,$$

tandis que l'autre sera de la même famille ou de la famille comprise sous la formule générale

$$x^py^q=B\;,$$

suivant que n sera moindre ou plus grand que l'unité.

ARITHMÉTIQUE.

Addition à l'article sur les puissances et racines numériques, inséré à la page 359 du XII.e volume du présent recueil;

Par M. QUERRET, chef d'institution à St-Malo (*).

Il a été observé, à l'endroit cité, qu'en posant successivement

$$\frac{m}{1}a+b \quad =A_2,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ a^2+bA_1=A_2\ ,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ a^3bA_2=A_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ a^{m-3}+bA_{m-4}=A_{m-3},$$

(*) Tout ce qu'on va lire se trouvait en substance dans l'article rappelé; mais le défaut de développemens suffisans ne nous permit alors d'en comprendre que ce que nous en publiâmes.

J. D. G.

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}+bA_{m-3}=A_{m-2}\,;$$

$$\frac{m}{1}\,a^{m-1}+bA_{m-2}=A_{m-1}\,;$$

$$a^m+bA_{m-1}=A_m\,,$$

on avait

$$A_m=(a+b)^m\ ;$$

et on a appliqué cette remarque à la formation du cube de 47
Nous remarquerons présentemeut que, si l'on pose successivemen.

$$\begin{array}{llll}
A_1 & +b & =A'_1 & , \\
A_2 & +bA'_1 & =A'_2 & , \\
A_3 & +bA'_2 & =A'_3 & , \\
\ldots & \ldots & \ldots & , \\
A_{m-1} & +bA'_{m-2} & =A'_{m-1} & ,
\end{array}$$

on aura

$$A'_{m-1}=\frac{m}{1}\,(a+b)^{m-1}\ ;$$

qu'en posant ensuite

$$\begin{array}{llll}
A'_1 & +b & =A''_1 & ; \\
A'_2 & +bA''_1 & =A''_2 & , \\
A'_3 & +bA''_2 & =A''_3 & , \\
\ldots & \ldots & \ldots & ,
\end{array}$$

$$A'_{m-2}+bA''_{m-3}=A''_{m-2}\ ;$$

on aura

$$A''_{m-2}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ (a+b)^{m-2}\ ;$$

qu'en posant encore

$$A''_{1}\quad +b\qquad\quad =A'''_{1}\quad ,$$

$$A''_{2}\quad +bA'''_{1}\quad =A'''_{2}\quad ,$$

$$A''_{3}\quad +bA'''_{2}\quad =A'''_{3}\quad ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$A''_{m-3}+bA'''_{m-4}=A'''_{m-3}\ ,$$

on aura

$$A'''_{m-3}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ (a+b)^{m-3},$$

et ainsi de suite. On a donc ainsi

$$A_{m}\quad =(a+b)^{m}\ ,$$

$$A'_{m-1}=\frac{m}{1}\ (a+b)^{m-1}\ ,$$

$$A''_{m-2}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ (a+b)^{m-2}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$A_{1}^{(m-1)}=\frac{m}{1}\ (a+b)\ ,$$

$$A_{0}^{(m)}\quad =1\ ;$$

d'où

$$(a+b+c)^m=A_m+cA'_{m-1}+c^2A''_{m-2}+\ldots\ldots+c^{m-1}A_1^{(m-1)}+c^m.$$

Appliquons ce résultat à la formation de la cinquième puissance du nombre 473. Nous avons déjà trouvé, à l'endroit cité.

$$A_1=2070\ ,$$
$$A_2=1744900\ ,$$
$$A_3=762143000\ ,$$
$$A_4=181350010000\ ,$$
$$A_5=22934500700000\ ;$$

d'après quoi on conclura successivement des précédentes formules, en prenant constamment 70 pour b,

$$A'_1=\mathrm{d}140\ ,\quad A''_1=2210\ ,\quad A'''_1=2280,\ A''''_1=2350$$
$$A'_2=1894700\ ,\quad A''_2=2049400\ ,\ A'''_2=2209000\ ,$$
$$A'_3=894772000,\ A''_3=1038240000\ ,$$
$$A'_4=243984050000\ ,$$

$$\begin{array}{rrr}
22934500700000\ . & 1= & 22934500700000\\
243984050000\ . & 3= & 731952150000\\
1038240000\ . & 9= & 9344070000\\
2209000\ . & 27= & 59643000\\
2350\ . & 81= & 190350\\
1\ . & 243= & 243\\
\hline
\end{array}$$

On aura $$(473)^3=23675856753593\ .$$

En renversant le problème, on est conduit, pour l'extraction des racines à un procédé simple et uniforme, qui n'exige que l'emploi de l'addition et de la multiplication par des nombres d'un seul chiffre. Nous allons l'appliquer à un exemple, en nous bornant à la pratique; la théorie pouvant être aisément déduite de ce qui précède.

Soit un nombre entier dont il faille extraire la racine cinquième; et supposons qu'après l'avoir partagé en tranches de cinq chiffres chacune, en allant de droite à gauche, les trois premières tranches à gauche soient

2380,12582,56547,..........;

voici d'abord l'opération, dont nous expliquerons ensuite les détails.

2380,12582,56547,........	473.........
1024	
135612582	
126945007	
866757556547	
741356053593	
125401502954.........	

La racine cinquième en nombre entier de la dernière tranche à gauche étant 4, nous formerons le tableau suivant, dont nous allons expliquer l'organisation

40	1600	64000	2560000	
5	10	10	5	
200	16000	640000	12800000	(M)
7	1449	122143	5335001	
207	17449	762143	18135001	(N)
7	1498	132629	6263404	
214	18947	894772	24398405	
7	1547	143458		
221	20494	1038230		
7	1596			
228	22090			
7				
235				

On écrit d'abord les quatre premières puissances du premier chiffre 4 de la racine, en mettant à la droite de chacune autant de zéros qu'il y a d'unités dans le nombre qui en marque le degré. On écrit au-dessous les quatre coefficiens intermédiaires 5, 10, 10, 5 de la cinquième puissance d'un binome; et on prend les produits des nombres correspondans, ce qui forme une suite dont le dernier nombre est désigné par (M) et que nous appellerons *première suite*

Après

Après avoir écrit sous la dernière tranche du nombre proposé la cinquième puissance de 4 qui est 1024, on fait la soustraction, et on abaisse à la droite du reste la tranche suivante du nombre proposé, ce qui donne un *premier dividende* 135612582, dont la division par le nombre (M) donnera un quotient entier qu'il ne faudra jamais prendre au-dessus de 9, et que le second chiffre de la racine ne pourra jamais excéder. On trouve ici 9.

En soumettant successivement 9 et 8 à la vérification que nous allons expliquer, on les trouve trop grands; on passe donc à 7 que l'on vérifie comme il suit :

Au moyen de la première suite, on forme la seconde et la troisième simultanément de la manière que voici : on écrit 7 sous le premier terme de la première suite, auquel on l'ajoute; on porte le produit de la somme par 7 sous le second terme de la première suite, auquel on l'ajoute; on porte le produit de la nouvelle somme par 7 sous le troisième terme de la première suite, auquel on l'ajoute également; et l'on continue ainsi, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à former le dernier terme de la *troisième suite* que nous avons désigné par (N). C'est parce que le produit de ce dernier terme par 7 est moindre que notre premier dividende que l'on reconnaît que le chiffre 7 peut être admis comme second chiffre de la racine. On porte ce produit sous le premier dividende, on fait la soustraction et l'on abaisse la troisième tranche à la droite du reste, ce qui donne un *second dividende* 866757556547.

Retournant alors de nouveau aux suites; de la troisième on déduit exactement la quatrième et la cinquième, en employant toujours le chiffre 7, de la même manière que la seconde et la troisième avaient été déduites de la première. Par le même procédé on déduit la sixième et la septième de la cinquième, mais en arrêtant celles-ci à un terme de moins; de la septième on déduit pareillement la huitième et la neuvième, que l'on arrête encore à un terme de moins; en poursuivant ainsi, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à deux dernières suites d'un seul terme.

Pour continuer l'opération, on formera le second tableau que voici, et dont nous allons expliquer la formation,

2350	2209000	1038230000	243984050000	(M′)
3	7059	6648177	3134634531	
2353	2216059	1044878177	247118684531	(N′)
3	7068	6669381	3154642674	
2356	2223127	1051547558	250273327205	
3	7077	6690612		
2359	2230204	1058238170		
3	7086			
2362	2237290			
3				
2365				

La *première suite* de ce tableau est formée des derniers nombres des colonnes du précédent, à la droite de chacun desquels on a écrit autant de zéros qu'il y a d'unités dans le nombre qui en indique le rang. Le *second dividende* divisé par le dernier terme de cette suite, que nous avons désigné par (M′), donnera un quotient entier qu'il ne faudra jamais prendre supérieur à 9, et que le troisième chiffre de la racine ne pourra jamais excéder. On trouve ici 3 que l'on vérifiera en continuant exactement le second tableau avec lui comme on avait continué le premier avec 7. Lorsqu'on sera parvenu au dernier terme de la troisième série, que nous avons désigné par (N′), on verra que le produit de ce terme par 3 peut être retranché du second dividende; et c'est à ce caractère que l'on reconnaîtra que 3 peut être admis comme troisième chiffre de la racine. Portant donc le produit de (N′) par 3 sous le second dividende, faisant la soustraction et abaissant à la droite du reste la quatrième tranche, on aura ainsi un *troisième dividende*. On achèvera le second tableau avec 3 comme on avait achevé le premier avec 7; et on se servira des derniers nombres de chaque colonne de ce dernier pour en commencer un troisième, qui devra être employé de la même manière que les deux premiers à trouver un nouveau chiffre de la racine.

Le procédé, dans chaque degré, est susceptible de quelques simplifications que nous n'avons pas cru devoir indiquer pour le cinquième, parce qu'elles rompent l'uniformité du calcul, sans l'abréger d'une manière notable. Cependant, comme elles ne sont pas à négliger, lorsqu'il est question de la racine cubique, nous allons montrer à quoi elles se réduisent dans ce cas.

Supposons qu'ayant à extraire la racine cubique d'un nombre entier et l'ayant partagé en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, les quatre premières tranches à gauche soient 671,507,968,841,......; voici comment on disposera l'opération, dont nous allons expliquer les détails.

671,507,968,841 ;	8756......		
512	19200	(M)	247
159507	1729		
146503	20929	(N)	
13004968	49		
11418875	2270700	(M′)	2615
1586093841	13175		
	2283775	(N′)	
	25		
	229687500	(M″)	26256
	157536		
	229845036	(N″)	
	36		
	23000260800	(M‴)	

La racine du plus grand cube contenu dans la dernière tranche à gauche 671 est 8 qu'on écrit à droite, comme premier chiffre de la racine; son cube 512 étant porté sous la tranche 671 on fait la soustraction, et, à la droite du reste, on abaisse la tranche suivante, ce qui forme le *premier dividende*.

On écrit sous la racine 8 le triple de son quarré que l'on fait suivre de deux zéros, et l'on a ainsi le *premier diviseur*, que nous avons désigné par (M), et qui, divisant le premier dividende, donne un quotient entier qu'on ne doit jamais prendre supérieur à 9, et qui ne saurait être moindre que le second chiffre de la racine. Ce quotient serait ici 8; mais, en le soumettant à la vérification que nous allons indiquer pour 7, on s'assure que c'est ce dernier chiffre qui doit être admis.

Après avoir écrit 7 comme second chiffre de la racine, on écrira ce même chiffre 7 à part, sur la droite de (M), et à sa gauche le triple 24 du premier chiffre 8 de la racine; ce qui donnera le nombre 247, dont on portera le produit par 7 sous (M) auquel on l'ajoutera; ce qui donnera une somme que nous avons désignée par (N); et c'est parce que le produit de ce dernier nombre par 7 peut être retranché du premier dividende qu'on reconnaîtra que 7 peut être admis. Portant donc ce produit sous le dividende, faisant la soustraction et abaissant à la droite du reste la tranche suivante, on obtiendra ainsi le *second dividende*.

Pour continuer l'opération, on portera sous (N) le quarré 49 du second chiffre 7 de la racine; on fera la somme des trois nombres compris dans l'accolade, à la droite de laquelle on écrira deux zéros, et l'on aura ainsi le *second diviseur* que nous avons désigné par (M'), et qui, divisant le second dividende, donnera un quotient entier qu'il ne faudra jamais prendre au-dessus de 9 et qui ne pourra être inférieur au troisième chiffre de la racine. Ce quotient est ici 5, que l'on vérifiera ainsi qu'il suit.

Sur la droite de (M') on écrira 5 et à sa gauche le triple 261 de la racine 87 déjà écrite; ce qui donnera le nombre 2615, dont on portera le produit par 5 sous (M') auquel on l'ajoutera; on aura ainsi une somme que nous avons désignée par (N'); et c'est parce que le produit de cette somme par 5 peut être retranché du second dividende qu'on reconnaîtra que le chiffre 5 peut être admis comme troisième chiffre de la racine. Portant donc sous ce second dividende le produit de (N') par 5, faisant la soustraction, et abaissant à la droite du reste la tranche suivante, on obtiendra le *troisième dividende*.

Pour continuer l'opération, on écrira sous (N′) le quarré 25 du dernier chiffre 5 trouvé à la racine; on prendra la somme des trois nombres compris dans l'accolade, à la droite de laquelle on écrira deux zéros, ce qui donnera le *troisième diviseur* qui, divisant le troisième dividende fera connaître le quatrième chiffre 6 du quotient, que l'on vérifiera de la même manière que les précédens.

ARITHMÉTIQUE.

Evaluation de l'erreur qui peut affecter les quotiens et racines approximatifs ;

Par un ABONNÉ.

DANS la plupart des calculs, les nombres sur lesquels on opère sont des nombres décimaux, et c'est aussi en parties décimales que l'on évalue les résultats de ces calculs.

Lorsque les élémens du calcul sont des nombres rigoureusement exacts, on peut compter avec certitude sur la précision du résultat, à quelque ordre de décimales qu'on en pousse l'approximation.

Mais la plupart des nombres décimaux qu'on emploie dans les calculs sont des nombres approchés, desquels on sait seulement qu'ils ne sont pas fautifs, soit en plus soit en moins, de plus d'une demi-unité décimale du dernier ordre; et alors on ne peut compter sur l'exactitude du résultat que jusqu'à un certain ordre de décimales.

Or, il est de la plus haute importance de connaître à l'avance quel est cet ordre de décimales, soit pour ne pas prolonger vainement des calculs sur les résultats desquels on ne pourrait faire aucun fond, soit pour ne point compliquer ces résultats en pure perte, soit enfin pour ne point faire illusion à soi-même et aux autres sur leur degré de précision.

A la page 376 du XI.e volume du présent recueil, nous avons déjà indiqué comment on pouvait évaluer le *maximum* d'erreur des produits et des puissances des nombres approximatifs. Nous allons présentement compléter cette théorie, en indiquant comment on peut évaluer ce maximum dans les divisions et dans les extractions de racines.

Mais auparavant nous observerons que, comme toutes les opérations sur les nombres décimaux se réduisent à des opérations sur des nombres entiers, sauf une virgule à placer dans le résultat d'une manière convenable, nous pourrons, sans nous écarter de notre but, simplifier la recherche qui nous occupe, en supposant que les nombres sur lesquels nous avons à opérer sont des nombres entiers, fautifs au plus d'une demi-unité, soit en plus soit en moins.

Soit donc, en premier lieu, un nombre entier a à diviser par un autre nombre entier b, tous deux approchés à moins d'une demi-unité prés. Le cas le plus défavorable, et c'est celui que nous devons considérer ici, serait celui où l'un de ces nombres pécherait par excès et l'autre par défaut et où l'erreur en plus, comme l'erreur en moins serait précisément d'une demi-unité; alors le véritable quotient devrait être

$$\frac{a\pm\frac{1}{2}}{b\mp\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{2a\pm1}{2b\mp1},$$

tandis que nous prenons

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{2a}{2b};$$

prenant donc la différence de ces quotiens, nous aurons pour la plus grande erreur possible

$$\frac{2a\pm1}{2b\mp1}-\frac{2a}{2b}=\frac{\pm(a+b)}{b(2b\mp1)};$$

Or,

Or, pour peu que b soit grand, on pourra supprimer l'unité vis-à-vis de $2b$, ce qui donnera simplement

$$\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{b^2};$$

c'est-à-dire, que *la plus grande erreur à craindre sur le quotient de la division de deux nombres entiers, approchés à moins d'une demi-unité, est le quotient de la division de la demi-somme de ces nombres par le carré du diviseur.*

Si, par exemple, le dividende est 732 et le diviseur 324, la limite de l'erreur du quotient sera $\frac{528}{104976}$, c'est-à-dire environ un demi-centième; on pourra donc pousser la division à deux chiffres décimaux, sans craindre d'être en erreur de plus d'une demi-unité décimale du dernier ordre; mais les chiffres décimaux qu'on admettrait au-delà pourraient tous être fautifs.

Mais si, le dividende étant toujours 732, le diviseur était 3,24, les deux chiffres décimaux deviendraient les deux derniers chiffres de la partie entière, de sorte qu'on ne pourrait obtenir le quotient qu'à une demi-unité près.

Si, au contraire, le diviseur restant 324, le dividende était seulement 7,32, on pourrait, sans crainte d'une erreur plus grande qu'une demi-unité décimale du dernier ordre, pousser l'approximation dans le quotient à quatre chiffres décimaux.

Le cas le plus ordinaire est celui où le dividende et le diviseur, considérés comme entiers, s'il est nécessaire, ont le même nombre de chiffres; c'est, par exemple, le cas où l'on divise deux logarithmes l'un par l'autre, et c'est encore celui où l'on divise le sinus et le cosinus naturels d'un angle l'un par l'autre, pour en conclure la tangente. Alors $\frac{1}{2}(a+b)$ se trouve avoir communément autant de chiffres que b, tandis que b^2 en a un nombre double, d'où l'on voit qu'alors, en considérant les deux nombres comme entiers, on peut pousser l'approximation dans le quotient à autant de chiffres décimaux qu'il y a de chiffres dans le diviseur.

Ainsi, par exemple, pour avoir la valeur du nombre $\frac{1}{\varpi}$ à trente chiffres décimaux, comme Euler l'a donnée quelque part, il faut employer le nombre ϖ avec trente chiffres décimaux, et il serait même convenable, pour plus de sureté, d'en employer trente-un.

Soit, en second lieu, un nombre entier a pouvant au plus être fautif d'une demi-unité, duquel il faille extraire une racine dont le degré soit m; on voit que l'erreur à craindre dans le résultat devra être la différence entre $\sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[m]{a\pm\frac{1}{2}}$. Or, cette dernière quantité revient à

$$\sqrt[m]{a}\left\{1\pm\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2a}-\frac{m-1}{1.2.m^2}\,\frac{1}{4a^2}\pm\frac{(m-1)(2m-1)}{1.2.3m^3}\,\frac{1}{8a^3}+\ldots\right\}$$

de laquelle retranchant la première, on obtient, pour l'expression de l'erreur possible,

$$\pm\sqrt[m]{a}\left\{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2a}\mp\frac{m-1}{1.2m^2}\,\frac{1}{4a^2}+\frac{(m-1)(2m-1)}{1.2.3m^3}\,\frac{1}{8a^3}\mp\ldots\right\};$$

or ici, où il ne s'agit que d'une limite, les termes de la série qui suivent le premier sont évidemment négligeables, vis-à-vis de celui-ci, de sorte qu'en faisant abstraction du signe, on peut prendre simplement

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{2ma}=\frac{1}{2m\sqrt[m]{a^{m-1}}};$$

c'est-à-dire que *l'erreur qui peut affecter une racine d'un degré quelconque d'un nombre entier, approché seulement à moins d'une demi-unité, est une fraction qui, ayant l'unité pour numérateur,* *a pour dénominateur la racine du même degré de la puissance du degré immédiatement inférieur du nombre proposé, multipliée par le double de l'exposant de la racine dont il s'agit.*

Si, par exemple, 54324 est le nombre proposé, dont il faille extraire la racine cubique, son quarré sera 2951096976, dont la racine cubique, bornée à la partie entière, sera 1434 qui, multipliée par 6, donnera 8604; de sorte que la limite de l'erreur possible sera

$$\frac{1}{8604} > 0,0001\ ;$$

on ne devra donc pousser l'approximation qu'à trois chiffres décimaux seulement.

Si donc le nombre proposé était 54,324, on pourrait pousser l'approximation, dans l'extraction de la racine, jusqu'à quatre chiffres décimaux.

Supposons, en général, que a soit un nombre entier de n chiffres; a^{m-1} pourra n'en avoir que $(m-1)(n-1)+1$, d'où il suit que $\sqrt[m]{a^{m-1}}$ pourra n'en avoir que $\frac{(m-1)(n-1)+1}{m}$; et, dans les cas les plus ordinaires, son produit par $2m$ pourra n'en avoir pas davantage; la limite de l'erreur sera donc une fraction ayant l'unité pour numérateur, et pour dénominateur un nombre de $\frac{(m-1)(n-1)+1}{m}$ chiffres; d'où il suit qu'il ne faudra pousser l'approximation qu'à un nombre de chiffres décimaux exprimé par

$$\frac{(m-1)(n-1)+1}{m}-1 \quad \text{ou} \quad \frac{(m-1)(n-2)}{m}.$$

Si le nombre entier proposé avait un grand nombre de chiffres, et qu'il fallût en extraire une racine d'un degré très-élevé, 1 et 2 pourraient être négligés vis-à-vis de m et n, d'où l'on voit qu'on pourrait, dans l'extraction de la racine, pousser l'approximation à autant de chiffres décimaux que le nombre proposé aurait lui-même de chiffres.

QUESTIONS PROPOSÉES,

Problème de Dynamique.

Un chien, qui se trouve en un point donné de l'un des bords d'un canal rectiligne d'une largeur constante, apercevant, en un point donné de l'autre bord, son maître qui marche le long de ce bord, avec une vitesse constante, se jette à la nage pour le rejoindre. En nageant, il se dirige constamment vers son maître avec une force toujours la même; mais le courant de l'eau le détourne continuellement, et avec une force constante, de la direction qu'il veut prendre; on demande, d'après ces circonstances, quelle courbe ce chien décrira sur la surface de l'eau?

Problèmes de Statique.

I. Sur un plan rectangulaire inflexible et inextensible, on a invariablement assujetti, par les bords, une autre surface de même grandeur, mais parfaitement flexible et indéfiniment extensible. On introduit entre ces deux surfaces un volume donné d'un fluide incompressible et sans pesanteur; et on demande quelle figure doit affecter alors la dernière des deux surfaces?

II. On suppose qu'il n'existe rien autre chose dans l'univers qu'un fil infiniment délié, parfaitement flexible, mais incompressible et inextensible. On suppose, en outre, que ce fil est invariablement fixé par ses deux extrémités à deux points immobiles dont la distance est moindre que sa longueur. On suppose enfin que les molécules dont ce fil est composé exercent les unes sur les autres une attraction directement proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle aux quarrés de leurs distances aux autres molécules sur lesquelles elles agissent; et on demande quelle courbure le fil affectera dans l'état d'équilibre?

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

Petit traité de perspective linéaire ;

Par M. GERGONNE.

SUPPOSONS qu'un spectateur ayant devant les yeux un riant paysage, on interpose entre lui et les objets qu'il contemple une grande glace verticale, parfaitement transparente ; il est clair qu'il n'y aura absolument rien de changé pour lui dans le spectacle qui s'offrait d'abord à sa vue.

Considérons, en particulier, un point appartenant à l'un des objets dont ce spectacle se compose ; et concevons un fil tendu de ce point à l'œil du spectateur, et perçant la glace en quelque endroit ; cet endroit sera évidemment celui à travers duquel sera vu le point dont il s'agit.

Si donc, en cet endroit même, on appliquait sur la glace un point coloré et opaque, exactement de la teinte sous laquelle se montre l'autre, placé à l'extrémité du fil, ce dernier cesserait d'être visible ; et cependant rien, dans l'aspect des objets, ne serait changé pour le spectateur, puisqu'il recevrait toujours, dans les mêmes directions, les mêmes sensations de couleurs qu'auparavant.

Ce que nous venons de supposer pour un premier point des objets placés en vue du spectateur, nous pouvons le supposer pour un second, pour un troisième, pour dix, pour cent, pour mille, pour tous enfin ; c'est-à-dire, que nous pouvons remplacer chacun d'eux par un point opaque convenablement coloré, et appliqué à l'endroit même de la glace à travers lequel il est aperçu. Cette glace, devenue ainsi tout-à-fait opaque, ne laissera plus rien voir des objets placés derrière elle; et cependant le spectateur croira toujours apercevoir ces mêmes objets.

Que sera donc devenue la glace pour le spectateur? Elle sera devenue ce qu'on appelle *un tableau*. L'objet général de la *perspective* est d'enseigner à colorer ainsi une simple surface, de telle sorte qu'elle offre, pour un spectateur convenablement situé, le même aspect que lui offriraient des objets en relief distribués dans l'espace d'une manière déterminée.

Remarquons, avant d'aller plus avant, 1.° que, bien qu'on suppose communément, et que nous ayons nous-mêmes le dessein de supposer dans tout ce qui va suivre, que la glace destinée à devenir un tableau est une surface plane verticale, on pourrait, tout aussi bien, la supposer une surface plane inclinée, ou même une surface courbe quelconque; 2.° que, bien qu'on suppose aussi que les objets qu'on a dessein de représenter sur le tableau sont situés derrière lui, relativement au spectateur, on pourrait également supposer qu'ils sont, en tout ou en partie, situés du même côté que lui, par rapport au tableau. Nous pensons même que des tableaux construits dans cette dernière hypothèse seraient quelquefois susceptibles d'un très-grand effet.

Le problème général de la perspective se subdivise tout naturellement en deux autres. On peut, en effet, se demander 1.° en quel point du tableau doit être représenté chacun des points des objets que l'on se propose d'y faire figurer; 2.° quelle couleur il faut appliquer en ce point du tableau pour qu'il soit en effet la représentation fidèle du point dont il s'agit. L'art de résoudre cette dernière partie du problème a été appelé *perspective aérienne*, sans doute à cause de l'influence de l'air interposé entre l'œil et les objets sur la couleur apparente de ceux-ci. Bien que cette partie de la perspective soit, jusqu'à un certain point, susceptible de procédés rigoureux, cependant, comme ces procédés ne pourraient être déduits que de considérations physiques assez délicates, et dont l'application présenterait des difficultés de plus d'un genre, elle a été assez peu cultivée; et la plupart des praticiens s'y laissent guider par le coup d'œil et une sorte d'instinct qui, comme on peut le croire, ne les sert pas toujours aussi heureusement qu'on pourrait le désirer. De là la distinction des écoles en école Flamande, école Française, école Italienne, etc. Il est évident que, si les vrais principes étaient mis en pratique, il n'y aurait plus qu'une école unique, celle de la nature.

Quant à la première partie du problème, comme elle est une conséquence fort simple des principes de la géométrie la plus rigoureuse, il y a long-temps que tout le monde est d'accord sur les résultats qu'on en doit obtenir, quoique ceux qui en ont écrit diffèrent souvent dans le détail des procédés qu'ils prescrivent pour parvenir à ces résultats. Comme, dans cette partie, il suffit de tracer certaines lignes pour résoudre les diverses questions qu'elle peut offrir, on lui a donné le nom de *perspective linéaire* : c'est la seule dont il sera question ici.

Dans tout ce qui va suivre, nous ne nous occuperons constamment que du seul cas où le tableau est surface plane; et, pour fixer les idées, nous supposerons aussi constamment que cette surface plane est verticale. Les objets à représenter sur ce tableau pourront d'ailleurs être indistinctement supposés en arrière ou en avant de lui, par rapport au spectateur.

Les objets à représenter seront dits les *objets originaux*, et leur représentation sur le tableau sera dite *la perspective* de ces mêmes objets.

D'après la notion que nous avons donnée de la perspective, on conçoit aisément que le même tableau ne peut représenter les mêmes objets originaux que pour un spectateur unique; et encore faut-il supposer que ce spectateur n'a qu'un œil ouvert. A la vérité, si ce tableau représente des montagnes, des arbres, des nuages, et en général des objets susceptibles de toutes sortes de formes, il arrivera seulement qu'il ne représentera pas, pour deux spectateurs, les mêmes montagnes, les mêmes arbres, les mêmes nuages, etc.; mais si, au contraire, le même tableau représente des objets assujettis à des formes déterminées, des objets susceptibles de description rigoureuse, tels, par exemple, que des monumens d'architecture; alors deux spectateurs non seulement ne pourraient voir, l'un et l'autre, ces objets à leur véritable place; mais même ils pourront paraître tout-à-fait difformes pour l'un d'eux.

Toutefois, lorsque le spectateur s'éloigne peu du point où le peintre a supposé qu'il se placerait, la déformation n'est pas très-choquante, sur-tout lorsque le tableau est fait pour être vu d'un peu loin; et voilà aussi comment il est possible d'exécuter un tableau qui fasse illusion à la fois à plusieurs spectateurs. Le peintre doit alors supposer son spectateur idéal au centre des moyennes distances des têtes de tous les spectateurs, afin que la déformation des objets ne soit pas trop choquante pour aucun d'eux. C'est, en particulier, ce que pratiquent les décorateurs de nos théâtres, qui supposent communément leur spectateur au centre du parterre.

Avant de se proposer de représenter sur un tableau la perspective de divers objets originaux, réels ou supposés, il est donc nécessaire de fixer le point de l'espace où l'on suppose le spectateur; il ne l'est pas moins de fixer aussi, dans l'espace, la situation des objets que l'on se propose de représenter. On parvient au but, en rapportant l'œil et les objets, ainsi que la perspective de ces derniers, à certains plans, à certaines droites et à certains points que nous allons faire connaître.

Outre *le tableau*, on conçoit par l'œil deux autres plans; l'un vertical et perpendiculaire au plan du tableau, qu'on appelle, pour cette raison, *le plan vertical;* et l'autre horizontal, et conséquemment perpendiculaire, comme le premier, au plan du tableau; celui-ci est appelé le *plan horizontal.* Ces deux plans coupent le tableau suivant deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, appelées respectivement *la ligne verticale* et *la ligne horizontale*, lesquelles se coupent en un point qui est évidemment la projection de l'œil sur le tableau, et qu'on appelle *le point de vue*. Enfin, on appelle *rayon principal* la distance de l'œil au point de vue, c'est-à-dire, la perpendiculaire abaissée de l'œil sur le tableau (*).

Toute surface étant composée de lignes et toute ligne de points, le problème fondamental de la perspective consiste à assigner la perspective d'un point original donné. Cela revient évidement à chercher en quel point le tableau est percé par la droite qui joint ce point à l'œil du spectateur.

Lorsqu'un point original est donné, on doit connaître sa projection sur le tableau et sa distance à cette projection. Pour que la situation de l'œil soit donnée, il faut pareillement connaître sa projection sur le tableau, que nous avons appelée le point de vue, et sa distance à cette projection, que nous avons nommée le rayon principal. Ces deux dernières données sont invariables pour tous les points originaux que l'on se propose de représenter sur le tableau.

Soient donc TT le tableau (fig. 1), HH et VV les lignes horizontale et verticale, se coupant au point de vue O′, et soit OO′ le rayon principal, de telle sorte qu'en élevant au plan du tableau par le point O′ une perpendiculaire égale à O′O, cette perpendiculaire aille se terminer à l'œil du spectateur.

(*) Outre les trois plans dont il vient d'être question, les praticiens en considèrent encore uu quatrième horizontal qu'ils supposent être celui du terrain et qu'ils appellent *plan géométral*; et ils donnent le nom de *ligne de terre* à l'horizontale suivant laquelle ce plan coupe le tableau; mais ce plan et cette ligne sont de véritables superfluités, puisque trois plans suffisent pour fixer la situation des points de l'espace; et d'ailleurs on ne sait plus où placer l'un et l'autre, lorsque le terrain n'est pas un plan horizontal, ainsi qu'il peut souvent arriver.

Soient pareillement P' la projection sur le tableau du point original, dont on se propose d'assigner la perspective, et PP' sa distance à cette projection, de telle sorte qu'en élevant au plan du tableau par le point P', du côté opposé à l'œil ou du même côté que lui, suivant que le point original est en arrière ou en avant de ce tableau, une perpendiculaire égale à PP', cette perpendiculaire aille se terminer au point dont il s'agit.

Ces choses ainsi entendues, soit menée sur le tableau, une droite $O'P'$ du point de vue O' à la projection P' sur ce tableau du point original qu'on a dessein d'y représenter. Soit élevée à cette droite au point O', n'importe dans quel sens, une perpendiculaire $O'O$, d'une longueur égale au rayon principal. Soit ensuite élevé à la même droite, au point P', en sens contraire de $O'O$, ou dans le même sens, suivant que le point original est en arrière ou en avant du tableau, une perpendiculaire $P'P$ d'une longueur égale à la distance de ce point original au tableau. En menant OP, coupant $O'P'$ en p, ce point p sera la perspective cherchée.

Si on conçoit, en effet que l'on fasse tourner le plan commun des deux triangles rectangles $pO'O$, $pP'P$ autour de la droite $O'P'$, jusqu'à ce qu'il soit devenu perpendiculaire à celui du tableau, il est visible que, dans cette situation, le point O se confondra avec l'œil du spectateur et le point P avec le point original; la droite OP sera donc alors celle qui va de l'œil à ce point, et qui doit conséquemment percer le tableau au point cherché. Puis donc que dans le mouvement, le point p de cette droite ne quitte pas le tableau, il s'ensuit que ce point est le point cherché.

Ce procédé, comme l'on voit, est déjà fort simple; cependant le grand nombre des perpendiculaires de directions différentes qu'il obligerait à mener, si l'on avait à représenter sur le tableau les perspectives de beaucoup de points, le rendrait d'une exécution un peu lente. On peut donc désirer de le simplifier, et c'est une chose extrêmement facile, comme on va le voir.

Il est connu que, lorsque deux triangles semblables ont leurs côtés homologues parallèles, les droites qui joignent leurs sommets homologues concourent en un même point. Tout étant donc d'ailleurs dans la figure 2, comme dans la figure 1, si l'on porte O′O sur VV en O′O″, et que du point P′ on élève une verticale P′P″ égale à P′P, en joignant OO″ et PP″, les triangles isocèles semblables OO′O″ et PP′P″ auront leurs côtés homologues parallèles; d'où il suit que le point cherché *p* sera tout aussi bien déterminé par l'intersection de O′P′ avec O″P″ que par son intersection avec OP.

Voici donc présentement à quoi se réduit le procédé (fig. 3). On prendra sur VV au-dessous du point de vue O′ une longueur O′O égale au rayon principal; et le point O se trouvera ainsi déterminé une fois pour toutes, et pour tous les points dont on pourra se proposer d'obtenir la perspective. Soit donc P′ la projection de l'un de ces points sur le tableau; on élèvera ou on abaissera en ce point, suivant que le point original sera en arrière ou en avant du tableau, une verticale P′P égale à la distance de ce point original au tableau; menant ensuite OP et O′P′, leur intersection *p* sera la perspective cherchée.

La perspective d'une ligne droite ou courbe, plane ou à double courbure, est évidemment l'ensemble des perspectives de tous ses points; c'est la suite des points où le tableau est percé par les droites menées de l'œil à tous les points de la ligne originale dont il s'agit; c'est donc, en d'autres termes, l'intersection du plan du tableau avec une surface conique qui, ayant son sommet à l'œil, passe par cette ligne originale. La perspective d'une ligne est donc une autre ligne.

En particulier, lorsque la ligne originale est droite, la surface conique se réduit à un plan qui coupe le tableau suivant une autre droite. Ainsi, la perspective d'une ligne droite est elle-même une ligne droite; de sorte qu'il suffit, pour la déterminer, d'assigner les perspectives de deux quelconques des points de la droite originale; ce qui ramène le problème au précédent; mais nous allons voir qu'on peu souvent parvenir au but d'une manière beaucoup plus simple.

D'abord, si une droite originale est parallèle au tableau, sa perspective lui sera parallèle; car d'une part elle devra être avec elle dans un même plan passant par l'œil, et de l'autre elle ne pourrait rencontrer la droite originale sans que celle-ci ne rencontrât le tableau auquel on la suppose parallèle.

La perspective d'une droite originale parallèle au tableau est donc aussi parallèle à la projection de cette droite sur le tableau, projection qui est censée donnée; de sorte que, pour obtenir la perspective demandée, il ne s'agit que d'assigner la perspective de l'un des points de la droite originale, et de mener ensuite par cette perspective, une parallèle à la projection de cette même droite sur le tableau.

On voit par là qu'en particulier si la droite dont il s'agit est horizontale ou verticale, et c'est le cas le plus ordinaire, sa perspective le sera également.

Supposons présentement que la droite originale dont on veut obtenir la perspective ne soit point parallèle au tableau, elle percera ce tableau en un point qui sera à lui-même sa perspective. Si ensuite on conçoit par l'œil une parallèle à cette droite, cette parallèle percera aussi le tableau en un point; et il est encore aisé de voir que ce point sera aussi un des points de la perspective cherchée; on aura donc cette perspective en joignant ce second point au premier par une droite.

Il résulte de cette construction que les perspectives de tant de droites originales parallèles entre elles qu'on voudra, concourent toutes en un même point, lequel n'est autre que celui où le tableau est percé par la parallèle commune à ces droites conduite par l'œil. Il ne s'agit donc, pour tracer ces perspectives, que de déterminer ce point, et de le joindre successivement, par des droites, avec ceux où les droites originales percent le tableau.

On voit qu'en particulier, lorsque les droites originales sont perpendiculaires au tableau, leurs perspectives concourent toutes au au point de vue; dans le cas contraire, le point où concourent ces perspectives est appelé *point de vue accidentel.*

Il n'est pas difficile, d'après ce qui précède, de déterminer la perspective d'un polygone ou d'une portion de polygone rectiligne, plan ou gauche; puisqu'il ne sagit pour cela que de joindre par des droites les perspectives de ses sommets; ce qui donne un polygone ou portion de polygone plan rectiligne.

S'il s'agit de la perspective d'une courbe plane ou à double courbure, on prendra sur elle des points assez voisins les uns des autres pour que les cordes menées consécutivement des uns aux autres se confondent sensiblement avec leurs arcs; ce qui ramenera la question au cas précédent. Mais, lorsque la nature de la courbe originale est connue, on en profite pour simplifier la recherche de sa perspective. Si, par exemple cette courbe est un cercle, sa perspective devra être une section conique, dont il suffira de déterminer les quatre sommets pour être en état de la construire.

S'agit-il de la perspective d'un corps; tout se réduit à assigner la perspective de la ligne qui sépare la portion visible de sa surface de sa portion invisible; laquelle ligne pourra être un polygone rectiligne plan ou gauche, ou une courbe plane ou à double courbure, ce qui rentrera dans l'un des cas précédens. En particulier, si le corps est une sphère, cette ligne sera un cercle; la perspective de la sphère est donc encore une section conique (*).

On suppose quelquefois, dans la pratique, que l'œil se trouve infiniment distant du tableau, sur une droite oblique au plan de ce tableau. Les perspectives des différens points originaux sont alors les points où le tableau est percé par les parallèles menées par ces points à la droite sur laquelle on suppose l'œil situé. On en use ainsi, en particulier, pour les figures de la géométrie à trois dimensions, pour les dessins de machines et d'appareils, ou pour

(*) Voyez, sur ce sujet, la page 311 du VII.e volume de recueil.

ceux des monumens d'architecture isolés ; parce qu'en même temps que les procédés en deviennent plus simples, les représentations des objets en sont moins altérées.

Tracer une carte de géographie, c'est tracer, sur une surface plane, la perspective d'une portion plus ou moins étendue de la surface d'un globe terrestre, réel ou purement idéal. *Le tracé des cartes géographiques* n'est donc qu'une simple application des principes de la perspective ; et, suivant les diverses situations que l'on suppose au plan de la carte et à l'œil du spectateur, par rapport au globe terrestre, on obtient différens systèmes de cartes. Dans le système de Ptolémée, par exemple, le plan du tableau est celui d'un grand cercle, et l'œil du spectateur est à l'un de ses pôles. Il en résulte de ce double avantage que les perspectives des cercles de la sphère sont elles-mêmes des cercles, et que les perspectives de deux cercles se coupent sous le même angle que ces cercles eux-mêmes (*).

L'art d'assigner la figure des ombres des corps, sur les surfaces où elles se projettent, ou ce que l'on appelle la *théorie des ombres*, est également une application de la perspective linéaire. On voit en effet que, pour résoudre les questions du domaine de cette théorie, il n'est question que de considérer la lumière comme l'œil du spectateur, le corps qui projette une ombre comme un objet original, et la surface sur laquelle cette ombre se projette comme le tableau. La recherche de l'ombre se réduira à celle de la perspective sur ce tableau de l'objet original.

Il arrivera seulement ici que les objets originaux seront constamment en avant du tableau, par rapport au spectateur. En particulier, s'il s'agit d'ombres solaires, à raison de l'excessive distance où nous sommes du soleil, on retombera sur le cas où l'œil est infiniment éloigné.

(*) Voyez, sur ce sujet, la page 156 du XI.e volume de ce recueil.

S'il s'agit de figurer, dans un tableau, les ombres que projettent les corps qui y sont représentés, il faudra d'abord déterminer, par ce qui précède, quelles seraient les ombres effectives des objets originaux, et tracer ensuite la perspective de ces ombres; on fera donc, dans ce cas, une perspective de perspective.

En un point quelconque d'une surface plane ou courbe, pris pour centre d'un cadran solaire que l'on se propose de tracer sur cette surface, soit fixé un style parallèle à l'axe du monde. En un quelconque des points de la direction de ce style, concevons qu'on lui élève, dans l'espace, 24 perpendiculaires, faisant consécutivement des angles égaux entre eux, et conséquemment de 15° chacun en dirigeant d'ailleurs ces perpendiculaires de telle sorte que deux perpendiculaires opposées soient avec le style dans un même plan vertical.

Soit ensuite un point lumineux, placé sur le même style, au-delà du pied commun des 24 perpendiculaires; par l'effet de l'existence de ce point, celles-ci projetteront, sur la surface à laquelle le style est fixé, des ombres que l'on saura déterminer d'après ce qui précède: or, ces ombres ne seront autre chose que les lignes horaires du cadran à construire. *La gnomonique* est donc une simple application de la théorie des ombres.

Ainsi, le tracé des cartes géographiques, la théorie des ombres et la gnomonique ne sont que des applications toutes simples de la perspective linéaire qui repose elle-même sur les notions les plus élémentaires de la géométrie.

On a écrit sur toutes ces choses, a l'usage des praticiens, des gros traités qui sont d'ordinaire précédés de quelques notions de géométrie. Peu de ces ouvrages sont utiles à ceux pour qui ils sont écrits, tant parce que les notions de géométrie qu'ils renferment sont superficielles et incomplètes, que parce qu'on ne saurait y considérer tous les cas; de sorte que, lorsque les praticiens se trouvent dans des circonstances que leur livre n'a pas prévu, ils ne savent plus quel parti prendre. Aussi trouvent-ils toujours ces sortes d'ouvrages trop courts. Les véritables géomètres, au contraire, les trouvent trop longs, ou plutôt ne les lisent pas, parce qu'ils n'en ont pas besoin. Les praticiens feraient donc beaucoup mieux de laisser là leurs gros livres et d'étudier la géométrie ; car, en même temps que tout alors leur deviendrait aisé, ils posséderaient une science de plus, qu'ils pourraient appliquer à beaucoup d'autres choses.

On a vu autrefois des professeurs fatiguer leurs élèves, et leur faire consommer beaucoup de temps pour leur enseigner à résoudre péniblement, sans le secours de l'algèbre ou du calcul différentiel, des problèmes de géométrie qui auraient cédé sans effort à l'emploi des procédés de l'une ou de l'autre. Ils croyaient gagner du temps et ne voyaient pas qu'ils en perdaient réellement, et laissaient en même temps ignorer, à ceux qu'ils enseignaient, l'usage de deux leviers puissans, et d'un service très-étendu. Aujourd'hui même, dans nos colléges, on donne des leçons de cosmographie, de géographie et de cristallographie à des élèves qui n'ont pas les premières notions de la géométrie, qu'on a pourtant dessein de leur enseigner ensuite. On sent assez combien ces leçons peuvent leur être intelligibles et profitables.

Lorsqu'une science en domine ainsi un grand nombre d'autres, on ne saurait la placer trop près de l'entrée des cours d'étude; et c'est sans doute le parti qu'on prendrait relativement à la géométrie, si ceux qui ont la direction suprême de l'enseignement n'étaient pas d'ordinaire trop attachés aux anciens usages, et trop peu soucieux de consulter, sur l'enchaînement des études, les hommes qui ont la main à l'œuvre.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la construction du cercle tangent à trois cercles donnés ;

Par un ABONNÉ.
GERGONNE.

Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR,

En examinant avec attention l'ingénieuse théorie par laquelle M. le professeur Durrande, au commencement du XI.^e volume des *Annales*, est parvenu à démontrer géométriquement l'élégante construction que vous avez déduite de l'analise algébrique, à la page 302 du VII^e volume du même recueil, pour la détermination du cercle qui touche à la fois trois cercles donnés, il m'a paru que cette théorie était susceptible de simplification assez notables ; qu'elle pourrait être rendue indépendante de tout calcul, et même de la considération des proportions; et qu'elle devenait ainsi, en quelque sorte, le résultat d'une pure intuition. J'ai l'honneur de vous transmettre le résultat de mes réflexions sur ce sujet, dont vous ferez l'usage que vous jugerez convenable.

J'admets uniquement les principes connus sur les *pôles* et *polaires* et sur les *axes radicaux*, principes que l'on peut démontrer soit à la manière de Monge, soit comme l'a fait M. Durrande, soit de toute autre manière ; et je les rappelle en ces termes:

1. Les sommets de tous les angles circonscrits à un même cercle,

de telle sorte que leurs cordes de contact concourent toutes en un même point, sont tous situés sur une même droite qu'on appelle la *polaire* de ce point, et qui est perpendiculaire à la droite qui le joint au centre.

2. Réciproquement, les cordes de contact de tous les angles circonscrits à un même cercle, de telle sorte que leurs sommets soient tous sur une même ligne droite, concourent toutes en un même point, qu'on appelle le *pôle* de cette droite, et qui se trouve situé sur la perpendiculaire qui lui est menée par le centre.

3. D'où il suit que deux polaires d'un même cercle se coupent au pôle de la droite qui joint leurs pôles, et que réciproquement la droite qui joint deux pôles d'un même cercle a pour pôle l'intersection de leurs polaires.

4. Le lieu de tous les points du plan de deux cercles desquels on peut leur mener des tangentes de même longueur est une droite perpendiculaire à celle qni joint leurs centres, et qu'on appelle *l'axe radical des deux cercles.*

5. Cela posé, soient deux figures semblables quelconques, tracées sur un même plan, et soit un point pris arbitrairement sur l'une d'elles ; si l'on demande son homologue sur l'autre et que les deux figures soient divisibles en m parties égales et superposables, par des droites partant de deux points homologues, le problème aura évidemment m solutions.

6. En particulier, si les figures données sont des polygones réguliers de m côtés, et que le point donné sur l'un d'eux soit autre que son centre, son homologue sur l'autre pourra être pris de $2m$ manières différentes.

7. Des choses analogues auraient lieu, si une droite indéfinie étant tracée arbitrairement par rapport à l'un des polygones, on demandait son homologue par rapport à l'autre.

8. Il suit de là que, deux cercles étant tracés sur un même plan, et un point ou une droite étant donné par rapport à l'un d'eux, ce point ou cette droite pourra avoir une infinité d'homologues par rapport à l'autre. Il suffira en effet que les distances des centres

à ces deux points ou à ces deux droites soient proportionnelles aux rayons ; ce qui assujettira simplement le point cherché à être sur une certaine circonférence, ou la droite cherchée à lui être tangente.

9. Il n'en sera plus de même si l'on détermine, dans les deux cercles donnés, des diamètres que l'on regarde comme homologues, en fixant celles des deux extrémités de ces diamètres que l'on répute homologues, ainsi que les demi-cercles homologues. Il est évident qu'alors le problème d'assigner, pour l'un des cercles, un point ou une droite qui soit l'homologue d'un point ou d'une droite donnés par rapport à l'autre n'admettra plus qu'une solution unique.

10. Soient deux cercles tracés sur un même plan ; on peut toujours, sur la droite qui joint leurs centres, assigner deux points et deux points seulement, l'un entre les centres et l'autre au-delà du centre du plus petit dont les distances à ces deux centres soient proportionnelles aux rayons des deux cercles. Ces points seront les seuls *points homologues communs* que puissent avoir les deux cercles; encore faudra-t-il, pour qu'ils puissent être réputés tels, que l'on considére les diamètres situés sur la droite indéfinie qui joint les centres comme deux diamètres homologues. Ce sont ces deux mêmes points que M. Durrande a désignés, d'après Monge, sous les dénominations de *centres de similitude interne* et *externe.* Leur choix détermine les extrémités des deux diamètres qui doivent être réputées homologues; ces extrémités devant être constamment les plus voisines ou les plus distantes du centre de similitude que l'on choisit comme point homologue commun.

