ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Solution du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 232 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 374-377
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__374_0>

Solution du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 232 de ce volume;

Par M. GERGONNE.

PROBLÈME. *Les directions de deux systèmes de diamètres conjugués d'une même ellipse étant données; assigner les directions et le rapport de grandeur de ses deux diamètres principaux?*

Solution. Par le centre de l'ellipse, soit menée une droite arbitraire, et soit désigné par z l'angle inconnu qu'elle fait avec l'un des diamètres principaux. Représentons par $2x$ la longueur de ce diamètre, et par $2y$ la longueur de l'autre. Soient enfin α, β les angles connus que forment avec la droite indéfinie les deux diamètres du premier système, et α', β' les angles que forment avec elle les deux diamètres du second; ces mêmes diamètres formeront, avec le diamètre principal dont nous avons représenté la longueur par $2x$ des angles qui seront respectivement

$$z+\alpha\,, \qquad z+\alpha'\,,$$

$$z+\beta\,; \qquad z+\beta'\,;$$

et, par une propriété connue de l'ellipse, on devra avoir les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} y^2+x^2\mathrm{Tang.}(z+\alpha)\mathrm{Tang.}(z+\beta)=0\ , \\ y^2+x^2\mathrm{Tang.}(z+\alpha')\mathrm{Tang.}(z+\beta')=0\ ; \end{array}\right\}\ (1)$$

desquelles il s'agit présentement de tirer la valeur de z et le rapport de x à y.

En faisant, pour abréger, $\mathrm{Tang.}z=v$, et posant en outre

$$\mathrm{Tang.}\alpha=m\ ,\qquad \mathrm{Tang.}\alpha'=m'\ ,$$

$$\mathrm{Tang.}\beta=n\ ,\qquad \mathrm{Tang.}\beta'=n'\ ,$$

il vient

$$\mathrm{Tang.}(z+\alpha)=\frac{\mathrm{Tang.}z+\mathrm{Tang.}\alpha}{1-\mathrm{Tang.}\alpha\mathrm{Tang.}z}=\frac{v+m}{1-mv}\ ,$$

$$\mathrm{Tang.}(z+\beta)=\frac{\mathrm{Tang.}z+\mathrm{Tang.}\beta}{1-\mathrm{Tang.}\beta\mathrm{Tang.}z}=\frac{v+n}{1-nv}\ ;$$

$$\mathrm{Tang.}(z+\alpha')=\frac{\mathrm{Tang.}z+\mathrm{Tang.}\alpha'}{1-\mathrm{Tang.}\alpha'\mathrm{Tang.}z}=\frac{v+m'}{1-m'v}\ ,$$

$$\mathrm{Tang.}(z+\beta')=\frac{\mathrm{Tang.}z+\mathrm{Tang.}\beta'}{1-\mathrm{Tang.}\beta'\mathrm{Tang.}z}=\frac{v+n'}{1-n'v}\ ;$$

substituant ces valeurs dans les équations du problème, et chassant les dénominateurs, elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l} (1-mv)(1-nv)y^2+(v+m)(v+n)x^2=0\ , \\ (1-m'v)(1-n'v)y^2+(v+m')(v+n')x^2=0\ . \end{array}\right\}\ (2)$$

En éliminant l'une des deux inconnues x et y entre ces deux équations, l'autre disparaîtra aussi, et il viendra

$$(v+m)(v+n)(m'v-1)(n'v-1)-(v+m')(v+n')(mv-1)(nv-1(=0;$$

ou, en développant et ordonnant,

$$(mn-m'n')v^4+\left.\begin{array}{r}(m'+n')(1+mn)\\-(m+n)(1+m'n')\end{array}\right|v^3+\left.\begin{array}{r}(m'+n')(1+mn)\\-(m+n)(1+m'n')\end{array}\right|v-(mn-mn')=0$$

ou encore

$$(mn-m'n')(v^4-1)+\{(m'+n')(1+mn)-(m+n)(1+m'n')\}v(v^2+1)=0;$$

supprimant donc le facteur v^2+1, qui ne saurait être nul, on parviendra à cette équation du second degré

$$(mn-m'n')v^2+\{(m'+n')(1+mn)-(m+n)(1+m'n')\}v-(mn-m'n')=0,$$

qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$\frac{2v}{1-v^2}=\frac{2(mn-m'n')}{(m'+n')(1+mn)-(m+n)(1+m'n')};$$

mais

$$\frac{2v}{1-v^2}=\frac{2\text{Tang.}z}{1-\text{Tang.}^2z}=\text{Tang.}2z;$$

donc finalement

$$\text{Tang.}2z=\frac{2(mn-m'n')}{(m'+n')(1+mn)-(m+n)(1+m'n')};$$

Or, on a

mn

$$mn-m'n'=\text{Tang.}\alpha\text{Tang}\beta-\text{Tang.}\alpha'\text{Tang.}\beta'=\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Sin}\beta\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha\text{Cos}\beta\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\beta'}{\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'},$$

$$m+n=\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta=\frac{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}{\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta},$$

$$m'+n'=\text{Tang.}\alpha'+\text{Tang.}\beta'=\frac{\text{Sin.}(\alpha'+\beta')}{\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'},$$

$$1+mn=1+\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\beta=\frac{\text{Cos.}(\alpha-\beta)}{\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta},$$

$$1+m'n'=1+\text{Tang.}\alpha'\text{Tang.}\beta'=\frac{\text{Cos.}(\alpha'-\beta')}{\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'};$$

il viendra donc, en substituant,

$$\text{Tang.}2z=\frac{2(\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\beta')}{\text{Cos.}(\alpha-\beta)\text{Sin.}(\alpha'+\beta')-\text{Cos.}(\alpha'-\beta')\text{Sin.}(\alpha+\beta)};$$

formule que l'on pourra encore écrire ainsi

$$\text{Tang.}2z=\frac{\text{Cos.}(\alpha'+\beta')\text{Cos.}(\alpha-\beta)-\text{Cos.}(\alpha+\beta)\text{Cos.}(\alpha'-\beta')}{\text{Sin.}(\alpha'+\beta')\text{Cos.}(\alpha-\beta)-\text{Sin.}(\alpha+\beta)\text{Cos.}(\alpha'-\beta')}.$$

L'angle z, que fait l'un des diamètres principaux avec notre droite indéfinie, étant connu par cette formule, le rapport de grandeur $\frac{y}{x}$ des deux diamètres principaux sera donné par l'une ou l'autre des équations (1), d'où l'on tire

$$\frac{y}{x}=\sqrt{-\text{Tang.}(z+\alpha)\text{Tang.}(z+\beta)}=\sqrt{-\text{Tang.}(z+\alpha')\text{Tang.}(z+\beta')}.$$

Tout ce qui précède s'applique au surplus littéralement à l'hyperbole, pourvu que, dans les dernières formules, on change le signe $-$ en $+$ sous les radicaux.