11. Il suit de ces considérations que le point de contact de deux cercles qui se touchent est un centre de similitude qui sera interne ou externe, suivant que les deux cercles se toucheront extérieurement ou seront l'un dans l'autre. On doit aussi remarquer que, lorsque deux cercles sont égaux, leur centre de similitude externe est infiniment éloigné. Quant à leur centre de similitude interne, il est évidemment au milieu de la droite qui joint leurs centres.

12. Deux figures semblables quelconques étant données, et des droites homologues étant tracées dans ces deux figures, si, par des points homologues de ces deux droites, on mène deux nouvelles droites formant, du même côté et dans le même sens, des angles égaux avec les premières, il est connu que ces nouvelles droites seront aussi des droites homologues. Or il est évident que toute droite menée par l'un des deux centres de similitude de deux cercles est dans le même cas par rapport à ces deux cercles; donc elle en est une ligne homologue commune; elle les coupera donc en segmens semblables si elle les coupe; elle sera tangente à l'un si elle l'est à l'autre; et, si elle ne rencontre pas celui ci, elle ne rencontrera pas l'autre non plus.

13. Réciproquement, toute droite homologue commune à deux cercles doit passer par l'un de leurs centres de similitude, puisque la droite qui joint les centres est aussi une droite homologue commune qui doit être coupée par la première en un point homologue commun.

14. Il suit de là que si, considérant comme diamètres homologues de deux cercles ceux qui se trouvent sur la droite qui joint leurs centres, on détermine des points homologues quelconques dans ces deux cercles; la droite qui joindra ces deux points passera par l'un des centres de similitude.

15. Donc, en particulier (11), lorsque deux cercles se touchent, toute droite menée par leur point de contact est une ligne homologue commune; et réciproquement, toute ligne homologue commune doit passer par le point de contact. Il doit donc en être de même de toute droite qui passera par des points homologues de ces deux cercles.

16. Soient trois cercles C, C', C'', et soient

I, E les centres de similitude interne et externe de C et C'',
I', E' ceux de . . . . C'' et C,
I'', E'' ceux de . . . . C et C'.

Les droites $I'I''$ et $E'E''$ seront donc l'une et l'autre (12) lignes homologues

homologues communes à C'' et C et lignes homologues communes à C et C'; elles seront donc homologues communes à C' et C'', et conséquemment elles devront (13) passer par I ou E ; mais, comme il est d'ailleurs évident qu'elles ne pourront ni l'une ni l'autre passer entre les centres de C' et C'', ce sera par E qu'elles passeront toutes deux. Ainsi les centres de similitude externes de trois cercles, pris deux à deux, sont tous trois situés sur une même ligne droite ; et chacun d'eux est en ligne droite avec deux des centres de similitude internes ; de manière que ces six points sont aux intersections de quatre droites. Ce sont ces droites que M. Durrande a nommées *axes de similitude* des trois cercles ; ce sont des lignes homologues communes à ces trois cercles.

17. Donc, en particulier (11), lorsqu'un cercle en touche deux autres, les deux points de contact sont en ligne droite avec l'un des centres de similitude de ces deux derniers ; savoir, le centre de similitude externe ou le centre de similitude interne, suivant que les deux contacts sont de même nature ou de nature différente. Cette droite est donc (11) un axe de similitude des deux cercles.

18. En considérant l'un ou l'autre centre de similitude de deux cercles comme un pôle commun à ces deux cercles, il aura (1) une polaire sur chaque cercle. Les deux polaires relatives à chaque centre sont ce que M. Durrande a appelé *polaires de similitude externes* et *polaires de similitude internes.* Ce sont évidemment des lignes homologues des deux cercles, qui conséquemment, lorsqu'elles les coupent, les partagent en segmens semblables. Le pôle des deux dernières est compris entre elles, tandis que celui des deux premières est hors de l'intervalle qui les sépare.

19. Soit C'' (fig. 4 et 5) l'un des centres de similitude de deux cercles, par lequel soit menée une sécante homologue commune, comprenant dans ces cercles les cordes homologues AB, $A'B'$, dont les pôles soient P, P'; ces deux pôles seront des points homologues des deux cercles, par lesquels menant les perpendiculaires PQ, $P'Q'$ à la droite qui joint les centres, ces perpendiculaires

seront (3, 18) les polaires de similitude relatives au centre C″; et il est de plus évident que les triangles isocèles homologues APB, A′P′B′ seront semblables; mais, en prolongeant PB et P′A′ jusqu'à leur rencontre en R″, et PA et P′B′ jusqu'à leur rencontre en S″, le triangle BR″A′ sera semblable à chacun de ces deux-là, et il en sera de même du triangle B′S″A; ils seront donc isocèles comme eux; de manière que les deux tangentes R″B et R″A′ seront de même longueur, ainsi que les deux tangentes S″B′ et S″A. Donc, si l'on mène R″S″, cette droite sera (4) l'axe radical des deux cercles, et comme telle parallèle aux polaires de similitude.

20. Il suit évidemment de là que, si l'on fait tourner la sécante commune autour du point fixe C″, les points P, P′ et R″, S″, dans leur mouvement, ne sortiront pas des trois parallèles PQ, P′Q′ et R″S″, dont la situation est tout-à-fait indépendante de la direction de cette sécante.

21. Mais, si la sécante devenait tangente, le milieu de l'intervalle entre les points de contact serait (4) un point de l'axe radical: donc cette tangente commune a ses parties interceptées de part et d'autre entre l'axe radical et les deux polaires égales entre elles; d'où il suit que cet axe radical est également distant de l'une et de l'autre.

22. Il résulte de tout ce qui précède que l'axe radical de deux cercles est placé, par rapport à tout cercle qui les touche l'un et l'autre, de la même manière que le sont, par rapport à ces deux-ci, leurs polaires de similitude de même dénomination; savoir, leurs polaires de similitude externes ou leurs polaires de similitude internes, suivant que les deux contacts seront de même espèce ou d'espèces différentes.

Soient en effet deux cercles touchés par un troisième en A et B′ ou bien en A′ et B (fig. 6 et 7); la sécante AB′ ou A′B sera donc (17) un axe de similitude des trois cercles. En achevant donc les figures, comme nous l'avons fait (fig. 4 et 5), les points P, P′, R″ ou S″, pôles respectifs de cette droite par rapport à ces trois cercles, en seront donc des points homologues; d'où il résulte que les droites PQ, P′Q′ et R″S″, qui, passant par ces points, font des angles égaux avec la ligne homologue commune, sont elles-mêmes des lignes homologues.

23. Toutes ces choses ainsi entendues, supposons qu'on demande un cercle qui touche à la fois trois cercles donnés; comme le cercle cherché pourra toucher de deux manières chacun des cercles donnés, il y aura généralement huit solutions possibles, et il faudra d'abord s'entendre sur celle qu'on aura dessein d'obtenir.

Quelle que puisse être cette solution; comme l'on sait faire passer un cercle par trois points donnés, la question se réduira à déterminer le point de contact du cercle cherché avec chacun des trois cercles donnés, ou plutôt avec l'un d'eux, attendu que la méthode qu'on aura suivie pour la recherche de celui-là pourra être également appliquée à chacun des autres.

Soient donc c, c', c'' les trois cercles donnés, C le cercle cherché; et proposons-nous de trouver son point de contact avec c; tout se réduira (15) à trouver deux points p, P qui soient homologues par rapport à ces deux cercles; puisqu'en joignant ces points par une droite, cette droite devra couper c au point de contact cherché.

Or, comme les intersections des lignes homologues sont des points homologues, la recherche des points p, P se réduit à trouver deux droites relatives à c et leurs homologues dans C, ce qui est facile, d'après ce qui précède.

Soit en effet r' la polaire de similitude de c, comparé à c'; polaire externe ou interne, suivant que c et c' devront être touchés par C de la même manière ou d'une manière différente; et soit R′ l'axe radical de ces deux cercles. Soit pareillement r'' la polaire de similitude de c, comparé à c'', polaire externe ou interne, suivant que c et c'' devront être touchés par C de la même manière ou d'une manière différente; et soit R″ l'axe radical de ces deux cercles.

Il vient d'être démontré (22) que r' et R' étaient des lignes homologues de c et C, et qu'il en était de même de r'' et R''. En prenant donc pour p l'intersection de r' et r'', il faudra prendre pour P l'intersection de R' et R''; et alors en joignant pP son intersection avec c sera le point de contact demandé.

On voit par là qu'il y aura quatre manières différentes de prendre p, tandis que P demeurera invariable; on aura donc quatre droites pP, dont chacune déterminera sur c deux points de contact, entre lesquels il faudra faire un choix, d'après la manière dont c' et c'' devront être touchés par C.

Les quatre droites r', r'', R', R'' forment un parallélogramme dont la droite qui coupe c aux points de contact cherchés est une diagonale. Mais si ρ' et ρ'' sont respectivement, sur c' et c'', les homologues de r' et r'' sur c, les quatre droites r', r'', ρ', ρ'' formeront également un parallélogramme; et il résulte de ce qui a été dit (21) que ses côtés seront doubles de ceux du premier; il lui sera donc semblable; d'où il suit que, si ϖ est l'intersection de ρ' et ρ'', la droite pP, prolongée, s'il le faut, passera par ϖ. On pourra donc, dans la recherche de cette droite, substituer les polaires ρ' et ρ'' aux axes radicaux R' et R''; de sorte que, pour la solution complète des huit cas du problème, on n'aura réellement à mener que les douze polaires de similitude des cercles pris deux à deux, et douze diagonales de parallélogrammes formés par leur rencontre.

Il me semble, Monsieur, que, pour qui aura bien compris ce qui précède, il ne sera pas difficile d'amener au même degré de simplicité l'analise du problème où il s'agit de décrire une sphère qui touche à la fois quatre sphères données; et c'est pour cela que je me dispense de traiter ici ce problème.

Agréez, etc.

Paris, le 10 d'août 1822.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux derniers problèmes de géométrie proposés à la page 380 *du XII.*[e] *volume du présent recueil ;*

Par M. GERGONNE.

PROBLÈME I. *Assigner l'arc de courbe le moins long, entre tous ceux qui, se terminant aux deux extrémités de la base d'un triangle isocèle donné, et étant en ces points tangens aux deux autres côtés du triangle, partagent son aire en raison donnée ?*

Solution. Ce problème semble, au premier aspect, présenter une sorte de paradoxe. Il est d'abord d'une évidente possibilité ; et, si quelque doute pouvait s'élever ici, ce serait uniquement sur la question de savoir s'il peut admettre plusieurs solutions, ou si, au contraire, il n'en admet qu'une seule ; mais, d'un autre côté, si on lui applique la méthode des variations, on le trouve, en général, plus que déterminé, et de nature à présenter un ensemble de conditions tout-à-fait inconciliables.

On sait, en effet, que cette méthode, d'accord en cela avec les considérations les plus évidentes de la géométrie pure, indique positivement l'arc de cercle comme le moins long entre tous les arcs de courbes qui, avec d'autres lignes données quelconques, concourt à enfermer un même espace plan donné. Or, dans la question qui nous occupe, la condition d'avoir pour corde la base du triangle et celle de partager son aire en raison donnée, suffisent à elles seules pour déterminer l'arc de cercle cherché, qui ne pourra ainsi qu'accidentellement, et dans des cas particuliers seulement, satisfaire à la condition de tangence avec les deux autres côtés de ce triangle. Et si, au contraire, on combine seulement cette dernière condition avec celle qui exige que l'arc de cercle ait pour corde la base du triangle; cet arc se trouvera encore, par ces deux seules conditions, tout-à-fait déterminé; de sorte que ce ne pourra être qu'accidentellement, et dans des cas particuliers, qu'il divisera l'aire de ce triangle suivant la raison donnée.

On peut d'ailleurs s'assurer bien facilement, et indépendamment de la méthode des variations, que tout arc de courbe, autre qu'un arc de cercle, ne saurait résoudre le problème. Soient, en effet, AB la base et S le sommet du triangle dont il s'agit (fig. 8); et supposons qu'on veuille prétendre que le plus petit des arcs de courbes qui, ayant AB pour corde commune et SA, SB pour tangentes communes en A et B, partagent l'aire du triangle en raison donnée, est un certain arc ADEB, différent d'un arc de cercle; en détachant de l'espace ADEB un segment plus ou moins grand, par une corde arbitraire DE, et remplaçant ce segment par un segment de cercle équivalent, ayant la même corde; l'arc de cercle correspondant; augmenté des arcs restans DA et EB de l'autre courbe, formerait une ligne discontinue qui, remplissant d'ailleurs toutes les autres conditions du problème, serait moins longue que la première qui ne jouirait pas conséquemment de la propriété du *minimum* de longueur, ainsi qu'on l'avait d'abord supposé.

Il est donc absolument hors de doute que la partie de la ligne cherchée non adhérente aux côtés égaux du triangle ne saurait être qu'un arc de cercle; et dès-lors voici la seule manière dont le problème puisse être résolu. Soit toujours ASB le triangle donné (fig. 9). Soit menée à sa base une parallèle arbitraire XY, qui en retranche, du côté de cette base, une portion moindre que celle qu'en doit retrancher la ligne cherchée. Sur XY, comme corde, et du côté du sommet, soit construit un segment de cercle XVY qui complète la portion à retrancher; nous aurons alors une ligne discontinue AXVYB, qui aura pour corde la base AB du triangle, qui sera tangente en A et B à ses deux autres côtés, puisque ses parties AX et BY se confondront avec eux, et qui partagera en outre l'aire du triangle suivant la raison donnée; cette ligne AXVYB remplira donc toutes les conditions du problème, sauf peut-être la condition du *minimum* de longueur; tout se réduira donc à profiter de l'indétermination de la distance de la base à sa parallèle XY, pour faire en sorte que cette dernière condition soit remplie; et c'est ce dont nous allons présentement nous occuper.

Tout étant d'ailleurs dans la figure 10 comme dans les précédentes, soient XY et XVY la corde parallèle à la base et l'arc correspondant qui résolvent le problème; soit joint le sommet S au milieu C de la base AB, par une droite qui sera perpendiculaire sur cette base, ainsi que sur la corde XY, coupera cette corde ainsi que son arc en leurs milieux Z et V, et divisera l'angle S en deux parties égales; cette droite contiendra le centre de l'arc, qui se trouvera ainsi en quelque point O de sa direction.

Faisons

$$\mathrm{SA}=a\,;\qquad \mathit{Ang}.\mathrm{ASC}=\alpha\,,$$

$$\mathrm{SX}=x\,,\qquad \mathit{Ang}.\mathrm{VOX}=t\,,$$

nous aurons

$$\mathrm{SC}=a\mathrm{Cos}.\alpha\,,\qquad \mathrm{AC}=a\mathrm{Sin}.\alpha\,;$$

$$\mathrm{SZ}=x\mathrm{Cos}.\alpha\,,\qquad \mathrm{XZ}=x\mathrm{Sin}.\alpha\,,$$

d'où nous conclurons

$$\mathrm{AX}=a-x\,,\qquad \mathrm{CZ}=(a-x)\mathrm{Cos}.\alpha\,;$$

en conséquence de quoi nous trouverons

$$Trapèze.\mathrm{CAXZ}=\frac{\mathrm{CA}+\mathrm{ZX}}{2}.CZ=\tfrac{1}{2}(a^2-x^2)\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha\,.$$

Le triangle SXO donnera ensuite

$$\mathrm{OX}=\frac{x\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.t},\quad \text{d'où}\quad \mathrm{OZ}=\frac{x\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.t}{\mathrm{Sin}.t}\ ;$$

d'où on conclura successivement

$$Arc.\mathrm{VX}=\frac{tx\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.t}\ ,$$

$$Sect.\mathrm{VOX}=\frac{tx^2\mathrm{Sin}.^2\alpha}{2\mathrm{Sin}.^2t}\ ,$$

$$Triang.\mathrm{OZX}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{OZ}\,.\,\mathrm{ZX}=\frac{x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.t}{2\mathrm{Sin}.^2t}\ ,$$

$$Demi\text{-}segment.\,\mathrm{VXZ}=\frac{x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha}{\mathrm{Sin}.^2t}(t-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.t)=\varpi r^2\ ,$$

si donc on exige que la surface totale AXVYB soit équivalente à celle ϖr^2 d'un cercle dont le rayon donné est r, il faudra que sa moitié CAXV soit moitié de celle de ce cercle, ce qui donnera l'équation

$$(a^2-x^2)\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha+\frac{x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha}{\mathrm{Sin}.^2t}(t-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.t)=\varpi r^2\ ;$$

au moyen de laquelle, en se donnant arbitrairement une des deux variables x et t, l'autre se trouvera aussitôt déterminée. Si, par exemple, c'est t qui est donnée, on tirera de cette équation

$$x=\mathrm{Sin}.t.\sqrt{\frac{\varpi r^2-a^2\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha}{[t\mathrm{Sin}.\alpha-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.(t+\alpha)]\mathrm{Sin}.\alpha}}\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$b=$

$$b=\sqrt{\frac{\varpi r^2-a^2\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}\alpha}{\mathrm{Sin.}\alpha}}\ ;$$

on aura simplement

$$\frac{x}{\mathrm{Sin.}t}=\frac{b}{\sqrt{t\mathrm{Sin.}\alpha-\mathrm{Sin.}t\mathrm{Sin.}(t+\alpha)}}\ ;$$

Cela posé, on a

$$\textit{Longueur}\ \mathrm{AXV}=\mathrm{AX}+\mathrm{XV}=a-x+\frac{tx\mathrm{Sin.}\alpha}{\mathrm{Sin.}t}\ ;$$

ou encore

$$\mathrm{AXV}=a+(t\mathrm{Sin.}\alpha-\mathrm{Sin.}t)\frac{x}{\mathrm{Sin.}t}\ ;$$

mettant donc pour $\frac{x}{\mathrm{Sin.}t}$ la valeur trouvée ci-dessus, il viendra

$$\mathrm{AVX}=a+b\,.\frac{t\mathrm{Sin.}\alpha-\mathrm{Sin.}t}{\sqrt{t\mathrm{Sin.}\alpha-\mathrm{Sin.}t\mathrm{Sin.}(t+\alpha)}}\ ;$$

il s'agira donc de prendre t de telle sorte que cette quantité soit un *minimum*; ce qui se réduira à rendre telle la quantité

$$\frac{t\mathrm{Sin.}\alpha-\mathrm{Sin.}t}{\sqrt{t\mathrm{Sin.}\alpha-\mathrm{Sin.}t\mathrm{Sin.}(t+\alpha)}}\ ;$$

égalant donc à zéro la différentielle de cette dernière, prise par rapport à t, il viendra, toutes réductions faites,

$$(\mathrm{Sin.}t-t\mathrm{Cos.}t)\{1-\mathrm{Sin.}(t+\alpha)\}=0\ .$$

L'égalité du premier facteur à zéro donnerait $t=0$; de sorte que la partie retranchée du triangle se réduirait à un trapèze, ce qui ne peut convenir au *minimum*, puisqu'en retranchant à la partie supérieure du trapèze une portion si petite qu'on voudrait, par une parallèle à ses bases, et en remplaçant la portion retranchée par un segment de cercle équivalent et de même base, on aurait une ligne totale moins longue que la première. C'est donc l'autre facteur qu'il faut égaler à zéro ; on doit donc avoir, pour le *minimum*,

$$\text{Sin}\,(t+\alpha)=1\,,$$

c'est-à-dire, que les angles t et α doivent être supplément l'un de l'autre, ou que la droite OX doit être perpendiculaire à SX, ou qu'enfin la droite XY doit être à telle distance de la base AB du triangle que l'arc XVY soit tangent à ses deux autres côtés en X et Y. Il arrivera donc ainsi que la ligne totale AXVYB qui résoudra le problème sera aussi peu discontinue qu'elle puisse l'être.

On a donc ainsi

$$t=\tfrac{1}{2}\varpi-\alpha\,,\qquad \text{Sin.}t=\text{Cos.}\alpha\,,\qquad \text{Cos.}t=\text{Sin.}\alpha\,,$$

ce qui donne

$$x=\frac{h\text{Cos.}\alpha}{\sqrt{(\tfrac{1}{2}\varpi-\alpha)\text{Sin.}\alpha-\text{Cos.}\alpha}}=\sqrt{\frac{\varpi r^2-a^2\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha}{[(\tfrac{1}{2}\varpi-\alpha)\text{Tang}\,\alpha-1]\text{Tang.}\alpha}}\;;$$

et la longueur de la ligne *minimum* sera

$$\text{AXVYB}=2a+2(\alpha\text{Sin.}\alpha-\text{Cos.}\alpha)\sqrt{\frac{\varpi r^2-a^2\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha}{[(\tfrac{1}{2}\varpi-\alpha)\text{Sin.}\alpha-\text{Cos.}\alpha]\text{Sin.}\alpha}}\,.$$

Si, par exemple, on demandait que cette ligne divisât le triangle en deux parties équivalentes, on devrait avoir

$$\varpi r^2 = \frac{1}{2} a^2 \text{Sin.}\alpha \text{Cos.}\alpha \;;$$

ce qui donnerait

$$x = \frac{a\text{Cos.}\alpha}{\sqrt{2-(\varpi-2\alpha)\text{Tang.}\alpha}} \;;$$

et la longueur de la ligne cherchée serait alors

$$\text{AXVYB} = 2a + \frac{2a(\alpha\text{Sin.}\alpha - \text{Cos.}\alpha)}{\sqrt{2-(\varpi-2\alpha)\text{Tang.}\alpha}} \,.$$

On voit, par ce qui précède, que, s'il s'agissait de trouver une courbe qui, ayant pour corde la base d'un rectangle, étant tangente aux côtés adjacens aux deux extrémités de cette base et divisant le rectangle en raison donnée, eût la moindre longueur possible, la partie retranchée devrait être un autre rectangle surmonté d'un demi-cercle.

PROBLÈME II. Assigner la portion de surface courbe la moins étendue, entre toutes celles qui, se terminant à la circonférence de la base d'un cône droit donné, et touchant sa surface convexe suivant cette circonférence, partagent son volume en raison donnée?

Solution. Ce problème donne lieu à des observations tout-à-fait analogues à celles que nous avons faites sur le précédent, et que, pour cette raison, nous nous dispenserons de répéter ici; il s'ensuit que, pour le résoudre, il faut d'abord faire dans le cône une section par un plan parallèle à sa base, et assez peu distant de cette base pour qu'il ne retranche pas de son volume toute la portion exigée par l'énoncé du problème; en construisant ensuite sur la section comme base, et du côté du sommet, un segment sphérique qui complète ce qui manque de volume au tronc pour que le cône soit divisé suivant la raison donnée, la calotte qui terminera le segment, augmentée de la zone conique comprise entre elle et la base du cône formera une surface discontinue qui remplira toutes les conditions du problème, sauf celle du *minimum* de surface; et il ne s'agira plus que de profiter de l'indétermination de la distance du plan coupant à la base du cône, pour faire en sorte que cette dernière condition soit remplie.

Supposons que la figure 10 représente la section du cône par un plan quelconque passant par son axe; et concevons les mêmes dénominations et notations que ci-dessus. Alors AC et XZ seront les rayons des deux bases du tronc de cône, dont la hauteur sera CZ; ZV sera la flèche du segment sphérique, dont le rayon sera OX ou OV; la droite AX et l'arc VX seront les lignes génératrices de la zone conique et de la calotte sphérique; enfin α sera l'angle générateur du cône, et t sera l'angle générateur d'un autre cône dont il faudra retrancher le volume de celui du secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire VOX pour obtenir le volume du segment sphérique.

Ces choses ainsi entendues, on aura d'abord, pour le volume du tronc de cône engendré par la révolution du trapèze CAXZ,

$$\tfrac{1}{3}\varpi(a^3-x^3)\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}\alpha\ ;$$

on trouvera ensuite successivement

$$\textit{Cir.}\text{OX}=2\varpi\,.\,\frac{x\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}t}\ ;$$

$$\text{VZ}=\text{OX}-\text{OZ}=\frac{x\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}t}(1-\text{Cos.}t)\ ;$$

$$\textit{Calotte}\ \text{VX}=2\varpi\,.\,\frac{x^2\text{Sin.}^2\alpha}{\text{Sin.}^2t}(1-\text{Cos.}t)\ ,$$

$$\textit{Sect.}\text{VOX}=\tfrac{2}{3}\varpi\,.\,\frac{x^3\text{Sin.}^3\alpha}{\text{Sin}^3t}(1-\text{Cos.}t)\ ,$$

$$\textit{Cercle}\ \mathrm{ZX}=\varpi x^2\mathrm{Sin.}^2\alpha\ ;$$

$$\textit{Cône}\ \mathrm{OZX}=\tfrac{1}{3}\,\varpi.\frac{x^3\mathrm{Sin.}^3\alpha\mathrm{Sin.}^2t\mathrm{Cos.}t}{\mathrm{Sin.}^3t}\ ,$$

$$\textit{Segm.}\mathrm{VXZ}=\tfrac{1}{3}\,\varpi.\frac{x^3\mathrm{Sin.}^3\alpha}{\mathrm{Sin.}^3t}\,(1-\mathrm{Cos.}t)^2(2+\mathrm{Cos.}t)\,.$$

Si donc on veut que le corps engendré par la révolution de la génératrice VXA détache du cône une portion équivalente au volume d'une sphère dont le rayon donné est r, on devra avoir,

$$(a^3-x^3)\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha+\frac{x^3\mathrm{Sin.}^3\alpha}{\mathrm{Sin.}^3t}(1-\mathrm{Cos.}t)^2(2+\mathrm{Cos.}t)=4\varpi r^3\ ;$$

équation qui détermine chacune des deux indéterminées x et t au moyen de l'autre, et de laquelle on tire, en particulier,

$$x=\mathrm{Sin.}t\sqrt[3]{\frac{4r^3-a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha}{[2\mathrm{Sin.}\alpha(1-\mathrm{Cos.}t)-\mathrm{Sin.}^2t\mathrm{Sin}\,(t+\alpha)]\mathrm{Sin.}^2\alpha}}\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$b=\sqrt[3]{\frac{4r^3-a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha}{\mathrm{Sin.}\alpha}}\ ,$$

on aura simplement

$$\frac{x}{\mathrm{Sin.}t}=\frac{b}{\sqrt[3]{2\mathrm{Sin.}\alpha-\mathrm{Sin.}^2t\mathrm{Sin.}(t+\alpha)}}\ .$$

Cela posé, la surface de la zone conique engendrée par AX est

$$\varpi(a^2-x^2)\mathrm{Sin.}^2\alpha\ ;$$

en y ajoutant donc la surface de la calotte sphérique, déjà déterminée ci-dessus ; nous aurons pour la surface totale engendrée par la ligne VXA,

$$\varpi a^2\text{Sin}.\alpha+\varpi\text{Sin}.\alpha\left\{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t\right\}\frac{x^2}{\text{Sin}.^2t};$$

en y introduisant donc pour $\frac{x}{\text{Sin}.t}$ la valeur trouvée ci-dessus, elle deviendra

$$\varpi a^2\text{Sin}.\alpha+\frac{\varpi b^2\text{Sin}.\alpha\left\{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t\right\}}{\sqrt[3]{\left\{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t\,\text{Sin}.(t+\alpha)\right\}^2}};$$

telle est donc la quantité qui doit être *minimum* ; ce qui se réduit à rendre telle la quantité

$$\frac{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t}{\left\{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t\,\text{Sin}.(t+\alpha)\right\}^{\frac{2}{3}}};$$

égalant donc sa différentielle à zéro, il viendra, toutes réductions faites,

$$(1-\text{Cos}.t)^2\left\{1-\text{Sin}.(t+\alpha)\right\}=0\,.$$

L'égalité du premier facteur à zéro donne $t=0$ qui, pour des raisons tout-à-fait analogues à celles que nous avons données ci-dessus, ne saurait convenir au *minimum* ; c'est donc le second qu'il faut égaler à zéro pour l'obtenir ; il faut donc encore ici que l'angle t soit supplément de l'angle α ; la calotte sphérique qui, avec la zone conique, doit composer la surface résolvant le problème doit donc être tangente à cette zone suivant la circonférence par laquelle elle s'unit à elle ; la surface qui résout le problème est donc encore ici aussi peu discontinue qu'elle puisse l'être.

D'après ce résultat, on trouvera

$$x=\sqrt[3]{\frac{(a^3\text{Sin}.^2\alpha\text{Cos}.\alpha-4r^3)\text{Cos}.\alpha}{(1-\text{Sin}.\alpha)^2\text{Tang}.^2\alpha}};$$

et la surface *minimum* aura pour expression

$$\varpi\left\{a^2\text{Sin}.\alpha+\sqrt[3]{\frac{(a^3\text{Sin}.^2\alpha\text{Cos}.\alpha-4r^3)^2(1-\text{Sin}.\alpha)^2}{\text{Sin}.\alpha}}\right\};$$

Si, par exemple, on demande que le cône soit partagé en deux parties équivalentes, on devra avoir

$$4r^3=\tfrac{1}{2}a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha\ ,$$

ce qui donnera

$$x=a\mathrm{Cos.}\alpha\sqrt[3]{\frac{\mathrm{Cos.}\alpha}{2(1-\mathrm{Sin.}\alpha)^2}}\ ;$$

et la surface *minimum* sera

$$\tfrac{1}{2}\varpi a^2\mathrm{Sin.}\alpha\left\{2+\sqrt[3]{2(1-\mathrm{Sin.}\alpha)^2\mathrm{Cos.}^2\alpha}\right\}\ .$$

Si, au lieu d'un cône, c'était un cylindre droit qu'il fallût diviser en raison donnée, on voit, par ce qui précède, que la calotte sphérique devrait être alors un hémisphère.

Concevons que sur la base d'un cône ou d'un cylindre droit creux, en fer-blanc, par exemple, on ait appliqué un cercle de même grandeur d'une étoffe parfaitement flexible et élastique, comme serait, à peu près, un morceau de vessie, et que l'on ait assujettie invariablement sur cette base, par sa circonférence seulement. Si alors, à l'aide d'une petite ouverture pratiquée dans la base, et au moyen d'une pompe de compression ou d'un soufflet, on introduit de l'air entre cette base et le cercle de vessie, il est aisé, par ce qui précède, de voir ce qui arrivera. On voit en effet que le morceau de vessie se courbera d'abord en calotte sphérique d'un rayon continuellement décroissant, et continuera d'affecter cette figure, jusqu'à ce qu'il y ait assez d'air introduit pour rendre la calotte tangente à la surface latérale du cône ou du cylindre; mais ce terme une fois atteint, si on continue à introduire de l'air, la partie de la vessie la plus voisine du bord s'appliquera exactement contre la surface latérale du cône ou du cylindre, où elle formera une sorte de zone, tandis que le surplus continuera à se développer en une calotte sphérique, formant un prolongement à la zone, à laquelle elle sera tangente de toutes parts.

Les choses se passeraient à peu près de même si, au cône ou au cylindre, on substituait un vase conique ayant le diamètre de son ouverture plus grand que celui de son fond, avec cette seule différence qu'ici la calotte sphérique pourrait devenir plus grande que l'hemisphère, et demeurerait constamment telle dès qu'elle le serait devenue.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'Acoustique.

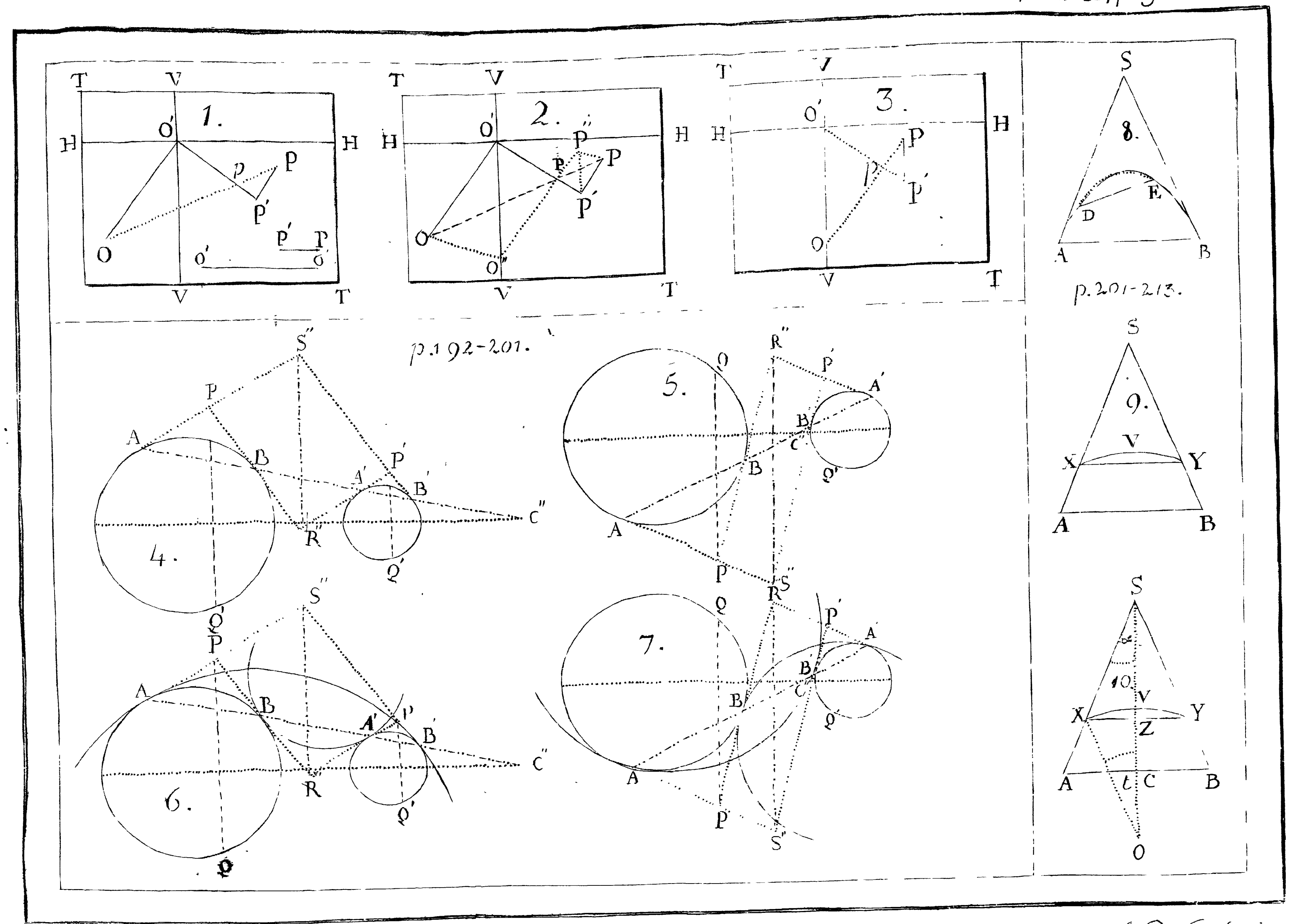
Une modulation mineure est bien établie, soit par les accords fondamentaux du ton fréquemment rebattus, soit par une phrase de chant terminée par une cadence parfaite. Pour fixer les idées, on suppose que cette modulation soit celle de *la mineur.*

Cela posé, on propose de faire marcher la basse par semi-tons chromatiques, depuis la tonique *la* jusqu'à son octave supérieure, chaque note portant harmonie; et l'on demande quelle serait la succession d'accords la plus propre à maintenir toujours l'oreille dans le même ton de *la mineur*. On propose également de trouver une pareille succession d'accords, dans le cas où, au contraire, la basse descendrait, par semi-tons chromatiques, de la tonique *la* à son octave inférieure. On propose enfin d'assigner les deux mêmes successions d'accords dans le cas du mode majeur? (*)

Théorème de Géométrie.

Deux hyperboles équilatères quelconques tellement disposées l'une par rapport à l'autre, que les diamètres principaux de chacune sont les asymptotes de l'autre, se coupent toujours à angle droit.

(*) Dans les partitions des grands maîtres, on trouve bien des passages chromatiques de plusieurs notes consécutives, avec une harmonie conservant l'impression du ton dominant; mais il ne paraît pas qu'on y rencontre un passage de 12 semi-tons consécutifs où le sentiment de la même tonique se trouve maintenu. La solution de cette difficulté semblerait devoir offrir beaucoup de ressources et de moyens de variété à l'harmoniste habile dans l'art de préluder, attendu que connaissant alors non seulement tous les accords du ton dans lequel il se trouverait, mais encore les accords éloignés qui pourraient s'y rattacher, il se trouverait ainsi beaucoup plus maître de son clavier, et pourrait par conséquent produire plus facilement des effets désirés.



J. D. G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Solution d'une difficulté connue que présente la théorie des fonctions angulaires, relativement au développement des puissances fractionnaires des cosinus;

Par M. Crelle, docteur en philosophie, membre du conseil supérieur des bâtimens civils de Prusse.

1.

On a

$$2\mathrm{Cos}.x=(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)+(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)\ ;$$

mais

$$(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)=1\ ;$$

d'où

$$\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x=\frac{1}{\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x}\ ;$$

donc

$$2\mathrm{Cos}.x=\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x+\frac{1}{\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x}\ ;$$

Si donc, pour abréger, on pose

$$\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x=u\ ,$$

on aura

$$2\mathrm{Cos.}x = u + \frac{1}{u}\ ;$$

cela donne

$$(2\mathrm{Cos.}x)^m = \left(u + \frac{1}{u}\right)^m = u^m + \frac{m}{1}u^{m-2} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}u^{m-4}$$
$$+ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}u^{m-6} + \ldots\ldots$$

ou bien

$$(2\mathrm{Cos.}x)^m = \left(\frac{1}{u} + u\right)^m = u^{-m} + \frac{m}{1}u^{-m+2} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}u^{-m+4}$$
$$+ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}u^{-m+6} + \ldots\ldots$$

Ces deux développemens ont évidemment lieu pour une valeur quelconque de m.

Mais on a, comme l'on sait, aussi pour une valeur quelconque de m,

$$(\mathrm{Cos.}x + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x)^m = \mathrm{Cos.}mx + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}mx\ ;$$

ce qui donne successivement

$$u^m = \mathrm{Cos.}mx + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}mx\ ;$$

$$u^{-m} = \mathrm{Cos.}mx - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}mx\ ,$$

$$u^{m-2} = \mathrm{Cos.}(m-2)x + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}(m-2)x\ ,$$

$$u^{-m+2} = \mathrm{Cos.}(m-2)x - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}(m-2)x\ ,$$

$$u^{m-4} = \mathrm{Cos.}(m-4)x + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}(m-4)x\ ,$$

$$u^{-m+4} = \mathrm{Cos.}(m-4)x - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}(m-4)x\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

ce qui donne, en substituant,

$$(2\text{Cos}.x)^m = \text{Cos}.mx + \frac{m}{1}\,\text{Cos}.(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos}.(m-4)x + \ldots\ldots$$

$$\pm\sqrt{-1}\left[\text{Sin}.mx + \frac{m}{1}\,\text{Sin}.(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Sin}.(m-4)x + \ldots\ldots\right].$$

2.

Telle est l'expression générale de la $m.^{me}$ puissance de $2\text{Cos}.x$, en cosinus et sinus des multiples de x, pour une valeur quelconque de x,

Si l'on fait, pour abréger,

$$\text{Cos}.mx + \frac{m}{1}\text{Cos}.(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos}.(m-4)x + \ldots\ldots = P\ ;$$

$$\text{Sin}.mx + \frac{m}{1}\,\text{Sin}.(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Sin}.(m-4)x + \ldots\ldots = Q\ ,$$

on aura

$$(2\text{Cos}.x)^m = P \pm \sqrt{-1}\,Q\ .$$

3.

Euler, en observant qu'on a $u + \frac{1}{u} = \frac{1}{u} + u$, suppose aussi $\left(u+\frac{1}{u}\right)^m = \left(\frac{1}{u}+u\right)^m$, et par conséquent $P + \sqrt{-1}\,Q = P - \sqrt{-1}\,Q$, d'où $Q = 0$; et, par suite

$$(2\text{Cos}.x)^m = P\ ,$$

pour une valeur quelconque de m.

Lagrange, dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions*, (Leçon XI), trouve aussi, par la voie des équations différentielles

$$(2\text{Cos}.x)^m = P;$$

mais cette expression est en défaut pour toutes les valeurs de x qui donnent des valeurs négatives pour $\text{Cos}.x$, lorsque les valeurs de m sont fractionnaires et de numérateurs pairs, car alors $(2\text{Cos}.x)^m$ est une quantité imaginaire ; il est donc visible qu'on ne peut pas généralement supposer $Q=0$. La formule

$$P \pm \sqrt{-1}\,Q,$$

et non la formule P, semble donc être précisément l'expression générale de $(2\text{Cos}.x)^m$.

Mais, lorsque $(2\text{Cos}.x)^m$ est une quantité réelle, la formule $P\pm\sqrt{-1}\,Q$ n'est pas moins embarrassante que l'est la formule P pour le cas où $(2\text{Cos}.x)^m$ est imaginaire ; parce qu'on ne voit pas que Q doive être nécessairement nul pour les diverses valeurs de x et m qui peuvent répondre à ce cas.

Il y a donc là une sorte de paradoxe dont l'explication était à désirer.

4.

M. Poisson paraît être le premier qui ait fait voir que la formule $P\pm\sqrt{-1}\,Q$ est réellement la véritable expression générale de $(2\text{Cos}.x)^m$; que cette expression ne rentre dans la formule d'Euler $(2\text{Cos}.x)^m=P$ que dans le cas où m est un nombre entier, et qu'elle peut donner toutes les différentes valeurs de $(\text{Cos}.x)^m$ qui existent pour une valeur fractionnaire de m, si l'on met successivement pour x, $x+2\varpi$, $x+4\varpi$, $x+6\varpi$, et généralement $x+2n\varpi$, ϖ désignant deux angles droits, et n un nombre entier quelconque. Il a montré en nombres l'exactitude de l'expression $(2\text{Cos}.x)^m=P\pm\sqrt{-1}\,Q$, pour le cas particulier de $x=\varpi$ et $m=\frac{1}{3}$ (voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome II, page 212).

C'était là sans doute un grand pas vers l'explication du paradoxe ; car une grande partie de la difficulté consistait en ce qu'on ne voyait pas comment la formule

$$(\mathrm{Cos}.x)^m = P \pm \sqrt{-1}\,Q\ ;$$

pourrait donner plusieurs valeurs différentes pour $P \pm \sqrt{-1}\,Q$, et seulement une valeur unique pour $(\mathrm{Cos}.x)^m$. L'heureuse idée de M. Poisson de mettre $x+2n\varpi$ au lieu de x, ce qui est toujours permis, puisque les expressions $\mathrm{Cos}.x$ et $\mathrm{Cos}.(x+2n\varpi)$ sont identiques, lève entièrement cette partie de la difficulté.

5.

Mais il faut avouer que la question n'était pas encore complètement éclaircie, puisqu'on ne voyait pas encore comment, pour une valeur quelconque de x, la formule générale $P \pm \sqrt{-1}\,Q$ pourrait donner tantôt une quantité réelle et tantôt une quantité imaginaire. Les travaux de M. Deflers, dont on trouve une notice dans le troisième volume de la nouvelle édition du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix (page 606) et ceux de M. Plana, dans le XI.e volume des *Annales de mathématiques* (page 84) ne semblent pas lever toutes les difficultés; et il reste encore à faire voir comment la formule générale $(2\mathrm{Cos}.x)^m = P \pm \sqrt{-1}\,Q$ s'applique à tous les cas, et sur-tout à trouver les valeurs du nombre n dans $x+2n\varpi$ auxquelles correspondent les valeurs purement imaginaires et les valeurs purement réelles de $(2\mathrm{Cos}\,x)^m$ (*).

Tel est, principalement le but que je me propose dans cet écrit.

(*) On peut encore consulter, sur le même sujet, un mémoire de M. Pagani Michel, inséré à la page 94 du présent volume.

J. D. G.

6.

Soit m égal à la fraction $\frac{1}{k}$, où k peut être un nombre entier quelconque. Pour plus de simplicité, nous supposerons ce nombre positif. L'application à d'autres cas n'aura aucune difficulté.

On sait, par la théorie des équations, que, dans le cas de m fractionnaire et égal à $\frac{1}{k}$, la quantité $(2\text{Cos}.x)^m$ a toujours k valeurs différentes, savoir, les valeurs des k racines de la quantité $2\text{Cos}.x$. Si $2\text{Cos}\,x$ est positif et k impair, une de ces racines est entièrement réelle, ou de la forme p; d'autres peuvent être entièrement imaginaires, ou de la forme $\pm\sqrt{-1}q$; le reste des racines est de la forme $p\pm\sqrt{-1}q$. Si $2\text{Cos}.x$ est positif et k pair, deux de ces racines sont de la forme p; le reste est de la forme $p\pm\sqrt{-1}q$. Si $2\text{Cos}.x$ est négatif et k impair, une seule racine est réelle, ou de la forme p; les autres sont de la forme $p\pm\sqrt{-1}q$. Si enfin $2\text{Cos}.x$ est négatif et k pair, aucune racine n'est réelle; mais deux racines sont entièrement imaginaires, ou de la forme $\pm\sqrt{-1}q$, et le reste est de la forme $p\pm\sqrt{-1}q$.

La forme *générale* des racines de $2\text{Cos}.x$ est donc

$$p\pm\sqrt{-1}q\ ;$$

et c'est précisément la forme de l'expression générale $P\pm\sqrt{-1}Q$, trouvée ci-dessus pour $(2\text{Cos}.x)^m$. Mais, dans les cas particuliers, il faut que tantôt p ou P et tantôt q ou Q s'évanouissent, pour donner, suivant ces différens cas, des racines entièrement réelles, ou des racines entièrement imaginaires.

Il s'agit donc de trouver les valeurs de n, dans $x+2n\pi$, pour lesquelles P ou Q devient égal à zéro.

7.

On a généralement

$$\text{Cos.}x=\text{Cos.}\pm(2n\varpi\pm x)\ ;$$

$$\text{Sin.}x=\text{Sin.}\pm(2n\varpi+x)=\text{Sin.}[\pm(2n+1)\varpi-x]\ ;$$

mais on ne peut mettre que $x\pm 2n\varpi$ pour x, dans l'expression de $2\text{Cos.}x$, parce qu'il n'y a que cet arc seul qui ait *en même temps* le même sinus et le même cosinus que l'arc x.

On a donc généralement

$$(2\text{Cos.}x)^m=\text{Cos.}m(x\pm 2n\varpi)\pm\sqrt{-1}\,\text{Sin.}m(x\pm 2n\varpi)$$

$$+\frac{m}{1}\left[\text{Cos.}(m-2)(x\pm 2n\varpi)\pm\sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-2)(x\pm 2n\varpi)\right]$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\left[\text{Cos.}(m-4)(x\pm 2n\varpi)\pm\sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-4)(x\pm 2n\varpi)\right]$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$\text{Cos.}m(x\pm 2n\varpi)+\frac{m}{1}\,\text{Cos.}(m-2)(x\pm 2n\varpi)+\ldots=P_n$$

$$\text{Sin.}m(x\pm 2n\varpi)+\frac{m}{1}\,\text{Sin.}(m-2)(x\pm 2n\varpi)+\ldots=Q_n$$

nous aurons

$$(2\text{Cos.}x)^m=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n$$

8.

Maintenant j'observe qu'on peut toujours exprimer une quantité de la forme $(2\text{Cos}.x)^m$ par $[2\text{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$, pourvu que l'on convienne de représenter par $[2\text{Cos}.x]^m$ la valeur *arithmétique*, c'est-à-dire, la valeur *numérique absolue* de la quantité $2\text{Cos}.x$, prise sans signe.

En effet, la formule $[2\text{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$ exprimera toutes les k valeurs de $(2\text{Cos}.x)^m$ ou $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ d'une manière aussi complète que l'expression $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ elle-même.

Mais $[2\text{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$ n'est autre chose que la valeur de $(2\text{Cos}.x)^m$, prise pour $x=0$ et $x=\varpi$, et multipliée par $[2\text{Cos}.x]^m$ puisque $\text{Cos}.0=+1$ et $\text{Cos}.\varpi=-1$. Donc on aura aussi la valeur de $(\text{Cos}.x)^m$, si l'on met dans l'expression générale de $(2\text{Cos}.x)^m$, donnée ci-dessus, $x=0$ et $x=\varpi$, et qu'on multiplie le résultat par $[2\text{Cos}.x]^m$. On trouve, pour $x=0$,

$$P_n=\text{Cos}.m(\pm 2n\varpi)+\frac{m}{1}\text{Cos}.(m-2)(\pm 2n\varpi)+\ldots\ldots$$

$$=\text{Cos}.2mn\varpi\left(1+\frac{m}{1}+\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{2}+\ldots\right)$$

$$=2^m.\text{Cos}.2mn\varpi;$$

$$Q_n=\text{Sin}.m(\pm 2n\varpi)+\frac{m}{1}\text{Sin}.(m-2)(\pm 2n\varpi)+\ldots\ldots$$

$$=\pm\text{Sin}.2mn\varpi\left(1+\frac{m}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\ldots\right)$$

$$=\pm 2^m.\text{Sin}.2mn\varpi;$$

et pour $x=\varpi$

$P_n=$

$$P_n=2^m.\mathrm{Cos}.2m(n+1)\pi\ , \qquad Q_n=\pm 2^m.\mathrm{Sin}.m(2n+1)\pi\ ;$$

donc

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m=[2\mathrm{Cos}.x]^m.\{\mathrm{Cos}.2mn\pi\pm\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mn\pi\}\ ,$$

ou

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m=[2\mathrm{Cos}.x]^m.\{\mathrm{Cos}.(1\pm 2n)\pi\pm\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.m(1\pm 2n)\pi\}\ .$$

9.

Ces expressions se vérifient sur-le-champ ; car la formule générale connue

$$(\mathrm{Cos}.x\pm\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)^m=\mathrm{Cos}.mx\pm\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.mx$$

donne , si on y fait $x=2n\pi$,

$$(+1)^m=\mathrm{Cos}.2mn\pi\pm\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mn\pi\ ,$$

et si l'on y fait $x=(1\pm 2n)\pi$

$$(-1)^m=\mathrm{Cos}.m(1\pm 2n)\pi\pm\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.m(1\pm 2n)\pi\ .$$

Substituant donc ces valeurs de $\mathrm{Cos}.2mn\pi\pm\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mn\pi$ et de $\mathrm{Cos}.m(1\pm 2n)\pi\pm\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.m(1\pm 2n)\pi$ dans l'expression de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$, trouvée en dernier lieu , on aura

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m=[2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m\ ;$$

comme cela doit être.

Voilà donc une preuve certaine de l'exactitude de l'expression générale de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$ à laquelle nous sommes parvenus en dernier lieu.

Pour distinguer la nouvelle expression ci-dessus de l'expression générale $P_n\pm\sqrt{-1}Q_n$, désignons-la par

$$[2\mathrm{Cos}.x]^m(A_m \pm \sqrt{-1}B_m) = (2\mathrm{Cos}.x)^m\ ;$$

de manière que

$$A_n \pm \sqrt{-1}B_n = (\pm 1)^m\ .$$

10.

Maintenant nous observerons que, pour toutes les valeurs de x qui donnent le même signe à $\mathrm{Cos}.x$, la réalité, ou généralement la forme des racines différentes de $2\mathrm{Cos}.x$, est absolument indépendante de la valeur de x même, de manière qu'on peut mettre une valeur quelconque pour x, par exemple, $x=0$ pour un cosinus positif et $x=\pi$ pour un cosinus négatif, sans passer d'une racine réelle à une racine imaginaire, ou généralement de la forme d'une racine quelconque, correspondant à une certaine valeur de n, à une autre forme. C'est, au surplus, ce que l'expression

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m = [2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$$

fait voir clairement; car les k valeurs qu'expriment les deux formules $(2\mathrm{Cos}.x)^m$ et $[2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$ étant identiquement les mêmes, et $[2\mathrm{Cos}.x]^m$ n'ayant qu'une seule et unique valeur, il est clair que les valeurs de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$ sont purement réelles, purement imaginaires ou de la forme $p \pm \sqrt{-1}q$ dans les mêmes cas que les valeurs de $(\pm 1)^m$, c'est-à-dire, les valeurs de $(\mathrm{Cos}.x)^m$ pour $x=0$ et $x=\pi$ le sont elles-mêmes.

11.

On trouvera donc les valeurs de n qui donnent les racines de $2\mathrm{Cos}.x$ toutes réelles, toutes imaginaires ou de la forme $p \pm \sqrt{-1}q$, si l'on cherche les valeurs de n qui donnent pour $(\pm 1)^m$ des racines de même forme ou, ce qui est la même chose, si l'on met $x=0$ et $x=\pi$ dans l'expression générale de $(\mathrm{Cos}.x)^m$, et qu'ensuite on cherche les valeurs de n pour lesquelles cette expression prend les formes A_n, $\pm\sqrt{-1}B_n$ ou $A_n\pm\sqrt{-1}B_n$.

12.

Puisque, lorsque Cos.x est positif,

$$A_n=\mathrm{Cos}.2mn\pi=\mathrm{Cos}.\frac{2n}{k}\pi,\ B_n=\mathrm{Sin}.2mn\pi=\mathrm{Sin}.\frac{2n}{k}\pi;$$

tandis que, lorsque Cos.x est négatif

$$A_n=\mathrm{Cos}.m(1\pm2n)\pi=\mathrm{Cos}.\frac{1\pm2n}{k}\pi,\ B_n=\mathrm{Sin}.m(1\pm2n)\pi=\mathrm{Sin}.\frac{1\pm2n}{k}\pi,$$

il s'ensuit que, dans le cas où Cos.x est positif, on aura

$$A_n=0\ ,\ \text{si l'on fait}\ \frac{2n}{k}=\tfrac{1}{2}\ ,\ \tfrac{3}{2}\ ,\ \tfrac{5}{2}\ ,\ldots\ldots$$

$$B_n=0\ ,\ \text{si l'on fait}\ \frac{2n}{k}=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ldots\ldots$$

et que, dans le cas où Cos.x est au contraire négatif, on aura

$$A_n=0\ ,\ \text{si l'on fait}\ \frac{1\pm2n}{k}=\tfrac{1}{2}\ ,\ \tfrac{3}{2}\ ,\ \tfrac{5}{2}\ ,\ldots\ldots$$

$$B_n=0\ ,\ \text{si l'on fait}\ \frac{1\pm2n}{k}=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ldots\ldots$$

on pourra aisément trouver par là, pour chaque valeur de k, les valeurs correspondantes de n.

13.

Nous remarquerons d'abord que le nombre des valeurs différentes de $\frac{2n}{k}$ et de $\frac{1\pm 2n}{k}$, et conséquemment de n, ne pourra jamais être plus grand que le nombre k ; car le nombre des valeurs différentes de la quantité $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ ou de $\mathrm{Cos}.m(x\pm 2n\pi)$, $\mathrm{Cos}.(m-2)(x\pm 2n\pi)$, ..., $\mathrm{Sin}.m(x\pm 2n\pi)$, $\mathrm{Sin}.(m-2)(x\pm 2n\pi)$, ..., correspondant à ces valeurs, étant toujours égal au nombre k, le nombre des valeurs de n sera aussi égal à ce nombre, en commençant par zéro, et en parcourant tous les nombres entiers. Donc n ne sera pas plus grand que k.

Il suit de là qu'on aura

I. *Pour* Cos.x *positif.*

1. $A_n=0$ seulement pour $\frac{2n}{k}=\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, ou pour $2n=\frac{1}{2}k$ et $\frac{3}{2}k$;

2. $B_n=0$ seulement pour $\frac{2n}{k}=0$ et 1, ou pour $2n=0$ et k ;

puisque $2n$ ne doit pas surpasser $2k$.

II. *Pour* Cos.x *négatif.*

1. $A_n=0$ seulement pour $\frac{1\pm 2n}{k}=\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, ou pour $2n=\frac{1}{2}k$ et $\frac{3}{2}k$;

2. $B_n=0$ seulement pour $\frac{1\pm 2n}{k}=1$ et 2, ou pour $2n=k-1$ et $2k-1$;

car, n ne pouvant être fractionnaire, les valeurs $2n=\pm(0k-1)$ n'existent pas. De plus $2n$ ne pouvant surpasser le nombre $2k$, il faut que la valeur de $2x$ se trouve entre $(\frac{1}{2}k-1)$ et $(\frac{5}{2}k-1)$, pour $A_n=0$, et entre $k-1$ et $3k-1$ pour $B_n=0$. Mais la plus petite valeur de k étant 2, les valeurs $\frac{5}{2}k-1$ et $3k-1$ de $2n$ donnent déjà les nombres 4 et 5, c'est-à-dire, $2k$ et $2k+1$, dont la première est la limite des valeurs de $2n$, tandis que l'autre la surpasse. Mais, puisque la valeur de $2n$, correspondant à une des limites elle-même, égale toujours la valeur pour l'autre, la valeur $\frac{5}{2}k-1$ ni toutes les suivantes n'existent pas pour $A_n=0$, ni la valeur $3k-1$ et toutes les suivantes, pour $B_n=0$. Donc il ne reste que les deux valeurs $\frac{1}{2}k-1$ et $\frac{3}{2}k-1$ dc $2n$ pour $A_n=0$ et les deux valeurs $k-1$ et $2k-1$ pour $B_n=0$.

14.

Puisque A_n et B_n, P_n et Q_n s'évanouissent en même temps, ou pour la même valeur de n, ainsi que nous l'avons vu (9, 10, 11), et que l'on obtient (7), pour l'expression générale de $(2\text{Cos}.x)^m$,

$$(2\text{Cos}.x)^m = \text{Cos}.m(x \pm 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}.m(x \pm 2n\pi) = P_n \pm \sqrt{-1}\,Q_n\,;$$

$$+\frac{m}{1}\text{Cos}.(m-2)(x \pm 2n\pi) \pm \frac{m}{1}\sqrt{-1}\,\text{Sin}.(m-2)(x \pm 2n\pi)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos}.(m-4)(x \pm 2n\pi) \pm \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\sqrt{-1}\,\text{Sin}.(m-4)(x \pm 2n\pi)$$

$$+ \;\ldots\ldots\ldots\ldots \pm \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en ajoutant, dans l'expression,

$$P_0 \pm \sqrt{-1}\,Q_0 = \text{Cos}.mx \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx$$

$$+\frac{m}{1}\text{Cos}.m-2)x \pm \frac{m}{1}\sqrt{-1}\,\text{Sin}.(m-2)x$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos.}(m-4)x \pm \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-4)x$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\;\pm\;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la quantité $\pm 2n\pi$ à x, il suit de ce qui a été dit ci-dessus qu'on a

Pour Cos.x *positif*

$P_n = 0$, en ajoutant à x l'une des quantités $\pm\frac{1}{2}k\pi$ et $\pm\frac{3}{2}k\pi$;
ou en ajoutant à mx la quantité $\pm m(\frac{1}{2}k\pi) = \pm\frac{1}{2}\pi$ ou $\pm m(\frac{3}{2}k\pi) = \pm\frac{3}{2}\pi$.

$Q = 0$, en ajoutant à x l'une des quantités ± 0 et $\pm k\pi$,
ou en ajoutant à mx la quantité ± 0 ou $\pm mk\pi = \pm\pi$.

On devra avoir de même

Pour Cos.x *négatif*

$P_n = 0$, en ajoutant à x l'une des deux quantités $\pm(\frac{1}{2}k-1)\pi$ et $\pm(\frac{3}{2}k-1)\pi$,
ou à mx la quantité $\pm m(\frac{1}{2}k-1)\pi = \pm(\frac{1}{2}-m)\pi$ ou $\pm m(\frac{3}{2}k-1)\pi = \pm(\frac{3}{2}-m)\pi$.

$Q_n = 0$, en ajoutant à x l'une des deux quantités $\pm(k-1)\pi$ et $\pm(2k-1)\pi$,
ou à mx la quantité $\pm m(k-1)\pi = \pm(1-m)\pi$ ou $\pm m(2k-1)\pi = \pm(2-m)\pi$.

15.

Les différences de toutes ces doubles valeurs surajoutées à mx sont partout égales à π. On trouverait aisément aussi que les différences des doubles valeurs surajoutées aux quantités $(m-2)x$, $(m-4)x$, ... sont toutes des multiples de π. Mais les sinus et cosinus changent tout au plus de signes, et jamais de valeur absolue, si l'on ajoute aux arcs un nombre quelconque de demi-circonférences ; donc toutes les doubles quantités trouvées ci-dessus, pour $P_n=0$, $Q_n=0$, se réduisent toujours à une seule, et par conséquent on aura

I. *Pour* Cos.x *positif.*

$P_n=0$, en ajoutant seulement à x, $\pm\frac{1}{2}k\varpi$, qui répond à $n=\frac{k}{4}$;

de sorte que $P_{\frac{1}{4}k}=0$:

$Q_n=0$, en n'ajoutant rien à x; ce qui correspond à $n=0$;

de sorte que $Q_0=0$.

II. *Pour* Cos.x *négatif*

$P_n=0$, en ajoutant seulement à x, $\pm(\frac{1}{2}k-1)\varpi$, qui répond à $n=\frac{k-2}{4}$

de sorte que $P_{\frac{1}{4}(k-2)}=0$.

$Q_n=0$, en ajoutant seulement à x, $\pm(k-1)\varpi$, qui répond à $n=\frac{k-1}{2}$;

de sorte que $Q_{\frac{1}{2}(k-1)}=0$.

16.

Il suit de là que

I. *Pour* Cos.x *positif*;

1.° La quantité P_n ne peut s'évanouir ou, ce qui revient au même, $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ ne saurait avoir des valeurs purement imaginaires, à moins que k ne soit multiple de 4, puisqu'on a trouvé la condition $n=\frac{k}{4}$, et que n doit toujours être un nombre entier.

2.° La quantité Q_n s'évanouit toujours, c'est-à-dire, qu'une valeur de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ toute réelle existe dans tous les cas, et pour toutes les valeurs possibles de k, puisque, pour cette valeur réelle, la quantité n est toujours égale à zéro, et par suite indépendante de k.

II. *Pour* Cos.x *négatif.*

1.° La quantité P_n ne peut s'évanouir ou, ce qui revient au même, $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ ne saurait avoir des valeurs purement imaginaires, à moins que $k-2$ ne soit un multiple de 4 ; car on a trouvé, dans ce cas, $n=\frac{k-2}{4}$, sous la condition que n soit un nombre entier.

2.° La quantité Q_n ne peut s'évanouir, c'est-à-dire, qu'il ne peut exister des valeurs entièrement réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, à moins que k ne soit impair, puisqu'on a trouvé pour ce cas $n=\frac{k-1}{2}$, sous la condition que n soit un nombre entier.

17.

L'expression générale de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, si l'on y substitue la valeur $\frac{1}{k}$ de m, donne

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n$$

$$=\left.\begin{array}{r}\mathrm{Cos}.\frac{1}{k}(x\pm2n\pi)\\ +\frac{1}{k}\,\mathrm{Cos}.\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm2n\pi)\\ +\frac{1}{k}.\frac{\frac{1}{k}-1}{2}.\mathrm{Cos}.\left(\frac{1}{k}-4\right)(x\pm2n\pi)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.\pm\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{r}\mathrm{Sin}.\frac{1}{k}(x\pm2n\pi)\\ +\frac{1}{k}\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm2n\pi)\\ +\frac{1}{k}.\frac{\frac{1}{k}-1}{2}\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{1}{k}-4\right)(x\pm2n\pi)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

si

si donc on introduit dans cette expression générale les valeurs particulières de n qui répondent aux divers cas de $P_n=0$ et $Q_n=0$, trouvées ci-dessus (15), pour déterminer les valeurs de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ toutes réelles ou tout imaginaires qui répondent à ces mêmes cas, on parviendra aux résultats que voici:

I. *Pour* Cos.x *positif*,

1.° Si l'on veut avoir, dans ce cas, les valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$, il faut supposer $P_n=0$. Mais (15) la valeur $\frac{k}{4}$ de n répond à $P_n=0$, donc il faut mettre $n=\frac{k}{4}$ ou $2n=\frac{k}{2}$ dans tous les termes dont la quantité Q_n est composée, en supprimant d'ailleurs P_n; on trouve ainsi

$$\text{Sin.}\frac{1}{k}(x\pm 2n\varpi)=\text{Sin.}\frac{1}{k}(x\pm\tfrac{1}{2}k\varpi)$$

$$=\text{Sin.}\left(\frac{x}{k}\pm\tfrac{1}{2}\varpi\right)=\pm\text{Cos.}\frac{x}{k}=\pm\text{Cos.}mx\ ;$$

$$\text{Sin.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\varpi)=\text{Sin.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm\tfrac{1}{2}k\varpi)$$

$$=\text{Sin.}\left[\left(\frac{1}{k}-2\right)x\pm(\tfrac{1}{2}-k)\varpi\right]=\pm\text{Cos}\left(\frac{1}{k}-2\right)x=\pm\text{Cos.}(m-2)x\ ;$$

. . . .

En conséquence, la valeur de Q_n, qui est alors $Q_{\frac{1}{4}k}$, deviendra

$$Q_{\frac{1}{4}k}=\pm\left\{\text{Cos.}mx+\frac{m}{1}\text{Cos.}(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos.}(m-4)x+\ldots\right\}=\pm P_0,$$

de sorte qu'on aura, pour ce cas,

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}=\pm\sqrt{-1}P_0\,;$$

d'où l'on voit que, pour Cos.x positif et k multiple de 4, il existe toujours deux valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos.}k)^{\frac{1}{k}}$, ne différant que par le signe, et dont la valeur commune absolue est $\sqrt{-1}P_0$.

Si l'on voulait savoir à quoi se réduit alors la quantité $P_{\frac{1}{4}k}$, que nous avons dit devoir s'évanouir dans ce cas, il faudrait faire également $n=\frac{k}{4}$ ou $2n=\frac{k}{2}$, dans tous les termes dont P_n est composé ; on trouverait ainsi successivement

$$\text{Cos.}\frac{1}{k}(x\pm 2n\varpi)=\text{Cos.}\frac{1}{k}(x\pm\tfrac{1}{2}k\varpi)$$

$$=\text{Cos.}\left(\frac{x}{k}\pm\tfrac{1}{2}\varpi\right)=\pm\text{Sin.}\frac{x}{k}=\pm\text{Sin.}mx\,;$$

$$\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\varpi)=\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm\tfrac{1}{2}k\varpi)$$

$$=\text{Cos}\left[\left(\frac{1}{k}-2\right)x\pm(\tfrac{1}{2}-k)\varpi\right]=\pm\text{Sin.}\left(\frac{1}{k}-2\right)x=\pm\text{Sin.}(m-2)x,$$

En conséquence la valeur de P_n, qui est alors $P_{\frac{1}{4}k}$, deviendra

$$P_{\frac{1}{4}k}=\pm\left\{\text{Sin.}mx+\frac{m}{1}\text{Sin.}(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin.}(m-4)x+\ldots\right\}=\pm Q_0\,;$$

d'où l'on voit que, pour le cas de Cos.x positif et de k multiple de 4, on doit avoir $Q_0=0$.

2°. Les valeurs toutes réelles de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ qui répondent à toutes les valeurs possibles de k (16) se trouvent sur-le-champ ; car, pour ces valeurs, n étant égal à zéro, elles ne seront autre chose que $\pm P_0$, de sorte qu'on aura

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = \pm P_0 .$$

L'ambiguïté du signe tient à ce que la valeur est nécessairement double si k est un nombre pair. Si k au contraire est impair, le signe $+$ a seul lieu. Car l'expression de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ étant toujours soumise aux mêmes conditions que l'expression $(\pm 1)^{\frac{1}{k}}$, ce qui revient, pour le cas actuel (9), à

$$(+1)^{\frac{1}{k}} = \mathrm{Cos}.\frac{2n\pi}{k} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.\frac{2n\pi}{k} ,$$

il est aisé de voir que cette dernière expression donne toujours une couple de valeurs toute réelles, ne différant que par le signe, pour $2n=0$ et $2n=k$; car ce sont les valeurs de n pour lesquelles $\mathrm{Sin}.\frac{2n\pi}{k}$ est égal à zéro. En effet, ce sont les mêmes valeurs déjà trouvées (13), pour le cas de $Q_n=0$; et, puisqu'il y a deux valeurs entièrement réelles pour $(+1)^{\frac{1}{k}}$, en supposant $2n=0$ et $2n=k$, il y a aussi nécessairement deux valeurs réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ pour les mêmes cas. Mais $2n=k$ suppose k pair. Si k est impair, on n'a pas $2n=k$, puisque n doit toujours être un nombre entier. Dans ce dernier cas, on peut donc seulement mettre $2n=0$, et il n'existe que la valeur positive. Donc il n'y a que deux valeurs entièrement réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, ne différant que par le signe, si k est pair. Elles sont, comme on vient de le voir, égales à $\pm P_0$. Si k est impair, il n'existe que la valeur $+P_0$ seule.

Au reste, puisqu'il existe *toujours* une ou deux valeurs entièrement réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, dans le cas de Cos.$x$ positif, et qu'en même temps il existe aussi deux valeurs purement imaginaires. dans le cas particulier où k est un multiple de 4, il s'ensuit que ces deux dernières valeurs doivent être essentiellement distinctes des premières, de maniere qu'on a, dans ce cas, quatre valeurs de $(2\mathrm{Cos}.k)^{\frac{1}{k}}$.

La quantité qui s'évanouit dans le cas des valeurs entièrement réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, *toujours* pour Cos.$x$ positif, se trouve aussi sur-le-champ. Elle n'est en effet autre chose que Q_0, puisque, dans le cas actuel n doit être égal à zéro. On a donc l'équation $Q=0$, pour le cas des valeurs entièrement réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on vient de trouver plus haut. Car les valeurs entièrement réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ ayant *toujours* lieu pour Cos.x positif, il faut que le cas de k égal à un multiple de 4, dans lequel il existe en outre deux valeurs purement imaginaires de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, donne aussi $Q=0$; puisque, dans ce cas, les deux valeurs entièrement réelles et les deux valeurs purement imaginaires de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ existent en même temps; et c'est précisément ce qu'on vient de trouver.

II. *Pour* Cos.x *négatif*,

1.° Pour avoir les valeurs purement imaginaires de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ qui existent, si $k-2$ est un multiple de 4, il faut (16) substituer la valeur $\frac{k-2}{4}$ de n qui (15) correspond à ce cas dans la quantité Q_n qui alors devient $Q_{\frac{1}{4}(k-2)}$, et constitue à elle seule les valeurs cherchées. Cela donne successivement

$$\text{Sin.}\frac{1}{k}(x\pm 2n\varpi)=\text{Sin.}\frac{1}{k}\left(x\pm\frac{k-2}{2}\varpi\right)$$

$$=\pm\text{Cos.}\frac{1}{k}(x\pm\varpi)=\pm\text{Cos.}m(x\pm\varpi)\,,$$

$$\text{Sin.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\varpi)=\text{Sin.}\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(x\pm\frac{k-2}{2}\varpi\right)$$

$$=\pm\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm\pi)=\pm\text{Cos.}(m-2)(x\pm\varpi)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc la quantité Q_n se réduit, dans le cas actuel, à

$$Q_{\frac{1}{4}(k-2)}=\pm\left\{\text{Cos.}m(x\pm\varpi)+\frac{m}{1}\text{Cos.}(m-2)(x\pm\varpi)+\ldots\right\}=\pm P_{\frac{1}{2}}\;;$$

d'où résulte

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}=\pm\sqrt{-1}\,P_{\frac{1}{2}}\;;$$

ce qui donne les deux valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ qui existent, dans le cas où $k-2$ est un multiple de 4, Cos.x étant négatif.

La quantité P_n ou $P_{\frac{1}{4}(k-2)}$, qui doit s'évanouir dans ce cas, s'obtiendra, en substituant la valeur $\frac{k-2}{4}$ de n dans tous les termes qui la composent. Sans faire ici le calcul, qui ne serait qu'une répétition de celui que nous avons fait plus haut, il nous suffira de dire qu'on trouve définitivement

$$P_{\frac{1}{4}(k-2)}=\pm\left\{\text{Sin.}m(x\pm\varpi)+\frac{m}{1}\text{Sin.}(m-2)(x\pm\varpi)+\ldots\right\}=\pm Q_{\frac{1}{2}}\;;$$

il vient alors, en développant,

$$P_{\frac{1}{4}(k-2)} = \pm\{\text{Sin.}mx\text{Cos.}m\varpi \pm \text{Cos.}mx\text{Sin.}m\varpi$$

$$+\frac{m}{1}[\text{Sin.}(m-2)x\text{Cos.}(m-2)\varpi \pm \text{Cos.}(m-2)x\text{Sin.}(m-2)\varpi]$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}[\text{Sin.}(m-4)x\text{Cos.}(m-4)\varpi \pm \text{Cos.}(m-4)x\text{Sin.}(m-4)\varpi]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\};$$

or,

$$\text{Cos.}m\varpi = \text{Cos.}(m-2)\varpi = \text{Cos.}(m-4)\varpi = \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{Sin.}m\varpi = \text{Sin.}(m-2)\varpi = \text{Sin.}(m-4)\varpi = \ldots\ldots\ldots$$

donc, en ayant égard à ces relations

$$P_{\frac{1}{4}(k-2)} = \pm\text{Cos.}m\varpi\left\{\text{Sin.}mx + \frac{m}{1}\text{Sin.}(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin.}(m-4)x + \ldots\right\}$$

$$\mp\text{Sin.}m\varpi\left\{\text{Cos.}mx + \frac{m}{1}\text{Cos.}(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos.}(m-4)x + \ldots\right\};$$

c'est-à-dire,

$$P_{\frac{1}{4}(k-2)} = \pm(P_0\text{Sin.}m\varpi \pm Q_0\text{Cos.}m\varpi) :$$

Donc, si $k = \frac{1}{m}$ est un multiple de 4, et que Cos.x soit négatif, on aura toujours la relation

$$P_0\text{Sin.}m\varpi \pm Q_0\text{Cos.}m\varpi = Q_{\frac{1}{2}} = 0 .$$

2.° Les valeurs entièrement réelles de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ qui existent (16) dans le cas où k est impair, Cos.x étant toujours négatif, se trouvent en substituant la valeur $\frac{k-1}{2}$ de n, qui correspond à ce cas, dans tous les termes de P_n, qui devient ainsi $P_{\frac{1}{2}(k-1)}$, et qui constitue à elle seule la quantité cherchée. Cela donne

$$\text{Cos.}\,\frac{1}{k}(x\pm 2n\pi)=\text{Cos.}\,\frac{1}{k}[x\pm(k-1)\pi]$$

$$=-\text{Cos.}\,\frac{1}{k}(x\pm\pi)=-\text{Cos.}\,m(x\pm\pi),$$

$$\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\pi)=\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)[x\pm(k-1)\pi]$$

$$=-\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm\pi)=-\text{Cos.}(m-2)(x\pm\pi);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par suite

$$P_{\frac{1}{2}(k-1)}=-\left\{\text{Cos.}\,m(x\pm\pi)+\frac{m}{1}\,\text{Cos.}(m-2)(x\pm\pi)+\ldots\ldots\right\}=-P_{\frac{1}{2}}$$

donc

$$(2\,\text{Cos.}\,x)^{\frac{1}{k}}=P_{\frac{1}{2}(k-1)}=-P_{\frac{1}{2}};$$

ce qui donne l'unique valeur entièrement réelle de $(2\,\text{Cos.}\,x)^{\frac{1}{k}}$, pour le cas où k est impair et $\text{Cos.}\,x$ négatif.

Quant à la quantité $Q_{\frac{1}{2}(k-1)}$ qui doit s'évanouir dans ce cas, on trouvera, par un calcul semblable à celui qui a été employé pour $P_{\frac{1}{2}(k-1)}$,

$$Q_{\frac{1}{2}(k-1)} = \text{Sin.}m(x\pm\pi) + \frac{m}{1}\,\text{Sin.}(m-2)(x\pm\pi) + \ldots\ldots = Q_{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$Q_{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

18.

Résumons présentement les divers résultats auxquels nous venons de parvenir.

Posons, pour abréger, comme ci-dessus,

$$\text{Cos.}m(x\pm 2n\pi) + \frac{m}{1}\,\text{Cos.}(m-2)(x\pm 2n\pi)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos.}(m-4)(x\pm 2n\pi) + \ldots\ldots = P_n\,;$$

$$\text{Sin.}m(x\pm 2n\pi) + \frac{m}{1}\,\text{Sin.}(m-2)(x\pm 2n\pi)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos.}(m-4)(x\pm 2n\pi) + \ldots\ldots = Q_n\,.$$

et, par suite, pour $n=0$;

$$\text{Cos.}mx + \frac{m}{1}\,\text{Cos.}(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos.}(m-4)x + \ldots\ldots = P_0\,;$$

$$\text{Sin.}mx + \frac{m}{1}\,\text{Sin.}(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Sin.}(m-4)x + \ldots\ldots = Q_0\,,$$

et pour $2n=1$ ou $n=\frac{1}{2}$

Cos.m

$$\text{Cos.}m(x\pm n)+\frac{m}{1}\text{Cos.}(m-2)(x\pm n)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos.}(m-4)(x\pm n)+\ldots\ldots=P_{\frac{1}{2}}\ ,$$

$$\text{Sin.}m(x\pm n)+\frac{m}{1}\text{Sin.}(m-2)(x\pm n)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin.}(m-4)(x\pm n)+\ldots\ldots=Q_{\frac{1}{2}}\ ;$$

de manière que

$$P_{\frac{1}{2}}=P_0\text{Cos.}mn\pm Q_0\text{Sin.}mn\ ,$$

$$Q_{\frac{1}{2}}=P_0\text{Sin.}mn\pm Q_0\text{Cos.}mn\ ;$$

supposons de plus

$$m=\frac{1}{k}\ ,$$

nous aurons les résultats suivants.

La quantité $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ a toujours k valeurs différentes, qui s'expriment généralement par

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n\ .$$

Mais

I. *Dans le cas de* Cos.x *positif*,

il existe toujours, parmi ces k valeurs, pour toutes les valeurs possibles de x, une valeur entièrement réelle de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$, si k est impair, et deux valeurs ne différant que par le signe, si k est pair. Les valeurs entièrement réelles, en donnant pour indice à $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ les valeurs correspondantes de n, sont exprimées par

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}{}_{(0\text{ et }\frac{1}{2}k)}=\pm P_0\ .$$

Outre ces valeurs, il en existe deux autres, purement imaginaires, qui s'expriment par

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}_{(\frac{1}{4}k)}=\pm\sqrt{-1}P_o$$

dans le seul cas où k est un multiple de 4.

Le surplus des k valeurs $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ s'expriment toujours par

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}_{n}=P_n\pm\sqrt{-1}Q_n\ ,$$

où l'on peut donner à n toutes les valeurs entières et positives autres que celles qui répondent aux cas particuliers que nous venons d'examiner, savoir, o pour tous les cas, o et $\frac{1}{2}k$ pour k pair, et enfin o, $\frac{1}{4}k$ et $\frac{3}{4}k$ pour k multiple de 4.

A quoi il faut ajouter que, pour tous les cas possibles d'un cosinus positif, on a toujours

$$Q_o=0\ .$$

II. *Dans le cas de* Cos.x *négatif,*

1.° Si k est pair, il n'existe, parmi les k valeurs de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ que deux valeurs purement imaginaires, exprimées par

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}_{\frac{k-2}{4}}\ \text{et}\ {}_{\frac{3k-2}{4}}=\pm\sqrt{-1}P_{\frac{1}{2}}\ ;$$

si $k-2$ est un multiple de 4, le reste des k valeurs est de la forme

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}_{n}=P\pm\sqrt{-1}Q_n\ ,$$

où l'on peut mettre pour n tous les nombres entiers, depuis o jusqu'à k, excepté les deux nombres $\dfrac{k-2}{4}$ et $\dfrac{3k-2}{4}$.

Pour toutes les autres valeurs paires de k, pour lesquelles $k-2$ n'est pas un multiple de 4, il n'existe ni valeurs entièrement réelles ni valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$. Toutes les k valeurs sont alors de la forme

$$(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{n}=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n\ ,$$

où n peut être quelconque.

2.° Si k est impair, il existe toujours une valeur entièrement réelle, exprimée par

$$(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{\frac{k-1}{2}}=-P_{\frac{1}{2}}\ .$$

le reste des k valeurs est de la forme

$$(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{n}=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n\ ,$$

où n peut être quelconque.

En outre, pour tous les cas possibles d'un cosinus négatif, on a toujours la relation

$$P_0\text{Sin}.m\pi\pm Q_0\text{Cos}.m\pi=Q_{\frac{1}{2}}=0\ .$$

19.

Les équations

$$Q_0=\text{Sin}.mx+\frac{m}{1}\text{Sin}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin}.\ (m-4)x+\ldots\ldots=0\ ;$$

pour Cos.x positif, et

$$Q_{\frac{1}{2}}=\text{Sin}.m(x\pm\pi)+\frac{m}{1}\ \text{Sin}.(m-2)(x\pm\pi)+\ldots\ldots=0;$$

pour Cos.x négatif, lesquelles subsistent pour toutes les valeurs possibles de x, expriment des théorèmes trigonométriques remarquables par leur généralité et par leur simplicité. Si l'on développe la première, elle donne

$$\text{Tang}.mx=\frac{\frac{m}{1}\text{Sin}.2x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin}.4x+\ldots\ldots}{1+\frac{m}{1}\ \text{Cos}.2x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos}.4x+\ldots.}\ ;$$

de sorte que, pour $x=\frac{1}{4}\pi$, on aurait

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{4}m\pi = \frac{m-\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}-\ldots}{1-\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}-\ldots}$$

20.

L'expression ordinaire de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ qu'on a admise jusqu'ici, pour tous les cas possibles, est généralement

$$(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}=P_0\ ;$$

de plus on a tacitement supposé

$$Q_0=0\ ,$$

pour tous les cas.

En comparant ces expressions aux résultats qu'on vient de trouver, on voit aisément les exceptions auxquelles elles sont soumises.

En effet l'expression $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}=P_0$, admise généralement, n'est exacte et complète que dans le seul cas où $\text{Cos}.x$ est positif et k un nombre impair. Si k est un nombre pair, l'expression $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}=P_0$, ne donne qu'une seule des deux valeurs $\pm P_0$ qui existent dans ce cas. Et de plus elle ne donne pas les deux valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ qu'on doit obtenir, si k est un multiple de 4, et qui sont $\pm\sqrt{-1}P_0$. Si $\text{Cos}.x$ est négatif et k pair, l'expression $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}=P_0$ est en défaut; car, dans ce cas, il n'existe pas de valeurs entièrement réelles de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, mais seulement deux valeurs purement imaginaires, ne différant l'une de l'autre que par le signe, et dont l'expression est $\pm\sqrt{-1}P^{\frac{1}{2}}$, si $k-2$ est un multiple de 4. Si, cos.x étant toujours négatif, k est impair, l'expression de

$(\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = P_0$ est encore en défaut; car la valeur entièrement réelle qui répond à ce cas n'est pas P_0, mais $-P_{\frac{1}{2}}$; de sorte que généralement $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = P_0$ est en défaut pour tout cosinus négatif.

Du reste cette formule ne donne jamais qu'une seule valeur de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, au lieu de k valeurs différentes qui doivent exister dans tous les cas.

L'équation $Q_0 = 0$, admise généralement, est exacte pour tout cosinus positif. Mais elle est en défaut pour tout cosinus négatif. Dans ce dernier cas, c'est $Q_{\frac{1}{2}} = 0$ qui doit lui être substituée.

21.

Je n'ai rapporté ici qu'un précis de l'explication du paradoxe. Ceux qui désireront un plus grand détail, et en particulier l'analise du calcul d'où on a tiré jusqu'ici la valeur incomplète et souvent fautive de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, pourront consulter la traduction allemande des *Leçons sur le calcul des fonctions de* LAGRANGE, qui est prête à paraître, et qui doit former le deuxième volume du recueil complet des ouvrages analitiques et géométriques de ce grand géomètre et que je publierai dans la même langue, en y joignant des notes et des additions, soit pour éclaircir les passages difficiles, en faveur des personnes qui ne sont pas suffisamment versées dans l'analise, soit pour généraliser et simplifier les théorèmes qui en sont susceptibles. Ce qui précède offre un exemple des notes de la dernière sorte. Je publierai les autres en français, à mesure que l'occasion s'en offrira.

Berlin, le 21 septembre 1822.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Rectification de l'énoncé du problème de géométrie proposé à la page 321 *du XII.e volume des* Annales*, et traité à la page* 115 *du présent volume, et solution complète de ce problème;*

Par M. W. H. Talbot

Extrait d'une lettre au Rédacteur des Annales.

. . . .

. . . .

Lorsque je vous parlai, Monsieur, à mon passage à Montpellier, d'une courbe qui résolvait, à la fois, le problème de la trisection de l'angle et celui de la duplication du cube, si j'eusse prévu que vous en proposeriez la recherche à vos lecteurs, j'aurais tâché de mieux m'en rappeler les propriétés caractéristiques. Ma mémoire m'a évidemment mal servi. M. Pagani Michel a complètement raison en tous points; et je demande bien sincèrement pardon à vous et à lui de mon inadvertance. Je vais tâcher de la réparer de mon mieux, en consignant ici le véritable énoncé du problème, et en montrant quelle est la courbe qui le résout.

Le problème doit être énoncé comme il suit:

PROBLÈME. Un axe fixe et un pôle fixe sur la direction de cet axe étant donnés sur un plan, quelle est la courbe qui jouit de cette double propriété? 1.° *que son rayon vecteur est constamment proportionnel au cube de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la direction de la tangente à son extrémité,* 2.° *que l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe est constamment triple de celui que fait la perpendiculaire avec la même droite.*

Le problème est encore ici plus que déterminé, comme dans le premier énoncé, et chacune des deux conditions suffit à elle seule pour faire obtenir l'équation différentielle de la courbe dont il s'agit; mais ces conditions ne sont plus incompatibles; et elles se se trouvent l'une et l'autre satisfaites par *la courbe enveloppe de l'espace parcouru par l'un des côtés d'un angle droit dont le sommet décrit une hyperbole équilatère, tandis que son autre côté passe constamment par le centre de la courbe.*

Soit en effet (x, y) un des points de cette enveloppe, rapportée aux axes de l'hyperbole, dont nous supposons la longueur commune $2a$ et soit (x', y') le point correspondant de cette dernière courbe; nous aurons d'abord

$$x'^2-y'^2=a^2 . \qquad (1)$$

De plus, la droite qui joindra nos deux points, tangente à la courbe cherchée au point (x, y), aura pour équation

$$x'x+y'y=x'^2+y'^2 . \qquad (2)$$

Enfin, il faudra exprimer que le point (x,y) demeure le même lorsque le point (x', y') varie infiniment peu, en parcourant l'hyperbole, ce qui donnera

$$x'\mathrm{d}x'-y'\mathrm{d}y'=0,$$

$$(x-2x')\mathrm{d}x'+(y-2y')\mathrm{d}'=0;$$

d'où on conclura, par élimination,

$$y'x+x'y=4x'y' . \qquad (3)$$

L'équation de la courbe cherchée sera donc le résultat de l'élimination de x' et y' entre les équations (1, 2, 3).

Pour y procéder commodément, et développer, chemin faisant, les propriétés de cette courbe qui font le sujet du problème, éliminons d'abord, tour-à-tour, x et y, entre les équations (2, 3); en ayant égard à l'équation (1), on aura ainsi

$$\left.\begin{aligned} a^2y&=3x'^2y'-y'^3\ ,\\ a^2x&=x'^3-3x'y'^2\ . \end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$$\frac{y}{x}=\frac{3x'^2y'-y'^3}{x'^3-3x'y'^2}=\frac{3\dfrac{y'}{x'}-\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^3}{1-3\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^2}\ .\qquad(5)$$

Or en désignant par O l'origine ou pôle, par OX la direction de l'axe des x, par P le point $(x\,,y)$ de la courbe cherchée et par P′ le point correspondant (x',y') de l'hyperbole on aura

$$\frac{y}{x}=\text{Tang.POX}\ ,\qquad \frac{y'}{x'}=\text{Tang.P'OX}\ ;$$

au moyen de quoi l'équation (5) deviendra

$$\text{Tang. POX}=\frac{3\text{Tang.P'OX}-\text{Tang.}^3\text{P'OX}}{1-3\text{Tang.}^2\text{P'OX}}=\text{Tang 3P'OX}\ ;$$

donc, en premier lieu, l'angle POX est constamment triple de l'angle P′OX, comme l'exige la question.

En prenant la somme des quarrés des mêmes équation (4), on trouve

$$a^4(x^2+y^2)=(x'^2+y'^2)^3\ ,\qquad(6)$$

ou encore

$$\frac{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3}{\sqrt{x^2+y^2}}=a^2\ ;$$

mais

$$\sqrt{x^2+y^2}=\text{OP}\ ,\qquad \sqrt{x'^2+y'^2}=\text{OP}'\ ;$$

donc

$$\frac{\overline{\text{OP}'}^3}{\text{OP}}=a^2\ ;$$

ainsi les cubes des perpendiculaires OP′ sur les tangentes PP′ sont constamment

constamment proportionnels aux rayons vecteurs des points de contact.

Sans aller donc plus avant, nous voilà assurés que notre courbe remplit à la fois les deux conditions du problème.

En supposant donc la courbe tracée, et désignant par A le point où elle coupe l'axe OX, lequel point est un sommet commun à cette courbe et à l'hyperbole, si l'on veut 1.° résoudre le problème de la trisection de l'angle, on menera un rayon vecteur OP, faisant avec l'axe OX, un angle XOP égal à l'angle donné et se terminant à la courbe en P; abaissant ensuite la perpendiculaire OP′ sur la tangente PP′ en ce point, l'angle XOP′ sera l'angle cherché, tiers de l'angle donné XOP.

2.° Veut-on résoudre le problème de la duplication du cube? du point O comme centre, et d'un rayon OP′ égal à l'arête du cube donné, on décrira un cercle. On menera à ce cercle et à la courbe une tangente commune P′P touchant cette dernière en P. On cherchera ensuite un point Q de la même courbe tel qu'on ait OQ=2OP, et menant la tangente QQ en ce nouveau point la perpendiculaire OQ′ sur sa direction, cette perpendiculaire OQ′ sera l'arête du cube cherché, double en volume de celui dont l'arête est OP′.

On voit au surplus, par cette construction, qu'il serait tout aussi facile de trouver un cube dont le volume fût au volume de celui dont l'arête est OP′ dans tel rapport on voudrait. Il ne s'agirait en effet, pour cela, que de faire varier le rapport de OQ à OP.

Poursuivons présentement la recherche de l'équation de notre courbe. L'équation (6) donne

$$x'^2+y'^2=a^2\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{4}};$$

en rapprochant de celle-ci l'équation (1) qui est

$$x'^2-y'^2=a^2,$$

et prenant successivement leur somme et leur différence, on aura

$$\left.\begin{aligned} 2x'^2&=a^2\left\{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\},\\ 2y'^2&=a^2\left\{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

retranchant successivement la seconde du triple de la première et le triple de la seconde de la première, il viendra, en divisant par 2,

$$\left.\begin{aligned} 3x'^2-y'^2&=+a^2\left\{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+2\right\},\\ x'^2-3y'^2&=-a^2\left\{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}-2\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

ces deux dernières, divisées l'une par l'autre, donnent

$$\frac{3x'^2-y'^2}{x'^2-3y'^2}=-\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+2}{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}-2}; \qquad (9)$$

et les équations (7), divisées aussi l'une par l'autre, donnent, par l'extraction de la racine carrée,

$$\frac{y'}{x'}=\pm\left\{\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (10)$$

mais l'équation (5) peut être mise sous cette forme

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}\cdot\frac{3x'^2-y'^2}{x'^2-3y'^2};$$

substituant donc les valeurs (9, 10), nous aurons finalement pour l'équation de la courbe cherchée

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+2}{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}-2}\left\{\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

équation qui est exactement l'équation (2) de M. Pagani Michel (pag. 119), en y changeant simplement k en a. Il est donc certain que la dernière des conditions du problème emporte aussi la première.

Cette courbe, dont l'équation polaire peut être amenée à la forme très-simple

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=Séc.\tfrac{1}{3}t\ ,$$

jouit de plusieurs autres propriétés géométriques et mécaniques fort curieuses. Si j'en trouve le loisir, j'en ferai, Monsieur, le sujet d'un petit mémoire que j'aurai l'honneur de vous adresser (*).

Agréez, etc.

Florence, le 11 octobre 1822.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'analise.

Assigner la somme finie de chacune des trois séries infinies que voici :

1.° $\dfrac{a\text{Cos.}x}{1}-\dfrac{a^3\text{Cos.}3x}{3}+\dfrac{a^5\text{Cos.}5x}{5}-\dfrac{a^7\text{Cos.}7x}{7}+\ldots$

2.° $\text{Cos}\,x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\text{Cos.}3x}{3}+\dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{\text{Cos.}5x}{5}+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{\text{Cos.}7x}{7}+\ldots$

3.° $\dfrac{\text{Cos.}x\text{Cos.}y}{1}-\dfrac{\text{Cos.}2x\text{Cos.}2y}{2}+\dfrac{\text{Cos.}3x\text{Cos.}3y}{3}-\dfrac{\text{Cos.}4x\text{Cos}4y}{4}+\ldots$

(*) Nous croyons devoir rappeler, à cette occasion, qu'une parabole, accompagnée de sa développée, jouit également de la propriété de pouvoir résoudre à la fois le problème de la duplication du cube et celui de la trisection de l'angle (*Annales*, tom. IX, pag. 204, et tom. X, pag. 242).

J. D. G.

Théorème de géométrie elémentaire.

Le point O d'un plan indéfini dont la somme OA+OB+OC, des distances à trois points A, B, C, situés comme on le voudra hors de ce plan est un *minimum* est tel que si, par l'une quelconque des droites OA, OB, OC, on conduit un plan perpendiculaire au plan dont il s'agit, ce plan divisera en deux parties égales l'angle formé par les deux autres droites.

Théorème de Géometrie transcendante.

On sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole sur toutes les tangentes à cette courbe est une sorte de *huit* renverse (∞) appelé *Lemniscate*, ayant mêmes axes, même centre et même sommet que l'hyperbole.

Supposons que l'hyperbole soit équilatère, et soit son axe égal à $2a$. Sur cet axe, comme grand axe, soit construite une ellipse dont le petit axe soit égal à la distance entre ses foyers (*); cette ellipse, circonscrite à la Lemniscate, aura comme elle même centre et mêmes sommets que l'hyperbole.

Soit désignée par E l'excès fini de l'asymptote infinie de l'hyperbole comptée du centre, sur le quart aussi infini de cette courbe. (**) Soient en outre q le quart du périmètre de la Lemniscate et Q le quart du périmètre de l'ellipse; on aura

$$1^{\circ} \quad E+q=Q\sqrt{2}\,,$$

$$2.^{\circ} \quad Eq=\frac{\pi}{4}\,.a^2\,.$$

(*) C'est l'ellipse projection d'un cercle sur un plan qui fait avec le sien un angle demi-droit. Elle jouit de diverses propriétés remarquables.

(**) C'est la distance du centre au point de l'asymptote où viendrait aboutir le point de la courbe qui se trouve au sommet, si cette courbe supposée flexible était appliquée sur son asymptote, sans déplacement du point de contact à l'infini.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Reflexions sur l'usage de l'éprouvette, dans l'artillerie, pour apprécier la force de la poudre;

Par M. Hélie, lieutenant d'artillerie.

On donne, dans l'artillerie, le nom d'*éprouvettes* aux instrumens destinés à estimer la force relative des poudres de diverses qualités.

Ce n'est qu'en examinant les effets produits par la poudre qu'on peut se former une idée de ce qu'on doit entendre par sa force.

Lorsqu'une certaine masse de poudre s'enflamme, les gaz qu se forment et se développent ayant une très-grande force élastique tendent à se dilater en tous sens. S'ils rencontrent quelque corps mobile dont la présence gène cette dilatation, ce corps éprouve de leur part, une pression qui le met en mouvement. La vitesse qu'il acquiert, d'abord infiniment petite, s'accroît continuellement par l'effet de la pression; mais cette pression devant nécessairement diminuer d'intensité à mesure que la vitesse du mobile tend à devenir égale à celle du gaz, il arrive enfin un terme où elle devient tout-à-fait nulle, et où conséquemment le mobile n'a plus d'autre cause de son mouvement que la vitesse qui lui a été antérieurement communiquée. Pendant tout le temps de la durée de l'impulsion, le mobile a reçu à chaque instant une quantité de mouvement infiniment petite; et on juge de la force de la poudre par la somme des quantités de mouvement ainsi acquises, c'est-à-dire, par la quantité totale de mouvement acquise par ce mobile.

La quantité de mouvement infiniment petite communiquée au mobile à chaque instant dépend, à la fois, des valeurs qu'ont, à cet instant, la force élastique des gaz, la vitesse de ce mobile et les résistances qui peuvent gêner son mouvement. Une foule de circonstances étrangères à la qualité de la poudre peuvent d'ailleurs influer sur sa force élastique; et tels sont par exemple le volume et la figure de l'espace qui la contient, l'état de plus ou moins grande compression où elle s'y trouve, l'endroit et la manière dont le feu y est appliqué, etc, etc.

Nous ne nous occuperons uniquement ici que de ce qui concerne les effets de la poudre dans les bouches à feu.

Supposons donc une charge de poudre placée au fond de l'âme cylindrique d'un canon et surmontée d'un projectile. Au moment où l'inflammation commence, les gaz qui se forment et qui cherchent à se dilater dans tous les sens poussent à la fois le projectile et le canon, dans des directions contraires.

Pour examiner d'abord le cas le plus simple, supposons l'axe de la pièce horizontal, les centres de gravité du canon et du boulet placés sur cet axe, le boulet sphérique ou cylindrique et le vent nul. Imaginons encore que le canon soit posé sur un plan horizontal, sur lequel il puisse glisser librement, sans qu'aucun obstacle s'y oppose. Faisons enfin abstraction de toute résistance, et négligeons en outre la circonstance du gaz qui s'échappe par le canal de la lumière. Chacun des deux corps ne recevra ainsi de la poudre qu'une impulsion rectiligne et horizontale.

L'opinion généralement adoptée est que les quantités de mouvement communiquées pendant le même temps au boulet et au canon sont égales entre elles.

Je n'en citerai qu'un exemple. M. Petit (*Annales de chimie*, tome VIII, page 296) veut avoir l'expression de la force vive que la poudre communique dans son explosion; force vive qui est représentée par MV^2+mv^2, M et m désignant les masses respectives du canon et du boulet, V et v leurs vitesses acquises. Il observe que, *le boulet et le canon étant soumis à la même force, doivent acquérir la même quantité de mouvement dans le même temps.* En conséquence, il pose l'équation $MV = mv$, et change ainsi l'expression précédente en celle-ci: $mv^2\left(1 + \frac{m}{M}\right)$.

Mais ce principe ne soutient pas l'épreuve de l'analise.

M et m désignant toujours les masses du canon et du boulet, soient, à un instant quelconque V la vitesse du premier, v celle du second, h la hauteur de colonne d'eau à laquelle ferait équilibre l'elasticité du mélange gazeux.

Désignons par g la gravité, par δ la densité du melange gazeux, celle de l'eau étant prise pour unité. Pour faciliter le raisonnement, supposons le boulet cylindrique, en sorte que la face de ce corps exposée à l'action de la poudre soit plane et perpendiculaire à l'axe de la pièce.

Si le boulet et le canon devenaient tout à coup immobiles, le fluide exercerait sur l'unité de surface de chacun de ces corps une pression égale à gh. Ainsi b désignant la section transversale du canon, ghb exprimerait la pression totale qu'éprouveraient le fond du canon et le boulet.

Si, au contraire, le boulet et le fond du canon étaient subitement enlevés, le fluide s'échapperait, de part et d'autre, avec une vitesse à $\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}$.

Dans l'état réel des choses, le boulet a une vitesse v; le fluide qui le presse a donc aussi cette vitesse; celle que ce dernier prendrait s'il était libre étant, comme nous venons de le dire, $\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}$, celle qu'il perd, par l'interposition du boulet, est donc $\sqrt{2g\frac{h}{\delta}} - v$.

Le boulet éprouve donc la même pression que s'il était immobile et pressé par un fluide d'une densité δ, tendant à s'échapper avec une vitesse $\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}-v$. Soit h' la hauteur de la colonne d'eau à laquelle ferait équilibre l'élasticité de ce fluide, il est clair qu'on aura $\sqrt{2g\frac{h'}{\delta}}=\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}-v$; par conséquent, la pression exercée sur le boulet, et qui est représentée par gbh', aura pour valeur $\frac{b\delta}{2}\left\{\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}-v\right\}^2$.

La quantité de mouvement infiniment petite que cette pression communique au boulet est

$$m\mathrm{d}v=\frac{b\delta}{2}\left\{\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}-v\right\}^2\mathrm{d}t\,,$$

$\mathrm{d}t$ étant l'élément du temps. On trouverait, par un raisonnement analogue, pour la quantité de mouvement communiquée au canon,

$$M\mathrm{d}V=\frac{b\delta}{2}\left\{\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}-V\right\}^2\mathrm{d}t\,.$$

Comme la valeur de V est très-différente de celle de v, on ne peut pas supposer les quantités $M\mathrm{d}V$ et $m\mathrm{d}v$ égales entre elles. La première $M\mathrm{d}V$ est toujours la plus grande, à cause que V est plus petit que v.

Donc, à chaque instant, le canon reçoit de l'action de la poudre une quantité de mouvement plus grande que celle que reçoit le boulet. (*)

(*) M. Petit, à l'exemple de tous ceux qui ont traité la même question avant lui, n'a pas fait attention à la diminution que la vitesse déjà acquise par chacun des deux corps apporte à la pression que ces corps éprouvent. Il a également négligé cette quantité en s'occupant de la question suivante : (voyez le mémoire déjà cité.)

Soit un cylindre fixe, horizontal et fermé par un de ses bouts. Un fluide

Dans la pratique, la différence est encore plus grande, à cause du vent du boulet, de la résistance de l'air, etc, etc.

Si l'on considère les quantités de mouvement totales acquises par

---

élastique est placé entre le fond de ce cylindre et un piston. Il exerce sur ce dernier une pression qui le met en mouvement. Il s'agit de trouver la force vive acquise par le piston?

Soit a la longueur du cylindre primitivement occupé par le fluide; soit x celle qu'il occupe actuellement. Soient h la hauteur de la colonne d'eau à laquelle son élasticité pouvait faire équilibre quaud il occupait l'espace a, m la masse du piston, v sa vitesse actuelle, b la section transversale du cylindre; et prenons la densité de l'eau pour unité.

L'élasticité du fluide s'est réduite à $\frac{ha}{x}$. La pression qu'il exerce sur le fond du cylindre est $gb\frac{ha}{x}$. M. Petit suppose que cette valeur est aussi celle de la pression exercée sur le piston. En conséquence, il écrit $\frac{mdv}{dt}=gb\frac{ha}{x}$ ou $\frac{mvdv}{dt}=g\frac{ha}{x}$. Intégrant ensuite cette équation, il obtient ainsi la valeur de mv^2.

Mais, à cause que le piston a une vitesse acquise v, la pression exercée sur sa base est nécessairement moindre que celle que supporte le fond du cylindre. Soit δ la densité du fluide, lorsqu'il occupait l'espace a; sa densité actuelle devra être exprimée par $\frac{a\delta}{x}$. La vitesse qu'il prendrait, si l'on enlevait subitement le piston serait $\sqrt{2g.\frac{\frac{ha}{x}}{\frac{a\delta}{x}}}=\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}$. Donc, la vitesse qu'il perd, par l'interposition du piston, est $\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}-v$. Soit h' la hauteur de la colonne d'eau à laquelle ferait équilibre l'élasticité génératrice de cette vitesse; on aura

$$\left(\sqrt{2g\frac{h}{\delta}}-v\right)^2=2g\frac{h'}{\frac{\delta a}{x}}=2\frac{gx}{a\delta}h',$$

d'où

les deux corps, on voit qu'elles doivent différer encore davantage. En effet, dès les premiers instans de l'explosion, le boulet, chassé hors du canon, n'éprouve bientôt plus, de la part de la poudre, qu'une action à peu près nulle; tandis que celle qui est exercée sur le canon est encore considérable.

Il est donc bien prouvé que l'explosion de la poudre communique au canon une quantité de mouvement plus grande que celle qu'elle communique au boulet.

La relation qu'ont entre elles ces deux quantités de mouvement dépend d'ailleurs de la loi de développement des gaz dans la charge de poudre que l'on considère. Ainsi, cette loi venant à varier, la relation variera aussi. Donc cette dernière dépend de la nature de la poudre.

Une de ces quantités de mouvement détermine *le recul* de la pièce, l'autre la distance à laquelle est porté le boulet ou *la portée*. Ainsi, la relation entre le recul et la portée dépend, en général, de l'espèce de poudre que l'on emploie.

De là il résulte qu'il peut arriver que, de deux charges égales de poudres de qualité différente, l'une donne un petit recul et une grande portée, et qu'au contraire l'autre donne un grand recul et une petite portée.

$$h' = \frac{a\delta}{2gx}\left(\sqrt{2g\frac{h}{\delta}} - v\right)^2 ;$$

donc la pression bgh' qu'éprouve le piston a pour valeur

$$\frac{ba\delta}{2x}\left(\sqrt{2g\frac{h}{\delta}} - v\right)^2 ;$$

donc enfin

$$\frac{mdv}{dt} = \frac{ba\delta}{2x}\left(\sqrt{2g\frac{h}{\delta}} - v\right)^2 ;$$

formule bien différente de la précédente.

Je ferai encore observer que ROBINS, dans ses *Nouveaux principes d'artillerie*, a commis la même inadvertance.

En effet, la quantité de mouvement que reçoit le boulet ne dépend guère, du moins dans les pièces de peu de longueur, que de ce qui se passe dans les premiers instans de l'inflammation; celle que reçoit le canon dépend, au contraire, des circonstances de la durée totale de l'explosion. Or, il est aisé, d'après cela, d'imaginer deux lois de développement des gaz dont l'une soit telle que le boulet n'obtienne qu'une très-petite quantité de mouvement, pendant que le canon en recevra une très-grande, tandis que, suivant l'autre, le boulet acquerra une grande vitesse, tandis que la quantité de mouvement du canon, quoique toujours supérieure à celle du boulet, soit cependant bien moindre que dans l'autre cas.

Ainsi, en général, les poudres qui donnent les plus grands reculs diffèrent de nature de celles qui donnent les plus grandes portées.

Au reste, ce n'est pas toujours la même poudre qui donne la plus grande portée ou le plus grand recul.

En effet, c'est un fait bien reconnu que la loi de l'inflammation varie, en général, non seulement avec l'espèce de poudre, mais encore avec la masse sur laquelle on opère. On conçoit donc que la poudre qui, sous une charge donnée, produit la plus grande portée ou le plus grand recul, peut fort bien ne pas conserver cet avantage, lorsque le poids de la charge viendra à varier.

Les obstacles que les gaz rencontrent, en cherchant à se dégager, influent aussi singulièrement sur la manière dont ils se forment et le degré d'élasticité qu'ils acquièrent. Le projectile s'oppose d'autant plus à leur développement que l'angle sous lequel on tire est plus considérable. Ainsi, la poudre qui donne la plus grande portée peut, toutes choses égales d'ailleurs, varier avec l'angle de projection.

La grandeur du vent, la position de la lumière, le degré d'échauffement de la pièce, etc., sont encore autant de circonstances qui influent sur la loi de développement des gaz.

D'après cela, on conçoit aisément que les effets des poudres doivent varier avec l'espèce des bouches à feu.

Il résulte de tout ce qui précède que la même poudre qui, dans de certaines circonstances, produit de très-grands effets, peut, dans des circonstances différentes, n'en produire que de très-faibles. (*)

Et, comme on juge de la force de la poudre par les effets qu'elle produit, on voit que la même poudre peut se montrer forte dans un cas et faible dans un autre. Ainsi, par exemple, on a vu que la même poudre pourrait en même temps donner un grand recul et une petite portée. Si donc l'on a seulement égard à cette portée, la poudre sera réputée faible, tandis que si, au contraire, on ne considère uniquement que le recul, elle sera réputée forte.

Par conséquent la même poudre n'est pas également propre à produire tous les effets possibles.

Les épreuves qu'on fait subir aux poudres se réduisent ordinairement à essayer leur effet dans un cas particulier. Celle qui produit l'effet le plus considérable est réputée supérieure à toutes les autres.

Mais la supériorité de cette poudre n'est constatée que dans le cas particulier où elle a été essayée; et il est très-possible qu'elle se montre, dans d'antres circonstances, fort inférieure à celles sur lesquelles on lui aura donné la préférence.

De là résulte que la même poudre peut se montrer très-faible dans une éprouvette et très-forte dans une autre.

On peut diviser les éprouvettes en deux sortes principales; dans les unes on mesure soit la quantité de mouvement imprimée au

(*) Au nombre de ces circonstances, on ne compte point ici celles qui changent la nature de la poudre, comme les variations hygrométriques. La poudre est supposée toujours dans le même état. La quantité employée et les effets à produire varient seuls.

projectile

projectile soit la distance à laquelle il est porté : dans les autres on observe le recul du canon qui renferme la poudre.

Le mortier-éprouvette, dont on se sert en France, appartient à la première classe : l'éprouvette hydrostatique de M. Reynier appartient à la seconde. (Voyez sa description dans l'*Aide-mémoire* du général GASSENDI).

Dans le premier cas, la poudre qui donne la plus grande portée est réputée la meilleure ; dans le second, c'est celle qui donne le plus grand recul.

Ainsi, de deux poudres dont l'une porte le globe de l'éprouvette-mortier à 230 mètres et l'autre à 220, la première est regardée comme supérieure ; mais sa supériorité peut très-bien n'exister que dans l'éprouvette ; et il est possible que, dans d'autres bouches à feu, la seconde donne une plus grande portée.

L'éprouvette-mortier et l'éprouvette hydrostatique doivent souvent donner des résultats contradictoires ; la poudre s'y trouve, en effet, dans des circonstances fort différentes. Dans la première, la charge est de trois onces; elle n'est que de trois grammes seulement dans la seconde qui, en outre, n'a point de projectile. De plus, les effets observés ne sont pas du même genre.

Toutes ces réflexions se trouvent, au surplus, complètement confirmées par l'expérience.

Toulouse, le 27 décembre 1822.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Solution d'un problème de géométrie, dépendant des équations aux différences mêlées;

Par M. VERNIER, professeur de mathématiques au collége royal de Caen, ancien élève de l'école normale.

PROBLÈME. *Trouver la courbe plane sur laquelle un point lumineux, parvenant d'un point donné de son plan, dans quelque direction que ce soit, après avoir subi deux réflexions, retourne au point même de départ?* (*)

Solution. Soient O le point donné, P, P′ les points de la courbe où les deux réflexions consécutives doivent avoir lieu; il faudra donc que, quelle que puisse être la direction primitive OM, en menant les normales PN, P′N′, on ait *Ang.* OPN $=$ *Ang* NOP′ et *Ang.*PP′N′ $=$ *Ang* N′P′O.

Soit pris le point O pour origine des coordonnées rectangulaires. Soient x, y les coordonnées du point P et soient x', y' celles du point P'; et soient enfin désignées par Δx, Δy, respectivement, les différences $x'-x$, $y'-y$.

(*) Ce problème, proposé dans les *Acta eruditorum* (septembre 1745), a été traité pour la première fois par Euler (même recueil, 1746). M. Biot s'en est aussi occupé (*Mémoires présentés à l'Institut*, tom. I). Voyez le *Traité des différences et des séries* de M. Lacroix, pag. 588.

J. D. G.

Concevons une ellipse qui, ayant les points O et P pour foyers, passe par le point P′; par la propriété fondamentale de cette courbe les coordonnées x', y' satisferont à l'équation

$$\sqrt{x'^2+y'^2}+\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}=\text{Constante.}$$

La différentielle de cette équation, prise en considérant x', y' comme variables et x, y comme constans, et en remplaçant respectivement $x'-x$ et $y'-y$ par Δx, Δy est

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}+\left\{\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right\}\frac{dy'}{dx'}=0\,;$$

Or, par les propriétés connues de l'ellipse, les lois de la réflexion et la nature du problème, il est aisé de voir qu'au point (x', y') l'ellipse dont il s'agit doit avoir un élément commun et par conséquent une tangente commune avec la courbe cherchée, de sorte que, dans l'équation ci-dessus, le coefficient différentiel $\frac{dy'}{dx'}$ de l'ellipse peut être remplacé par celui de cette courbe. Désignant donc ce dernier par p' et substituant, notre équation pourra être mise sous la forme

$$\frac{1+p'\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}=-\frac{1+p'\dfrac{y'}{x'}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^2}}\,;$$

ce qui donne, en quarrant, chassant les dénominateurs et transposant

$$\left\{1+p'\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\}^2\left\{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right\}-\left\{1+p'\frac{y'}{x'}\right\}^2\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}=0\,;$$

cette équation est évidemment satisfaite en posant

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y'}{x'}\ ;$$

mais c'est une valeur introduite par l'élévation au quarré, puisqu'elle ne satisfait pas à l'équation sous sa première forme.

En faisant le développement, l'équation peut être mise sous cette forme

$$\left\{\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{y'}{x'}\right\}\left\{\left(p'^2-2p'\frac{y'}{x'}-1\right)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\left(p'^2\frac{y'}{x'}+2p'-\frac{y'}{x'}\right)\right\}=0\ ;$$

et donne conséquemment, pour la véritable valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{p'^2y'+2p'x'-y'}{x'+2p'y'-p'^2x'}\ . \qquad (1)$$

La considération d'une seconde ellipse qui, ayant pour foyers les points O et P', passerait par le point P, donnera pareillement, en désignant par P le coefficient différentiel au point O,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{p^2y+2px-y}{x+2py-p^2x}\ . \qquad (2)$$

Les équations aux différences mêlées (1, 2) ne paraissent facilement intégrales que dans le cas où le point O est infiniment éloigné ; c'est-à-dire, dans le cas où les rayons PO et P'O sont parallèles. Alors x et x' sont respectivement infinis par rapport à y et y', ce qui réduit les équations (1, 2) aux suivantes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{1-p^2}\ , \qquad (3) \qquad\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p'}{1-p'^2}\ , \qquad (4)$$

ce qui donne

$$\frac{2p}{1-p^2}=\frac{2p'}{1-p'^2}\ ;$$

d'où résultent ces deux valeurs

$$p=p' , \qquad p=-\frac{1}{p'} .$$

Occupons-nous d'abord de l'équation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{1-p^2} ;$$

dans le cas où on a $p=p'$; c'est-à-dire, dans le cas où les tangentes à la courbe en P et P′ sont parallèles. Soit $y=\mathrm{f}(x)$ d'où

$$\Delta y=\mathrm{f}(x+\Delta x)-\mathrm{f}(x) ,$$

et soit $\mathrm{f}'(x)$ la dérivée de y ou $\mathrm{f}(x)$, de manière qu'on ait $p=\mathrm{f}'(x)$; nos équations seront alors

$$\frac{\mathrm{f}(x+\Delta x)-\mathrm{f}(x)}{\Delta x}=\frac{2\mathrm{f}'(x)}{1-[\mathrm{f}'(x)]^2} , \quad \mathrm{f}'(x)=\mathrm{f}'(x+\Delta x) .$$

La première revient à

$$\mathrm{f}(x+\Delta x)-\mathrm{f}(x)=\frac{2\mathrm{f}'(x).\Delta x}{1-[\mathrm{f}'(x)]^2} ; \qquad (5)$$

en la différentiant, la différentielle de son premier membre sera

$$\mathrm{f}'(x+\Delta x)(1+\mathrm{d}.\Delta x)-\mathrm{f}'(x)$$

en y mettant pour $\mathrm{f}'(x+\Delta x)$ sa valeur $\mathrm{f}'(x)$, donnée par la seconde équation, cette différentielle se réduira à $\mathrm{f}'(x).\mathrm{d}.\Delta x$; de sorte qu'on aura

$$\mathrm{f}'(x).\mathrm{d}\Delta x=\mathrm{d}.\frac{2\mathrm{f}'(x).\Delta x}{1-[\mathrm{f}'(x)]^2} .$$

Cette équation différentielle entre $\mathrm{f}'(x)$ et Δx s'intègre facilement et donne, comme on peut le vérifier par la différentiation,

$$\Delta x = \mathrm{C}\,.\,\frac{1-[\mathrm{f}'(x)]^2}{[\mathrm{f}'(x)]^2}\;.$$

en mettant cette valeur dans l'équation (5), elle devient

$$\mathrm{f}\left\{x+\mathrm{C}\,.\,\frac{1-y'^2}{y'^2}\right\}-y=\frac{2\mathrm{C}}{y'}\;, \qquad \text{(A)}$$

où, pour plus de simplicité, nous avons mis y et y' pour $\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{f}'(x)$.

Posons $x=\varphi(z)$, φ étant une fonction de la variable indépendante z de telle forme qu'on ait

$$x+\mathrm{C}\,.\,\frac{1-y'^2}{y'^2}=\varphi(z+1)\;. \qquad \text{(B)}$$

Posons encore $y=\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}[\varphi(z)]=\psi(z)$; puisque $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; nous aurons aussi $y'=\frac{\mathrm{d}.\psi(z)}{\mathrm{d}.\varphi(z)}$; au moyen de quoi les équations (A et B) deviendront, en n'écrivant, pour plus de simplicité, que les caractéristiques des fonctions,

$$\psi_1-\psi=2\mathrm{C}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}\;; \qquad \text{(A')}$$

$$\varphi_1-\varphi=\mathrm{C}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}\right)^2-\mathrm{C}\,. \qquad \text{(B')}$$

Cela posé, l'équation $\mathrm{f}'(x)=\mathrm{f}'(x+\Delta x)$ prouve que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ ne change pas, lorsque x se change en $x+\Delta x$, ce qui prouve que $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}$ ne doit pas changer non plus, lorsque z devient $z+1$. Donc $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}$ est égal à une fonction arbitraire g, qui ne change pas, lorsque z devient $z+1$; de sorte qu'on a

$$\psi_1-\psi=2Cg\ ;\qquad \varphi_1-\varphi=Cg^2-C\ ,$$

d'où l'on tire

$$\psi=2Cgz+m\ ,\qquad \varphi=C(g^2-1)z+n\ ,$$

g, m, n étant des fonctions arbitraires de z dont la différence doit être nulle, mais qui ne sont pas indépendantes entre elles; car, comme on a supposé $g=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}$, il faut qu'on ait

$$g=\frac{Cg^2-c+2Cgzg'+n'}{2Czg'+2Cg+m'}\ ,$$

g', m', n' étant les dérivées respectives de g, m, n, prises par rapport à z. Cette équation de condition se réduit à

$$Cg^2+m'g+(C-n')=0\ ,$$

d'où

$$g=\frac{-m'+\sqrt{m'^2+4Cn'-4C^2}}{2C}\ .$$

et les valeurs de φ et ψ, c'est-à-dire de x et y seront, en conséquence

$$x=(-m'+\sqrt{m'^2+4Cn'-4C^2})\,.\,\frac{z}{4C}-Cz+n\ ;$$

$$y=(-m'+\sqrt{m'^2+4Cn'-4C^2})z+m\ .$$

Passons au second des deux cas pour lesquels on peut facilement intégrer les équations du problème, c'est-à-dire au cas où l'on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{1-p^2}\ ;\qquad p=-\frac{1}{p'}\ ;$$

et où, par conséquent, les tangentes en (x, y) et (x', y') sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Posons encore

$$y = \mathrm{f}(x) \quad \text{et} \quad p = \mathrm{f}'(x) ;$$

nos deux équations deviendront

$$\frac{\mathrm{f}(x+\Delta x) - \mathrm{f}(x)}{\Delta x} = \frac{2\mathrm{f}'(x)}{1 - [\mathrm{f}'(x)]^2}, \qquad \mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{\mathrm{f}'(x+\Delta x)} :$$

Posons ensuite $x = \varphi(z)$, φ étant une fonction de la variable indépendante z de telle forme qu'on ait

$$x + \Delta x = \varphi(z+1) :$$

Posons enfin $y = \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}[\varphi(z)] = \psi(z)$; nous aurons, comme ci-dessus,

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{d\psi}{d\varphi}, \qquad \mathrm{f}'(x+\Delta x) = \frac{d\psi_1}{d\varphi_1} ;$$

au moyen de quoi nos deux équations deviendront

$$\psi_1 - \psi = (\varphi_1 - \varphi) \cdot \frac{2d\psi . d\varphi}{d\varphi^2 - d\psi^2}, \qquad \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{\frac{d\psi_1}{d\varphi_1}} .$$

Soit $\dfrac{d\psi}{d\varphi} = u$; la deuxième équation deviendra $uu_1 = -1$, et pourra s'intégrer. En effet, remplaçant u_1 par $u + \Delta u$, elle deviendra $u^2 + u\Delta u = -1$, d'où $u + \Delta u = -1 \dfrac{1}{u}$, et par suite

$$2u + \Delta u = u - \frac{1}{u} .$$

Or, la différence du second membre est nulle ; car, si z se change en $z+1$, il devient $-\dfrac{1}{u_1} + u_1$, qui est la même chose que $-\dfrac{1}{u} + u$, puisque l'équation $uu_1 = -1$ donne

$u =$

$$u=-\frac{1}{u_1} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{u}=u_1\ ;$$

on a donc

$$2u+\Delta u=g\ ,$$

g étant une fonction de z dont la différence est nulle ; d'où l'on tire, en intégrant, par la méthode connue,

$$u=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}=g+(-1)^{z}\sqrt{1+g^2}\,.$$

Revenant ensuite à l'équation

$$\psi_1-\psi=(\varphi_1-\varphi)\,.\,\frac{2\mathrm{d}\psi.\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi^2-\mathrm{d}\psi^2}\ ;$$

elle pourra être mise sous la forme

$$\varphi_1-\varphi=\frac{\psi_1-\psi}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}\right)$$

puis donc qu'on a $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}=u$, elle deviendra

$$\varphi_1-\varphi=\frac{\psi_1-\psi}{2}\left(\frac{1}{u}-u\right)=-\frac{\psi_1-\psi}{2}\,g\ ;$$

donc

$$\varphi=-\frac{g}{2}\,\psi+k\ ,$$

k étant une fonction arbitraire de z dont la différence est nulle.

Il reste donc à obtenir une seconde intégrale. Pour cela, nous donnerons à celle que nous venons d'obtenir la forme suivante

$$\psi=-\frac{2}{g}\,\varphi+\frac{2k}{g}\ ,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}=\frac{2g'}{g^2}\,\varphi-\frac{2}{g}\,\varphi'-\frac{2kg'}{g^2}+\frac{2k'}{g}\ ;$$

mais on a, comme nous l'avons vu tout à l'heure,

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}=g+(-1)^{z}\sqrt{1+g^2}\ ,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{d\varphi}{dz}\{g+(-1)^{\gamma}\sqrt{1+g^2}\};$$

égalant donc ces deux valeurs de $\frac{d\psi}{dz}$, on aura

$$\varphi'\left\{g+(-1)^{\gamma}\sqrt{1+g^2}+\frac{2}{g}\right\}-\frac{2g'}{g^2}\varphi+\frac{2kg'}{g^2}-\frac{2k'}{g}=0.$$

Posons

$$R=\frac{-\frac{2g'}{g^2}}{g+(-1)^{\gamma}\sqrt{1+g^2}+\frac{2}{g}}=\frac{-g'}{g^3+(-1)^{\gamma}.g^2.\sqrt{1+g^2}+2g},$$

$$V=\frac{\frac{2kg'}{g^2}-\frac{2k'}{g}}{g+(-1)^{\gamma}\sqrt{1+g^2}+\frac{2}{g}}=\frac{2kg'-2gk'}{g^3+(-1)^{\gamma}.g^2.\sqrt{1+g^2}+2g};$$

alors la valeur de φ dépendra de l'équation linéaire du prèmier ordre

$$\varphi'+R\varphi+V=0;$$

d'où on tirera, en intégrant,

$$\varphi=-e^{-\int R\mathrm{d}z}\left\{\int Ve^{\int R\mathrm{d}z}+C\right\},$$

C étant une constante arbitraire. Cette équation jointe à l'équation

$$\varphi=-\frac{g}{2}\psi+k,$$

donnera, pour résoudre le problème, deux équations en φ, ψ, z ou en x, y, z, renfermant deux fonctions arbitraires à différence nulle, et en outre une constante arbitraire.

Par la difficulté d'intégrer les équations du problème, dans les deux cas particuliers que nous venons de traiter, et par la complication des résultats, on peut juger des obstacles que présenterait l'intégration dans le cas général. Toutefois nous osons croire que l'essai qui précède sera reçu avec quelque indulgence par les géomètres qui savent combien est peu avancée encore la théorie des équations aux différences mêlées.

GÉOMÉTRIE ÉLEMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème de géométrie ;

Par M. Amédée Morel, capitaine d'artillerie.

Théorème. *L'aire de la projection d'une figure plane quelconque sur un plan, situé comme on le voudra par rapport au sien, est égale à l'aire de cette figure même, multipliée par le cosinus tabulaire de son inclinaison sur le plan de projection.*

Démonstration. Toute figure plane étant polygone rectiligne ou limite de polygone rectiligne ; la proposition sera vraie pour toute figure plane, si elle est vraie pour un polygone rectiligne quelconque.

Imaginons le polygone décomposé en triangles par des diagonales ; les projections de ces triangles seront les triangles résultant de la décomposition de la projection du polygone par des diagonales, projections de celles du polygone lui-même ; et, comme les inclinaisons des plans de ces triangles les uns sur les autres ne seront autre chose que l'inclinaison du plan du polygone sur celui de sa projection, il est clair que la proposition sera vraie, si elle l'est pour chaque triangle, comparé à sa projection ; d'où l'on voit que tout se réduit à prouver que la projection de l'aire d'un triangle sur un plan quelconque, différent du sien est égale à l'aire de ce triangle, multipliée par le cosinus tabulaire de l'inclinaison de son plan sur celui de sa projection.

Et comme, excepté le cas où les deux plans sont parallèles ; pour lequel la proposition est évidente, les deux plans forment toujours un angle dièdre, tout se réduit à démontrer que l'aire de la projection sur l'une des faces d'un angle dièdre d'un triangle tracé sur l'autre face est égale à l'aire de ce dernier, multipliée par le cosinus tabulaire de l'angle dièdre dont il s'agit.

Si, par l'un des sommets du triangle, on conduit un plan parallèle au plan de projection, sa projection sur ce plan sera égale à sa projection sur l'autre; de sorte que, si la proposition est vraie pour celle-là elle le sera aussi pour celle-ci.

Mais le second plan formera avec celui du triangle un angle dièdre égal au premier, tel que l'un des sommets de ce triangle se trouvera sur son arête; il suffit donc de démontrer le théorème pour un triangle placé dans de telles circonstances.

Ou bien un des côtés de l'angle qui a son sommet sur l'arête de l'angle dièdre se confondra avec cette arête, ou bien ils ne se confondront ni l'un ni l'autre avec elle. Dans ce dernier cas, à moins que le côté opposé au sommet dont il s'agit ne soit parallèle à cette arête; en le prolongeant, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'il la rencontre, notre triangle se trouvera être la somme ou la différence de deux autres, dans lesquels un des côtés se confondra avec l'arête de l'angle dièdre; de sorte que, si la proposition est vraie pour de tels triangles, elle le sera aussi pour le nôtre.

Dans le cas particulier où le côté opposé à l'angle dont le sommet est sur l'arête se trouve parallèle à cette arête, en conduisant par ce côté un plan parallèle au plan de projection, la projection sur ce nouveau plan sera la même que sur le premier; il formera avec le plan du triangle un nouvel angle dièdre égal au premier, et notre triangle se trouvera encore avoir un de ses côtés sur l'arête de cet angle dièdre.

Ainsi, dans tous les cas, la question se réduit à démontrer que, lorsqu'un triangle, situé sur l'une des faces d'un angle dièdre a de plus sa base située sur son arête, l'aire de sa projection sur l'autre face est égale à l'aire du triangle, multipliée par le cosinus tabulaire de l'angle dièdre dont il s'agit.

Mais le triangle et sa projection ayant alors même base, leurs aires sont proportionnelles à leurs hauteurs, dont l'angle mesure l'angle dièdre dont il s'agit, puisqu'elles sont des perpendiculaires à son arête, menées dans ses faces par un même point de cette arête. D'un autre côté, la hauteur du triangle se trouve être l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est la hauteur de sa projection, et dans lequel l'angle de ces deux côtés est la mesure de l'angle dièdre; la question est donc ramenée à savoir si, dans un triangle rectangle, un des côtés de l'angle droit est égal à son hypothénuse, multipliée par le cosinus tabulaire de l'angle qu'elle fait avec lui, ce qui est une conséquence immédiate de la définition même du cosinus tabulaire d'un angle: notre théorème se trouve donc ainsi complètement démontré.

Corollaires. I. L'aire de la projection sur la base d'une pyramide régulière d'une figure tracée arbitrairement sur la surface convexe, et pouvant embrasser tant de ces faces latérales qu'on voudra, est égale à l'aire de cette figure même, multipliée par le cosinus tabulaire de l'inclinaison commune des faces latérales de la pyramide sur le plan de sa base.

II. L'aire de la projection sur la base d'un cône droit d'une figure tracée arbitrairement sur la surface du cône est égale à l'aire même de cette figure, multipliée par le sinus tabulaire de l'angle générateur du cône.

III. Plus généralement, l'aire de la projection sur un plan fixe d'une figure tracée arbitrairement sur la surface développable enveloppe de l'espace parcouru par un plan mobile qui fait un angle constant avec le plan fixe, est égale à l'aire de cette figure même multipliée par le cosinus tabulaire de cet angle constant.

La Fère, 18 octobre 1822.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Extension et démonstration nouvelle du théorème de M. de Stainville, *présentée à la page* 229 *du* IX.e *volume du présent recueil*;

Par M. Gergonne.

L'importance du beau théorème démontré par M. de Stainville à la page 229 du IX.e volume de ce recueil peut en faire désirer une démonstration sinon plus simple, du moins qui exige assez peu d'écriture pour pouvoir non seulement être introduite dans les traités élémentaires, mais encore être présentée dans une leçon publique, sur un tableau d'une médiocre étendue. On peut remarquer en effet que, puisque l'un des principaux avantages de la langue algébrique sur la langue vulgaire consiste dans la brièveté de ses notations, une démonstration écrite dans cette langue doit être d'autant plus claire et plus facile à suivre qu'elle est exprimée en termes plus concis.

En nous occupant des moyens de parvenir à ce but, relativement au théorème dont il s'agit, nous sommes tombés sur un théorème un peu plus général qui se démontre avec la plus grande facilité, et duquel l'autre se déduit ensuite immédiatement. C'est à exposer le résultat de nos recherches sur ce sujet que nous destinons le présent article.

Soit une série

$$F(a)=f_0(a)+f_1(a).\frac{x}{1!}+f_2(a).\frac{x^2}{2!}+f_3(a).\frac{x^3}{3!}+f_4(a).\frac{x^4}{4!}+\dots \qquad (1)$$

dans laquelle nous supposons le premier terme $f_0(a)$ une fonction tout-à-fait arbitraire de a et de tant d'autres quantités différentes de x qu'on voudra, et où tous les autres coefficiens se trouvent définis par l'équation

$$f_n(a)=af_{n-1}(a+k)\ , \qquad (2)$$

de telle sorte qu'en changeant, dans le coefficient de l'un quelconque de ses termes a en $a+k$, et multipliant ensuite le résultat par a, on obtient le coefficient du terme qui suit immédiatement.

Si, dans cette série, nous changeons simplement a en b nous aurons cette autre série

$$F(b)=f_0(b)+f_1(b).\frac{x}{1!}+f_2(b).\frac{x^2}{2!}+f_3(b).\frac{x^3}{3!}+f_4(b).\frac{x^4}{4!}+\ldots \qquad (3)$$

dans laquelle $f_0(b)$ ne différera de la fonction arbitraire $f_0(a)$ qu'en ce que a y sera changé en b, et où les coefficiens des autres termes se trouveront définis par l'équation

$$f_n(b)=bf_{n-1}(b+k)\ , \qquad (4)$$

de sorte qu'en changeant, dans le coefficient de l'un quelconque des termes, b en $b+k$ et multipliant ensuite le résultat par b, on obtiendra le coefficient du terme qui suit immédiatement.

Si l'on fait le produit de ces deux séries, on pourra l'ordonner par rapport à $\frac{x}{1!}$, $\frac{x^2}{2!}$, $\frac{x^3}{3!}$, ..., et les coefficiens de ses différens termes seront des fonctions de a et b, de sorte qu'on pourra écrire

$$F(a).F(b)=\varphi_0(a,b)+\varphi_1(a,b)\frac{x}{1!}+\varphi_2(a,b)\frac{x^2}{2!}+\varphi_3(a,b)\frac{x^3}{3!}+\ldots; \qquad (5)$$

série dans laquelle on aura évidemment

$$\varphi_0(a,b)=f_0(a).f_0(b). \qquad (6)$$

Or ce que nous nous proposons de démontrer, c'est que les coefficiens de tous les autres termes de cette série seront définis par l'équation

$$\varphi_n(a,b)=a\varphi_{n-1}(a+k,b)+b\varphi_{n-1}(a,b+k)\ , \qquad (7)$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, que, si dans le coefficient de l'un quelconque des termes, on change d'abord a en $a+k$ en multipliant le résultat par a, puis b en $b+k$ en multipliant le résultat par b, la somme des deux produits sera le coefficient du terme qui suivra immédiatement.

Pour y parvenir, faisons d'abord les premiers termes du produit effectifs de nos deux séries ; nous trouverons ainsi

$$\mathrm{F}(a).\mathrm{F}(b)=\mathrm{f}_0(a)\,\mathrm{f}_0(b)+\begin{array}{r|}\mathrm{f}_1(a)\mathrm{f}_0(b)\\ +\mathrm{f}_0(a)\mathrm{f}_1(b)\\ \\ \end{array}\,\frac{x}{1!}+\begin{array}{r|}\mathrm{f}_2(a)\mathrm{f}_0(b)\\ +2\mathrm{f}_1(a)\mathrm{f}_1(b)\\ +\mathrm{f}_0(a)\mathrm{f}_2(b)\end{array}\,\frac{x^2}{2!}+\ldots \qquad (8)$$

il est facile de s'assurer que la loi annoncée à lieu dans ces premiers termes ; en effet, si nous exécutons les opérations qu'elle prescrit sur son premier terme, nous aurons pour résultat

$$a\mathrm{f}_0(a+k)\,\mathrm{f}_0(b)+b\mathrm{f}_0(a).\mathrm{f}_0(b+k)\,;$$

mais, par les définitions (2 et 4), on a

$$a\mathrm{f}_0(a+k)=\mathrm{f}_1(a)\,,\qquad b\mathrm{f}_0(b+k)=\mathrm{f}_1(b)\,;$$

donc cette quantité revient à

$$\mathrm{f}_1(a)\mathrm{f}_0(b)+\mathrm{f}_0(a)\mathrm{f}_1(b)\,,$$

qui est bien, en effet, le coefficient du second terme.

Si l'on fait les mêmes opérations sur ce coefficient, le résultat sera

$$a[\mathrm{f}_1(a+k).\mathrm{f}_0(b)+\mathrm{f}_0(a+k)\mathrm{f}_1(b)]+b[\mathrm{f}_1(a)\mathrm{f}_0(b+k)+\mathrm{f}_0(a)\mathrm{f}_1(b+k)]\,;$$

mais, par les définitions (2 et 4)

$$a\mathrm{f}_1(a+k)=\mathrm{f}_2(a)\,,\qquad b\mathrm{f}_1(b+k)=\mathrm{f}_2(b)\,,$$
$$a\mathrm{f}_0(a+k)=\mathrm{f}_1(a)\,,\qquad b\mathrm{f}_0(b+k)=\mathrm{f}_1(b)\,;$$

substituant donc et réduisant, il viendra

$$\mathrm{f}_2(a)\mathrm{f}_0(b)+2\mathrm{f}_1(a)\mathrm{f}_1(b)+\mathrm{f}_0(a)\mathrm{f}_2(b)\,,$$

qui est bien, en effet, le coefficient du troisième terme.

Nous étant ainsi assurés de la vérité de cette loi pour les premiers termes du développement du produit de nos deux séries, il ne nous reste plus qu'à démontrer qu'elle a lieu pour deux termes consécutifs quelconques. Prenons ceux qui sont affectés de $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ et $\frac{x^n}{n!}$; il est aisé de voir que ces deux termes sont

f_{n-1}

$$\left.\begin{array}{r}
\mathrm{f}_{n-1}(a).\mathrm{f}_0(b)\\
+\frac{n-1}{1}\mathrm{f}_{n-2}(a).\mathrm{f}_1(b)\\
+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\mathrm{f}_{n-3}(a).\mathrm{f}_2(b)\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\mathrm{f}_2(a).\mathrm{f}_{n-3}(b)\\
+\frac{n-1}{1}\mathrm{f}_1(a).\mathrm{f}_{n-2}(b)\\
\mathrm{f}_0(a).\mathrm{f}_{n-1}(b)
\end{array}\right|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+
\begin{array}{r}
\mathrm{f}_n(a).\mathrm{f}_0(b)\\
+\quad\frac{n}{1}\mathrm{f}_{n-1}(a).\mathrm{f}_1(b)\\
+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\mathrm{f}_{n-2}(a).\mathrm{f}_2(b)\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\mathrm{f}_2(a).\mathrm{f}_{n-2}(b)\\
+\quad\frac{n}{1}\mathrm{f}_1(a).\mathrm{f}_{n-1}(b)\\
+\quad\mathrm{f}_0(a).\mathrm{f}_n(b)
\end{array}\left|\frac{x^n}{n!}+\ldots;\right.$$

opérant sur le premier de ces deux termes comme nous l'avons fait ci-dessus, nous aurons, pour résultat

$$a\left\{\begin{array}{lr}
 & \mathrm{f}_{n-2}(a+k).\mathrm{f}_0(b)\\
+ & \frac{n-1}{1}.\mathrm{f}_{n-2}(a+k).\mathrm{f}_1(b)\\
+ & \frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}.\mathrm{f}_{n-3}(a+k).\mathrm{f}_2(b)\\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ & \frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}.\mathrm{f}_2(a+k).\mathrm{f}_{n-3}(b)\\
+ & \frac{n-1}{1}.\mathrm{f}_1(a+k).\mathrm{f}_{n-2}(b)\\
+ & \mathrm{f}_0(a+k).\mathrm{f}_{n-1}(b)
\end{array}\right\}+b\left\{\begin{array}{lr}
 & \mathrm{f}_{n-1}(a)\,\mathrm{f}_0(b+k)\\
+ & \frac{n-1}{1}\mathrm{f}_{n-2}(a).\mathrm{f}_1(b+k)\\
+ & \frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\mathrm{f}_{n-3}(a).\mathrm{f}_2(b+k)\\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ & \frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\mathrm{f}_2(a).\mathrm{f}_{n-3}(b+k)\\
+ & \frac{n-1}{1}\mathrm{f}_1(a).\mathrm{f}_{n-2}(b+k)\\
+ & \mathrm{f}_0(a).\mathrm{f}_{n-1}(b+k)
\end{array}\right\};$$

mais, en vertu de nos définitions (2 et 4), on a

$$\begin{array}{ll}
af_{n-1}(a+k)=f_n(a)\,, & bf_0(b+k)=f_1(b)\,;\\
af_{n-2}(a+k)=f_{n-1}(a)\,, & bf_1(b+k)=f_2(b)\,,\\
af_{n-3}(a+k)=f_{n-2}(a)\,, & bf_2(b+k)=f_3(b)\,,\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
af_2(a+k)=f_3(a)\,, & bf_{n-3}(b+k)=f_{n-2}(b)\,,\\
af_1(a+k)=f_2(a)\,, & bf_{n-2}(b+k)=f_{n-1}(b)\,,\\
af_0(a+k)=f_1(a)\,, & bf_{n-1}(b+k)=f_{n-1}(b)\,;
\end{array}$$

substituant donc, il viendra

$$\left\{\begin{array}{r}
f_n(a).f_0(b)\\
+\frac{n-2}{1}f_{n-1}(a).f_1(b)\\
+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}f_{n-2}(a).f_2(b)\\
+\dots\dots\dots\dots\dots\\
+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}f_3(a).f_{n-3}(b)\\
+\frac{n-1}{1}f_1(a).f_{n-2}(b)\\
+f_2(a).f_{n-1}(b)
\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{r}
f_{n-1}(a).f_1(b)\\
+\frac{n-1}{1}f_{n-2}(a).f_2(b)\\
+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}f_{n-3}(a).f_3(b)\\
+\dots\dots\dots\dots\dots\\
+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}f_2(a).f_{n-2}(b)\\
+\frac{n-1}{1}f_1(a).f_{n-1}(b)\\
+f_0(a).f_n(b)
\end{array}\right\},$$

observant alors que

$$1+\frac{n-1}{1}=\frac{n}{1}\,,$$

$$\frac{n-1}{1}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{n-1}{2}\,,$$

$$\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}=\frac{n-2}{3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et réduisant, il viendra

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{f}_n(a).\mathrm{f}_0(b),\\
&+\frac{n}{1}\mathrm{f}_{n-1}(a).\mathrm{f}_1(b),\\
&+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\mathrm{f}_{n-2}(a).\mathrm{f}_2(b),\\
&+\dots\dots\dots,\\
&+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\mathrm{f}_2(a)\,\mathrm{f}_{n-2}(b),\\
&+\frac{n}{1}\mathrm{f}_1(a).\mathrm{f}_{n-1}(b),\\
&+\mathrm{f}_0(a).\mathrm{f}_n(b),
\end{aligned}
$$

qui est précisément le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$; notre loi est donc générale.

Il sera donc facile, dans tous les cas, de déterminer le produit de nos deux séries, sans exécuter la multiplication, puisqu'on connaît le premier terme $\mathrm{f}_0(a).\mathrm{f}_0(b)$ de ce produit, et qu'on sait en déduire un terme quelconque de celui qui le précède immédiatement.

Supposons, par exemple, que les deux fonctions semblables $\mathrm{f}_0(a)$, $\mathrm{f}_0(b)$ soient l'une et l'autre égales à l'unité; d'après les définitions (2 et 4), et en observant que 1 reste toujours 1, soit qu'on change a en $a+k$ ou b en $b+k$, il est clair que nos deux séries deviendront

$$F(a)=1+a\frac{x}{1}+a(a+k)\frac{x^2}{2!}+a(a+k)(a+2k)\frac{x^3}{3!}+\dots; \quad (9)$$

$$F(b)=1+b\frac{x}{1}+b(b+k)\frac{x^2}{2!}+b(b+k)(b+2k)\frac{x^3}{3!}+\dots, \quad (10)$$

puis donc qu'alors le premier terme de leur produit est 1, on aura, suivant la définition (7) que nous avons démontrée être une suite nécessaire des définitions (2 et 4),

$$F(a).F(b)=1+(a+b)\frac{x}{1}+(a+b)(a+b+k)\frac{x^2}{2}$$

$$+(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots$$

on voit que ces premiers termes ne sont autre chose que les termes correspondans de l'une ou l'autre des deux séries multipliées, dans lesquels on aurait changé a ou b en $a+b$. Or il est aisé de voir que cette loi s'étendra à toute la série, quelque loin qu'on la prolonge ; car, si l'on suppose que le coefficient de $\frac{x^{n-1}}{(n-1)}$ soit soumis à la loi dont il sagit, ce coefficient devra être

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots\ldots[a+b+(n-2)k]\;;$$

celui de $\frac{x^n}{n!}$ devra donc être (7)

$$a(a+b+k)(a+b+2k)\ldots[a+b+(n-2)k]+b(a+b+k)(a+b+2k)\ldots[a+b+(n-2)k],$$

c'est-à-dire

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots\ldots[a+b+(n-1)k],$$

c'est-à-dire, tel que l'exige cette loi, qui se trouve ainsi généralement démontrée : on aura donc, d'après cela,

$$F(a).F(b)=F(a+b)\;;$$

c'est-à-dire, que le produit des deux séries (9 et 10) est une série qui ne diffère de l'une ou de l'autre qu'en ce que a ou b s'y trouve changé en $a+b$; et c'est précisément en cela que consiste le théorème de M. de Stainville.

Nous renvoyons à l'endroit cité ainsi qu'à la page 261 du même volume, pour les nombreuses et importantes conséquences du même théorème.

ARITHMÉTIQUE.

Note sur la multiplication et la division numériques ;

Par M. Querret, chef d'institution à St-Malo.

La multiplication n'est, comme on sait, que le résultat d'une addition dans laquelle le multiplicande doit entrer autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.

Mais en exécutant la multiplication de cette manière, on serait souvent entraîné dans des calculs non moins rebutans par l'espace qu'ils occuperaient que par leur longueur ; puisque, pour en obtenir le résultat, il faudrait faire la somme d'autant de nombres qu'il y aurait d'unités dans le multiplicateur.

Mais on peut aisément s'y prendre de manière qu'on n'ait qu'autant de nombres à ajouter qu'il y a d'unités dans la somme des chiffres du multiplicateur.

Soit, par exemple, le nombre 7543 à multiplier par 257 ; on opérera comme on le voit ici

$$\begin{array}{rr}
 & 754300 \\
 & 754300 \\
 & 75430 \\
 & 75430 \\
 & 75430 \\
 & 75430 \\
 & 75430 \\
 & 7543 \\
 & 7543 \\
 & 7543 \\
 & 7543 \\
 & 7543 \\
 & 7543 \\
 & 7543 \\
\hline
\text{Produit. .} & 1938551
\end{array}$$

On voit que le premier des nombres ajoutés est le multiplicande pris cent fois, et que ce nombre est repété deux fois ; chacun des cinq qui suivent est égal à dix fois le multiplicande ; enfin chacun des sept derniers est ce multiplicande lui-même ; d'où l'on voit que le multiplicande entre 257 fois dans la somme, qui est conséquemment le résultat cherché.

Si l'on voulait se permettre de combiner ensemble l'addition et la soustration, on pourrait toujours s'arranger de manière à n'avoir pas à opérer sur une plus grande multitude des nombres que le quintuple du nombre des chiffres du multiplicateur.

Par exemple, dans le multiplicateur 257, le dernier chiffre 7 est la même chose que 10—3 ; d'où il résulte que ce multiplicateur est la même chose que 260—3. Mais les six dixaines pouvant à leur tour être remplacées par 100—40 ; ce multiplicateur reviendra encore à 300—40—3, ce qui conduira à l'opération suivante

$$\begin{array}{lr}
 & 754300 \\
 & 754300 \\
 & 754300 \\
\hline
 & 2262900 \\
 & 324349 \\
\hline
\text{Produit .} & 1938551 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
75430 \\
75430 \\
75430 \\
75430 \\
7543 \\
7543 \\
7543 \\
\hline
324349 \\
\hline
\end{array}$$

On voit que nous avons pris le multiplicande d'une part trois cent fois et de l'autre quarante-trois fois ; en retranchant donc la seconde somme de la première, le reste doit contenir le multiplicande pris un nombre de fois exprimé par 300—43 c'est-à-dire 257 fois ; ce reste doit donc être le produit cherché.

En considérant l'opération sous sa première forme, on voit clairement ce que les procédés ordinaires ajoutent au nôtre ; ils font trouver immédiatement les sommes partielles de nombres égaux qui doivent entrer dans le produit total.

Bien que la division puisse, en général, avoir deux objets essentiellement distincts, il est connu que, lorsqu'on l'exécute sur des nombres, il est permis, dans la pratique, de la considérer comme ayant constamment pour but de déterminer combien de fois le dividende contient le diviseur.

Le procédé qui s'offre donc le premier à la pensée pour exécuter cette opération, est de retrancher le diviseur du dividende autant de fois qu'on le pourra et de compter les soustractions dont le nombre sera le quotient cherché.

Mais cette manière de procéder serait également rebutante et par sa longueur et par le terrain qu'elle occuperait, puisqu'elle exigerait autant de soustractions que le quotient, qui pourrait souvent être fort grand, devrait avoir d'unités.

Mais on peut s'y prendre de manière à n'avoir à faire qu'autant de soustrations seulement qu'il doit y avoir d'unités dans la somme des chiffres du quotient ; et il ne s'agit pour cela que de retrancher successivement du dividende les plus grands des multiples du diviseur qu'on sait déterminer sans calcul, c'est-à-dire, le diviseur suivi du plus grand nombre possible de zéros.

Qu'on ait par exemple à diviser 1938551 par 7543, on opérera comme on le voit ici

1938551	7543
754300	257
1184251	
754300	
429951	
75430	
354521	
75430	
279091	
75430	
203661	
75430	
128231	
75430	
52801	
7543	
45258	
7543	
37715	
7543	
30172	
7543	
22629	
7543	
15086	
7543	
7543	
7543	
0	

On voit que cent fois le diviseur a été retranché deux fois, que dix fois le diviseur a été retranché cinq fois, et qu'enfin ce diviseur lui-même a été retranché sept fois ; nous avons donc retranché du dividende 257 fois le diviseur ; puis donc que la dernière soustraction n'a point laissé de reste, il s'ensuit que 257 est exactement le quotient.

On voit aisément que ce procédé est susceptible de quelques simplifications : qu'il est inutile d'écrire des zéros à la droite des multiples du diviseur qu'on veut retrancher du dividende, pourvu qu'on leur fasse occuper un rang convenable ; et qu'au lieu d'écrire à la droite de chaque reste les chiffres de la droite du dividende qui n'auront pas été employés dans les soustractions, on peut ne les descendre qu'à mesure qu'ils seront nécessaires pour rendre ces opérations possibles, en ayant soin, toutes les fois que l'abaissement d'un seul de ces chiffres ne suffira pas, d'écrire un zéro au quotient, avant d'abaisser le suivant.

Si l'on pouvait prévoir à l'avance combien de fois on pourra retrancher du dividende un même multiple du diviseur, on pourrait en retrancher de suite ce même multiple pris le même nombre de fois. Or c'est une chose que l'on peut toujours découvrir par une opération à part qui consistera à ajouter ce multiple continuellement à lui-même autant de fois qu'on le pourra sans excéder soit le dividende, si l'opération commence, soit le reste précédemment obtenu si elle est déjà commencée. De cette manière on n'aura à faire qu'autant de soustractions que le quotient doit avoir de chiffres, et toutes les autres opérations seront de simples additions.

Tout l'avantage du procédé ordinaire sur celui-ci est de faire trouver plus promptement les sommes de ces diverses additions.

Il nous paraît qu'en présentant les méthodes de multiplication et de division numériques à peu près comme nous venons de le faire, le mécanisme en deviendrait intelligible pour les jeunes-gens même le moins pourvus d'intelligence, et que sur-tout l'esprit qui a présidé à l'invention de ces procédés serait bien mis à découvert. On ne demanderait plus alors, en particulier, pourquoi la division commence par la gauche.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche du nombre des termes d'un polynome complet, d'un degré quelconque, composé d'un nombre de lettres aussi quelconque;

Par M. GERGONNE.

J'AI donné, à la page 115 du IV^e volume de ce recueil, d'après M. G. Fornier, un procédé fort simple, pour parvenir à la formule générale qui donne le nombre des termes d'un polynome complet d'un degré quelconque, composé d'un nombre de lettres aussi quelconque. En revenant de nouveau sur ce sujet, je me suis aperçu que la recherche dont il s'agit pouvait être présentée sous une forme plus régulière, et par conséquent plus simple, et c'est à la reproduire sous cette nouvelle forme que je destine l'article que l'on va lire.

Soit un polynome complet du m.^me degré composé des lettres a, b, c, ..., au nombre de n. En supposant tous les coefficiens positif et égaux à l'unité, il devra d'abord renfermer le terme 1. Soient ensuite P_1 l'ensemble de ses termes d'une seule dimension, P_2 l'ensemble de ses termes de deux dimensions; et ainsi de suite, P_k l'ensemble de ses termes de k dimensions, P_{m-1} l'ensemble de ses termes de $m-1$ dimensions, et enfin P_m l'ensemble de ses termes de m dimensions, ce polynome sera

$$P_m + P_{m-1} + \ldots\ldots + P_k + \ldots\ldots + P_2 + P_1 + 1\ ; \qquad (1)$$

dont il s'agit d'assigner le nombre des termes.

Ce nombre étant évidemment déterminé, dès que m et n sont connus, ne saurait être qu'une fonction de ces deux nombres; fonction encore inconnue, que nous pouvons désigner par $\varphi(m, n)$ Tout se reduit donc à assigner la forme de la fonction désignée par φ.

Soient multipliés

L'ensemble des termes P_m par $a^0 + b^0 + c^0 + \ldots\ldots$ ou n;

L'ensemble des termes P_{m-1} par $a + b + c + \ldots\ldots$,

. . . . ;

L'ensemble des termes P_k par $a^{m-k} + b^{m-k} + c^{m-k} + \ldots\ldots$,

. . . . ,

L'ensemble des termes P_2 par $a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + \ldots\ldots$,

L'ensemble des termes P_1 par $a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \ldots\ldots$;

Et enfin le terme 1 par $a^m + b^m + c^m + \ldots\ldots$;

et soit prise, sans faire de réductions, la somme des différens produits, que nous désignerons par S.

Comme chacun des termes du polynome (1) aura été multiplié par un polynome de n termes, il s'ensuit que S aura n fois autant de termes que (1), et qu'ainsi le nombre des termes de S, avant toutes réductions, sera exprimé par

$$n\varphi(m, n).$$

De plus, dans chaque multiplication, le multiplicande et le multiplicateur étant homogènes, et la somme de leurs dimensions étant constamment égale à m, m sera aussi le nombre des dimensions des différens produits, et par suite de leur somme S qui sera ainsi un polynome homogène de m dimensions, formé avec les n lettres $a, b, c, \ldots$

Or il est aisé de voir que, non seulement le polynome S renfermera tous les termes de m dimensions que l'on peut former avec les n lettres $a, b, c, \ldots$; mais que de plus chacun de ces termes s'y trouvera répété $m+n$ fois; car soit un de ces termes

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

avec la condition $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=m$, on l'aura obtenu en multipliant, savoir

$$\begin{array}{llllll}
a^\alpha & \text{par } b^\beta c^\gamma \ldots, & b^\beta & \text{par } a^\alpha c^\gamma \ldots, & c^\gamma & \text{par } a^\alpha b^\beta \ldots, \ldots \\
a^{\alpha-1} & \text{par } a b^\beta c^\gamma \ldots, & b^{\beta-1} & \text{par } a^\alpha b c^\gamma \ldots, & c^{\gamma-1} & \text{par } a^\alpha b^\beta c \ldots, \ldots \\
\ldots & \ldots, & \ldots & \ldots, & \ldots & \ldots, \ldots \\
a^2 & \text{par } a^{\alpha-2} b^\beta c^\gamma \ldots, & b^2 & \text{par } a^\alpha b^{\beta-2} c^\gamma \ldots, & c^2 & \text{par } a^\alpha b^\beta c^{\gamma-2} \ldots, \ldots \\
a & \text{par } a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots, & b & \text{par } a^\alpha b^{\beta-1} c^\gamma \ldots, & c & \text{par } a^\alpha b^\beta c^{\gamma-1} \ldots, \ldots \\
a^0 & \text{par } a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots, & b^0 & \text{par } a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots, & c^0 & \text{par } a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots, \ldots
\end{array}$$

on l'aura donc obtenu un nombre de fois exprimé par

$$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)+\ldots=(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)+(1+1+1+\ldots)=m+n,$$

comme nous l'avions annoncé.

Ainsi la somme S sera, après les réductions faites, un polynome homogène complet de m dimensions, formé avec les n lettres

a,

$a, b, c, \ldots$ et dont tous les termes seront affectés du coefficient $m+n$; de sorte qu'on aura

$$S=(m+n)S',$$

S' étant un pareil polynome dans lequel tous les coefficiens sont égaux à l'unité. D'où l'on voit qu'avant les réductions S devait avoir $m+n$ fois autant de termes que S'.

Présentement si, dans S', on fait une des lettres $a, b, c, \ldots$; a, par exemple égale à l'unité, le nombre de ses termes n'en sera pas changé ; mais il deviendra alors évidemment un polynome complet du m^{me}. degré, formé des $n-1$ lettres $b, c, d, \ldots$, dont le nombre des termes devra être exprimé par $\varphi(m, n-1)$; dont tel était aussi le nombre des termes de S' avant d'avoir fait $a=1$; d'où il suit qu'avant toutes réductions le nombre des termes de S devait être

$$(m+n).\varphi(m, n-1).$$

puis donc que nous venons de trouver, tout à l'heure, que le nombre de ces termes devait être

$$n\,\varphi(m, n),$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$n.\varphi(m, n)=(m+n).\varphi(m, n-1). \qquad (2)$$

Si l'on considère présentement que cette dernière équation doit avoir lieu quel que soit le nombre entier n, en observant que, d'après la nature de la fonction φ, on doit avoir $\varphi(m, 1)=m+1$, on pourra écrire cette suite d'équations

$$n\,\varphi(m, n)=(m+n).\varphi(m, n-1),$$

$$(n-1).\varphi(m, n-1)=(m+n-1).\varphi(m, n-2),$$

$$(n-2).\varphi(m,n-2)=(m+n-2).\varphi(m,n-3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$3.\varphi(m,3)=(m+3).\varphi(m,2),$$

$$2.\varphi(m,2)=(m+2).\varphi(m,1),$$

$$1.\varphi(m,1)=(m+1),$$

en les multipliant donc membre à membre, supprimant les facteurs communs dans l'équation résultante et résolvant enfin cette équation par rapport à $\varphi(m,n)$ on aura

$$\varphi(m,n)=\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdots\cdots\frac{m+n}{n}=\frac{(m+n)!}{m!n!}. \qquad (3)$$

telle est la formule générale cherchée.

On conclut évidemment de là

$$\varphi(m,n)=\varphi(n,m)=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\frac{m+n}{m}; \qquad (4)$$

on peut donc choisir, entre ces deux formules, celle qui se compose d'un moindre nombre de facteurs. Il résulte aussi de leur équivalence *qu'il y a autant de termes dans un polynome complet du* n^{me} *degré formé avec* m *lettres qu'il y en a dans un polynome complet du* m^{me} *degré formé avec* n *lettres*. C'est ainsi, par exemple, que l'équation complète du 3.^{e} degré à deux variables et l'équation complète du 2^e degré à trois variables ont également *dix* termes.

Si dans le polynome (1) on suppose $a=1$, le nombre de ses termes ne changera pas, et sera toujours $\varphi(m, n)$; mais alors les polynomes P_m, P_{m-1}, ...P_k, ...P_2, P_1 deviendront des polynomes complets des degrés marqués par leurs indices respectives formés des $n-1$ lettres restantes b, c, d, ...; le nombre des termes de chacun d'eux pourra donc être représenté par $\varphi(m, n-1)$, $\varphi(m-1, n-1)$, ...$\varphi(k, n-1)$, ...$\varphi(2, n-1)$, $\varphi(1, n-1)$; de sorte qu'on doit avoir

$$\varphi(m, n)=1+\varphi(1, n-1)+\varphi(2, n-1)+.....+\varphi(m-1, n-1)+\varphi(m, n-1); \quad (5)$$

en changeant m en $m-1$, on aura pareillement

$$\varphi(m-1, n)=1+\varphi(1, n-1)+\varphi(2, n-1)+.....+\varphi(m-1, n-1);$$

ce qui donne, en retranchant,

$$\varphi(m, n)-\varphi(m-1, n)=\varphi(m, n-1)$$

ou en transposant

$$\varphi(m, n)=\varphi(m, n-1)+\varphi(m-1, n) \quad (6)$$

formule qui justifie la construction du triangle arithmétique de Pascal.

La formule (4) donne successivement

$$\varphi(1, n-1)=\frac{n}{1},$$

$$\varphi(2, n-1)=\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2};$$

$$\varphi(3, n-1) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(m, n-1) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdots\cdots \frac{m+n-1}{m};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (5) et mettant dans son premier membre pour $\varphi(m, n)$ sa valeur (4), on aura

$$\left.\begin{array}{r} 1 \\ +\frac{n}{1} \\ +\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \\ +\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdots\cdots \frac{m+n-1}{m} \end{array}\right\} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdot \frac{n+4}{4} \cdots\cdots \frac{m+n}{m};$$

formule utile pour opérer des réductions dans divers résultats algébriques.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de dynamique énoncé à la page 180 du présent volume ;

Par M. Thomas de St-Laurent, lieutenant-aide-major du corps royal d'état-major au 7.me régiment d'artillerie à pied ; et M. Ch. Sturm, de Genève. (*)

PROBLÈME. *Un chien, qui se trouve en un point donné de l'un des bords d'un canal rectiligne d'une largeur constante, apercevant, en un point donné de l'autre bord, son maître qui marche le long de ce bord, avec une vitesse constante, se jette à la nage pour le joindre. En nageant, il se dirige constamment vers son maître, avec un effort toujours constant ; mais le courant de l'eau, en l'entraînant, le détourne sans cesse, et avec un effort également constant, de la direction qu'il veut prendre ; on demande, d'après ces diverses circonstances, quelle courbe ce chien décrira sur la surface de l'eau ?*

Solution. Pour rendre plus facile le rapprochement entre les formules auxquelles nous allons parvenir et celles qui ont été obtenues

(*) Nous confondons dans une rédaction commune les deux solutions qui ne diffèrent entre elles que par des nuances très-légères.

J. D. G.

à la page 145 du présent volume, nous prendrons pour axes des y le bord du canal parcouru par le maître, en supposant qu'il marche dans le sens des y positives, et que le canal est à sa droite, ou du côté des x positives, et nous prendrons pour axe des x une perpendiculaire à celui des y que nous laissons d'abord indéterminée, et dont nous nous réservons de fixer ultérieurement la situation de manière à rendre nos résultats les plus simples possibles.

Cela posé, soient

1.° g Le nombre d'unités de longueur que parcourt le maître à chaque unité de temps le long de l'axe des y.

2.° h le nombre d'unités de longueur que le cours de l'eau ferait parcourir au chien, à chaque unité de temps, s'il s'y abandonnait entièrement, sans faire le moindre effort soit pour accélerer ou retarder la vitesse qu'il en reçoit, soit pour en changer la direction; h étant d'ailleurs positive ou négative, suivant que l'eau court dans le sens de la marche du maître ou en sens contraire.

3.° Enfin k le nombre d'unités de longueur que parcourrait à chaque unité de temps, suivant une direction rectiligne, le chien nageant dans une eau stagnante, en faisant sans cesse un effort égal à celui qu'il emploie à poursuivre son maître.

Soient, au bout d'un temps t, compté d'une époque arbitraire, x' et y' les coordonnées du chien, à cet instant son maître se trouvera sur l'axe des y, à une distance de l'origine exprimée par $B+gt$, B étant une longueur arbitraire dépendant de l'époque où le temps t est supposé commencer. La droite joignant le chien à son maître aura alors pour équation

$$\frac{x-x'}{x'}=\frac{y-y'}{y'-B-gt}\,, \qquad (1)$$

d'où il suit que cette droite fera avec les axes des x et des y des angles dont les cosinus respectifs seront

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+(y'-B-gt)^2}}, \qquad \frac{y'-B-gt}{\sqrt{x'^2+(y'-B-gt)^2}};$$

en conséquence, les composantes de la vitesse k du chien suivant cette droite, dans le sens des x et des y, seront respectivement

$$\frac{kx'}{\sqrt{x'^2+(y'-B-gt^2}}, \qquad \frac{k(y'-B-gt)}{\sqrt{x'^2+(y-B-gt)^2}};$$

mais, tandis que la première de ces composantes existera seule, la seconde devra être augmentée de la vitesse h que le courant imprime au chien. En considérant donc que la première de ces composantes, d'après nos conventions, tend constamment à diminuer la coordonnée x'; que la portion h de la seconde tend à augmenter la coordonnée y', et que l'autre partie de cette dernière est dans le même sens qu'elle ou en sens contraire, suivant que $B+gt$ est plus grand ou plus petit que y'; nous aurons, par les principes connus, et en supprimant les accens désormais inutiles

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{kx}{\sqrt{x^2+(y-B-gt)^2}}; \qquad \frac{dy}{dt}=h-\frac{k(y-B-gt)}{\sqrt{x^2+(y-B-gt)^2}}: \qquad (2)$$

Telles sont donc les équations différentielles du mouvement du chien, desquelles, par conséquent, nous devrons déduire toutes les circonstances de la solution du problème.

Pour intégrer ces équations, posons

$$y-B-gt=x\text{Tang}.z\ , \qquad (3)$$

l'angle z étant une nouvelle variable: les équations (2) deviendront ainsi

$$\frac{dx}{dt}=-k\text{Cos}z\ ; \qquad \frac{dy}{dt}=h-k\text{Sin}z\ ; \qquad (4)$$

différentiant ensuite l'équation (3) elle deviendra

$$\frac{dy}{dt}-g=\frac{dx}{dt}\,\mathrm{Tang}.z+x.\frac{d.\mathrm{Tang}.z}{dt}\,, \qquad (5)$$

mettant dans la dernière pour $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ les valeurs données par les équations (4), réduisant et posant, pour abréger, $g-h=nk$, on aura

$$-nk=x.\frac{d.\mathrm{Tang}.z}{dt}=x\frac{d.\mathrm{Tang}.z}{dt}\;\frac{dx}{dt}\,, \qquad (6)$$

mettant encore dans celle-ci, pour $\frac{dx}{dt}$, sa valeur donnée par la première des équations (4), elle deviendra

$$n\frac{dx}{x}=\mathrm{Cos}.z.d.\mathrm{Tang}\,z=\frac{d.\mathrm{Tang}\,z}{\sqrt{1+\mathrm{Tang}.^2z}}\,, \qquad (7)$$

équation séparée, dont l'intégrale est

$$n\mathrm{Log}.\left(\frac{x}{A}\right)=\mathrm{Log}.(\mathrm{Tang}.z+\sqrt{1+\mathrm{Tang}.^2z})\,,$$

ou bien

$$\left(\frac{x}{A}\right)^n=\mathrm{Tang}.z+\sqrt{1+\mathrm{Tang}.^2z}\,; \qquad (8)$$

A étant une constante arbitraire.

Pour déterminer cette constante, statuons à la fois sur la situation de l'axe des x, que jusqu'ici nous avons laissée indéterminée ainsi que sur l'origine des temps que nous avons également laissée arbitraire; et pour le faire de la manière la plus propre à simplifier nos résultats, remarquons que, bien que, par l'énoncé du problème, la largeur du canal soit déterminée, cette largeur néanmoins n'entre aucunement dans nos formules; de sorte qu'il nous est permis de la supposer indéfinie du côté d'où part le chien, et d'admettre que,

que ; poursuivant son maître, il nage depuis un temps illimité ; auquel cas on pourra concevoir une certaine époque où la droite qui le joint à son maître deviendra ou aura été perpendiculaire au bord du canal parcouru par celui-ci, c'est-à-dire à l'axe des y. Prenons donc cette époque pour origine des temps ; supposons qu'alors la distance du chien à son maître soit a, cette longueur se confondra avec l'axe des x; et il est d'abord clair que, pour $t=0$, la distance du maître à l'origine devra être nulle ; puis donc que cette distance est, en général $B+gt$, on devra avoir $B=0$; donc, en vertu de l'équation (3) on aura aussi alors tang. $z=0$; d'après quoi l'équation (8) deviendra

$$\left(\frac{a}{A}\right)^n=1\,,\quad \text{d'où}\quad A=a\,;$$

on aura donc, quel que soit x,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n=\text{Tang.}z+\sqrt{1+\text{Tang.}^2z}\,. \tag{9}$$

En faisant évanouir le radical du second membre de cette équation, on en tire

$$\text{Tang.}z=\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n-\left(\frac{a}{x}\right)^n}{2}\,, \tag{10}$$

d'où

$$\text{Sin.}z=\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n-\left(\frac{a}{x}\right)^n}{\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n}\,,\qquad \text{Cos.}z=\frac{2}{\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n}\,: \tag{11}$$

Pour parvenir présentement à l'équation différentielle de la trajectoire, éliminons d'abord dt entre les équations (4) ; il viendra ainsi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k\text{Sin.}z-h}{k\text{Cos.}z}\,; \tag{12}$$

ou, en y mettant pour sin. z et cos. z les valeurs déterminées ci-dessus

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k-h}{2k}\left(\frac{x}{a}\right)^n-\frac{k+h}{2k}\left(\frac{a}{x}\right)^n\;; \tag{13}$$

valeur qui devient également nulle, soit que x soit nul ou qu'il soit infini.

Si l'on veut avoir la vitesse qui répond à une valeur quelconque de x, en représentant cette vitesse par v et prenant la somme des quarrés des équations (4), il viendra

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=h^2-2kh\,\text{Sin.}z+k^2\;,$$

ou en mettant pour sin. z sa valeur (11)

$$v^2=\frac{(k-h)^2\left(\frac{x}{a}\right)^n+(k+h)^2\left(\frac{a}{x}\right)^n}{\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n}\;. \tag{14}$$

Si, suivant l'usage, nous posons, pour abréger, $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=q$, la formule (13) donnera

$$q=\frac{n}{a}\left\{\frac{k-h}{2k}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\frac{k+h}{2k}\left(\frac{a}{x}\right)^{n+1}\right\}, \tag{15}$$

on aura ensuite, par la formule (12),

$$1+p^2=\frac{k^2-2kh\,\text{Sin.}z+h^2}{k^2\text{Cos.}^2z}=\left(\frac{v}{k\text{Cos.}z}\right)^2\;; \tag{16}$$

d'où

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{v}{k\text{Cos.}z}\right)^3$$

en désignant donc par r le rayon vecteur, on trouvera

$$r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=\frac{a}{n}\cdot\frac{2v^3}{k^2\left\{(k-h)\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+(k+h)\left(\frac{a}{x}\right)^{n+1}\right\}}\;;$$

ou, en mettant pour v sa valeur

$$r = \frac{2a}{nk^2} \cdot \frac{\left\{(k-h)^2\left(\frac{x}{a}\right)^n + (k+h)^2\left(\frac{a}{x}\right)^n\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{(k-h)\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + (k+h)\left(\frac{a}{x}\right)^{n+1}\right\}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{a}{x}\right)^n\right\}^{\frac{3}{2}}} . \quad (17)$$

On aura encore, d'après la formule, (16) en désignant par s la longueur de l'axe de courbe

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{r}{k\mathrm{Cos}.z} ;$$

ou, en mettant pour r et cos. z leurs valeurs

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2k}\sqrt{(k-h)^2\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + 2(k^2+h^2) + (k+h)^2\left(\frac{a}{x}\right)^{2n}} ; \quad (18)$$

équation qu'il faudrait intégrer pour obtenir la valeur de s.

Pour obtenir l'équation de la courbe, il faut intégrer l'équation (13), ce qui donne

$$y + C = \frac{a}{2k}\left\{\frac{k-h}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} + \frac{k+h}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\} :$$

En se rappelant qu'à $y=0$ doit répondre $x=a$, il viendra

$$C = \frac{a}{2k}\left\{\frac{k-h}{n+1} + \frac{k+h}{n-1}\right\} ;$$

d'où, en retranchant

$$\frac{2ky}{a} = \frac{k-h}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1\right\} + \frac{k+h}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1\right\} . \quad (19)$$

Veut-on avoir le temps en fonction de l'abscisse, il ne s'agira, pour cela, que de substituer pour Cos. z, dans la première des équations (4), sa valeur donnée par la dernière des formules (11). Il viendra ainsi

$$-2k\mathrm{d}t=\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n\right\}\mathrm{d}x\ ,$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$D-2kt=a\left\{\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\}.$$

En se rappelant d'ailleurs qu'à $t=0$ doit répondre $x=a$; il viendra

$$D=a\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\};$$

d'où, en retranchant

$$\frac{2kt}{a}=\frac{1}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\}-\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}. \qquad (20)$$

Des formules (19, 20) on tire

$$y-gt=\frac{a}{2k}\left\{\frac{k+g-h}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right]+\frac{k-g+h}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right]\right\},$$

ou, en se rappelant que $g-h=nk$

$$y-gt=\frac{a}{2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\};$$

mais la distance du chien à son maître a généralement pour expression

$$\sqrt{x^2+(y-gt)^2}\ ;$$

en y substituant donc pour $y-gt$ la valeur que nous venons d'obtenir, cette distance deviendra, toutes réductions faites

$$\frac{a}{2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\}; \qquad (21)$$

formule qui ne pourra devenir nulle en même temps que x qu'autant que n se trouvera compris entre $+1$ et -1.

Si l'on suppose l'eau stagnante, il faudra faire $h=0$, et conséquemment $g=nk$, dans toutes les formules que nous venons d'obtenir, lesquelles deviendront ainsi exactement celles qui répondent au problème traité à la page 145 du présent volume. Ce problème n'est, en effet, qu'un cas particulier de celui-ci.

L'équation (19) de la courbe peut être écrite ainsi

$$y+\frac{ag}{(n^2-1)k}=\frac{a}{2k}\left\{\frac{k-h}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\frac{k+h}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right\}. \qquad (22)$$

si donc on transporte l'origine sur l'axe des y, à une distance $\frac{ag}{(n^2-1)k}$ au-dessous de l'origine primitive, en posant

$$y'=\frac{a(k-h)}{2(n+1)k}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}, \quad y''=\frac{a(k+h)}{2(n-1)k}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}, \qquad (23)$$

l'équation de la courbe deviendra

$$y=y'+y'', \qquad (24)$$

En construisant donc, pour le nouveau système d'axes, les deux courbes exprimées par les équations (23); les ordonnées de la courbe cherchée seront les sommes d'ordonnées correspondantes de ces deux-là.

Il est aisé de voir que, tant que n est un nombre positif plus grand que l'unité, la première de ces courbes est parabolique et l'autre hyperbolique. Si n, positif ou négatif, a une valeur absolue moindre que l'unité, les deux courbes sont paraboliques. Si enfin n négatif a une valeur absolue plus grande que l'unité, c'est la première des deux courbes qui est hyperbolique, tandis que la seconde est parabolique.

Mais il est un cas particulier qui rend illusoire une partie des formules auxquelles nous venons de parvenir, à raison du dénominateur $n-1$ qui affecte leurs termes : c'est celui où le maître, marchant dans le sens du courant, a sur ce courant un excès de vitesse précisément égal à la vitesse que son chien pourrait se donner en nageant dans une eau tranquille. On a alors, en effet, $g-h=k$, d'où $n=1$, ce qui rend infinis les termes affectés du dénominateur $n-1$. Cherchons donc, en particulier, les formules qui conviennent à ce cas; ou plutôt des formules qui remplacent les formules (19, 20), les seules qui présentent cette circonstance.

Dans le cas dont il sagit, l'équation (13) devient simplement

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k-h}{2k}\,\frac{x}{a}-\frac{k+h}{2k}\,\frac{a}{x}\,,$$

ce qui donne, en intégrant

$$y+E=\frac{a}{2}\left\{\frac{k-h}{2k}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{k+h}{2k}\,\text{Log.}\left(\frac{a}{x}\right)^2\right\};$$

mais, parce que $x=a$ doit répondre à $y=0$, on aura

$$E=\frac{a}{2}\cdot\frac{k-h}{2k}\,;$$

d'où, en retranchant,

$$\frac{2y}{a}=\frac{k-h}{2k}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right\}+\frac{k+h}{2k}\,\text{Log.}\left(\frac{a}{x}\right)^2. \qquad (25)$$

Dans le même cas, l'équation

$$-2k\,\mathrm{d}t=\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n\right\}\mathrm{d}x\ ;$$

trouvée ci-dessus, se réduit à

$$-2k\,\mathrm{d}t=\frac{x\mathrm{d}x}{a}+\frac{a\mathrm{d}x}{a}\ ;$$

dont l'intégrale est

$$F-2kt=\frac{a}{2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2-\mathrm{Log.}\left(\frac{a}{x}\right)^2\right\}\ ;$$

en observant encore ici que $x=a$ et $t=0$ doivent se correspondre on aura

$$F=\frac{a}{2}$$

d'où en retranchant

$$\frac{4kt}{a}=\mathrm{Log.}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right\}.$$

En écrivant l'équation (25) comme il suit

$$y+\frac{(k-h)a}{4k}=\frac{(k-h)a}{4k}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{(k+h)a}{4k}\mathrm{Log.}\left(\frac{a}{x}\right)^2\ ;$$

on voit que si, ayant transporté l'origine sur l'axe des y, à une distance $\frac{(k-h)a}{4k}$ au dessous de sa position primitive, on fait

$$y'=\frac{(k-h)a}{4k}\left(\frac{x}{a}\right)^2,\qquad y''=\frac{(k+h)a}{4k}\mathrm{Log.}\left(\frac{a}{x}\right)^2\ ;\qquad (27)$$

on aura

$$y=y'+y''\ ;$$

de sorte qu'en construisant, par rapport au nouveau système d'axes, les courbes exprimées par les équations (27), dont la première est une parabole ordinaire et l'autre une logarithmique, les ordonnées de la trajectoire décrite par le chien ne seront autre chose que les sommes d'ordonnées correspondantes de ces deux courbes.

On peut remarquer que le problème qui vient de nous occuper est aussi celui des circonstances du mouvement de la chaloupe d'un bâteau qui suit le cours d'un fleuve, lorsque cette chaloupe se détache pour aller prendre des voyageurs qui marchent le long de l'un des bords de ce fleuve.

Parmi les différens cas particuliers de ce problème, le plus ordinaire, et conséquemment celui qui semble offrir le plus d'intérêt est celui de la route que suit une barque établie sur l'un des bords d'un fleuve, pour transporter les voyageurs au point directement opposé de l'autre bord. Dans ce cas a représente la largeur du fleuve, les temps se comptent de l'instant du départ de la barque, et la vitesse g du point vers lequel on tend est nulle; on a donc simplement alors $n=-\frac{h}{k}$, au moyen de quoi l'équation (19) de la trajectoire devient

$$2\left(\frac{y}{a}\right)=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{k-h}{k}}-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{k+h}{k}} \qquad (28)$$

Or, pour que la barque puisse parvenir au point vers lequel elle tend, il faut évidemment que la trajectoire qu'elle décrit passe par l'origine qui est ici le bord d'arrivée; et conséquemment il faut que x et y soient nuls en même temps, ce qui exigera évidemment que $k-h$ ne soient pas négatifs; c'est-à-dire que, pour qu'une barque qui, partant de l'un des bords d'un fleuve et tendant sans cesse vers le point de l'autre bord directement opposé à celui du départ, parvienne en ce point, il est nécessaire et il suffit que la force d'impulsion des rames soit au moins égale à la force d'impulsion du courant.

Cette même équation prouve aussi que, si la force d'impulsion des rames était nulle ou celle du courant infinie, la barque suivrait simplement le cours du fleuve, parallèlement à la direction du bord opposé à celui du départ; de sorte qu'elle n'atteindrait ce bord qu'à une distance infinie. Si au contraire la force d'impulsion du courant était nulle ou celle des rames infinie, la barque parviendrait d'un bord à l'autre dans une direction rectiligne, perpendiculaire à la direction commune de ces deux bords.

En différentiant l'équation (28) et supposant toujours $k>h$, il vient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k-h}{2k}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{h}{k}}-\frac{k+h}{2k}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{h}{k}}. \qquad (29)$$

Si donc on représente par α l'angle que fait la direction de la barque au moment du départ, où $x=a$, avec celle qu'elle tend à prendre, on aura

$$\text{Tang.}\alpha=\frac{k-h}{2k}-\frac{k+h}{2k}=-\frac{h}{k}; \qquad (30)$$

comme on pouvait bien le prévoir.

Veut-on savoir en quel point sa direction se trouvera perpendiculaire au cours du fleuve ou, ce qui revient au même, parallèle à celle qui joint le point de départ au point d'arrivée, il suffira d'égaler à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ce qui donnera

$$x=a\left(\frac{k-h}{k+h}\right)^{\frac{k}{2h}}; \qquad (31)$$

substituant cette valeur dans l'équation (28), il en résultera

$$y=\frac{a}{2}\left\{\left(\frac{k-h}{k+h}\right)^{\frac{k-h}{k}}-\left(\frac{k-h}{k+h}\right)^{\frac{k+h}{k}}\right\} \qquad (32)$$

Si enfin on désigne par B l'angle que fait la direction de la barque au moment d'arrivée ou $x=0$, avec la perpendiculaire à la direction du courant, on aura Tang. $B=\infty$, ou $B=\frac{1}{2}\varpi$, à moins pourtant qu'on ait $k=h$

Mais cette dernière hypothèse ne saurait être admise dans la pratique. En effet l'équation (28) devient, dans ce cas

$$x^2=2a(\tfrac{1}{2}a-y)$$

équation d'une parabole qui a pour foyer le point où on veut atteindre et pour paramètre le double de la largeur du fleuve; d'où l'on voit que, si la force d'impulsion des rames n'était que rigoureusement égale à la force d'impulsion du courant, la barque arriverait au dessous du point désigné, à une distance de ce point égale à la moitié de la largeur du fleuve

Continuons donc de supposer $k>h$; g étant toujours nul, et conséquemment $n=-\frac{h}{k}$ la formule (20) donnera alors

$$t=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{k-h}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{k-h}{k}}\right]+\frac{1}{k+h}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{k+h}{k}}\right]\right\}. \qquad (33)$$

Pour avoir donc le temps employé à traverser le fleuve, il faudra, dans cette formule, faire $x=0$, ce qui donnera

$$t=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{k-h}+\frac{1}{k+h}\right\}=\frac{a}{2}\cdot\frac{2k}{k^2-h^2}=\frac{ka}{k^2-h^2};$$

mais si l'eau était stagnante, ce temps serait simplement $\frac{a}{k}$; d'où il suit que l'excès de temps dû à l'impulsion du courant est

$$\frac{kn}{k^2-h^2}-\frac{a}{k}=\frac{h^2a}{k(k^2-k^2)};$$

l'on voit que cet excès de temps croîtra avec h, ainsi que cela doit être.

QUESTIONS PROPOSÉES.

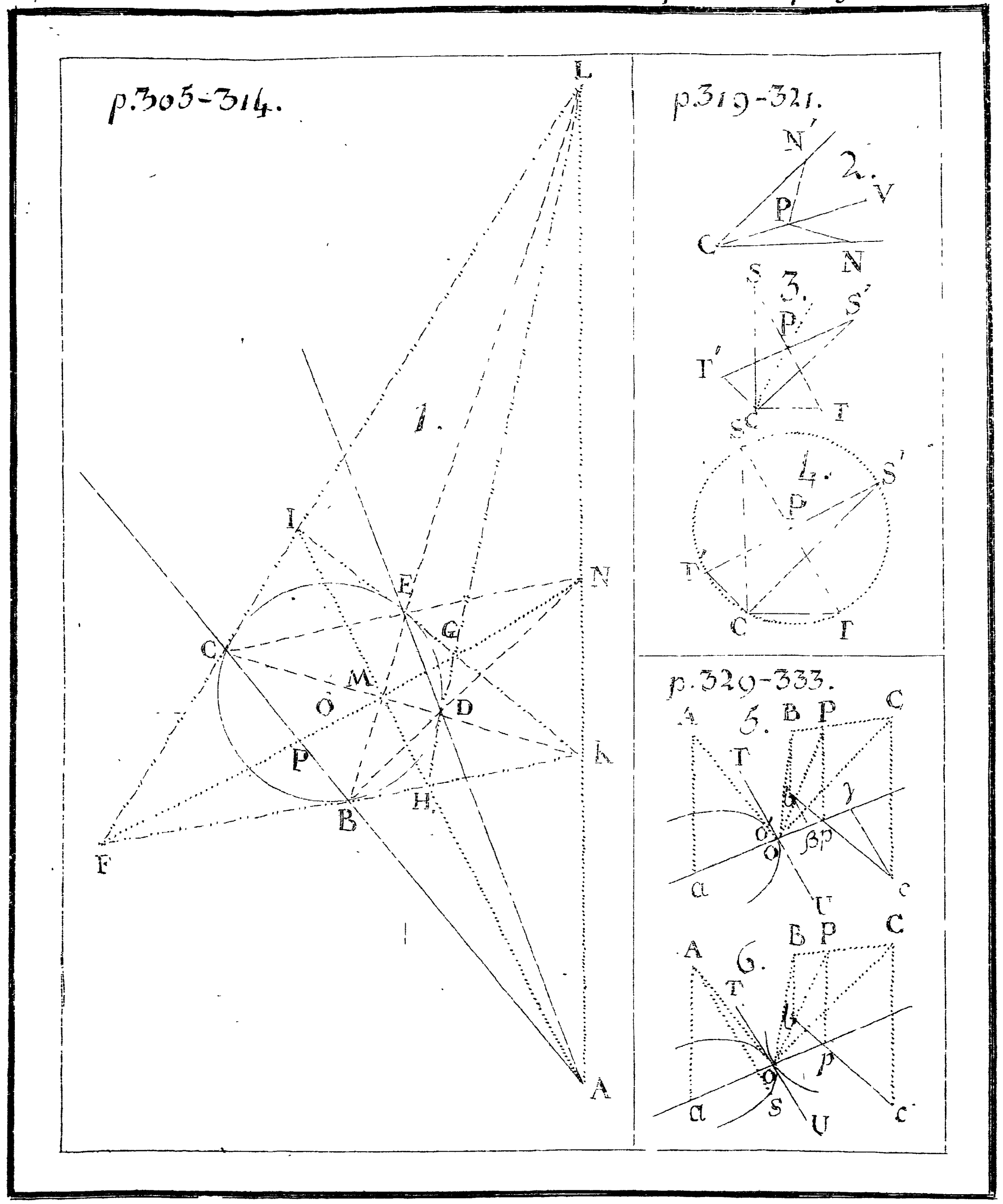
Problèmes de Géométrie.

I. QUELLE est la courbe enveloppe de l'espace parcouru par un des cotés d'un angle droit dont le sommet décrit une ellipse donnée, tandis que son autre côté passe constamment par le centre de cette ellipse ?

II. Deux angles égaux ou inégaux, donnés de grandeur, sont assujettis à se mouvoir sur un plan de manière que leurs sommets ne quittent pas deux points fixes donnés sur ce plan, et qu'un côté de l'un coupe constamment un côté de l'autre sur une droite indéfinie donnée ; on demande quel est le lieu de l'intersection mobile des deux autres côtés de ces deux angles ?

III. Quelle est, sur un plan, la ligne de chacun des points de laquelle menant des droites à deux points fixes, donnés sur ce plan, ces droites interceptent constamment des portions de même longueur d'une droite indéfinie, donnée sur ce plan ?

IV. Quelle est dans l'espace la surface de chacun des points de laquelle menant à trois points fixes des droites, considérées comme les trois arêtes d'un angle trièdre ; cet angle trièdre intercepte toujours des portions équivalentes d'un plan donné, fixe et indéfini ?


p. 305-314.
1.
L
I
E
N
G
C
M
O
D
P
K
B
H
F
A
p. 319-321.
2.
N'
V
P
C
N
3.
S
S'
P
T'
S C
T
4.
S'
P
T'
C
T
p. 329-333.
5.
A
B
P
C
T
b
γ
σ
O
β p
a
U
c
6.
A
B
P
C
T
b
p
o
a
s
U
c

J. D. G. fecit.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 260 du XII.ᵉ volume de ce recueil;

Par M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

LEMME. *Si un cercle coupe arbitrairement les deux côtés d'un angle, 1.° en considérant les cordes interceptées comme les cordes de contact de deux angles circonscrits, les côtés de l'un de ses angles couperont les côtés de l'autre en quatre points tels que, de quelque manière qu'on en prenne deux qui n'appartiennent point à un même côté, ils se trouveront en ligne droite avec le point de concours des deux cordes de contact, c'est-à-dire, avec le sommet de l'angle donné; 2.° Si l'on joint deux à deux les quatre extrémités des deux cordes de contact par deux systèmes de deux droites, les droites se couperont, dans chaque système, sur l'une des deux droites dont il vient d'être précédemment question, et sur la droite qui joint les sommets des deux angles circonscrits; 3.° enfin chacun des deux points d'intersection sera le pôle de celle de ces deux mêmes droites sur laquelle il ne se trouvera pas situé, et le sommet de l'angle sécant sera le pôle de la droite qui joindra les sommets des deux angles circonscrits.*

Démonstration. Soient O (fig. 1) le centre du cercle dont il s'agit, A le sommet de l'angle sécant, BC et DE les deux cordes interceptées par le cercle sur ses côtés, F et G les sommets des angles circonscrits dont ces cordes sont les cordes de contact ; H le point de concours de FB et GD, I le point de concours de FC et GE, K le point de concours de FB et GE, et enfin L le point de concours de FC et GD. Soient finalement menées BE et CD se coupant en M, BD et CE se coupant en N.

Cela posé, il s'agit de démontrer, 1.° que le sommet A est, à la fois, en ligne droite avec les points H et I, et en ligne droite avec les points K et L ; 2.° que le point M est en ligne droite avec les points H et I, et le point N en ligne droite avec K et L, et qu'en outre ces deux points M et N sont en ligne droite avec les points F et G ; 3.° enfin que ces mêmes points M et N sont les pôles respectifs de KL et HI, et que le point A est le pôle de FG.

Pour y parvenir, concevons les points F, G, H, I, K, L comme les centres d'autant de cercles, ayant pour rayons, savoir

Pour F ,	FB=FC ,
Pour G ,	GD=GE ,
Pour H ,	HB=HD ,
Pour I ,	IC=IE ,
Pour K ,	KB=KE ;
Pour L ,	LC=LD .

Concevons pour plus de brièveté, de désigner simplement chacun de ces cercles, que nous nous dispenserons de tracer, pour ne pas compliquer la figure, par la lettre placée à son centre.

Les cercles H et I sont à la fois touchés extérieurement par le cercle F en B et C et par le cercle G en D et E, d'où il suit que les droites BC et DE, concourant en A, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude externe des cercles H et I, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point A qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres H et I de ces deux cercles.

Pareillement, les cercles K et L sont touchés à la fois extérieurement en B et C par le cercle F et intérieurement en E et D par le cercle G; d'où il suit que les droites BC et DE, concourant en A, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude externe des cercles K et L, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point A qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres K et L de ces deux cercles. Voilà donc la première partie de la proposition complètement démontrée.

En second lieu, le cercle K touche à la fois les deux cercles H et I, le premier en B en l'enveloppant et le second en E extérieurement. Le cercle L touche aussi à la fois les deux mêmes cercles, le premier en D extérieurement et le second en C en l'enveloppant. Donc les droites BE et CD, concourant en M, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude interne des deux cercles H et I, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point M qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres H et I de ces deux cercles.

Pareillement, le cercle H touche à la fois les deux cercles K et L, le premier intérieurement en B et le second extérieurement en D. Le cercle I touche aussi à la fois les deux mêmes cercles, le premier extérieurement en E et le second intérieurement en C. Donc les droites BD et CE, concourant en N, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude interne des deux cercles K et L, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point N qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres K et L de ces deux cercles.

De plus; le cercle K touche à la fois les deux cercles F et G, le premier en B extérieurement et le second en E en l'enveloppant. Le cercle L touche aussi à la fois les deux mêmes cercles, le premier en C extérieurement et le second en D en l'enveloppant. Donc les droites BE et CD, concourant en M, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude interne des deux cercles F et G, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point M qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres F et G de ces deux cercles.

Pareillement, les deux cercles F et G sont touchés à la fois extérieurement par le cercle H en B et D et par le cercle I en C et E. Donc les droites BD et CE, concourant en N, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude externe des deux cercles F et G, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point N qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres F et G de ces deux cercles. La seconde partie de la proposition se trouve donc aussi complètement démontrée.

En troisième lieu, parce que les points K et L sont les pôles respectifs des droites BE et DC, il s'ensuit que le point M de concours de ces deux droites est le pôle de la droite KL qui joint ces deux points. Pareillement, puisque les points H et I sont les pôles respectifs des droites BD et CE, il s'ensuit que le point N de concours de ces deux droites est le pôle de la droite HI qui joint ces deux points. Enfin, puisque les points F et G sont les pôles respectifs des droites BC et DE, il s'ensuit que le point A de concours de ces deux droites est le pôle de la droite FG qui joint ces deux points.

Remarque I. La corde de contact BC demeurant invariable de grandeur et de situation, si l'on fait varier la grandeur et la situation de l'autre corde de contact DE, cequi entraînera aussi un mouvement dans le point A sur le prolongement de BC, les points M et N varieront aussi de situation, mais de manière toutefois que la droite MN ira constamment passer par le point fixe F, appartenant évidemment à la perpendiculaire sur le milieu de BC ; on a donc le théorème suivant.

THÉORÈME. *Si tant de quadrilatères qu'on voudra, inscrits* *à un même cercle, ont un côté commun, les droites qui, dans ces quadrilatères, joindront l'intersection des diagonales et le point de concours des côtés adjacens au côté commun iront toutes concourir en un même point de la perpendiculaire sur le milieu de ce côté commun.*

C'est précisément là le théorème de M. Hachette, énoncé dans le *Bulletin des sciences* (août 1822, pag. 114), et démontré par M. Valsh, de Cork en Irlande. Quelque confiance que doivent inspirer d'ailleurs les savans rédacteurs de ce recueil, nous ne saurions nous refuser à regarder la démonstration de M. Valsh comme tout au moins incomplète. Elle suppose, en effet, ce qu'il aurait d'abord fallu prouver, savoir, que les trois points M, N, F sont en ligne droite. Elle établit ensuite que le point F est constant, et cela en vertu d'un certain rapport dont cependant tous les élémens sont variables. Ce rapport d'ailleurs, fût-il aussi constant qu'on le suppose, ne paraîtrait pas entraîner inévitablement l'immobilité de ce point F. Ce qui précède pourra donc devenir, au défaut de toute autre démonstration, une rectification de celle de M. Valsh.

Remarque II. Au lieu de se donner l'angle sécant A, il revient au même de se donner arbitrairement le quadrilatère inscrit BCED; alors la figure FHGI sera un quadrilatère circonscrit ayant ses points de contact aux sommets de l'inscrit. Si l'on considère en outre que l'on peut toujours concevoir un cercle qui soit la perspective d'une section conique donnée; qu'alors si deux quadrilatères sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à la section conique, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit, il en sera de même de leurs perspectives par rapport au cercle; qu'enfin les perspectives des points en lignes droites et des droites qui concourent en un même point sont elles-mêmes des points en lignes droites et des droites qui concourent en un même point, et qu'en outre la perspective du pôle d'une droite est le pôle de la perspective de cette droite, notre lemme donnera le théorème suivant:

THÉORÈME. Si deux quadrilatères sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même section conique, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit, 1.° *Les diagonales des deux quadrilatères se couperont toutes quatre au même point;* 2.° *Les points de concours des directions des côtés opposés des deux quadrilatères appartiendront tous quatre à une même ligne droite;* 3.° *Le point de concours des quatre diagonales sera le pôle de la droite qui contiendra les quatre points de concours des directions des côtés opposés.*

Remarques. I. Si l'on se rappelle que, dans tout quadrilatère, on peut prendre deux côtés opposés pour diagonales, et réciproquement, on s'assurera aisément que ce théorème est tout aussi complet que le lemme d'où nous l'avons déduit.

II. En vertu d'un théorème de Newton démontré par M. Poncelet (*Annales*, tom. XII, pag. 109), on peut ajouter à tout ceci que la droite qui joint les milieux des deux diagonales du quadrilatère circonscrit contient le centre de la section conique dont il s'agit

On reconnaît facilement, dans le théorème auquel nous venons de parvenir, le théorème de M. Brianchon, si fécond en belles conséquences, et dont ce qui précède offre ainsi une nouvelle démonstration. Passons présentement à celui qui fait le sujet principal de cet article.

THÉORÈME. Une surface du second ordre étant coupée arbitrairement par les deux faces d'un angle dièdre, 1.° *en considérant les intersections des deux faces de l'angle dièdre avec la surface du second ordre comme les lignes de contact de deux surfaces coniques circonscrites, ces surfaces coniques se couperont suivant deux courbes planes dont les plans contiendront, l'un et l'autre, l'arête de l'angle dièdre qui en sera ainsi l'intersection;* 2.° *si l'on considère les deux lignes de contact comme les directrices du mouvement d'un plan, dans la génération d'une surface développable, enveloppe de l'espace parcouru par ce plan, ce qui pourra être fait de deux manières différentes, les surfaces développables résultantes seront deux surfaces coniques, telles que le sommet* *de chacune sera situé sur l'un des deux plans dont il vient d'être question ; ces deux sommets seront en outre en ligne droite avec les sommets des deux surfaces coniques circonscrites* ; 3.° *enfin, chacun de ces sommets sera le pôle de celui des deux plans sur lequel il ne sera pas situé, et en outre l'arête de l'angle dièdre sécant et la droite qui contiendra les quatre sommets seront pôlaires réciproques l'une de l'autre.*

Démonstration. Soient F et G les sommets des deux surfaces coniques circonscrites, par lesquels et par l'un quelconque A des points de l'arête de l'angle dièdre soit fait passer un plan que nous supposerons être le plan même de la figure. Ce plan coupera la surface du second ordre suivant une section conique BCED, et l'angle dièdre suivant un angle plan sécant ayant son sommet en A et, pour les portions de ses côtés interceptées par la section conique, les cordes BC et DE. Les points B et C, ainsi que les points D et E seront donc des points des lignes de contact des deux surfaces coniques circonscrites, lesquelles conséquemment seront coupées par notre plan suivant les angles BFC et DGE, circonscrits à la section conique BCED. En conséquence, BME et CMD, ainsi que BDM et CEN seront des arêtes des deux surfaces développables enveloppes de l'espace parcouru par les plans qui toucheront à la fois les deux lignes de contact ; de plus H et I, ainsi que K et L appartiendront aux lignes d'intersection des deux surfaces coniques circonscrites ; et on se trouvera exactement dans le cas de notre précédent lemme.

Donc d'abord les points M et N ne sortiront pas de la droite fixe FG quelle que soit la position du point mobile A sur l'arête de l'angle dièdre. Or, soient P et Q les intersections respectives de BC et DE avec FG ; ces points seront fixes quel que soit le point arbitraire A, puisqu'ils seront sur FG qui est fixe, et sur les faces de l'angle dièdre qui le sont aussi. De plus, le quadrilatère complet dont les trois diagonales sont FG, HI, KL, et celui dont les trois diagonales sont MN, DE, BC, donnent, par un théorème connu,

$$\frac{GM}{FM}=\frac{GN}{FN}, \qquad \frac{QM}{PM}=\frac{QN}{PN},$$

c'est-à-dire ;

$$\frac{FG-FM}{FM}=\frac{FN-FG}{FN}, \qquad \frac{PQ-PM}{PM}=\frac{PN-PQ}{PN};$$

ou bien

$$\frac{FG}{FM}-1=1-\frac{FG}{FN}, \qquad \frac{PQ}{PM}-1=1-\frac{PQ}{PN};$$

ou encore

$$\frac{FG}{FM}+\frac{FG}{FN}=2, \quad \frac{PQ}{PM}+\frac{PQ}{PN}=2,$$

ce qui revient à

$$FG(FM+FN)=2FM.FN, \quad PQ(PM+PN)=2PM.PN;$$

mais

$$FM=PM+FP, \qquad FN=PN+FP,$$

$$FM+FN=PM+PN+2FP$$

donc

$$FM.FN=PM.PN+FP(PM+PN)+\overline{FP}^2;$$

valeurs qui, substituées dans la première des deux équations ci-dessus, la changent en celle-ci :

$$(PG-FP)(PM+PN)=2PM.PN-2FP.PG;$$

en la combinant avec la seconde, il vient

$$PM+PN=2\frac{PF.PG}{PF-QG}, \quad PM.PN=2.\frac{PQ.PF.PG}{PF-QG};$$

donc

donc la somme et le produit des deux distances PM et PN sont donnés, donc ces distances le sont elles-mêmes ; donc les points M et N sont fixes sur FG ; donc les surfaces développables dont les arêtes sont BL et CK, BN et CN sont des surfaces coniques; donc toutes les droites AM, AN passent par les mêmes points fixes M et N et par l'arête de l'angle dièdre ; donc toutes ces droites sont dans deux plans passant par cette arête et par les points fixes M et N ; donc les points variables H et L sont dans le premier de ces plans, et les points varirbles K et L dans le second ; donc en effet les deux surfaces coniques circonscrites se coupent suivant deux courbes planes dont les plans contiennent, l'un et l'autre l'arête de l'angle dièdre, qui en est ainsi l'intersection commune, donc, en outre, les sommets M et N des deux autres surfaces coniques sont respectivement sur les plans de ces deux courbes, et en ligne droite avec les sommets F et G des surfaces coniques circonscrites.

Présentement, les points M et N étant, pour toutes les situations du point A, les pôles respectifs des droites HI et KL, il s'ensuit que ces mêmes points M et N seront les pôles des plans qui sont les lieux de ces deux droites. De plus, les points fixes F et G étant les pôles respectifs des deux faces de l'angle dièdre, il s'ensuit que l'arête de cet angle et la droite FG sont polaires réciproques l'une de l'autre.

On peut aussi remarquer, d'après le thèoreme de Newton rappelé ci-dessus, que si l'on choisit le point A sur l'arête de l'angle dièdre de telle sorte que le plan coupant passe par le centre de la surface du second ordre, ce centre se trouvera aussi en ligne droite avec les milieux de FG, HI et KL.

Solution partielle du problème de géométrie énoncé à la page 288 du XII^e volume du présent recueil ;

Par MM. A. L. Boyer et Ch. Sturm.

Problème. *Déterminer, en fonction des quatre côtés d'un quadrilatère rectiligne inscrit au cercle,* 1.° *l'angle de deux côtés opposés* ; 2.° *l'angle des deux diagonales* ?

Solution. Soient, comme dans le mémoire de la page 269 du XII^e volume, a, b, c, d les quatre côtés consécutifs du quadrilatère, et x, y les deux diagonales ; la première se terminant aux sommets (a, b), (c, d), et la seconde aux sommets (b, c), (a, d) ; on aura, comme alors,

$$x^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\,, \qquad y^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ad+bc}\,;$$

en outre, en posant

$$b+c+d-a=A\,,$$

$$c+d+a-b=B\,,$$

$$d+a+b-c=C\,,$$

$$a+b+c-d=D\,;$$

nous aurons

$$\text{Sin.}(a,\ d)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)}\,, \qquad \text{Sin.}(a,\ b)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2(ab+cd)}\,;$$

$$\mathrm{Cos.}(a,d)=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} \qquad \mathrm{Cos.}(a,b)=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

Mais les prolongemens des côtés opposés b et d forment avec le côté a un triangle dans lequel l'angle opposé à ce côté a est precisément l'angle cherché (b, d) de deux côtés opposés ; en supposant donc, pour fixer les idées, $a>c$, nous aurons

$$(b, d)=\varpi-[(a, d)+(a, b)]$$

d'où

$$\mathrm{Sin.}(b, d)=\mathrm{Sin.}[(a, d)+(a, b)]=\mathrm{Sin.}(a, d)\mathrm{Cos.}(a, b)+\mathrm{Sin.}(a, b)\mathrm{Cos.}(a, d)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\mathrm{Sin.}(b, d)=\frac{[(a^2+b^2-c^2-d^2)+(a^2+d^2-b^2-c^2)]\sqrt{ABCD}}{4(ad+bc)(ab+cd)},$$

ou, en réduisant

$$\mathrm{Sin.}(b, d)=\frac{(a^2-c^2)\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)(ab+cd)};$$

tel est le sinus de l'angle des deux côtés opposés b *et* d ; on trouverait de même

$$\mathrm{Sin.}(a, c)=\frac{(b^2-d^2)\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)(ab+cd)}.$$

Si l'on cherche les cosinus des mêmes angles, on trouvera

$$\mathrm{Cos.}(b, d)=\mathrm{Sin.}(a, b)\mathrm{Sin.}(a, d)-\mathrm{Cos.}(a, b)\mathrm{Cos}(a, d)$$

ou, en substituant,

$$\mathrm{Cos.}(b, d)=\frac{ABCD-(a^2+d^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2-d^2)}{4(ab+cd)(ad+bc)}$$

ou, en développant et réduisant

$$\mathrm{Cos.}(b,\ d)=\frac{(ab+cd)^2+(ad+bc)^2-(a^2-c^2)^2}{2(ab+cd)(ad+bc)}\ ;$$

et on trouvera de même

$$\mathrm{Cos.}(a\ ,\ c)=\frac{(ab+cd)^2+(ad+bc)^2-(b^2-d^2)^2}{2(ab+cd)(ad+bc)}\ ;$$

De là on déduit

$$2\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(b\ ,\ d)=1-\mathrm{Cos.}(b,\ d)=\frac{(a^2-c^2)^2-[(ab+cd)-(ad+bc)]^2}{2(ab+cd)(ad+bc)}\ ,$$

ou, en décomposant, divisant par 2 et extrayant la racine quarrée

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(b\ ,\ d)=\frac{a-c}{2}\sqrt{\frac{BD}{(ab+cd)(ad+bc)}}\ ;$$

et on aurait de même

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\ ,c)=\frac{b-d}{2}\sqrt{\frac{AC}{(ab+cd)(ad+bc)}}\ ;$$

et, comme on a

$$\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(b\ ,d)=\frac{\mathrm{Sin.}(b\ ,\ d)}{2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(b,\ d)}\ ,\quad \mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\ ,\ c)=\frac{\mathrm{Sin.}\ (a\ ,\ c)}{2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\ (a\ ,c)}$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(b\ ,\ d)=\frac{a+c}{2}\sqrt{\frac{AC}{(ab+cd)(ad+bc)}}\ ,$$

$$\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\ ,\ c)=\frac{b+d}{2}\sqrt{\frac{BD}{(ab+cd)(ad+bc)}}\ ;$$

et de là encore

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b\,,d)=\frac{a-c}{a+c}\sqrt{\frac{BD}{AC}}\;;$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(a\,,c)=\frac{b-d}{b+d}\sqrt{\frac{AC}{BD}}\;;$$

formules très-commodes pour le calcul par logarithmes.

Passons à la recherche de l'angle des diagonales ; pour cela remarquons que ces diagonales divisent le quadrilatère en quatre triangles dont la somme des aires sera, en appelant x' et x'' les deux segmens de x, et y' et y'' les deux segmens de y,

$$\tfrac{1}{2}(x'y'+x'y''+x''y'+x''y'')\text{Sin.}(x\,,y)=\tfrac{1}{2}(x'+x'')(y'+y'')\text{Sin.}(x\,,y)=\tfrac{1}{2}xy\text{Sin.}(x\,,y)\;;$$

mais il a été prouvé, dans le mémoire cité que l'aire de ce quadrilatère a aussi pour expression

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{ABCD}\;;$$

donc

$$\text{Sin.}(x\,,y)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2xy}\;;$$

mais on a

$$xy=ac+bd\;;$$

donc finalement

$$\text{Sin.}(x\,,y)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2(ac+bd)}\,.$$

De là on conclura facilement

$$\text{Cos.}(x,y)=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}\;;$$

et ensuite

$$2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=1-\text{Cos.}(x\,,\,y)=\frac{AC}{2(ac+bd)}\,,$$

$$2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=1+\text{Cos.}(x\,,\,y)=\frac{BD}{2(ac+bd)}\,;$$

d'où

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{AC}{ac+bd}}\,,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{BD}{ac+bd}}\,;$$

et, par suite

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=\sqrt{\frac{AC}{BD}}\,;$$

formule très-commode pour le calcul par logarithmes. (*)

(*) Nous rappellerons ici qu'il a été proposé de trouver des formules analogues pour le quadrilatère sphérique inscrit à un petit cercle de la sphère. De telles formules ont bien été reçues ; mais elles n'ont pas l'élégance suffisante pour en justifier la publication.

J. D. G.

Démonstrations diverses du théorème de géométrie énoncé à la page 212 du présent volume.

THÉORÈME. *Deux hyperboles équilatères telles que les diamètres principaux de chacune sont les asymptotes de l'autre se coupent toujours à angles droits.*

Démonstration de M. W. H. T.

C'est un théorème connu, et d'ailleurs très-facile à démontrer que, dans l'hyperbole équilatère, rapportée à son centre et à ses diamètres principaux, la normale est constamment égale au rayon vecteur.

Cela posé; soit C (fig. 2) le centre commun de deux hyperboles équilatères dont les asymptotes soient dirigées suivant CN et CN', et suivant leurs perpendiculaires respectives au point C; et soit P un point commun aux deux courbes. Soient menées les normales PN et PN', ainsi que le rayon vecteur CP, prolongé jusqu'en V.

Les deux triangles CPN et CPN' étant isocèles, d'après ce qui vient d'être dit plus haut, il s'ensuit que les angles extérieurs VPN et VPN' sont respectivement doubles des intérieurs PCN et PCN'; d'où il suit que l'angle total NPN' est double de l'angle total NCN'; c'est-à-dire que *l'angle sous lequel se coupent deux hyperboles équilatères de même centre est constamment double de celui sous lequel se coupent leurs asymptotes ou leurs axes transverses*; d'où il suit que, si ce dernier est demi-droit, les deux hyperboles se couperont perpendiculairement; ce qui démontre complètement le théorème,

Démonstration de M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors, et d'un Abonné.

On sait que la tangente à une hyperbole, terminée à ses asymptotes, a son milieu à son point de contact avec la courbe; et que de plus elle est égale et parallèle au conjugué du diamètre qui passe par ce point.

Et, comme il est d'ailleurs connu que, dans l'hyperbole équilatère, deux diamètres conjugués quelconques sont de même longueur; il s'ensuit que, dans une telle hyperbole, la tangente en un point quelconque, terminée aux asymptotes est double du rayon vecteur du point de contact.

Si donc deux hyperboles équilatères ont même centre, et qu'on leur mène, par leur point d'intersection des tangentes terminées à leurs asymptotes respectives, ces tangentes, qui se couperont par leurs milieux, auront une longueur commune, double de celle du rayon vecteur du point d'intersection des deux courbes; elles formeront donc, avec leurs asymptotes, deux triangles rectangles dont les hypothénuses, de même longueur, se couperont par leurs milieux, et dont les sommets opposés se confondront.

Au moyen de ces considérations, le théorème proposé revient à dire que, *si deux triangles rectangles ayant des hypothénuses égales sont posés l'un sur l'autre de telle sorte que les milieux de leurs hypothénuses ainsi que les sommets opposés soient communs, et que les côtés de l'angle droit de l'un fassent un angle demi-droit avec les côtés de l'angle droit de l'autre, les deux hypothénuses se couperont perpendiculairement.*

M. Durrande démontre cette proposition à peu près comme il suit: soient SCT, S'CT' (fig. 3) deux triangles rectangles ayant le sommet C de l'angle droit commun et des hypothénuses égales ST

ST et S′T′ se coupant à leurs milieux en P; en menant CP, cette droite sera égale à la moitié des hypothénuses; de sorte qu'on aura PC=PS=PS′, et qu'ainsi les triangles CPS et CPS′ seront isocèles; en prolongeant donc CP au-delà de P vers V, les angles extérieurs VPS et VPS′ seront respectivement doubles des angles intérieurs PCS et PCS′; d'où il suit que la somme SPS′ des premiers sera double de la somme SCS′ des derniers; si donc cette dernière somme est un angle demi-droit, la première sera un angle droit; c'est-à-dire que les hypothénuses ST et S′T′ seront perpendiculaires l'une à l'autre.

Pour parvenir au même but, l'abonné décrit du point P comme centre (fig. 4), et avec la moitié des hypothénuses pour rayon, une circonférence, à laquelle les deux triangles rectangles se trouvent alors inscrits; or les deux angles SPS′ et SCS′ embrassant ainsi entre leurs côtés le même arc SS′ et ayant leurs sommets le premier au centre et le dernier à la circonférence, il s'ensuit que le premier est double du dernier, et que conséquemment si celui-ci est demi-droit l'autre sera droit.

Démonstration de M. Querret, chef d'institution à St-Malo.

Soient x et y les coordonnées de l'une des courbes, rapportées à son centre et à ses axes; elle aura pour équation

$$y^2=x^2-A^2.$$

Soit z la tangente tabulaire de l'angle que forme cette courbe ou sa tangente avec l'axe des x; on aura

$$z=\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}.$$

L'équation de l'autre courbe, rapportée aux mêmes axes que la première, lesquels en seront les asymptotes, sera

$$xy=B^2 .$$

Soit z' la tangente tabulaire de l'angle que forme cette courbe ou sa tangente avec l'axe des x, on aura

$$z'=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} ;$$

Au point d'intersection, x et y seront les mêmes dans les deux courbes, d'où il suit qu'on aura alors

$$zz'=\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x}\right)=-1 , \quad \text{ou} \quad 1+zz'=0 ;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Ce théorème n'est au surplus qu'un cas particulier du suivant;

Une hyperbole étant donnée, si l'on en construit une autre dont les asymptotes soient dirigées suivant deux quelconques de ses diamètres, et que sur les mêmes diamètres comme conjugués, on construise une ellipse, les tangentes aux deux hyperboles à leur point d'intersection seront parallèles à un même système de cordes supplémentaires de cette ellipse, construites sur l'un ou l'autre de ces deux diamètres.

Si en effet on prend le diamètre transverse de la première hyperbole pour axe des x et son conjugué pour axe des y, l'équation de cette hyperbole sera

$$B^2x^2-A^2x^2=A^2B^2 ;$$

et l'équation de l'autre sera

$$xy=C^2 .$$

Soient z et z' les rapports des sinus des angles que font les deux courbes ou leurs tangentes avec les axes des x et des y ; on aura

$$z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{B^2x}{A^2y}\;, \qquad z'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}\;,$$

d'où on conclura, pour le point d'intersection,

$$zz'=-\frac{B^2}{A^2}\;, \quad \text{ou} \quad A^2zz'+B^2=0\,.$$

Or, cette équation est précisément celle qui doit exister, pour les cordes supplémentaires de l'ellipse, entre les quantités analogues à z et z' ; d'où il suit que si, par l'extrémité de l'un quelconque des deux diamètres conjugués de cette courbe qui lui sont communs avec la première des deux hyperboles on lui mène une corde parallèle à la tangente à l'une de ces hyperboles au point où elles se coupent, la supplémentaire de cette corde sera parallèle à la tangente à l'autre courbe au même point.

Il ne serait pas difficile de démontrer, au surplus que, deux hyperboles ayant même centre, si les asymptotes de l'une d'elles sont dirigées suivant deux diamètres conjugués de l'autre, les asymptotes de celles-ci seront réciproquement dirigées suivant deux diamètres conjugués de la première ; de manière que, pour le même système d'hyperboles, on peut obtenir deux ellipses qui jouissent de la proprieté qui vient d'être démontrée.

Si la première hyperbole est équilatère, et qu'on prenne ses diamètres principaux pour asymptotes de la seconde, qui alors sera également équilatère; l'ellipse deviendra évidemment un cercle, dans lequel les cordes supplémentaires sont constamment rectangulaires; donc alors les deux hyperboles se couperont à angles droits.

Le théorème qui vient d'être démontré a quelque analogie avec le suivant, qui nous paraît digne de remarque :

Une ellipse et une hyperbole qui ont le même centre et les foyers communs se coupent toujours perpendiculairement.

Ce théorème peut aisément se démontrer comme il suit. Soit c l'excentricité commune ; les équations des deux courbes rapportées à leurs diamètres principaux seront

$$B^2x^2+(B^2+c^2)y^2=B^2(B^2+c^2)\ ; \qquad (1)$$

$$B'^2x^2-(c^2-B'^2)y^2=B'^2(c^2-B'^2)\ ; \qquad (2)$$

d'où on tirera ; par différentiation

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{B^2x}{(B^2+c^2)y}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=+\frac{B'^2x}{(c^2-B'^2)y}\ ;$$

de sorte qu'en représentant par z' et z'' les tangentes tabulaires des inclinaisons des deux courbes sur l'axe des x, il viendra

$$z'=-\frac{B^2x}{(B^2+c^2)y}\ , \qquad z''=+\frac{B'^2x}{(c^2-B'^2)y}\ ;$$

En éliminant B^2 et B'^2 entre ces formules et les équations (1, 2), il viendra

$$xyz'^2+(x^2-y^2-c^2)z'-xy=0,$$

$$xyz''^2+(x^2-y^2-c^2)z''-xy=0,$$

donc, pour un point (x, y) d'intersection des deux courbes, z' et z'' sont racines de la même équation du second degré

$$z^2+\frac{x^2-y^2-c^2}{xy}z-1=0\ ;$$

d'où il suit qu'on doit avoir

$$z'z''=-1\ , \qquad \text{ou} \qquad 1+z'z''=0$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Cette proposition peut au surplus être immédiatement prouvée comme il suit. En représentant par A et A' les demi-premiers axes de l'ellipse et de l'hyperbole les distances du centre aux points d'intersection de l'axe des x avec la tangente à la première courbe et avec la normale à la seconde seront, comme l'on sait

$$\frac{A^2}{x}, \qquad \frac{(A'^2+B'^2)x}{A'^2}$$

ou bien

$$\frac{B^2+c^2}{x}, \qquad \frac{c^2x}{c^2-B'^2};$$

mais, au moyen des équations (1, 2), on trouve pour l'abscisse du point d'intersection des deux courbes

$$x=\frac{\sqrt{(B^2+c^2)(c^2-B'^2)}}{c};$$

or, en subsituant cette valeur dans les deux expressions ci-dessus; elles deviennent également

$$c\sqrt{\frac{B^2+c^2}{c^2-B'^2}}=c\,\frac{A}{A'};$$

donc la normale à l'hyperbole, à l'intersection des deux courbes, coïncide avec la tangente à l'ellipse au même point, d'où il suit que les deux courbes se coupent perpendiculairement en ce point.

Nous venons de trouver pour l'abscisse du point d'intersection des deux courbes

$$x=\frac{\sqrt{(c^2+B^2)(c^2-B'^2)}}{c}=\frac{AA'}{c};$$

en substituant cette valeur dans l'une quelconque des équations (1, 2), on en tirera

$$y=\frac{BB'}{c} \ ;$$

c'est-à-dire que chaque coordonnée de l'intersection des deux courbes est une quatrième proportionnelle à l'excentricité commune et aux moitiés des deux axes qui lui sont parallèles.

Si l'on conçoit que, l'un des foyers communs restant fixe, l'autre s'en éloigne continuellement et indéfiniment, la proposition énoncée ne cessera pas pour cela d'avoir lieu; elle aura donc lieu encore lorsque ce foyer sera infiniment éloigné du premier, auquel cas les deux courbes deviendront des paraboles; donc, *deux paraboles qui ont même axe et même foyer se coupent toujours perpendiculairement*; pourvu toutefois que leurs courbures soient en sens inverse ou, en d'autres termes, que le foyer commun soit situé entre les deux sommets.

Cette dernière proposition peut, au surplus, se démontrer directement comme il suit. Soient c et c' les distances des sommets au foyer commun; en prenant ce foyer pour origine, les équations des deux courbes seront

$$y^2=4c^2+4cx \ ; \qquad y^2=4c'^2-4c'x \ .$$

Soient z' et z'' les tangentes tabulaires des inclinaisons des deux courbes sur l'axe des x, nous aurons

$$z'=\frac{dy}{dx}=\frac{2c}{y} \ , \qquad z''=\frac{dy}{dx}=-\frac{2c'}{y} \ ,$$

éliminant c et c' entre ces équations et celles des deux courbes, il viendra

$$yz'^2+2xz'-y=0 \ ,$$

$$yz''^2+2xz''-y=0 \ ;$$

donc, pour le point (x, y) d'intersection des deux courbes, z' et z'' sont les deux racines de l'équation du second degré

$$z^2+2\frac{x}{y}z-1=0\ ;$$

d'où il suit qu'on doit avoir

$$z'z''=-1\ , \qquad \text{ou} \qquad 1+z'z''=0\ ,$$

ce qui prouve la proposition annoncée.

On peut encore remarquer que la distance du foyer commun au point où la tangente à la première parabole rencontre son axe est, en général,

$$-2c-x\ ;$$

et que la distance du même point à celui où la normale à la seconde rencontre le même axe est

$$-2c'+x\ ;$$

mais les équations des deux courbes donnent pour l'abscisse de leur point d'intersection

$$x=c'-c\ ;$$

substituant donc dans les deux expressions ci-dessus, elles deviennent également

$$-(c+c')$$

ce qui montre que, pour le point d'intersection des deux courbes, la tangente à la première coïncide avec la normale à la seconde, et qu'ainsi elles se coupent perpendiculairement.

En substituant dans l'équation de l'une quelconque des deux courbes la valeur $x=c'-c$ de l'abscisse de leur point d'intersection, on obtient pour son ordonnée

$$y=2\sqrt{cc'}.$$

Démonstration de M. Gergonne.

En transformant le théorème en problème on peut se demander *quelle est la trajectoire orthogonale de toutes les hyperboles équilatères qui ont les mêmes asymptotes?*

En prenant ces asymptotes pour les axes des coordonnées, on pourra prendre, pour l'équation commune à toutes ces hyperboles,

$$xy=A\ ,$$

dans laquelle A est un paramètre indéterminé. Si alors (x', y') est le point de l'une de ces courbes où elle est coupée par l'une des courbes cherchées, les équations des tangentes à ces deux courbes en ce point seront

$$y-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x'),\qquad y-y'=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}(x-x')\ ;$$

afin donc qu'elles se coupent perpendiculairement, on devra avoir

$$1-\frac{y'\mathrm{d}y'}{x'\mathrm{d}x'}=0\qquad \text{ou}\qquad x'\mathrm{d}x'-y'\mathrm{d}y'=0\ ;$$

équation qui a pour intégrale, en supprimant les accens,

$$x^2-y^2=B,$$

qui appartient bien, en effet, à toutes les hyperboles équilatères qui ont pour diamètres principaux les asymptotes des premières.

Démonstration

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 248 du présent volume;

Par M. W. H. TALBOT

THÉORÈME. *Le point d'un plan indéfini dont la somme des distances à trois autres points, situés hors de ce plan, est un* minimum, *est tel que si, par la droite qui va de ce point à l'un quelconque des trois autres, on conduit un plan perpendiculaire à celui dont il s'agit, ce plan divisera en deux parties égales l'angle formé par les droites qui vont du même point aux deux points restans.*

Démonstration. Soit représentée la figure en relief (fig. 5), en représentant par des lignes ponctuées tout ce qui est hors du plan indéfini. Soient O le point cherché sur ce plan, et A B C les trois points donnés hors du même plan; de manière que OA+OB+OC doive être un minimum.

I.° Supposons, en premier lieu, que l'une des distances, OA par exemple, soit donnée, de telle sorte qu'il ne soit question que de rendre minimum la somme OB+OC des deux autres; a, b, c étant respectivement les projections de A, B, C sur le plan indéfini. Alors le point O sera l'un de ceux d'une circonférence ayant son centre en a, et, en menant une tangente TU à cette circonférence par ce point, il faudra, pour que OB+OC soit *minimum*, que les angles BOT et COU soient égaux; car, soit substitué à O un autre point O′ du cercle ou de sa tangente, infiniment voisin du premier, du côté de T, il est clair que BO se trouvera diminuée d'une quantité OO′.*Cos*.BOT, tandis que CO se trouvera augmentée d'une quantité OO′.*Cos*.BOU. Or le caractère du *minimum* est que la diminution d'une part se trouve exactement composée par l'augmentation de l'autre, ce qui exige que les angles BOT et COU soient égaux.

2.° La tangente TU étant perpendiculaire au plan du triangle AaO, de l'égalité des angles que font OB et OC avec cette tangente on peut conclure l'égalité des angles que font les mêmes droites avec ce plan.

3.° Il suit de là que les distances des points B et C à ce plan, lesquelles ne sont autre chose que les perpendiculaires $b\beta$, $c\gamma$ abaissées des projections de ces points sur le prolongement du rayon aO, doivent être dans le rapport de OB à OC. Mais si P est le point où le plan AaO rencontre BC et que p soit la projection de ce point, évidemment située sur le prolongement de aO, on aura

$$b\beta : c\gamma :: bp : cp :: \mathrm{BP} : \mathrm{CP} ;$$

donc on doit avoir aussi

$$\mathrm{OB} : \mathrm{OC} :: \mathrm{PB} : \mathrm{PC} ;$$

ce qui prouve que la droite OB suivant laquelle le prolongement du plan AaO coupe le triangle BOC divise l'angle BOC en deux parties égales.

Rome, le 25 novembre 1822.

Autre démonstration du même théorème ;

Par M. Querret, chef d'institution à St-Malo.

Observons d'abord que, lorsqu'un cercle et une ellipse, situés dans un même plan, n'ont qu'un seul point commun, ils ont nécessairement la même tangente en ce point. Car, si la tangente à l'ellipse n'était pas en même temps tangente au cercle, le centre de celui-ci serait hors de la normale, du point de contact; de sorte qu'en menant de ce centre une autre normale, elle serait plus courte que le rayon, d'où il suit que l'ellipse aurait un point intérieur au cercle qui, conséquemment, devrait la couper en deux points au moins.

Observons encore que si un cercle et une ellipsoïde engendrée par la résolution d'une ellipse autour de son grand axe n'ont qu'un seul point commun, la tangente au cercle en ce point sera située dans le plan tangent à l'ellipsoïde au même point. En effet, le plan du cercle détermine dans l'ellipsoïde une section elliptique qui n'a qu'un point commun avec ce cercle et qui a pour tangente en ce point l'intersection de ce plan avec le plan tangent à l'ellipsoïde, intersection qui doit être tangente au cercle par ce qui précède.

Cela posé; soient A, B, C (Fig. 6) les trois points dont il s'agit, et O le point du plan donné dont la somme des distances à ces trois-là est un *minimum*. Conduisons par OA et par la perpendiculaire Aa, le plan AOa perpendiculaire à ce plan; et du pied a de la perpendiculaire Aa, comme centre et avec aO pour rayon, décrivons un cercle dans le même plan. Il est clair que ce cercle aura pour tangente en O la perpendiculaire TU au plan AOa. Maintenant si l'on décrit, dans le plan BOC une ellipse ayant ses foyers aux points B et C, et dont le grand axe soit $=BO+OC$, et qu'on fasse tourner cette ellipse autour de BC; elle engendrera une ellipsoïde dont la surface ne devra rencontrer notre cercle qu'au seul point O; car si elle le coupait en un autre point S, on aurait $BS+CS=BO+CO$, d'où, à cause de $AS=AO$, on conclurait $AS+BS+CS=AO+BO+CO$, ce qui serait contre l'hypothèse. Donc, d'après la dernière des deux observations faites ci-dessus, la tangente TU au cercle au point O est dans le plan tangent en ce point à la surface de l'ellipsoïde; et, comme cette tangente est perpendiculaire au plan AOa, il en résulte que le plan tangent à l'ellipsoïde est aussi perpendiculaire au plan AOa ; donc réciproquement ce plan lui est perpendiculaire, et par conséquent il passe par la normale à l'ellipsoïde au point O ; mais la normale à l'ellipsoïde de révolution en chacun de ses points se confond avec celle de l'ellipse génératrice, lorsqu'elle passe par ce point ; donc enfin le plan AOa passe par la normale à l'ellipse dont les foyers sont en B et C et dont BO et CO sont deux rayons vecteurs ; donc cette normale n'est autre que la droite OP suivant laquelle le plan AOa rencontre le plan BOC, laquelle doit ainsi diviser en deux parties égales l'angle BOC des rayons vecteurs. Le plan mené perpendiculairement au plan donné, par l'une quelconque des trois droites OA, OB, OC divise donc l'angle des deux autres en deux parties égales ; le plan mené par chacune d'elles perpendiculairement au plan donné divise donc l'angle des deux autres en deux parties égales (*).

(*) M. W. H. T. observe qu'en supposant nulles les trois hauteurs Aa, Bb, Cc, le problème reviendrait à *trouver, sur le plan d'un triangle donné, un point dont la somme des distances à ses trois sommets soit la moindre possible* ; problème qui a été traité, ainsi qu'un grand nombre d'autres problèmes analogues, à la page 377 du 1.er volume du présent recueil ; mais que la situation des trois points donnés peut ne pas donner de *minimum* proprement dit ; circonstance qui doit également se reproduire dans quelques cas particuliers du problème énoncé à la page 380 du XII.e volume du présent recueil.

Nous observerons, à notre tour que, si le théorème qui vient d'être démontré est propre à jeter du jour sur la solution de ce dernier problème, cette solution, toutefois, n'en résulte pas immédiatement et reste encore à trouver.

J. D. G.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Considérations analitico-géométriques, sur les solutions particulières des équations différentielles du 1.er ordre;

Par M. J. L. Woisard, répétiteur de mathématiques à l'école d'artillerie de Metz.

On sait que l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre renferme une constante arbitraire ; et que, par conséquent, cette dernière équation peut être considérée comme représentant une infinité de lignes, dont on obtiendrait les équations individuelles, en faisant varier, depuis l'infini positif jusqu'à l'infini négatif, le paramètre arbitraire qui entre dans l'intégrale complète.

Mais on trouve aussi quelquefois des polynomes qui, sans être des cas particuliers de l'intégrale complète, ni des facteurs communs à tous les coefficiens de $\frac{dy}{dx}$, dans l'équation différentielle, satisfont néanmoins aux conditions exprimées par cette dernière, quand on les égale à zéro. Nos analistes modernes les ont appelés *Solutions particulières;* ils en ont expliqué l'origine; ils ont donné le moyen de les obtenir, sans résoudre l'équation différentielle proposée, et ont fait voir que les lignes qu'elles représentent sont les enveloppes de celles que représente l'intégrale complète.

J'ai considéré le même problème dans un ordre inverse, c'est-à-dire que j'ai cherché à déduire des propriétés des lignes enveloppes la démonstration de l'existence des solutions particulières ; dans certaines équations différentielles, et à les déterminer, sans résoudre les équations dont elles dérivent. Qnoiqu'en général il soit peu important d'obtenir, par de nouveaux moyens des résultats déjà connus, j'ai pensé que néanmoins une méthode géométrique pourrait offrir quelque intérêt, parce que souvent elle rend sensibles des raisonnemens difficiles à saisir, et que d'ailleurs elle m'a conduit à plusieurs conséquences importantes qui, je crois, n'ont point encore été signalées.

Pour exposer convenablement la théorie que j'ai en vue, je suis obligé de rappeler succinctement les propriétés déjà connues des lignes enveloppes.

1. Soit $\varphi(x, y, c)=0$ une équation quelconque à deux variables, renfermant un paramètre arbitraire ; on peut toujours imaginer une ligne AMB (fig. 1), rapportée à deux axes rectangulaires, telle que, pour une valeur déterminée du paramètre c, les coordonnées de chacun de ses points satisfassent à l'équation $\varphi(x, y, c)=0$. Généralement cette ligne changera de figure et de situation par rapport aux axes, quand on fera varier la valeur du paramètre c ; ainsi, elle pourra devenir successivement A'M'B', A''M''B'', ..., lors qu'on remplacera c par c', c'', ... On appelle *enveloppe* des lignes représentées par l'équation $\varphi(x, y, c)=0$, une ligne M M' M'' .... tangente commune à toutes celles qu'on peut obtenir en faisant varier la valeur de c, depuis l'infini positif jusqu'à l'infini négatif ; et les lignes AMB, A'M'B', A''M''B'', ... qu'elle touche, toutes en sont dites les *enveloppées*.

2. Soient AMB, A'M'B', deux enveloppées consécutives, dont les équations sont respectivement $\varphi(x, y, c)=0$ et $\varphi(x, y, c')=0$; elles diffèrent d'autant moins de forme et de position que la différence $c-c'$ est plus petite ; et, si l'on vient à la supposer tout à fait nulle, la branche M'A' de la seconde viendra se confondre avec la branche MA de la première ; d'où il suit qu'à mesure que c'

sera devenu moins différent de c, le point K d'intersection des deux courbes se sera mu sur la branche MB de la première, de manière à coïncider avec le point M de celle-ci, lorsque c' sera devenu rigoureusement égal à c; donc les points communs à l'enveloppante MM'M''..... et à l'enveloppée AMB sont les points d'intersection de cette dernière ligne avec celle qu'on obtient en faisant varier infiniment peu le paramètre c dans l'équation $\varphi(x,y,c)=0$. Donc pour avoir les coordonnées de cette intersection, c'est-à-dire du point M, il faut résoudre simultanément les deux équations

$$\varphi(x;y,c)=0\,,\ \varphi(x,y,c)+\frac{\mathrm{d}.\{\varphi(x,y,c)\}}{\mathrm{d}c}\mathrm{d}c=0\ : \qquad (*)$$

3. On en conclut ordinairement que, la première réduisant la seconde, elles peuvent être remplacées par le système de ces deux-ci :

$$\varphi(x,y,c)=0\,,\ \frac{\mathrm{d}.\{\varphi(x,y,c)\}}{\mathrm{d}c}=0\,;$$

mais cette simplification, employée inconsidérément, peut quelquefois faire négliger des racines communes; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si on l'appliquait à l'équation

$$(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}-x+c=0\,;$$

qui représente un cercle, d'un rayon constant$=r$, ayant son centre en un point déterminé de l'axe des x. En la différentiant par rapport à c, on trouve $1=0$ d'où l'on serait tenté de conclure que deux

(*) On trouve ce point de doctrine nettement déduit de la série de Taylor, sans considération d'infiniment petits, ou autres équivalentes, à la page 361 du III.e volume du présent recueil.

J. D. G.

cercles consécutifs ne se coupent pas. Mais on reconnaîtra facilement l'erreur de cette conclusion, si l'on considère que $(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ peut être pris avec deux signes; et que, par conséquent, supposer que $\mathrm{d}c$ est la différence des deux polynomes

$$(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}-y+e\,,\quad (r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}-x+c+\mathrm{d}c\,,$$

c'est chercher seulement les points d'intersection de demi-cercle AMB (Fig. 2) avec le demi-cercle A′M′B′, et ceux du demi-cercle ANB avec le demi-cercle A′N′B′; tandis qu'on omet les points K et L d'intersection du demi-cercle ANB avec le demi-cercle A′M′B′, lesquels se confondent avec A et B, lorsque la distance CC′ des centres devient nulle. Nous en conclurons que la simplification indiquée ci-dessus ne doit être employée que quand l'équation ne renferme aucun terme susceptible de plusieurs valeurs différentes, et que, dans le cas contraire, il faut combiner tour à tour toutes les formes de l'une des équations avec toutes les formes de l'autre. Ainsi, dans l'exemple précédent en considérant $(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ avec le signe $+$, dans la première équation, et avec le signe $-$ dans la seconde, le résultat de la soustraction eût été

$$(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}-\mathrm{d}c=0\,,$$

ou, à cause de $\mathrm{d}c$ infiniment petit

$$r^2-y^2=0\,,\ \text{d'où}\ y=\pm r\ \text{ et }\ x=c.$$

C'est ce qu'on aurait également trouvé, au surplus, en mettant l'équation sous la forme

$$r^2-y^2-(x-c)^2=0.$$

Néanmoins, pour simplifier les raisonnemens, je supposerai que l'équation $\varphi(x,y,c)=0$ n'a aucun terme susceptible de plusieurs valeurs. Dans beaucoup de circonstances, on pourra lui donner cette propriété, en faisant disparaître les radicaux, et, dans tous les cas, au moyen de la remarque précédente, il sera facile de modifier convenablement les principes qui vont être établis.

4. Puisque le système des deux équations

$$\varphi(x, y, c)=0, \quad \frac{d.\varphi(x, y, c)}{dc}=0$$

détermine ceux des points de l'enveloppée AMB (Fig 1) qui appartiennent à l'enveloppe MM′M″....; l'élimination de c, entre ces deux équations, donnera l'équation de l'enveloppe. Cette règle est la conséquence des premières notions de la géométrie analitique. Je vais actuellement examiner quelques résultats auxquels conduit son application; en représentant, pour plus de brièveté, la fonction $\varphi(x, y, c)$ par la simple lettre φ.

Dabord $\frac{d\varphi}{dc}$ sera indépendant de c, toutes les fois que φ sera de la forme $mc+n$, où m et n sont des fonctions de x, y et des constantes autres que c. Alors il n'y aura pas lieu à élimination, et deux enveloppées quelconques seront représentées par les équations

$$mc+n=0, \quad mc'+n=0.$$

Si m est indépendant de x et de y, ces deux équations seront incompatibles, et les lignes qu'elles représenteront n'auront aucun point commun; ainsi, par exemple, en faisant varier c dans l'équation $y+ax+c=0$, on obtient une suite de droites parallèles. Si, au contraire m contient les variables, ou seulement l'une d'elles, les deux équations ne pourront être satisfaites qu'en posant séparément $m=0$, $n=0$, et par conséquent toutes les enveloppées se coupent en des points déterminés, et en nombre fini. Ainsi, par exemple, en faisant varier c dans l'équation $y^2=cx$, on obtient des paraboles qui passent toutes par l'origine et dont les branches ne se rencontrent pas.

Mais, hors le cas ci-dessus indiqué, $\frac{d\varphi}{dc}$ contiendra encore c, et en l'égalant a zéro, on en tirera, pour ce paramètre des valeurs qu'on substituera dans l'équation $\varphi=0$. Le résultat de la substitution des valeurs de c, fonction de x et y, donnera les enveloppes cherchées. Mais le résultat de la substitution des valeurs constantes donnera des cas particuliers de l'équation $\varphi=0$. Ce seront ceux pour lesquels deux enveloppées consécutives se confondront en une seule; et par conséquent on trouvera, par ce moyen, toutes celles qui servent de limites aux autres (*).

Par exemple, en différentiant par rapport à c l'équation

$$y=(1-c^2)x+c^3,$$

qui représente une droite, on trouve

$$-2cx+3c^2=0;$$

d'où

$$c=0 \text{ et } c=\tfrac{2}{3}x.$$

Si l'on substitue $c=0$ dans la proposée, on trouvera $y=x$, équation de la droite BC (Fig.3). C'est, parmi toutes les enveloppées, celle qui fait le plus grand angle aigu avec l'axe des x. Si, au contraire on substitue $c=\frac{2}{3}x$, il viendra

$$y=x-\tfrac{4}{27}x^3;$$

(*) On trouve un exemple de l'introduction de ces enveloppées particulières dans l'équation générale des enveloppes, dans un article de M. Poncelet sur la théorie des polaires réciproques (*Annales*, tom. VIII, pag. 210—226.)

équation de l'enveloppe de toutes les droites BC, B'C', B''C'', B'''C''', ...

5. Toute ligne peut être considérée comme l'enveloppe d'une infinité de systèmes d'enveloppées différentes. L'équation générale de celles-ci est arbitraire ; elle doit seulement renfermer un paramètre variable, et représenter une ligne tangente à la première en des points qui varient de situation lorsqu'on fait varier ce paramètre.

6. Supposons présentement que l'on élimine c entre $\varphi=0$ et $\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy=0$; en faisant, pour abréger $\frac{dy}{dx}=p$, le résultat sera une fonction de x, y et p. Représentons-la par $\varphi'=0$, et cherchons quelles sont les lignes dont elle exprime les propriétés.

Une ligne MM'M''.... (Fig.4) peut être regardée comme représentée par l'équation $\varphi'=0$ si, en substituant dans cette équation, à la place de x et y, les coordonnées de l'un quelconque M de ses points, on en tire pour p la valeur du coefficient de x dans l'équation de la tangente MT en ce même point. Or on peut toujours, dans l'équation $\varphi=0$, donner à la constante c une valeur telle que la ligne représentée par cette équation passe par le point M, et la valeur de p, tirée de $b=0$, déterminera la direction de la tangente à cette ligne AMB. Donc la ligne MM'M''..... doit être telle que si, par un quelconque de ses points, on fait passer une des lignes représentées par $\varphi=0$, elle ait avec cette ligne une tangente commune; donc elle doit être ou l'un des cas particuliers de $\varphi=0$, ou l'une des enveloppes des lignes représentées par cette dernière équation.

7. Il s'agirait actuellement de déterminer l'équation des enveloppes telles que MM'M''......, sans être obligé d'intégrer l'équation $\varphi'=0$. pour cela il suffira (5) de trouver l'équation d'une ligne qui soi tangente à MM'M''....., et dont le point de contact prenne successivement différentes positions, quand on fera varier un paramètre.

8. Les enveloppes cherchées peuvent être courbes ou droites ; je considérerai d'abord les premières.

Soit MT (fig. 4) une tangente à l'enveloppante courbe MM′M″.... ; si je mène à toutes les enveloppées des tangentes Q′T′ , Q″T″,......, parallèles à cette première droite , la suite des points de contact Q , Q′ , Q″ ,..... déterminera une courbe QQ′Q″..... qui passera par le point M. Je dis de plus qu'en ce point elle sera tangente à MM′M″..... En effet, la position d'une tangente se détermine en prenant la limite de la position d'une corde dont l'une des extrémités s'approche indéfiniment de l'autre , considérée comme fixe. Or, si l'on considère la corde MQ′ , il est évident que l'extrémité Q′ s'approchera indéfiniment du point M′, quand ce dernier s'approchera du point M , et qu'ils se confondront à la limite , puisqu'alors M′T′ sera parallèle à MT ; donc la limite de la corde MQ′ est la même que celle de la corde MM′ ; mais cette dernière étant corde de la courbe MM′M″..... a pour limite la tangente MT ; donc cette dernière droite est aussi tangente à la courbe transversale QQ′Q″.

Nous pouvons conclure de là que les enveloppes cherchées se trouveront parmi les enveloppes des transversales QQ′Q″ ...., dont il faut présentement chercher l'équation générale.

Si l'équation $\varphi=0$ était donnée , en y mettant pour c la valeur qui convient à l'enveloppée A′M′B′, on trouverait les coordonnées du point Q′ en résolvant simultanément les équations

$$\varphi=0\ ,\qquad \frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}p=0\ ,$$

après avoir mis pour p , dans la dernière , la tangente tabulaire de l'angle que fait la droite Q′T′ avec l'axe des x ; et , pour obtenir l'équation de la transversale QQ′Q″..., il faudrait éliminer c entre les deux mêmes équations ; mais (6) le résultat de cette élimination serait $\varphi'=0$; donc cette dernière équation , en y considérant p comme une constante arbitraire, représentera les transversales cherchées.

9. Je suppose présentement que l'enveloppe MM'M''....., soit une droite (fig. 5) faisant avec l'axe des x un angle α. La transversale représentée par l'équation $\varphi'=0$ se confondra avec cette droite, lorsqu'on y fera $p=\text{Tang.}\,\alpha$; de plus, MM' étant la limite des enveloppées sera aussi la limite des transversales. Donc les droites enveloppes des lignes représentées par $\varphi=0$ seront des cas particuliers de celles que représente l'équation $\varphi'=0$, et se trouveront parmi celles de ces lignes qui servent de limites aux autres, et par conséquent la valeur de p qui leur correspond satisfera à la condition $\frac{d\varphi}{dp}=0$.

Mais il est en général très-difficile de trouver les valeurs infinies qui satisfont à une équation, parce qu'elles proviennent de la disparition des termes qui représentent les plus hautes puissances de l'inconnue; et par conséquent, pour avoir les valeurs qui correspondent à des parallèles aux y, il faudra faire $p=\frac{1}{q}$, dans l'équation $\varphi'=0$, et si $\psi'=0$, représente le résultat de cette substitution, on cherchera les valeurs nulles que l'on peut tirer de $\frac{d\psi}{dq}=0$.

10. Nous pouvons donc conclure qu'à l'exception des fonctions de x seul, toutes les solutions particulières de l'équation $\varphi'=0$ s'obtiendront en éliminant p entre

$$\varphi'=0 \text{ et } \frac{d\varphi'}{dp}=0\ ;$$

mais, comme les transversales dont il a été question dans les n.os précédens peuvent avoir des enveloppes et des limites autres que les enveloppes des lignes représentees par l'équation $\varphi=0$, on peut, en suivant cette méthode, trouver des facteurs étrangers à la question. La géométrie semble n'offrir pour les reconnaître aucun moyen autre que la vérification à *posteriori*; mais voici quelques théorèmes que l'analyse n'avait pas, à ce que je crois, fait encore découvrir, et qui sont la conséquence immédiate des remarques faites ci-dessus (4, 8, 9,).

1.° Lorsque la différentielle $\frac{d\phi}{dp}$ est indépendante de x et de y, les solutions particulières de l'équation différentielle $\varphi'=0$ ne peuvent représenter que des droites, et sont conséquemment décomposables en facteurs de la forme $y-mx-n=0$.

2.° En ce cas, si p, p', p'', ... sont les valeurs de p tirées de l'équation $\frac{d\phi'}{dp}=0$, les solutions particulières correspondantes seront

$$y-px-n=0\,,\quad y-p'x-n'=0\,,\quad y-p''x-n''=0\,,\ \ldots\ldots$$

et la question sera réduite à trouver les valeurs de n, n', n'', ...

3.° Lorsque l'équation $\varphi'=0$ a des solutions particulières, fonctions de y seul, l'équation $\frac{d\varphi'}{dp}=0$ est satisfaite par $p=0$; et, si l'on substitue cette valeur dans le polynome φ', les solutions cherchées seront les facteurs de la forme $y-k$.

4.° Pour trouver les solutions particulières fonctions de x seul, on indique ordinairement la règle suivante : « Remplacez, dans l'équation $\varphi'=0$, p par $\frac{1}{q}$; et si $\psi'=0$ représente le résultat de cette substitution, éliminez q entre $\psi'=0$; et $\frac{d\psi'}{dq}=0$; vous trouverez alors toutes les solutions fonctions de x seul, et en outre les solutions fonctions de x et y déjà obtenues par la première méthode ». Les principes établis ci-dessus fournissent le moyen d'abréger ce calcul ; il est évident, en effet, que toutes les fois que $\varphi'=0$ a des solutions particulières, fonctions de x seul, l'équation $\frac{d\psi'}{dq}=0$ est satisfaite par $q=0$, et qu'on les obtiendra toutes en substituant zéro au lieu de q dans le polynome ψ', et cherchant ensuite ses diviseurs de la forme $x-k$.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche, par un procédé nouveau, de la surface et du volume de la sphère et de ses parties;

Par M. Gergonne.

Il y a plus de deux mille ans que, pour déterminer la surface et le volume d'une sphère, on est dans l'usage de la considérer comme la limite du corps engendré par la révolution d'un demi-poligone régulier d'un nombre de côtés pair, tournant autour de la diagonale qui en joint deux sommets opposés.

Mais on peut, tout aussi naturellement, considérer la sphère comme la limite du corps qui serait terminé par une suite de fuseaux cylindriques circonscrits tous égaux entre eux et d'un rayon égal au sien, se réunissant tous à ses deux pôles, et passant par les côtés d'un poligone régulier quelconque, circonscrit à son équateur: et c'est même ainsi qu'on l'envisage dans la construction des aérostats. Mais il n'est pas à notre connaissance qu'on ait jamais tenté de parvenir par cette voie à la détermination de sa surface et de son volume.

Nous ne prétendons pas que cette nouvelle manière de parvenir au but ait sur le procédé vulgaire des avantages bien décidés; mais nous croyons devoir observer 1°, qu'il n'est jamais sans intérêt de voir comment, en géométrie, des procédés très-différens conduisent exactement au même résultat; 2°. que, si la méthode vulgaire a sur celle-ci l'avantage de ne décomposer la surface et le volume du corps dont la sphère est la limite qu'en parties terminées par des lignes droites et des arcs de cercles seulement, par une sorte de compensation, celle-ci ne décompose la surface et le volume de ce même corps qu'en parties égales, 3.° que cette nouvelle manière de procédé exige la détermination préalable de la surface et du volume de certains corps que l'on rencontre souvent dans les arts, surface et volume qui, comme nous le verrons, sont exactement quarrables, et cubables et qu'on peut être bien aise d'avoir appris, chemin faisant, à évaluer ; 4.° que la détermination de la surface et celle du volume de la sphère qui, suivant le procédé ordinaire, dépendent de deux théories distinctes, se rattachent, en suivant celui-ci, à une seule et unique théorie ; 5.° qu'enfin quand bien même la comparaison entre les deux procédés ne ferait qu'offrir aux commençans le sujet d'un utile exercice, ce serait encore un motif suffisant pour ne point négliger la considération de celui qui va faire le sujet de cet article.

Il nous aurait sans doute été facile de revêtir ce qu'on va lire des formes rigoureuses auxquelles M. LEGENDRE, à l'exemple d'Euclide, a cru devoir assujettir ses *Élémens de géométrie*; mais précisément parce que cela est facile, nous avons cru, dans la vue d'abréger, devoir nous en dispenser, en nous appuyant simplement sur la considération des limites; nous nous sommes même bornés à indiquer brièvement les points pour lesquels cette considération est nécessaire, en abandonnant au lecteur le soin d'un facile remplissage. On pourra, au surplus, suppléer à nos omissions par un raisonnement dont on trouve le modèle à la page 183 du V.e volume du présent recueil, et qui nous paraît le plus propre à employer en ces sortes de rencontres.

1. La détermination de la surface et celle du volume d'une sphère se réduisent évidemment à ces deux points ; 1.° déterminer l'aire du quadrilatère curviligne compris entre deux méridiens et deux parallèles quelconques à l'équateur ; 2.° déterminer le

volume de la pyramide sphérique qui, ayant ce quadrilatère pour base, a son sommet au centre de la sphère. On voit en effet, 1.° qu'en supposant que les parallèles dont il s'agit passent par les deux pôles, on obtiendra la surface du fuseau et le volume de l'onglet sphérique compris entre les plans de deux méridiens quelconques; d'où il sera facile de conclure la surface et le volume de la sphère entière; 2.° qu'en supposant, au contraire, que les deux méridiens entre lesquels le quadrilatère se trouve compris sont distans l'un de l'autre d'une circonférence entière, on obtiendra la surface de la zône sphérique comprise entre les plans de deux parallèles quelconques et le volume du corps terminé par cette zône et par deux surfaces coniques droites qui, ayant mêmes bases qu'elle, auraient leur sommet commun au centre de la sphère; d'où il sera facile de conclure la surface de la calotte et le volume du secteur sphérique, et par suite la surface et le volume de la sphère entière.

Il y a même un évident avantage à procéder ainsi; car, si l'on déterminait d'entrée la surface et le volume de la sphère entière, on serait obligé ensuite de faire de nouveaux frais pour parvenir à l'expression de la surface et du volume de ses diverses parties.

2. Considérons donc le quadrilatère compris entre deux méridiens et deux parallèles; les arcs de ces parallèles interceptés entre les méridiens étant des arcs semblables, on pourra leur circonscrire, à l'un et à l'autre, des portions de polygones réguliers d'un même nombre de côtés, dont les côtés homologues seront parallèles et distans du centre de la sphère d'une quantité égale à son rayon. On pourra donc concevoir que, par ces mêmes côtés homologues, on ait fait passer une suite de surfaces de cylindres droits circonscrits à la sphère, lesquelles se couperont consécutivement, suivant des courbes planes, situées dans les plans des méridiens conduits par les sommets homologues des deux polygones. En faisant donc abstraction des parties de ces surfaces cylindriques qui excèdent leurs

intersections consécutives, ainsi que de celles qui sont au-delà des plans des deux parallèles, on obtiendra une surface toute composée de portions de surfaces cylindriques de même rayon, et de même que les arcs des deux parallèles sont limites des portions de polygones circonscrits, la surface de notre quadrilatère curviligne sera la limite de cette surface composée de surfaces cylindriques.

En outre, si l'on imagine deux pyramides qui, ayant leur sommet commun au centre de la sphère, aient pour bases ces deux mêmes surfaces, celle qui aura pour base le quadrilatère faisant partie de la surface de la sphère, sera la limite de celle dont la base sera composée de parties cylindriques.

Notre problème se trouve donc réduit à évaluer la surface de cette dernière base; ainsi que le volume de la pyramide qui lui répond, et à examiner ensuite ce que deviennent l'une et l'autre à la limite. Mais cette surface se trouve composée de parties égales entre elles, en nombre pareil à celui des côtés des deux portions de polygones; et la pyramide qui lui répond peut aussi être décomposée en un pareil nombre de pyramides égales, ayant ces parties pour bases; de sorte que tout se réduit à déterminer l'aire de la base et le volume de l'une quelconque de ces pyramides et à les multiplier par le nombre des côtés des deux portions de polygones.

Chacune de ces pyramides partielles fait partie d'un onglet cylindrique d'un rayon égal à celui de la sphère, lequel se trouve borné, d'une part par la surface convexe du cylindre dont il fait lui-même partie, et par les plans de deux méridiens, c'est-à-dire, par deux plans passant par un même point de l'axe du cylindre, et ayant leur commune section perpendiculaire à cet axe, et conséquemment dirigée suivant un de ses diamètres. La pyramide partielle est détachée de l'onglet par deux plans passant par l'axe du cylindre, et coupant conséquemment sa surface convexe suivant deux parallèles à ce même axe.

3. Concevons donc que, sur l'axe d'un cylindre droit, on ait

pris un point arbitraire, par lequel on ait conduit un diamètre, qu'on ait fait passer deux plans par ce diamètre et deux autres plans par l'axe du cylindre ; ces quatre plans détacheront de ce corps une pyramide quadrangulaire à base convexe, et notre problème se trouvera reduit à déterminer l'aire de la base et le volume de cette pyramide.

Or si, par le même diamètre, on conduit un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, et donnant conséquemment une section circulaire, notre pyramide et sa base se trouveront la somme ou la différence de deux autres dans lesquelles ce plan circulaire serait un des quatre plans qui les limiteraient ; de sorte que le problème se réduit à déterminer l'aire de la base et le volume de la pyramide pour le cas seulement où un des deux plans qui ne passent pas par l'axe du cylindre est perpendiculaire à cet axe.

Soient (fig. 6) C le point pris arbitrairement sur l'axe du cylindre, AB le diamètre arbitraire mené par ce point, AFB celui des deux plans qui, passant par ce point, est perpendiculaire à l'axe du cylindre AF′B, l'autre plan passant par ce diamètre, et enfin CDD′ et CEE′ les deux plans passant par l'axe ; la pyramide dont il s'agit aura pour base le trapèze convexe DD′E′E et son sommet au point C, et il s'agira d'évaluer l'aire de la base et le volume de cette pyramide.

Concevons qu'ayant circonscrit à l'arc de cercle DE une portion de polygone régulier quelconque, on la considère comme le périmètre de la base d'une portion de surface prismique droite ayant même axe que le cylindre et terminée par sa rencontre avec les trois plans DCD′, D′C′E′, E′CE, et qu'on fasse de cette surface la base d'une pyramide ayant également son sommet en C ; on conçoit que la pyramide cylindrique sera la limite de la pyramide prismique, et que la base de la première sera la limite de la base de la seconde. Tout se réduit donc à asssigner l'aire de la base et le volume de la seconde, et d'examiner ce que deviennent l'une et l'autre à la limite.

Mais si, par l'axe du cylindre et par les sommets de la portion de polygone circonscrite à l'arc DE on conçoit des plans, ces plans diviseront la pyramide prismique en plusieurs pyramides ordinaires à bases trapèzes ; et il est clair que, pourvu qu'on sache assigner l'aire de la base et le volume de l'une quelconque d'entre elles, c'en sera assez pour pouvoir assigner l'aire de la base et le volume de la pyramide prismique totale qui en est la somme.

4. Soit donc le trapèze DD'E'E (fig. 7) la base de l'une de ces pyramides partielles ; de manière que DF soit un des côtés de la portion de polygone régulier dont il vient d'être question ; son milieu M sera son point de contact avec l'arc de cercle ; et cette base touchera la surface du cylindre suivant la droite MM' parallèle à DD' et EE'. Abaissons sur le diamètre AB les perpendiculaires DD'', EE'', MM'' ; abaissons aussi DG perpendiculaire entre les deux premières de ces droites ; menons M'M'' et le rayon CM ; menons enfin un autre rayon CF, perpendiculaire à AB ; la droite FF' parallèle à l'axe du cylindre ainsi que la droite CF'.

Les triangles rectangles CFF' et M''MM' sont semblables comme ayant les côtés parallèles chacun à chacun ; et les triangles rectangles CMM'' et EDG le sont également, comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun ; de sorte qu'on a les deux proportions

$$MM' : MM'' :: FF' : FC,$$

$$MM'' : DG :: MC : DE ;$$

multipliant ces proportions par ordre, en supprimant les facteurs communs, observant que $MC = FC$, et remplaçant DG par son égal $D''E''$, il viendra

$$MM' : D''E'' :: FF' : DE ;$$

d'où

DE×

$$DE \times MM' = FF' \times D''E'';$$

mais le premier de ces deux produits exprime l'aire du trapèze DD′E′E; donc le second l'exprime également; c'est-à-dire que ce trapèze est équivalent à un rectangle qui, ayant pour hauteur la plus grande largeur FF′ de la surface convexe de l'onglet cylindrique, aurait ponr base la projection de la hauteur DE de ce trapèze sur le diamètre AB.

Quant au volume de la pyramide qui, ayant ce trapèze pour base, à son sommet au point C, en remarquant que $CM = CF$ en est la hauteur, on en conclura que ce volume a pour expression l'aire du rectangle dont il vient d'être question, multipliée par le tiers du rayon du cylindre.

On conclura facilement de là (3) 1°. que la base de la pyramide prismique circonscrite à la pyramide cylindrique dont la base est le quadriletère DD′E′E (fig. 6) est équivalente à un rectangle qui, ayant pour hauteur la plus grande largeur FF′ de la surface convexe de l'onglet, aurait pour base la projection sur le diamètre AB de la portion de polygone régulier circonscrite à l'arc DE; 2°. que conséquemment le volume de cette même pyramide prismique est le produit de la multiplication de l'aire de ce même rectangle par le tiers du rayon du cylindre.

5. En passant donc de là à la limite, on reconnaîtra 1°. que le trapèze cylindrique DD′E′E lui-même est équivalent à un rectangle qui, ayant pour hauteur la plus grande largeur FF′ de la surface convexe de l'onglet cylindrique, aurait pour base la projection de l'arc DE sur le diamètre AB; 2°. que le volume de la pyramide cylindrique qui aurait ce trapèze pour base et son sommet en C est le produit de la multiplication de l'aire de ce même rectangle, par le tiers du rayon du cylindre.

Si l'on fait présentement attention à ce que nous avons dit ci-dessus (3), on verra que les mêmes choses doivent encore avoir lieu, lors même qu'aucune des deux faces planes de l'onglet n'est perpendiculaire à l'axe du cylindre ; pourvu que son arête rectiligne, intersection des plans de ces deux faces, continue d'être perpendiculaire à l'axe du cylindre, c'est-à-dire, d'en être un diamètre.

Il résulte de là 1°. que pour diviser la surface convexe d'un onglet cylindrique, dont l'arête rectiligne est un diamètre du cylindre, en parties qui aient entre elles des rapports donnés, il suffit de diviser son arête rectiligne en parties qui aient entre elles les mêmes rapports, et de conduire ensuite, par les points de division, des plans perpendiculaires à cette arête ; 2°. que pour diviser son volume en parties qui aient entre elles des rapports donnés, il faut, après avoir, par ce qui vient d'être dit, partagé sa surface convexe en parties ayant entre elles ces mêmes rapports, conduire des plans par l'axe et par les lignes de division. Il est digne de remarque que toutes ces opérations puissent être exécutées par une géométrie rigoureuse.

On voit aussi 1°. que la surface convexe totale de l'onglet cylindrique dont l'arête rectiligne est un diamètre du cylindre est équivalente à celle d'un rectangle qui, ayant pour base ce même diamètre, aurait pour hauteur la plus grande l'argeur de cette surface ; 2°. que le volume total de l'onglet est les deux tiers de celui du prisme triangulaire circonscrit (*). Cette surface convexe et ce volume sont donc rigoureusement quarrable et cubable ; et il est fort remarquable que ce soit la face convexe de l'onglet, dont le développement est terminé par des courbes transcendantes, qui jouisse de cette propriété à l'exclusion des faces planes qui sont terminées par des courbes algébriques fort simples.

(*) Bezout avait déjà déduit cette dernière proposition du calcul intégral ; mais seulement pour le cas où l'une des deux faces planes de l'onglet est perpendiculaire à l'axe du cylindre. (*Voyez son cours*)

6. Soient présentement, sur un hémisphère APB (fig. 8), deux petits cercles parallèles à celui qui sert de base à l'hémisphère, et concevons qu'ils soient coupés tous trois en M, M′, M″ par un même méridien. Par ces points d'intersection menons des tangentes à ces trois cercles, prenons arbitrairement, sur la première MD=ME, par l'axe C″P et par les points D et E, faisons passer des plans qui détermineront sur les deux autres tangentes des parties M′D′=M′E′ et M″D″=M″E″. Les trois droites DE, D′E′, D″E″ appartiendront ainsi à la surface d'un même cylindre circonscrit à la sphère, et la portion DD′E′E de cette surface sera (5) équivalente à un rectangle ayant pour hauteur D″E″ et pour base la distance CC′ entre les centres des deux petits cercles; et cela soit que ces petits cercles appartiennent à un même hémisphère ou qu'ils se trouvent situés dans les deux hémisphères opposés; et, quant à la pyramide qui, ayant cette même surface pour base, aura son sommet au centre de l'hémisphère, son volume aura pour expression le produit de la multiplication de l'aire du rectangle dont il vient d'être question par le tiers du rayon du cylindre ou, ce qui revient au même, de celui de la sphère.

Si nous revenons présentement à notre quadrilatère sphérique considéré ci-dessus (2) et compris entre deux méridiens et deux parallèles quelconques, nous verrons que, d'après ce qui précède, l'assemblage de portions de surfaces cylindrique dont il est la limite est équivalent à un rectangle qui ayant pour hauteur la longueur de la portion de polygone régulier circonscrite à l'équateur, de telle sorte que ses côtés soient parallèles à ceux des portions de polygones réguliers circonscrites aux deux arcs de parallèles qui terminent le quadrilatère, et pour hauteur la distance entre les centres de ces deux parallèles; et que le volume de la pyramide qui, ayant cet assemblage de portion de surfaces cylindriques pour base, à son sommet au centre de la sphère, est le produit de l'aire de ce même rectangle par le tiers du rayon de cette sphère.

7. En passant donc de là à la limite, on reconnaîtra 1°. que,

pour obtenir l'aire du quadrilatère sphérique compris entre deux méridiens et deux parallèles quelconques, il faut multiplier l'arc de l'équateur compris entre les deux méridiens par la distance entre les centres des deux parallèles; 2°. que, pour obtenir le volume de la pyramide sphérique qui, ayant ce même quadrilatère pour base, a son sommet au centre de la sphère, il faut multiplier l'aire de sa base par le tiers du rayon de la sphère,

Et de là on conclura sans difficulté 1°. que l'aire du fuseau sphérique est le produit de la multiplication de l'arc de l'équateur qu'il intercepte par le diamètre de la sphère, 2°. que l'aire d'une zône sphérique à bases parallèles est le produit de la multiplication de la circonférence d'un grand cercle par la distance entre les centres de ses deux bases, 3°. que l'aire d'une calotte sphérique est le produit de la multiplication de la circonférence d'un grand cercle par la flèche de cette calotte; 4°. qu'enfin l'aire de la surface sphérique entière est le produit de la circonférence d'un grand cercle par son diamètre.

Et de là résultera encore que le volume soit d'un onglet sphérique, soit du corps terminé par une zône et par deux surfaces coniques de mêmes bases qu'elle, ayant leur sommet commun au centre de la sphère, soit d'un secteur sphérique, soit enfin de la sphère entière, est le produit de la multiplication de l'aire du fuseau, de la zône, de la calotte ou la surface sphérique entière qui le termine par le tiers du rayon de la sphère.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des trois problèmes d'analise transcendante énoncés à la page 247 du présent volume;

Par M. Querret, chef d'institution, à St-Malo.

Problème. *Assigner la somme finie de chacune des trois suites infinies que voici :*

$$1^\circ.\ \frac{a\mathrm{Cos}.x}{1}-\frac{a^3\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{a^5\mathrm{Cos}.5x}{5}-\frac{a^7\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots.$$

$$2^\circ.\ \mathrm{Cos}.x+\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{\mathrm{Cos}.5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots.$$

$$3^\circ.\ \frac{\mathrm{Cos}.x\mathrm{Cos}.y}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.2x\mathrm{Cos}.2y}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.3x\mathrm{Cos}.3y}{3}-\frac{\mathrm{Cos}.4x\mathrm{Cos}4y}{4}+\ldots.$$

Solution. Nous allons déduire la sommation de chacune de ces trois suites du théorème que nous avons établi à la page 107 de ce volume, et que nous rappelons en ces termes:

Si l'on représente par $\mathrm{f}(a)$ la somme de la suite infinie

$$A_0+A_1a+A_2a^2+A_3a^3+A_4a^4+\ldots\ ;$$

dans laquelle A_0, A_1, A_2, ... sont supposés représenter des coefficiens numériques; les sommes des deux séries

$$A_0+A_1a\mathrm{Cos}.x+A_2a^2\mathrm{Cos}.2x+A_3a^3\mathrm{Cos}.3x+A_4a^4\mathrm{Cos}.4x+\ldots$$

$$A_0+A_1a\mathrm{Sin}.x+A_2a^2\mathrm{Sin}.2x+A_3a^3\mathrm{Sin}.3x+A_4a^4\mathrm{Sin}.4x+\ldots$$

seront respectivement

$$\frac{\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)]+\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}\,x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)]}{2},$$

et

$$\frac{\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)]-\mathrm{f}[a(\mathrm{Cos}\,x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)]}{2\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, on a

$$\frac{a}{1}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\frac{a^9}{9}-\ldots\ldots=\mathrm{Arc}\,(\mathrm{Tang}.=a)\,,$$

donc 1.° la somme de la série

$$\frac{a\mathrm{Cos}.x}{1}-\frac{a^3\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{a^5\mathrm{Cos}.5x}{5}-\frac{a^7\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots$$

sera

$$\frac{\mathrm{Arc}[\mathrm{Tang}.=a(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)]+\mathrm{Arc}[\mathrm{Tang}=a(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin})]}{2}$$

Soient M le premier de ces arcs et N le second, on aura, pour la somme de la série $\frac{M+N}{2}$, et de plus

$$\mathrm{Tang}.M=a(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x),$$

$$\mathrm{Tang}.N=a(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x);$$

d'où

$$\text{Tang}.M+\text{Tang}.N=2a\text{Cos}.x\,,$$

$$\text{Tang}.M\text{Tang}.N=a^2\,;$$

d'où encore

$$1-\text{Tang}.M\text{Tang}.N=1-a^2\,;$$

donc

$$\text{Tang}.(M+N)=\frac{\text{Tang}.M+\text{Tang}.N}{1-\text{Tang}.M\text{Tang}.N}=\frac{2a\text{Cos}.x}{1-a^2}\,;$$

donc

$$M+N=\text{Arc}\left(\text{Tang}.=\frac{2a\text{Cos}.x}{1-a^2}\right)\,;$$

donc enfin

$$\frac{M+N}{2}=\frac{1}{2}\,\text{Arc}\left(\text{Tang}.=\frac{2a\text{Cos}.x}{1-a^2}\right)$$

qui sera conséquemment la somme finie demandée de la première des trois séries infinies proposées.

Si l'on suppose $a=1$, on a

$$\frac{M+N}{2}=\frac{1}{2}\,\text{Arc}(\text{Tang}.=\infty)=\frac{1}{4}\varpi\,;$$

donc, comme on le savait déjà,

$$\frac{\varpi}{4}=\text{Cos}.x-\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{\text{Cos}.5x}{5}-\frac{\text{Cos}.7x}{7}+\ldots\ldots$$

quel que soit x.

En second lieu

$$a+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{a^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{a^7}{7}+\ldots.=\text{Arc}(\text{Sin.}=a);$$

ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, en intégrant par les séries la fonction différentielle

$$\frac{da}{\sqrt{1-a^2}}=\text{d.Arc}(\text{Sin.}=a);$$

donc, la somme de la série

$$\text{Cos.}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\text{Cos.}5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\text{Cos.}7x}{7}+\ldots.$$

sera

$$\frac{\text{Arc}(\text{Sin.}=\text{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x)+\text{Arc}(\text{Sin.}=\text{Cos.}x-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x)}{2}.$$

Soient P le premier de ces arcs et Q le second; la somme cherchée sera donc

$$\frac{P+Q}{2},$$

et l'on aura

$$\text{Sin.}P=\text{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x,$$

$$\text{Sin.}Q=\text{Cos.}x-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x,$$

d'où

$$\text{Cos.}P=\sqrt{-2\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x\text{Cos.}x},$$

$$\text{Cos.}Q=\sqrt{+2\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x\text{Cos.}x},$$

donc

Cos.P

$$\text{Cos.}P\text{Cos.}Q=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x\,;$$

on a d'ailleurs

$$\text{Sin.}P\text{Sin.}Q=1\,;$$

donc

$$\text{Cos.}(P+Q)=\text{Cos.}P\text{Cos.}Q-\text{Sin.}P\text{Sin.}Q=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1\,;$$

donc aussi

$$P+Q=\text{Arc}(\text{Cos.}=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1),$$

et par suite

$$\frac{P+Q}{2}=\frac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos.}=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1)\,;$$

qui est conséquemment la somme finie demandée de la seconde des trois séries infinies proposées.

Si l'on suppose $x=0$, on a

$$\frac{P+Q}{2}=\frac{1}{2}\text{Arc.}(\text{Cos.}=-1)=\tfrac{1}{2}\varpi\,;$$

donc, comme on le savait déjà,

$$\frac{1}{2}\varpi=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9}+\ldots;$$

Quant à la troisième série, on peut la mettre sous cette forme

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Cos.}(x+y)}{1}-\dfrac{\text{Cos.}2(x+y)}{2}+\dfrac{\text{Cos.}3(x+y)}{3}-\dfrac{\text{Cos.}4(x+y)}{4}+\ldots\\[2ex] +\dfrac{\text{Cos.}(x-y)}{1}-\dfrac{\text{Cos.}2(x-y)}{2}+\dfrac{\text{Cos.}3(x-y)}{3}-\dfrac{\text{Cos.}4(x-y)}{4}+\ldots\end{array}\right\}\,;$$

Or on a, (pag, 114 du présent volume)

$$\frac{\mathrm{Cos}.x}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.2x}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.3x}{3}-\frac{\mathrm{Cos}.4x}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.2+\mathrm{Log}.\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}x\,;$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{Cos}.x}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.2x}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.3x}{3}-\frac{\mathrm{Cos}.4x}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.2\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}x\,;$$

en changeant donc, tour à tour x en $x+y$ et $x-y$, il viendra

$$\frac{\mathrm{Cos}.(x+y)}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.2(x+y)}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.3(x+y)}{3}-\frac{\mathrm{Cos}.4(x+y)}{4}+\ldots=\mathrm{Log}.2\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)$$

$$\frac{\mathrm{Cos}.(x-y)}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.2(x-y)}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.3(x-y)}{3}-\frac{\mathrm{Cos}.4(x-y)}{4}+\ldots=\mathrm{Log}.2\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)$$

donc, en prenant la demi-somme,

$$\frac{\mathrm{Cos}.x\mathrm{Cos}.y}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.2x\mathrm{Cos}.2y}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.3x\mathrm{Cos}.3y}{3}$$

$$-\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}\{\mathrm{Log}.2\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)+\mathrm{Log}.2\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)\}$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{Cos}.x\mathrm{Cos}.y}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.2x\mathrm{Cos}.2y}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.3x\mathrm{Cos}.3y}{3}-\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.4\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)$$

mais

$$2\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)=\mathrm{Cos}.x+\mathrm{Cos}.y$$

d'où

$$4\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)=2(\mathrm{Cos}.x+\mathrm{Cos}.y)$$

donc enfin, la somme finie de la troisième des suites infinies proposées est

$$\tfrac{1}{2}\text{Log.}(2\text{Cos.}x+2\text{Cos.}y).$$

Si, au lieu de prendre la demi-somme des deux séries ci-dessus, on prend leur demi-différence, on aura

$$\frac{\text{Sin.}x\text{Sin.}y}{1}-\frac{\text{Sin.}2x\text{Sin.}2y}{2}+\frac{\text{Sin.}3x\text{Sin.}3y}{3}-\ldots$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\text{Log.}2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)-\text{Log.}2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\};$$

ou encore

$$\frac{\text{Sin.}x\text{Sin.}y}{1}-\frac{\text{Sin.}2x\text{Sin.}2y}{2}+\frac{\text{Sin.}3x\text{Sin}\,3y}{3}-\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Log.}\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)}.$$

Or,

$$\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)}=\frac{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)}{2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(x+y)}=\frac{\text{Cos.}x+\text{Cos.}y}{1+\text{Cos.}(x+y)};$$

donc enfin

$$\frac{\text{Sin.}x\text{Sin.}y}{1}-\frac{2\text{Sin.}2x\text{Sin.}2y}{2}+\frac{\text{Sin.}3x\text{Sin.}3y}{3}-\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Log.}\frac{\text{Cos.}x+\text{Cos.}y}{1+\text{Cos.}(x+y)}.$$

Si, dans ce résultat et dans le précédent, on fait $y=x$, ils deviendront

$$\frac{\text{Cos.}^2x}{1}-\frac{\text{Cos.}^22x}{2}+\frac{\text{Cos.}^23x}{3}-\frac{\text{Cos.}^24x}{4}+\ldots=\frac{1}{2}\text{Log.}4\text{Cos.}x,$$

$$\frac{\text{Sin.}^2x}{1}-\frac{\text{Sin.}^22x}{2}+\frac{\text{Cos.}^23x}{3}-\frac{\text{Cos.}^24x}{4}+\ldots=\frac{1}{2}\text{Log.}\frac{2\text{Cos.}x}{1+\text{Cos.}2x}.$$

En résumé, si nous faisons abstraction des divers résultats particuliers auxquels nous sommes parvenus, et qui n'avaient pas été demandés, nous aurons

$$1^{\circ}.\ \tfrac{1}{2}\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{2a\text{Cos.}y}{1-a^2}\right)=\frac{a\text{Cos.}x}{1}-\frac{a^3\text{Cos}\,3x}{3}+\frac{a^5\text{Cos}\,5x}{5}-\ldots\ldots;$$

$$2^{\circ}.\ \tfrac{1}{2}\text{Arc.}(\text{Sin.}=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1)=\text{Cos}\,x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos}\,5x}{5}+\ldots;$$

$$3.^{\circ}\ \tfrac{1}{2}\text{Log.}2(\text{Cos.}x+\text{Cos.}y)=\frac{\text{Cos.}x\text{Cos.}y}{1}-\frac{\text{Cos.}2x\text{Cos.}2y}{2}+\frac{\text{Cos.}3x\text{Cos.}3y}{3}-\ldots$$

résultats qu'au surplus on peut présentement vérifier d'un grand nombre de manières diverses.

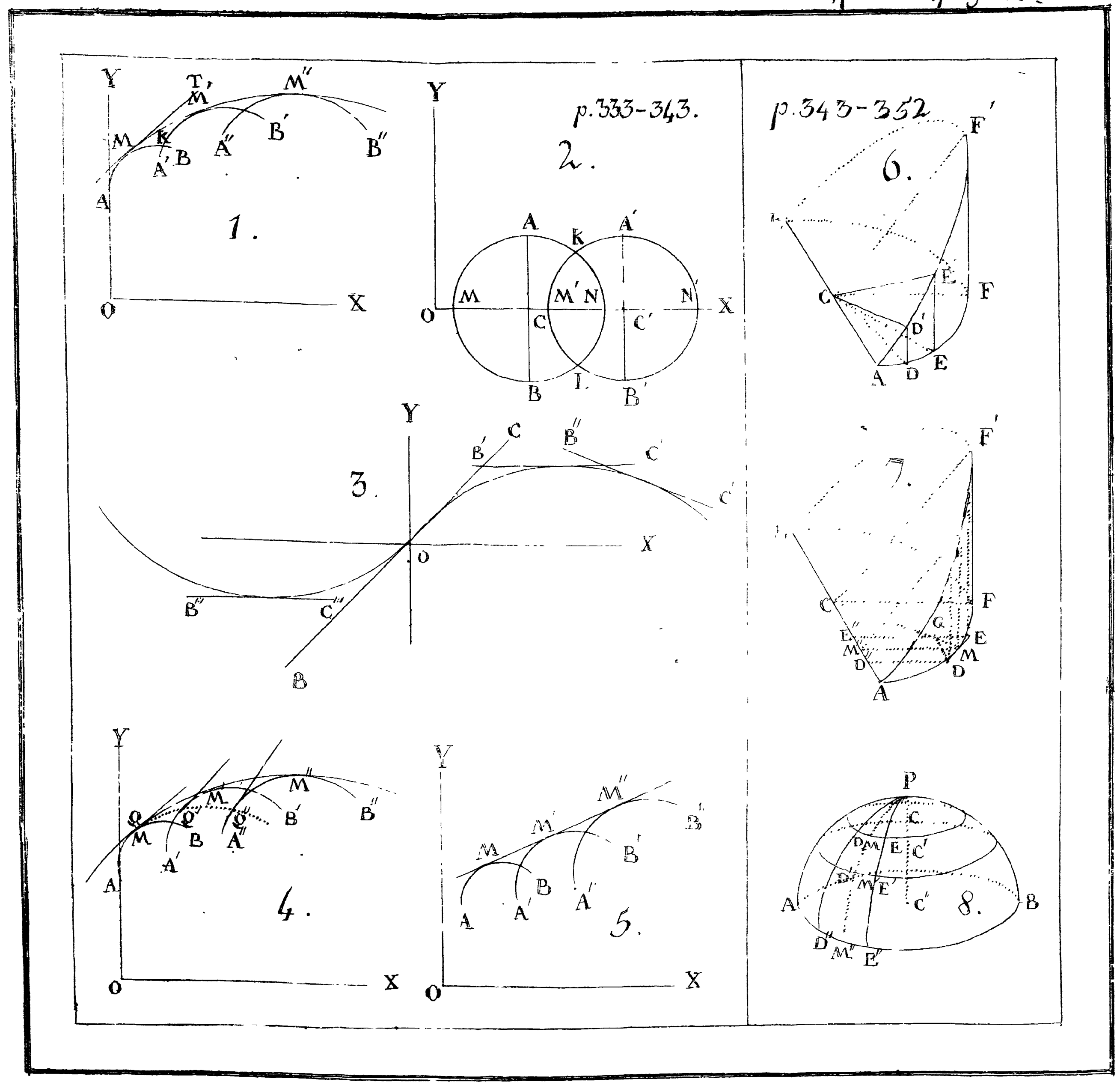
QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

II. DÉTERMINER la surface convexe et le volume de l'onglet conique détaché d'un cône droit du côté de sa base par un plan passant par le centre de cette base.

I. Soit menée, sur un plan, une ligne droite d'une longueur égale à celle de la moitié de l'un des méridiens d'une sphère, pris d'un pôle à l'autre; et concevons que, par chacun des points de cette droite on lui élève une perpendiculaire égale en longueur au parallèle passant par le point correspondant du demi-méridien; de manière que toutes ces perpendiculaires aient leurs milieux sur la première droite. Les extrémités de ces perpendiculaires se trouveront sur une certaine courbe fermée, ayant évidemment un centre et deux diamètres principaux.

On propose de déterminer la nature de cette courbe, et d'en évaluer la surface ?



J. D. G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur la sommation d'une classe très-générale de séries ;

Par M. QUERRET, chef d'institution à St-Malo.

1. PAR les premiers principes de la théorie des fonctions circulaires, on a

$$2\text{Cos.}t\text{Cos.}u=\text{Cos.}(t+u)+\text{Cos.}(t-u)\ ;$$

d'où, en multipliant par $2\text{Cos.}v$,

$$4\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v=2\text{Cos.}(t+u)\text{Cos.}v+2\text{Cos.}(t-u)\text{Cos.}v\ ;$$

Mais si, dans la première équation, on change successivement t en $t+u$ et en $t-u$ et u en v, il viendra

$$2\text{Cos.}(t+u)\text{Cos}\,v=\text{Cos.}(t+u+v)+\text{Cos.}(t+u-v)\ ;$$

$$2\text{Cos.}(t-u)\text{Cos.}v=\text{Cos.}(t-u+v)+\text{Cos.}(t-u-v)\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans la seconde équation,

$$\begin{aligned}4\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v=\text{Cos.}(t+u+v)&+\text{Cos.}(t+u-v)\\&+\text{Cos.}(t-u+v)\\&+\text{Cos.}(t-u-v)\end{aligned}$$

En multipliant de nouveau celle-ci par $2\text{Cos}.x$, il viendra

$$8\text{Cos}.t\text{Cos}.u\text{Cos}.v\text{Cos}.x=2\text{Cos}.(t+u+v)\text{Cos}.x+2\text{Cos}.(t+u-v)\text{Cos}.x\,;$$
$$+2\text{Cos}.(t-u+v)\text{Cos}.x$$
$$+2\text{Cos}.(t-u-v)\text{Cos}.x$$

mais, par la première équation,

$$2\text{Cos}.(t+u+v)\text{Cos}\,x=\text{Cos}.(t+u+v+x)+\text{Cos}.(t+u+v-x)\;,$$

$$2\text{Cos}.(t+u-v)\text{Cos}.x=\text{Cos}.(t+u-v+x)+\text{Cos}.(t+u-v-x)\;,$$

$$2\text{Cos}.(t-u+v)\text{Cos}.x=\text{Cos}.(t-u+v+x)+\text{Cos}.(t-u+v-x)\;,$$

$$2\text{Cos}.(t-u-v)\text{Cos}.x=\text{Cos}.(t-u-v+x)+\text{Cos}.(t-u-v-x)\;;$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$8\text{Cos}.t\text{Cos}.u\text{Cos}.v\text{Cos}.x=\text{Cos}.(t+u+v+x)+\text{Cos}.(t+u+v-x)+\text{Cos}.(t+u-v-x)\,;$$
$$+\text{Cos}.(t+u-v+x)+\text{Cos}.(t-u+v-x)$$
$$+\text{Cos}.(t-u+v+x)+\text{Cos}.(t-u-v+x)$$
$$+\text{Cos}.(t-u-v-x)$$

et on pourrait ainsi pousser le procédé si loin qu'on voudrait.

2. Si présentement on fait s égal à $t+u$ dans la première, à $t+u+v$ dans la seconde, à $t+u+v+x$ dans la troisième, et qu'en outre on fasse $x=s$ dans l'équation $\text{Cos}.t=\text{Cos}.t$, on aura

Pour un arc, $\quad \text{Cos}.t=\text{Cos}\,s$,

Pour deux, $\quad 2\text{Cos}.t\text{Cos}.u=\text{Cos}.s+\frac{1}{2}\text{Cos}.(s-2t)$,
$$+\tfrac{1}{2}\text{Cos}.(s-2u)$$

Pour trois ; $$4\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v=\text{Cos.}s+\text{Cos.}(s-2t),$$
$$+\text{Cos.}(s-2u)$$
$$+\text{Cos.}(s-2v)$$

Pour quatre, $$8\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v\text{Cos.}x=\text{Cos.}s+\text{Cos.}(s-2t)+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(t+u)];$$
$$+\text{Cos.}(s-2u)+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(t+v)]$$
$$+\text{Cos.}(s-2v)+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(u+v)]$$
$$+\text{Cos.}(s-2x)+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(t+x)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(u+x)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(v+x)]$$

et ainsi de suite.

3. Si, dans les résultats auxquels nous venons de parvenir, on change respectivement t, u, v, x en $\frac{1}{2}\varpi-t$, $\frac{1}{2}\varpi-u$, $\frac{1}{2}\varpi-v$, $\frac{1}{2}-x$, il viendra

Pour un arc, $$\text{Sin.}t=+\text{Sin.}s;$$

Pour deux, $$2\text{Sin.}t\text{Sin.}u=-\text{Cos.}s+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}(s-2t),$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{Cos.}(s-2u)$$

Pour trois, $$4\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v=-\text{Sin.}s+\text{Sin.}(s-2t);$$
$$+\text{Sin.}(s-2u)$$
$$+\text{Sin.}(s-2v)$$

Pour quatre, $8\,\text{Sin.}t\,\text{Sin.}u\,\text{Sin.}v\,\text{Sin.}x = +\text{Cos.}s - \text{Cos.}(s-2t) + \frac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(t+u)]$,

$$\begin{aligned} & - \text{Cos.}(s-2u) + \tfrac{1}{2}\text{Cos}\,[s-2(t+v)] \\ & - \text{Cos.}(s-2v) + \tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(u+v)] \\ & - \text{Cos.}(s-2x) + \tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(t+x)] \\ & + \tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(u+x)] \\ & + \tfrac{1}{2}\text{Cos.}[s-2(v+x)] \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

4. Pour écrire ces formules sous une forme plus briève et pouvoir en généraliser l'expression, adoptons les notations que voici : t, u, v, x, ... étant des quantités en nombre quelconque, et F la caractéristique d'une fonction quelconque ; nous poserons

$$\Sigma F(t) = F(t) + F(u) + F(v) + F(x) + \ldots\ldots$$
$$\Sigma F(t,u) = F(t,u) + F(t,v) + F(u,v) + F(t,x) + F(u,x) + F(v,x) + \ldots\ldots$$
$$\Sigma F(t,u,v) = F(t,u,v) + F(t,u,x) + F(t,v,x) + F(u,v,x) + \ldots\ldots$$

. . . .

On voit d'après cela que, si les quantités t, u, v, x, ..., sont au nombre de n,

$\Sigma F(t)$	aura	$\frac{n}{1}$	termes ;
$\Sigma F(t,u)$	aura	$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$	termes,
$\Sigma F(t,u,v)$	aura	$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$	termes,
$\Sigma F(t,u,v,x)$	aura	$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}$	termes,

. . . .

On voit assez, d'après cela, ce que signifieront

$$\Sigma\,\text{Sin.}(s-2t)\,,\ \Sigma\,\text{Sin.}[s-2(t+u)]\,,\ \Sigma\,\text{Sin.}[s-2(t+u+v)]\,,\ldots\ldots$$

$$\Sigma\text{Cos.}(s-2t)\,,\ \Sigma\text{Cos.}[s-2(t+u)]\,,\ \Sigma\text{Cos.}[s-2(t+u+v)]\,,\ldots\ldots$$

et toutes les autres expressions analogues.

5. Au moyen de ces notations, les résultats auxquels nous sommes parvenus ci-dessus (2, 3) pourront être écrits comme il suit :

Pour un arc, $\text{Cos.}t=\text{Cos.}s$,

Pour deux, $2\text{Cos.}t\text{Cos.}u=\text{Cos.}s+\frac{1}{2}\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$,

Pour trois, $4\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v=\text{Cos.}s+\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$;

Pour quatre, $8\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v\text{Cos.}x=\text{Cos.}s+\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$

$$+\tfrac{1}{2}\Sigma\text{Cos.}[s-2(t+u)]\,.$$

Pour un arc, $\text{Sin.}t=+\text{Sin.}s$;

Pour deux, $2\text{Sin.}t\text{Sin.}u=-\text{Cos.}s+\frac{1}{2}\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$;

Pour trois, $4\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v=-\text{Sin.}s+\Sigma\text{Sin.}[s-2t]$;

Pour quatre, $8\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v\text{Sin.}x=+\text{Cos.}s-\Sigma\text{Cos.}[s-2t]$

$$+\tfrac{1}{2}\Sigma\text{Cos.}[s-2(t+u)]$$

6. La loi de ces divers résultats devenant ainsi manifeste, nous pourrons, en la généralisant, parvenir aux trois lemmes que voici :

t, u, v, x, ... étant des arcs en nombre quelconque n; et leur somme s,

LEMME I.

On a, quel que soit n;

$$2^{n-1}\mathrm{Cos}.t\mathrm{Cos}.u\mathrm{Cos}.v\mathrm{Cos}.x\ldots\ldots=\mathrm{Cos}.s+\Sigma\mathrm{Cos}.[s-2t]$$

$$+\Sigma\mathrm{Cos}.[s-2(t+u)]+\Sigma\mathrm{Cos}\,[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots$$

la suite devant être poussée à autant de termes qu'on pourra le faire, sans que le nombre des arcs t, u, v, ..., dont le double de la somme se trouve retranché à s, excède la moitié du nombre n, et le dernier terme devant être réduit à sa moitié, lorsque n est un nombre pair.

LEMME II.

Lorsque n est un nombre pair, on a

$$\pm 2^{n-1}\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.u\mathrm{Sin}.v\mathrm{Sin}.x\ldots\ldots=\mathrm{Cos}.s-\Sigma\mathrm{Cos}\,[s-2t]$$

$$+\Sigma\mathrm{Cos}.[s-2(t+u)]-\Sigma\mathrm{Cos}.[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant que n est de la forme $4i$ ou de la forme $4i+2$, la série devant s'arrêter au terme dans lequel le nombre des arcs t, u, v, ..., dont le double de la somme est retranché à s, sera précisément égal à la moitié de n, et ce dernier terme devant être réduit à sa moitié seulement.

LEMME III.

Lorsque n est un nombre impair, on a

$$\pm 2^{n-1}\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.u\mathrm{Sin}.v\mathrm{Sin}.x\ldots\ldots=\mathrm{Sin}.s-\Sigma\mathrm{Sin}.[s-2t]$$

$$+\Sigma\mathrm{Sin}.[s-2(t+u)]-\Sigma\mathrm{Sin}.[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris suivant que n est de la forme $4i+1$ ou de la forme $4i+3$, et la série devant être poussée à autant de termes qu'on pourra le faire sans que le nombre des arcs t, u, v,....., dont le double de la somme se trouve retranché à s, excède la moitié du nombre n.

7. Si présentement nous supposons tous les arcs t, u, v,...... égaux entre eux et au premier, ce qui donnera $s=nt$, nous déduirons, comme corollaires de ces trois lemmes, les formules connues que voici:

Corollaire I.

On a, quel que soit le nombre entier positif n;

$$2^{n-1}.\text{Cos.}^n t = \text{Cos.}nt + \frac{n}{1}\text{Cos.}(n-2)t + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\text{Cos.}(n-4)t$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\text{Cos.}(n-6)t+\ldots\ldots$$

série qu'il faudra pousser aussi loin qu'on pourra le faire, sans admettre d'arcs négatifs, et où il ne faudra prendre seulement que la moitié du dernier terme, si n est un nombre pair.

Corollaire II.

Lorsque n est un nombre pair, on a

$$\pm 2^{n-1}.\text{Sin.}^n t = \text{Cos.}nt - \frac{n}{1}\text{Cos.}(n-2)t + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\text{Cos.}(n-4)t$$

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\text{Cos.}(n-6)t+\ldots\ldots$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant que n sera de la forme $4i$ ou de la forme $4i+2$, et la série devant être poussée aussi loin qu'on pourra le faire sans y admettre d'arcs négatifs, en réduisant son dernier terme à sa moitié seulement.

Corollaire III.

Lorsque n est un nombre impair, on a

$$\pm 2^{n-1}.\text{Sin.}^n x = \text{Sin.}nx - \frac{n}{1}\,\text{Sin.}(n-2)x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\text{Sin.}(n-4)x$$

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,\text{Sin.}(n-4)x + \ldots\ldots$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant que n sera de la forme $4i+1$ ou de la forme $4i+3$, et la série devant être poussée aussi loin qu'on pourra le faire sans y admettre d'arcs négatifs.

8. Soit

$$\text{f}[a] = A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + A_4 a^4 + \ldots\ldots$$

une série infinie que l'on sache sommer, et dans laquelle A_1, A_2, A_3, ... sont des coefficiens numériques; on aura les deux remarques suivantes :

Remarque I.

La somme finie de la série infinie

$$A_1 a\text{Cos.}t + A_2 a^2\text{Cos.}2t + A_3 a^3\text{Cos.}3t + A_4 a^4\text{Cos.}4t + \ldots\ldots$$

est

$$\frac{\text{f}[a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)] + \text{f}[a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]}{2}.$$

Remarque II.

La somme de la série infinie

$A_1 a$

$$A_1 a\,\text{Sin.}t+A_2 a^2\text{Sin.}2t+A_3 a^3\text{Sin.}3t+A_4 a^4\text{Sin.}4t+\ldots\ldots$$

est

$$\frac{\text{f}[a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]-\text{f}[a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]}{2\sqrt{-1}}.$$

En effet, 1.° suivant la définition de $\text{f}[a]$, les sommes des deux séries

$$A_1 a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)+A_2 a^2(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)^2+A_3 a^3(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)^3+\ldots;$$

$$A_1 a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)+A_2 a^2(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)^2+A_3 a^3(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)^3+\ldots$$

ou de leurs équivalentes

$$A_1 a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)+A_2 a^2(\text{Cos.}2t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}2t)+A_3 a^3(\text{Cos.}3t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}3t)+\ldots;$$

$$A_1 a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)+A_2 a^2(\text{Cos.}2t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}2t)+A_3 a^3(\text{Cos.}3t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}3t)+\ldots$$

sont respectivement

$$\text{f}[a\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]\ ,\qquad \text{f}[a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]\ ,$$

donc la demi-somme de ces deux séries et le quotient de leur demi-différence par $\sqrt{-1}$, lesquelles ne sont autre chose que les deux séries proposées, doivent avoir respectivement pour sommes la demi-somme de leurs sommes respectives et le quotient de la demi-différence de ces mêmes sommes par $\sqrt{-1}$, ainsi que nous l'avons annoncé.

9. Soient respectivement $\text{F}[t]$, $\text{F}'[t]$ les fonctions auxquelles se réduisent

$$\text{f}[a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]+\text{f}[a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]\ ,$$

$$\frac{\text{f}[a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\ t)]-\text{f}[a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)]}{\sqrt{-1}}\ ;$$

lorsqu'on les a débarrassées des imaginaires qu'elles contiennent, au aura les théorèmes suivans :

THÉORÈME I.

La somme de la série infinie

$$A_1 a\,\text{Cos.}t\,\text{Cos.}u\,\text{Cos.}v\ldots\ldots + A_2 a^2\,\text{Cos.}2t\,\text{Cos.}2u\,\text{Cos.}2v\ldots\ldots$$

$$+ A_3 a^3\,\text{Cos.}3t\,\text{Cos.}3u\,\text{Cos.}3v\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$$

dans laquelle on suppose les arcs t, u, v,...... au nombre de n et leur somme s, a pour expression finie

$$\frac{1}{2^n}\Big\{\text{F}[s]+\Sigma\text{F}[s-2t]+\Sigma\text{F}[s-2(t+u)]+\Sigma\text{F}[s-2(t+u+v)+\ldots\ldots\Big\}$$

en observant, par rapport à la limitation de cette série, ce qui a déjà été dit (*Lemme I*).

THÉORÈME II.

Si n est un nombre pair, la somme de la série infinie

$$A_1 a\,\text{Sin.}t\,\text{Sin.}u\,\text{Sin.}v\ldots\ldots\ldots + A_2 a^2\,\text{Sin.}2t\,\text{Sin.}2u\,\text{Sin}\,2v\ldots\ldots$$

$$+ A_3 a^3\,\text{Sin.}3t\,\text{Sin.}3u\,\text{Sin.}3v\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\pm\frac{1}{2^n}\Big\{\text{F}[s]-\Sigma\text{F}[s-2t]+\Sigma\text{F}[s-2(t+u)]-\Sigma\text{F}[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots\Big\};$$

en observant, pour le signe et la limitation de cette série, ce qui a été prescrit (*Lemme II*).

THÉORÈME III.

Si n est un nombre impair, la somme de la série infinie

$$A_1a\,\mathrm{Sin}.t\,\mathrm{Sin}.u\,\mathrm{Sin}\,v\ldots\ldots\ldots+A_2a^2\mathrm{Sin}.2t\,\mathrm{Sin}.2u\,\mathrm{Sin}.2v\ldots\ldots$$

$$+A_3a^3\mathrm{Sin}.3t\,\mathrm{Sin}.3u\,\mathrm{Sin}.3v\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\pm\frac{1}{2^n}\Big\{F'[s]-\Sigma F'[s-2t]+\Sigma F'[s-2(t+u)]-\Sigma F'[s-2(t+u+v)]+\ldots\ldots\Big\};$$

en observant, pour le signe et la limitation de cette série, ce qui a été dit (*Lemme III*).

Il nous suffira de démontrer le premier de ces deux théorèmes pour faire voir de quelle manière doivent se démontrer les deux qui le suivent.

Par le *Lemme I*, on a successivement

$$2^{n-1}\mathrm{Cos}.t\,\mathrm{Cos}.u\,\mathrm{Cos}.v\ldots\ldots=\mathrm{Cos}.s+\Sigma\mathrm{Cos}.[s-2t]+\Sigma\mathrm{Cos}.[s-2(t+u)]+\ldots$$

$$2^{n-1}\mathrm{Cos}.2t\,\mathrm{Cos}.2u\,\mathrm{Cos}.2v\ldots=\mathrm{Cos}.2s+\Sigma\mathrm{Cos}.2[s-2t]+\Sigma\mathrm{Cos}.2[s-2(t+u)]+\ldots$$

$$2^{n-1}\mathrm{Cos}.3t\,\mathrm{Cos}.3u\,\mathrm{Cos}.3v\ldots=\mathrm{Cos}.3s+\Sigma\mathrm{Cos}.3[s-2t]+\Sigma\mathrm{Cos}.3[s-2(t+u)]+\ldots$$

. . . .

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $2A_1a$, $2A_2a^2$, $2A_3a^3$, ..., la somme des premiers membres sera la suite infinie proposée multipliée par 2^n; quant à la somme des seconds membres, elle sera composée de cette suite de séries infinies que voici :

$$2(A_1 a\,\mathrm{Cos}.s + A_2 a^2 \mathrm{Cos}\,2s + A_3 a^3 \mathrm{Cos}.3s + \ldots\ldots)$$
$$+2\Sigma\{A_1 a\,\mathrm{Cos}.[s-2t] + A_2 a^2\mathrm{Cos}.2[s-2t] + A_3 a^3 \mathrm{Cos}.3[s-2t] + \ldots\}$$
$$+2\Sigma\{A_1 a\,\mathrm{Cos}[s-2(t+u)] + A_2 a^2 \mathrm{Cos}2[s-2(t+u)] + A_3 a^3\mathrm{Cos}3[s-2(t+u)] + \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, d'après la définition de la fonction F et la *Remarque I*, la somme de la première série est $\frac{\mathrm{F}(s)}{2}$ et les sommes des autres séries, sous le signe Σ, sont successivement

$$\frac{\mathrm{F}[s-2t]}{2}, \quad \frac{\mathrm{F}[s-2(t+u)]}{2}, \ldots\ldots$$

en les ajoutant donc et divisant ensuite par 2^n, on obtiendra la somme annoncée de la série proposée.

On démontrera les deux autres théorèmes, à l'aide des *Lemmes II* et *III*, comme nous avons démontré celui-là à l'aide du *Lemme I*.

10. En supposant, dans nos trois théorèmes, que les arcs t, u, v, ... deviennent égaux entre eux et au premier, ce qui donne $s=nt$, on en conclut les trois corollaires que voici :

Corollaire I.

Quel que soit le nombre entier positif n, la somme de la série infinie

$$A_1 a\,\mathrm{Cos}.^n t + A_2 a^2 \mathrm{Cos}.^n 2t + A_3 a^3 \mathrm{Cos}.^n 3t + \ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\frac{1}{2^n}\left\{\mathrm{F}[nt] + \frac{n}{1}\mathrm{F}[(n-2)t] + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\mathrm{F}[(n-4)t] + \ldots\ldots\right\};$$

en observant les limitations prescrites (7, *Corollaire I*).

Corollaire II.

Si n est un nombre pair, la somme de la série infinie

$$A_1 a \mathrm{Sin.}^n t + A_2 a^2 \mathrm{Sin.}^n 2t + A_3 a^3 \mathrm{Sin.}^n 3t + \ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\pm \frac{1}{2^n} \left\{ \mathrm{F}[nx] - \frac{n}{1} \mathrm{F}[(n-2)x] + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \mathrm{F}[(n-4)x] - \ldots\ldots \right\}$$

en observant, pour le choix du signe et pour le nombre des termes, ce qui a été prescrit (7, *Corollaire II*).

Corollaire III.

Si n est un nombre impair, la somme de la série infinie

$$A_1 a \mathrm{Sin.}^n t + A_2 a^2 \mathrm{Sin.}^n 2t + A_3 a^3 \mathrm{Sin.}^n 3t + A_4 a^4 \mathrm{Sin.}^n 4t + \ldots\ldots$$

a pour expression finie

$$\pm \frac{1}{2^n} \left\{ \mathrm{F}'[nx] - \frac{n}{1} \mathrm{F}'[(n-2)x] + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \mathrm{F}'[(n-4)x] - \ldots\ldots \right\};$$

en observant, pour le choix du signe et le nombre des termes du développement, ce qui a été prescrit (7, *Corollaire III*).

Remarque générale.

11. Comme toutes les séries que nous avons considérées (8, 9, 10) sont dépourvues de leur premier terme, il faudra avoir soin, lorsque le contraire arrivera, d'ajouter ce premier terme à la somme donnée par ce qui précède

APPLICATION I.

12. On sait que

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \ldots ;$$

d'où

$$e^a - 1 = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \ldots ;$$

de sorte qu'on a ici

$$\mathrm{f}[a] = e^a - 1 \;;$$

donc, 1.° la somme de la série

$$\frac{a\mathrm{Cos}.t}{1} + \frac{a^2\mathrm{Cos}.2t}{1.2} + \frac{a^3\mathrm{Cos}.3t}{1.2.3} + \frac{a^4\mathrm{Cos}.4t}{1.2.3.4} + \ldots$$

sera (*Remarque I.*)

$$\frac{\left\{e^{a(\mathrm{Cos}.t + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)} - 1\right\} + \left\{e^{a(\mathrm{Cos}.t - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.t)} - 1\right\}}{2},$$

ou bien

$$e^{a\mathrm{Cos}.t} \cdot \frac{e^{+\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.t} + e^{-\sqrt{-1}\,a\mathrm{Sin}.t}}{2} - 1 = e^{a\mathrm{Cos}.t}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.t) - 1 ;$$

de sorte qu'en ajoutant 1 de part et d'autre, on a

$$e^{a\mathrm{Cos}.t}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.t) = 1 + \frac{a\mathrm{Cos}.t}{1} + \frac{a^2\mathrm{Cos}.2t}{1.2} + \frac{a^3\mathrm{Cos}.3t}{1.2.3} + \frac{a^4\mathrm{Cos}.4t}{1.2.3.4} + \ldots$$

2.° La somme de la série

$$\frac{a\mathrm{Sin}.t}{1} + \frac{a^2\mathrm{Sin}.2t}{1.2} + \frac{a^3\mathrm{Sin}3t}{1.2.3} + \frac{a^4\mathrm{Sin}.4t}{1.2.3.4} + \ldots$$

sera (*Remarque II.*).

$$\frac{\{e^{a(\text{Cos}.t+\sqrt{-1}\text{Sin}.t)}-1\}-\{e^{a(\text{Cos}.t-\sqrt{-1}\text{Sin}.t)}-1\}}{2\sqrt{-1}},$$

ou bien

$$e^{a\text{Cos}.t}\cdot\frac{e^{+\sqrt{-1}a\text{Sin}.t}-e^{-\sqrt{-1}a\text{Sin}.t}}{2\sqrt{-1}}=e^{a\text{Cos}.t}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.t)$$

de sorte qu'on aura

$$e^{a\text{Cos}.t}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.t)=\frac{a\text{Sin}\,t}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.3t}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin}.4t}{1.2.3.4}+\ldots\ (*)$$

13. D'après cela, on aura ici

$$\text{F}[t]=2\{e^{a\text{Cos}.t}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.t)-1\},\quad \text{F}'[t]=2e^{a\text{Cos}.t}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.t)\ ;$$

substituant donc ces valeurs dans les formules ci-dessus (9, 10), nous aurons, par le *Théorème I*, quel que soit n,

$$1+\frac{a\text{Cos}.t\text{Cos}.u\text{Cos}.v\ldots}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2t\text{Cos}.2u\text{Cos}.2v\ldots}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3t\text{Cos}.3u\text{Cos}.3v\ldots}{1.2.3}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\{e^{a\text{Cos}.s}.\text{Cos}[a\text{Sin}.s]+\Sigma e^{a\text{Cos}.(s-2t)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(s-2t)]$$

$$+\Sigma e^{a\text{Cos}.(s-2t-2u)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(s-2t-2u)]+\ldots\}\ ;$$

par le *Théorème II*, pour n pair,

(*) Nous ne connaissions pas encore le *Cours d'analise* de M. CAUCHY, où la première de ces deux séries se trouve sommée, lorsque nous en avons donné la somme, à la page 107 du présent volume.

$$\frac{a\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v\ldots}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}2t\text{Sin.}2u\text{Sin.}2v\ldots}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3t\text{Sin.}3u\text{Sin.}3v\ldots}{3}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{e^{a\text{Cos.}s}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}s]-\Sigma e^{a\text{Cos.}(s-2t)}\text{Cos.}[a\text{Sin.}(s-2t)]$$

$$+\Sigma e^{a\text{Cos.}(s-2t-2u)}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(s-2t-2u)]-\ldots\Big\};$$

par le *Théorème III*, pour n impair,

$$\frac{\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin}v\ldots}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}2t\text{Sin }2u\text{Sin.}2v}{1}+\frac{a^3\text{Sin.}3t\text{Sin.}3u\text{Sin.}3v\ldots}{3}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{e^{a\text{Cos.}s}.\text{Sin.}[a\text{Sin.}s]-\Sigma e^{a\text{Cos.}(s-2t)}.\text{Sin.}[a\text{Sin.}(s-2t)]$$

$$+\Sigma e^{a\text{Cos.}(s-2t-2u)}.\text{Sin.}[a\text{Sin.}(s-2t-2u)]-\ldots\Big\};$$

par le *Corollaire I*, quel que soit n,

$$1+\frac{a\text{Cos.}^n t}{1}+\frac{a^2\text{Cos.}^n 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos.}^n 3t}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos.}^n 4t}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{e^{a\text{Cos.}nt}\text{Cos.}[a\text{Sin }nt]+\frac{n}{1}e^{a\text{Cos.}(n-2)t}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(n-2)t]$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}e^{a\text{Cos.}(n-4)t}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(n-4)t]+\ldots\ldots\Big\};$$

par le *Corollaire II*, pour n pair,

$$\frac{a\text{Sin.}^n t}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}^n 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}^n 3t}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin.}^n 4t}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{e^{a\text{Cos.}nt}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}nt]-\frac{n}{1}e^{a\text{Cos.}(n-1)t}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(n-2)t]$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}e^{a\text{Cos.}(n-4)t}.\text{Cos.}[a\text{Sin.}(n-4)t]+\ldots\ldots\Big\};$$

et

et par le *Corollaire III*, pour n impair,

$$\frac{a\text{Sin.}^n t}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}^n 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}^n 3t}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin.}^n 4t}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{e^{a\text{Cos}.nt}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.nt]-\frac{n}{1}e^{a\text{Cos}.(n-2)t}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(n-2)t]$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}e^{a\text{Cos}.(n-4)t}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(n-4)t]+\ldots\ldots\Big\};$$

14. Si, par exemple, ou suppose $n=2$, les première, deuxième, quatrième et cinquième formules deviendront, en ayant toujours égard aux limitations prescrites pour les seconds membres,

$$1.^\circ\quad 1+\frac{a\text{Cos}.t\text{Cos}\,u}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2t\text{Cos}.u}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3t\text{Cos}.3u}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.4t\text{Cos}.4u}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{2}\{e^{a\text{Cos}.(t+u)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(t+u)]+e^{a\text{Cos}.(t-u)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(t-u)]\}.$$

$$2.^\circ\quad \frac{a\text{Sin}.t\text{Sin}.u}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2t\text{Sin}.2u}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.3t\text{Sin}.3u}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin}.4t\text{Sin}.4u}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$=-\tfrac{1}{2}\{e^{a\text{Cos}.(t+u)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(t+u)]-e^{a\text{Cos}.(t-u)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(t-u)]\};$$

$$3.^\circ\quad +1\frac{a\text{Cos}.^2t}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.^2 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.^2 3t}{1.2.3}+\ldots=+\tfrac{1}{2}\{e^{a\text{Cos}.2t}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.2t)+e^a\}.$$

$$4.^\circ\quad \frac{a\text{Sin}.^2t}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.^2 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.^2 3t}{1.2.3}+\ldots=-\tfrac{1}{2}\{e^{a\text{Cos}.2t}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.2t)-e^a\};$$

Ces deux dernières formules avaient déjà été données par M. Stein, à la page 112 du présent volume.

15. Si l'on suppose $n=3$, les première, troisième, quatrième et sixième formules deviendront

1.° $1+\frac{a\text{Cos}.t\text{Cos}.u\text{Cos}.v}{1}+\frac{a^2\text{Cos }2t\text{Cos}.2u\text{Cos}.2v}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3t\text{Cos}.3u\text{Cos}3v}{1.2.3}+\ldots$

$$=+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} e^{a\text{Cos}.(t+u+v)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(t+u+)] \\ +e^{a\text{Cos}.(t+u-v)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(t+u-v)] \\ +e^{a\text{Cos}.(u+v-t)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(u+v-t)] \\ +e^{a\text{Cos}.(v+t-u)}.\text{Cos}.[a\text{Sin}.(v+t-u)] \end{array}\right\}.$$

2.° $\frac{a\text{Sin}.t\text{Sin}.u\text{Sin}.v}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2t\text{Sin}.2u\text{Sin}.2v}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.3t\text{Sin}.3u\text{Sin}.3v}{1.2.3}+\ldots$

$$=-\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} e^{a\text{Cos}.(t+u+v)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(t+u+v)] \\ -e^{a\text{Cos}.(t+u-v)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(t+u-v)] \\ -e^{a\text{Cos}.(u+v-t)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(u+v-t)] \\ -e^{a\text{Cos}.(v+t-u)}.\text{Sin}.[a\text{Sin}.(v+t-u)] \end{array}\right\}.$$

3.° $1+\frac{a\text{Cos}.^3t}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.^3 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.^3 3t}{1.2.3}+\ldots\ldots$

$$=+\tfrac{1}{4}\{e^{a\text{Cos}.3t}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.3t)+3e^{a\text{Cos}.t}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.t)\}.$$

4.° $\frac{a\text{Sin}.^3t}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.^3 2t}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.^3 3t}{1.2.3}+\ldots\ldots$

$$=-\tfrac{1}{4}\{e^{a\text{Cos}.3t}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.3t)-3e^{a\text{Cos}.t}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.t)\}.$$

et ainsi de suite.

APPLICATION II.

16. On sait qu'en faisant usage des logarithmes naturels on a

$$\text{Log.}(1+a)=\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}-\dots$$

de sorte qu'ici

$$\text{f}[a]=\text{Log.}(1+a)$$

donc, 1.° la somme de la série

$$\frac{a\text{Cos.}t}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}2t}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}3t}{3}-\frac{a^4\text{Cos.}4t}{4}+\dots$$

sera (*Remarque I*)

$$\frac{\text{Log.}\{1+a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)\}+\text{Log.}\{1+a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)\}}{2},$$

ou bien

$$\frac{\text{Log.}\{(1+a\text{Cos.}t)+\sqrt{-1}\,a\text{Sin.}t\}\{(1+a\text{Cos.}t)-\sqrt{-1}\,a\text{Sin.}t\}}{2}=\frac{\text{Log.}\{(1+a\text{Cos.}t)^2+a^2\text{Sin.}^2t\}}{2}$$

ou enfin

$$\frac{\text{Log.}(1+2a\text{Cos.}t+a^2)}{2}=\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}t+a^2};$$

2.° la somme de la série

$$\frac{a\text{Sin.}t}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}2t}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3t}{3}-\frac{a^4\text{Sin.}4t}{4}+\dots$$

sera (*Remarque II*)

$$\frac{\text{Log.}\{1+a(\text{Cos.}t+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)\}-\text{Log.}\{1+a(\text{Cos.}t-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}t)\}}{2\sqrt{-1}};$$

ou bien

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\text{Log}\,\frac{(1+a\text{Cos}.t)+\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.t}{(1+a\text{Cos}.t)-\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.t}\,.$$

En vertu de la formule connue

$$\text{Log}.\,\frac{p}{q}=2\left\{\frac{p-q}{p+q}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\ldots\right\},$$

cette somme devient

$$\frac{a\text{Sin}.t}{1+a\text{Cos}.t}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{a\text{Sin}.t}{1+a\text{Cos}.t}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{a\text{Sin}.t}{1+a\text{Cos}.t}\right)^5-\ldots$$

c'est-à-dire,

$$\text{Arc}\left(\text{Tang}.=\frac{a\text{Sin}.t}{1+a\text{Cos}.t}\right).$$

17. D'après cela, on aura ici

$$\text{F}[t]=2\text{Log}.\sqrt{1+2a\text{Cos}.t+a^2}\,,\qquad \text{F}'[t]=2\text{Arc}\left(\text{Tang}.=\frac{a\text{Sin}.t}{1+a\text{Cos}.t}\right);$$

substituant donc ces valeurs dans les formules ci-dessus (9, 10), nous aurons, par le *Théorème I*, quel que soit n,

$$\frac{a\text{Cos}.t\text{Cos}.u\text{Cos}\,v\ldots}{1}-\frac{a^2\text{Cos}.2t\text{Cos}.2u\text{Cos}.2v\ldots}{2}+\frac{a^3\text{Cos}.3t\text{Cos}.3u\text{Cos}.3v\ldots}{3}-\ldots\ldots$$

$$=+\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\text{Log}.\sqrt{1+2a\text{Cos}.s+a^2}+\Sigma\text{Log}.\sqrt{1+2a\text{Cos}.(s-2t)+a^2}\right.$$

$$\left.+\Sigma\text{Log}.\sqrt{1+2a\text{Cos}.(s-2t-2u)+a^2}+\ldots\ldots\right\}.$$

par le *Théorème II*, pour n pair,

$$\frac{a\text{Sin}.t\text{Sin}.u\text{Sin}.v\ldots}{1}-\frac{a^2\text{Sin}.2t\text{Sin}.2u\text{Sin}.2v\ldots}{2}+\frac{a^3\text{Sin}.3t\text{Sin}.3u\text{Sin}.3v\ldots}{3}-\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}s+a^2}-\Sigma\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(s-2t)+a^2}\right.$$

$$\left.+\Sigma\text{Log}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(s-2t-2u)+a^2}-\ldots\ldots\right\}.$$

par le *Théorème III*, pour n impair,

$$\frac{a\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v\ldots}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}2t\text{Sin.}2u\text{Sin.}2v\ldots}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3t\text{Sin.}3u\text{Sin.}3v\ldots}{3}-\ldots.$$

$$=\pm\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}s}{1+a\text{Cos.}s}\right]-\Sigma\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}(s-2t)}{1+a\text{Cos.}(s-2t)}\right]\right.$$

$$\left.+\Sigma\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}(s-2t-2u)}{1+a\text{Cos.}(s-2t-2u)}\right]-\ldots\right\}.$$

par le *Corollaire I*, quel que soit n,

$$\frac{a\text{Cos.}^n t}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}^n 2t}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}^n 3t}{3}-\frac{a^4\text{Cos.}^n 4t}{4}+\ldots.$$

$$=+\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}nt+a^2}+\frac{n}{1}\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(n-2)t+a^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(n-4)t+a^2}+\ldots\right\}.$$

par le *Corollaire II*, pour n pair,

$$\frac{a\text{Sin.}^n t}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}^n 2t}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}^n 3t}{3}-\frac{a^4\text{Sin.}^n 4t}{4}+\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^n}\left\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}nt+a^2}-\frac{n}{1}\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(n-2)t+a^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(n-4)t+a^2}-\ldots\right\}.$$

par le *Corollaire III*, pour n impair,

$$\frac{a\text{Sin.}^n t}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}^n 2t}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}^n 3t}{3}-\frac{a^4\text{Sin.}^n 4t}{4}+\ldots\ldots$$

$$=\pm\frac{1}{2^n}\left\{\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}nt}{1+a\text{Cos.}nt}\right]-\frac{n}{1}\text{ Arc}\left[\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}(n-1)t}{1+a\text{Cos.}(n-2)t}\right]+\ldots\right\}$$

18. Si, par exemple, on suppose $n=2$, les première, deuxième, quatrième et cinquième formules deviendront, en ayant toujours égard aux limitations prescrites pour les seconds membres,

$$1.^\circ\quad \frac{a\text{Cos.}t\text{Cos.}u}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}2t\text{Cos.}2u}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}3t\text{Cos.}3u}{3}-\ldots\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{2}\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(t+u)+a^2}+\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(t-u)+a^2}\}.$$

$$2.^\circ\quad \frac{a\text{Sin.}t\text{Sin.}u}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}2t\text{Sin.}2u}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3t\text{Sin}\,3u}{3}-\ldots\ldots$$

$$=-\tfrac{1}{2}\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(t+u)+a^2}-\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(t+u)+a^2}\}.$$

$$3.^\circ\quad \frac{a\text{Cos.}^2 t}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}^2 3t}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}^2 3t}{3}-\frac{a^4\text{Cos.}^2 4t}{4}+\ldots\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{2}\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}2t+a^2}+\text{Log.}(1+a)\}.$$

$$4.^\circ\quad \frac{a\text{Sin.}^2 t}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}^2 2t}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}^2 3t}{3}-\frac{a^4\text{Sin.}^2 4t}{4}+\ldots\ldots$$

$$=-\tfrac{1}{2}\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}2t+a^2}-\text{Log.}(1+a)\}.$$

19. Si l'on suppose $n=3$, les première, troisième, quatrième et sixième formules donneront

$$1.^\circ\quad \frac{a\text{Cos.}t\text{Cos.}u\text{Cos.}v}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}2t\text{Cos.}2u\text{Cos.}2v}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}3t\text{Cos.}3u\text{Cos.}3v}{3}-\ldots\ldots$$

$$=+\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(t+u+v)+a^2}\\ +\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(t+u-v)+a^2}\\ +\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(u+v-t)+a^2}\\ +\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}(v+t-u)+a^2}\end{array}\right\}.$$

2.° $$\frac{a\text{Sin.}t\text{Sin.}u\text{Sin.}v}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}2t\text{Sin.}2u\text{Sin.}2v}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3t\text{Sin}\,3u\text{Sin.}3v}{3}-\ldots\ldots$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\dfrac{a\text{Sin.}(t+u+v)}{1+a\text{Cos.}(t+u+v)}\right]\\ -\text{Arc}\left[\text{Tang}=\dfrac{a\text{Sin.}(t+u-v)}{1+a\text{Cos}.(t+u-v)}\right]\\ -\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\dfrac{a\text{Sin.}(u+v-t)}{1+a\text{Cos.}(u+v-t)}\right]\\ -\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\dfrac{a\text{Sin.}(v+t-u)}{1+a(\text{Cos.}v+t-u)}\right]\end{array}\right\}.$$

3.° $$\frac{a\text{Cos.}^3t}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}^3 2t}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}^3 3t}{3}-\frac{a^4\text{Cos.}^3 4t}{4}+\ldots\ldots$$

$$=+\tfrac{1}{4}\left\{\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos.}3t+a^2}+3\text{Log.}\sqrt{1+2a\text{Cos}\,t+a^2}\right\}.$$

4.° $$\frac{a\text{Sin.}^3t}{1}-\frac{a^2\text{Sin.}^3 2t}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}^3 3t}{3}-\frac{a^4\text{Sin.}^3 4t}{4}+\ldots;$$

$$=-\tfrac{1}{4}\left\{\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}3t}{1+a\text{Cos.}3t}\right)-3\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin.}t}{1+a\text{Cos.}t}\right)\right\}.$$

20. Nous ne pousserons pas plus loin, pour le moment, ces applications qui n'ont, comme l'on voit, rien de bien difficile, et qui conduisent à des résultats très-remarquables. Il nous suf-

fisait d'établir les principes généraux et de montrer la marche du calcul. Mais, dans un supplément au présent mémoire, nous nous occuperons de la construction des formules générales servant à sommer les séries infinies de la forme

$$A_1a\text{Cos.}^{\alpha}t\text{Cos.}^{\beta}u\text{Cos.}^{\gamma}v\ldots\ldots+A_2a^2\text{Cos.}^{\alpha}2t\text{Cos.}^{\beta}2u\text{Cos.}^{\gamma}2v\ldots$$

$$+A_3a^3\text{Cos.}^{\alpha}3t\text{Cos.}^{\beta}3u\text{Cos.}^{\gamma}3v\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

$$A_1a\text{Sin.}^{\alpha}t\text{Sin.}^{\beta}u\text{Sin.}^{\gamma}v\ldots\ldots+A_2a^2\text{Sin.}^{\alpha}2t\text{Sin.}^{\beta}2u\text{Sin.}^{\gamma}2v\ldots\ldots$$

$$+A_3a^3\text{Sin.}^{\alpha}3t\text{Sin.}^{\beta}3u\text{Sin.}^{\gamma}3v\ldots\ldots+\ldots\ldots,$$

lorsqu'on sait sommer la série infinie

$$A_1a+A_2a^2+A_3a^3+A_4a^4+A_5a^5+\ldots\ldots \quad (*)$$

(*) Presque en même temps que ce qu'on vient de lire nous est parvenu, nous avons reçu de M. Sturm de Genève, sur la sommation de diverses classes de séries, un travail qui, sans être aussi étendu que celui de M. Querret, offre néanmoins quelques résultats curieux, et que nous ferons prochainement connaître.

J. D. G.

ANALISE.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Résolution de l'équation générale du quatrième degré;

Par M. Gergonne.

On a singulièrement multiplié les méthodes de résolution des équations du troisième et du quatrième degrés, et le plus souvent sans qu'on puisse supposer d'autre but aux auteurs de ces méthodes que celui de faire autrement que leurs dévanciers. En voici encore une, particulière au quatrième degré, qui nous paraît n'être pas connue, et qui, outre qu'elle est fort simple, et qu'elle n'est point dépourvue d'une certaine élégance, est du petit nombre de celles qui montrent bien à quoi se réduit finalement la difficulté du problème de la résolution générale des équations.

Soit l'équation générale du quatrième degré, sans second terme,

$$x^4+px^2+qx+r=0\,, \qquad (1)$$

dont les racines inconnues soient représentées par a, b, c, d; de manière qu'on ait

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d&=0\,,\\ ab+ac+bc+ad+bd+cd&=+p\,,\\ abc+abd+acd+bcd&=-q\,,\\ abcd&=+r\,,\end{aligned}\right\}\ (2)$$

Formons une équation du troisième degré dont les racines soient

$$ab+cd\ ,\qquad ac+bd\ ,\qquad ad+bc\ ;$$

en désignant par y l'inconnue de cette équation, elle sera

$$(y-ab-cd)(y-ac-bd)(y-ad-bc)=0\ ,$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{r} y^3-(ab+cd) \\ -(ac+bd) \\ -(ad+bc) \end{array}\right| \begin{array}{r} y^2+(ab+cd)(ac+bd) \\ +(ac+bd)(ad+bc) \\ +(ad+bc)(ab+cd) \end{array}\left|\ y-(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)=0\ ,\right. \quad (3)$$

ou en développant et ayant égard aux relations (2)

$$y^3-py^2-4ry-(q^2-4pr)=0\ .\ (*) \qquad (4)$$

Lorsqu'on sait résoudre les équations du troisième degré, on peut regarder comme connue les trois racines de l'équation (4). Représentons-les par A, B, C; nous aurons

---

(*) En effet, d'abord le coefficient du second terme de l'équation (3) est immédiatement égal à $-p$; le développement de celui du troisième revient à

$$(a+b+c+d)(abc+acd+bcd)-4abcd\ ,$$

qui se réduit à $-4r$; enfin le dernier terme peut être écrit ainsi :

$$-abcd(a+b+c+d)^2-(abc+abd+acd+bcd)^2+4abcd(ab+ac+ad+bc+bd+cd),$$

qui revient à $-q^2+4pr$.

On pourrait, au surplus, parvenir encore à l'équation (4), quoique par un calcul moins symétrique, en éliminant a, b, c, d entre les équations (2) et la suivante :

$$y=ab+cd\ .$$

$$\left.\begin{array}{l} ab+cd=A\ , \\ ac+bd=B\ , \\ ad+bc=C\ , \end{array}\right\}(5)$$

équations qui, en y joignant une quelconque des équations (2), devront donner les valeurs des racines inconnues a, b, c, d.

D'abord, en prenant leur somme, on a

$$A+B+C=p\ ; \qquad\qquad (6)$$

prenant ensuite leurs sommes deux à deux et ayant égard à l'équation (6), il vient, en vertu de la première des équations (2),

$$A+B=p-C=ab+cd+ac+bd=(a+d)(b+c)=-(a+d)^2=-(b-c)^2\ ,$$

$$B+C=p-A=ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d)=-(a+b)^2=-(c+d)^2\ ,$$

$$C+A=p-B=ad+bc+ab+cd=(a+c)(b+d)=-(a+c)^2=-(b+d)^2\ ;$$

ce qui donne

$$a+d=\pm\sqrt{C-p}\ ,\quad a+b=\pm\sqrt{A-p}\ ,\quad a+c=\pm\sqrt{B-p}\ ,$$

$$b+c=\mp\sqrt{C-p}\ ,\quad c+d=\mp\sqrt{A-p}\ ,\quad b+d=\mp\sqrt{B-p}\ ,$$

En prenant le produit des équations de la première ligne, il vient

$$a^2(a+b+c+d)+(abc+abd+acd+bcd)=-q=\pm\sqrt{A-p}\times\pm\sqrt{B-p}\times\pm\sqrt{C-p}\ ;$$

il faudra donc choisir les signes des radicaux de cette première ligne de telle sorte que leur produit soit de signe contraire à q. Prenant ensuite la somme de ces mêmes équations, on aura

$$2a+(a+b+c+d)=2a=\pm\sqrt{A-p}\pm\sqrt{B-p}\pm\sqrt{C-p}\ ;$$

de sorte que si q est positif dans l'équation, on aura

$$x=\tfrac{1}{2}\{-\sqrt{A-p}-\sqrt{B-p}-\sqrt{C-p}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{2}\{-\sqrt{A-p}+\sqrt{B-p}+\sqrt{C-p}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{2}\{+\sqrt{A-p}-\sqrt{B-p}+\sqrt{C-p}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{2}\{+\sqrt{A-p}+\sqrt{B-p}-\sqrt{C-p}\}\ .$$

tandis que si, au contraire, q est négatif dans l'équation, ses quatre racines seront

$$x=\tfrac{1}{2}\{+\sqrt{A-p}+\sqrt{B-p}+\sqrt{C-p}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{2}\{-\sqrt{A-p}-\sqrt{B-p}-\sqrt{C-p}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{2}\{-\sqrt{A-p}+\sqrt{B-p}-\sqrt{C-p}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{2}\{-\sqrt{A-p}-\sqrt{B-p}+\sqrt{C-p}\}\ .$$

Nous avons pu ramener la résolution de l'équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième, parce qu'il existe une fonction non symétrique $ab+cd$ de quatre quantités a, b, c, d qui, par les diverses permutations qu'on y peut faire des lettres les unes avec les autres, n'est susceptible que de trois formes différentes seulement; et on aurait pu également parvenir au but en employant des fonctions de la forme $(a+b)(c+d)$ qui jouissent de la même propriété.

Le problème général de la résolution des équations de tous les degrés tiendrait donc, d'après cela, à trouver, pour chaque degré m, une fonction non symétrique de m lettres a, b, c, ... k qui, par les diverses permutations qu'on y pourrait faire de ces lettres entre elles, ne prendrait qu'un nombre de formes différentes inférieur à m ; et il ne paraît guère que ce problème soit possible, lorsque le nombre m est plus grand que *quatre*.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Note sur les deux problèmes traités aux pages 145 *et* 289 *du présent volume* ;

Par M. QUERRET, chef d'institution, à St-Malo.

LE problème de M. Dubois-Aimé, dont M. de St-Laurent a rectifié la solution à la page 145 du présent volume, avait déjà été l'objet des recherches de plusieurs illustres géomètres. On trouve dans les *Mémoires de l'académie des sciences* de Paris, pour 1732, sous la date du 16 janvier, un mémoire de Bouguer sur ce sujet. Ce géomètre donne à la courbe dont il s'agit le nom de *Ligne de poursuite*; parce que c'est la courbe que décrirait un vaisseau qui en poursuivrait un autre en mouvement, en se dirigeant constamment sur lui. Prenant pour axe des x celui qu'a choisi M. de St-Laurent pour axe des y, et *vice versâ*, nommant n la vitesse constante du vaisseau poursuivant, et m celle du vaisseau poursuivi, il parvient à l'équation

$$x=\frac{n}{2(2+m)}a^{-\frac{m}{n}}y^{\frac{n+m}{n}}-\frac{n}{2(n-m)}a^{+\frac{m}{n}}y^{\frac{n-m}{n}}+\frac{mn}{n^2-m^2}a\,;$$

a représentant la même ligne que dans le mémoire de M. de St-Laurent.

Si, dans l'équation de Bouguer on met x pour y et y pour x; et qu'après avoir changé m en n^2 on multiplie par $\frac{2}{a}$, il viendra

$$2\left(\frac{y}{a}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-\frac{2n}{n^2-1},$$

ou bien

$$2\left(\frac{y}{a}\right)=\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}+\frac{1}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\};$$

qui est exactement l'équation (15) de M. de St-Laurent (*).

Mais la valeur de s donnée par l'équation (10), laquelle est en général susceptible d'un double signe, nous paraît devoir être prise avec un signe différent de celui qui a été admis par M. de St-Laurent, pour exprimer réellement la route parcourue par le chien depuis son départ; il faut, en effet, que s croisse *positivement* à mesure que x devient plus petit, ce qui exige qu'on écrive.

$$2\left(\frac{s}{a}\right)=\frac{1}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\}-\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}.$$

Maupertuis reprit le même problème quelques jours après Bouguer, et en donna une solution plus courte. Il enseigna de plus le moyen de former l'équation différentielle du second ordre de la courbe cherchée, lorsque le vaisseau poursuivi, au lieu de dé-

---

(*) Nous avons négligé de noter, au commencement du mémoire de M. de St-Laurent, que l'équation de M. Dubois-Aymé est à tel point défectueuse qu'elle ne saurait être rendue homogène par aucune détermination de a.

J. D. G.

crire une ligne droite, décrit une courbe quelconque, toujours d'un mouvement uniforme. Le mémoire de Bouguer renferme quelques applications, et fait connaître, en outre, diverses propriétés curieuses de la courbe dont il s'agit. L'auteur prouve, *à priori*, que la courbe est rectifiable, ce qui résulte également de l'analise de M. de St-Laurent.

Quant au problème traité à la page 289, il se ramène très-facilement à celui-là, au moyen des considérations suivantes.

Le plan d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires étant supposé glisser, d'un mouvement rectiligne et uniforme, sur un autre plan fixe, sur lequel deux axes rectangulaires sont aussi tracés, de manière que les axes des y coïncident constamment, et un point étant supposé se mouvoir d'un mouvement uniforme sur la courbe mobile; si, pour une même abscisse x, on représente par y l'ordonnée du point mobile rapporté aux axes fixes, par y' l'ordonnée du même point rapporté aux axes mobiles, par k le nombre de fois que la vitesse du plan contient celle du point mobile, et par s l'arc de courbe parcouru par ce point depuis l'origine des temps, la courbe qu'il aura tracé sur le plan fixe aura pour équation

$$y-ks=y' \qquad \text{ou} \qquad y=y'+ks.$$

En effet, pendant que le point mobile aura parcouru l'arc s sur sa courbe, l'axe des x mobile se sera avancé parallèlement à lui-même d'une quantité ks, d'où il résulte qu'il faudra diminuer l'ordonnée y de cette même quantité pour retrouver l'autre ordonnée y'.

Il suit de là que, toutes les fois que l'arc s sera exprimable en fonction de x seulement, en substituant sa valeur ainsi que celle de y', dans l'équation ci-dessus, on aura immédiatement l'ordonnée de la courbe cherchée. Dans l'hypothèse contraire, on pourra, tout au moins, parvenir à l'équation différentielle de cette courbe.

L'application de cette remarque au problème dont il s'agit est manifeste. Soient, comme on l'a supposé, k la vitesse du chien, g celle de son maître, et h celle du courant; et soit posé, pour abréger, $g-h=nk$. Au lieu de supposer l'eau courante, on pourra la supposer stagnante, en admettant que le canal et le terrain sur lequel il est situé sont transportés dans le sens de sa direction avec la vitesse h, sur un plan fixe, et que le maître marche sur ce terrain mouvant avec une vitesse $g-h$ ou nk; de sorte que le rapport de la vitesse du maître à celle de son chien sera encore n, comme dans le premier problème, auquel se rapporteront aussi les circonstances du mouvement du chien sur le plan mobile, puisque ce mouvement aura lieu dans une eau stagnante par rapport à ce plan. Nous aurons donc ici $r=\frac{h}{k}$; et en outre nous avons trouvé ci-dessus, pour le premier problème,

$$y'=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right]+\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right]\right\},$$

$$s=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right]-\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right]\right\};$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation

$$y=y'+\frac{h}{k}s \quad \text{ou} \quad ky=ky'+hs;$$

il viendra

$$\frac{2ky}{a}=\frac{k-h}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}+\frac{k+h}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\},$$

qui est exactement l'équation (19) du second problème (*).

(*) Nous recevons à l'instant un travail de M. Tédenat, recteur honoraire, correspondant de l'académie royale des sciences, dont l'objet est également

Addition à la solution donnée à la page 353 du présent volume ;

Par M. QUERRET, chef d'institution à St-Malo.

QUELQUES géomètres pouvant objecter, contre la manière dont nous avons sommé les deux premières suites de la page 353, qu'il n'est peut-être pas permis de traiter les lignes trigonométriques des arcs imaginaires comme celles des arcs réels, nous nous empressons de remplacer le procédé dont nous avons fait usage en cet endroit par un autre qui nous paraît à l'abri de toute objection.

1.° Pour sommer la suite

$$\frac{a\mathrm{Cos}.x}{1}-\frac{a^3\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{a^5\mathrm{Cos}.5x}{5}-\frac{a^7\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots;$$

nous considérerons que

$$\int\frac{\mathrm{d}a}{1+a^2}=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\ldots;$$

d'où il suit que

---

de ramener le second problème au premier, et qui conséquemment rentre à peu près dans ce qu'on vient de lire.

Nous saisirons cette occasion d'observer qu'à la fin de la 5.e ligne de la page 292, au lieu de $x\dfrac{\mathrm{d\,Tang}.z}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, il faut lire $x\dfrac{\mathrm{d.Tang}.z}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$;

$$\mathrm{f}(a)=\int\frac{\mathrm{d}a}{1+a^2}\;;$$

changeant donc, tour à tour, a en $a(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x)$ et $a(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x)$, on aura, au moyen de notre théorème général, pour la somme de la suite proposée,

$$\tfrac{1}{2}\left\{\int\frac{a\mathrm{d}.(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x)}{1+a^2(\mathrm{Cos}.2x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2x)}+\int\frac{a\mathrm{d}.(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,x)}{1+a^2(\mathrm{Cos}.2x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2x)}\right\};$$

ou, en exécutant les différentiations,

$$\frac{a}{2}\int\mathrm{d}x\left\{\frac{-\mathrm{Sin}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x}{(1+a^2\mathrm{Cos}.2x)+\sqrt{-1}\,a^2\mathrm{Sin}.2x}-\frac{\mathrm{Sin}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x}{(1+a^2\mathrm{Cos}.2x)-\sqrt{-1}\,a^2\mathrm{Sin}.2x}\right\},$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}\int-\frac{2(1-a^2)a\mathrm{d}x\mathrm{Sin}.x}{(1-a^2)^2+4a^2\mathrm{Cos}.^2x}=\tfrac{1}{2}\int-\frac{\dfrac{2a\mathrm{d}x\mathrm{Sin}.x}{1-a^2}}{1+\left(\dfrac{2a\mathrm{Cos}.x}{1-a^2}\right)^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Tang.}=\frac{2a\mathrm{Cos}.x}{1-a^2}\right),$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

2. Pour sommer la suite

$$\frac{\mathrm{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots\ldots,$$

nous considérerons que

$$\int\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{a}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{a^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{a^7}{7}+\ldots$$

d'où il suit que

$$\mathrm{f}(a)=\int\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1-a^2}}\ ;$$

changeant donc, tour à tour, a en $\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x$ et $\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x$, on aura, au moyen de notre théorème général, pour la somme de la suite proposée,

$$\tfrac{1}{2}\left\{\int\frac{\mathrm{d}x(-\mathrm{Sin}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x)}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}.2x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2x}}-\int\frac{\mathrm{d}x(\mathrm{Sin}\,x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x)}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}.2x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2x}}\right\},$$

ou encore

$$\tfrac{1}{2}\int\left\{-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\mathrm{Sin}.x}}\left(\sqrt{\mathrm{Sin}.x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x}+\sqrt{\mathrm{Sin}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x}\right)\right\},$$

ou bien

$$\int-\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{Sin}.x}}\cdot\sqrt{1+\mathrm{Sin}.x}\ .$$

Or, soit $\sqrt{\mathrm{Sin}.x}=t$, on aura

$$\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{Cos}.x}{\sqrt{\mathrm{Sin}.x}}=\mathrm{d}t\ ,\qquad \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{Sin}.x}}=\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}\ ;$$

donc

$$\int-\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{Sin}.x}}\sqrt{1+\mathrm{Sin}.x}=\int-\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}\sqrt{1+t^2}=\int-\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\mathrm{Arc}(\mathrm{Cos}.=t)$$

donc enfin la somme de la série proposée sera

$$\mathrm{Arc}(\mathrm{Cos}.=\sqrt{\mathrm{Sin}.x})=\tfrac{1}{2}\mathrm{Arc}(\mathrm{Sin}.=2\mathrm{Sin}.x\mathrm{Cos}.x-1)\ ;$$

comme nous l'avions également trouvé.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. On sait que, dans tout tétraèdre, l'aire de chacune des faces est la somme des produits des aires des trois autres par les cosinus tabulaires des angles qu'elles font avec celles-là ; ce qui donne entre les aires des quatre faces d'un tétraèdre et ses six angles trièdres quatre équations entre lesquelles on peut éliminer les aires des faces, qui n'y entrent que par leurs rapports.

Il y a donc une relation nécessaire entre les cosinus tabulaires des six angles dièdres d'un tétraèdre, et conséquemment il doit aussi exister une relation entre ces angles eux-mêmes.

On propose d'assigner cette relation.

II. **Quelle est, sur une surface courbe donnée, la courbe dont la courbure est constante en tous ses points ?**

Fin du treizième volume.

TABLE

Des matières contenues dans le XIII.e volume des Annales.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ARITHMETIQUE.

COMBINAISONS.

DYNAMIQUE.

GÉOMÈTRIE APPLIQUÉE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES ET SURFACES.

GÉOMÉTRIE ELEMENTAIRE.

GEOMETRIE TRANSCENDANTE.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

TRIGONOMETRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tom. XII, pag. 260	Théorème.	Démontré tome XIII, pag.	305—314.
Pag. 288	Problème.		314—319.
Pag. 316	Problème.		101—105.
Pag. 321	Problème I.		101—115.
	Théorème.		141—145.
	Problème II.	115—120,	242—248.
Pag. 380	Problème I.		—
	Problème II,		—
	Problème III.		201—207.
	Problème IV.		207—212.
Tom. XIII, p. 120	Problème.		—
Pag. 180	Problème I.	289—304,	389—393.
	Problème II.		—
	Problèmes III.		—
Pag. 212	Problème.		—
	Théorème.		319—329.
Pag. 247	Problème.	353—360,	393—396.
	Théorème I.		329—333.
	Théorème II.		—

ERRATA

Pour le treizième volume des Annales.

PAGE 6, ligne 7, en remontant, — changez tous les dt en dx.

Page 7, ligne 14, après le mot discontinue, supprimez une des deux virgules.

Page 39, ligne 9, en remontant, — cete courbe; *lisez :* cette courbe.

Pag. 119, en haut, valeur de p, — les radicaux cubes ne doivent affecter que $C^2(x^2+y^2)$.

Ligne 5, — $\frac{Y}{x}$; *lisez :* $\frac{y}{x}$.

Page 152, ligne 14, — $\left(\frac{a}{x}\right)n$; *lisez :* $\left(\frac{a}{x}\right)^n$.

Page 161, ligne 5, — $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{}{2}}$; *lisez :* $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Page 271, ligne 5, après le mot termes, mettez une virgule.

Ligne 4, en remontant, — φ_u; *lisez :* φ_n.

Ligne 3, en remontant, — transportez après le mot si, la virgule qui le précède.

Page 274, ligne 8, — $f_{n-1}(b)$; *lisez :* $f_n(b)$.

Ligne 4, en remontant, — $f_2(a)$; *lisez :* $f_0(a)$.

Page 276, ligne 2, — après (7), placez une virgule.

Ligne 10, au dénominateur, — $(n-1)$; *lisez :* $(n-1)!$.

Ligne 3, au dénominateur, — après le mot, cité, placez une virgule.

Page 285, ligne 8, — après le mot exemple, placez une virgule.

Page 287, ligne 4, après le mot respectives, placez une virgule.

Page 292, ligne 5, — changez le second dt en dx.

Page 304, ligne 5, en remontant, — ce plan; *lisez :* le même plan.

Page 314, ligne 8, en remontant, — au dénominateur de y^2; *lisez :* $ab+cd$.

ERRATA pour les Planches.

Planche IV, en haut, — pag. 333; *lisez :* pag. 333—361.

Fig. 7, les parallèles à FF′, partant des points D, M, E, doivent respectivement porter à leur partie supérieure les lettres D′, M′, E′.