ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 232 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 368-373

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__368_1>

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 232 de ce volume ;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences, professeur de mathématiques au collége de Pezenas.

Théorème I. La droite qui va du sommet de l'angle circonscrit à une section conique au centre de la courbe divise la corde de contact en deux parties égales.

Démonstration. Supposons, en premier lieu, que la courbe soit une ellipse, et projetons la figure orthogonalement de telle sorte que la projection de l'ellipse soit un cercle ; on aura ainsi un angle circonscrit au cercle avec sa corde de contact, et il est connu qu'alors le centre, le milieu de la corde et le sommet de l'angle, lesquels

lesquels sont ici les projections des points correspondans de la figure primitive, seront en ligne droite ; d'où il suit que les points dont ceux-là sont les projections y seront aussi.

Voilà donc la proposition démontrée pour l'ellipse ; et on voit en outre que, comme dans le cercle, la distance du centre au point où la droite qui va de ce centre au sommet de l'angle circonscrit coupe la courbe, est moyenne proportionnelle entre les distances de ce centre à ce sommet et au milieu de la corde de contact, il en doit être de même pour l'ellipse ; propriété qu'on n'avait démontrée jusqu'ici que pour le seul cas où le sommet de l'angle est sur l'un des diamètres principaux.

Ces propriétés étant tout-à-fait indépendantes des valeurs qu'on voudra donner aux deux diamètres principaux de l'ellipse, elles devront encore avoir lieu lorsque l'un d'eux sera infini ou imaginaire ; c'est-à-dire, lorsque l'ellipse deviendra une parabole ou une hyperbole. Toutefois, ceux qui ne trouveraient pas ces propriétés suffisamment demontrées, pour ces deux dernières courbes, par ce qui précède, pourront recourir à la démonstration analitique que voici (*).

Soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+C'=0\ , \qquad (1)$$

(*) M. Durrande, qui s'est aussi occupé de la même question, démontre la proposition, pour une section conique quelconque, en considérant que si l'on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués dont l'un soit parallèle à la corde de contact, les deux extrémités de cette corde auront une abscisse commune ; d'où il suit que les soustangentes de ces deux points seront égales, et qu'ainsi les deux tangentes iront concourir en un même point de la droite qui joint le centre au milieu de la corde de contact.

On parviendrait encore au but en observant, 1.° que la proposition est évidente lorsque le sommet de l'angle circonscrit est sur l'un des diamètres principaux ; 2.° qu'on peut toujours, par une projection orthogonale convenable, ramener les autres cas à celui-là.

J. D. G.

l'équation d'une section conique quelconque rapportée à deux axes quelconques, son centre sera donné par le système des deux équations

$$Ax+Cy+A'=0\ ,\qquad By+Cx+C'=0\ .\qquad (2)$$

Si l'on suppose que l'équation de la droite menée de l'origine à ce centre soit $y=mx$; en éliminant x et y entre cette équation et les équations (2), on trouvera

$$m=\frac{AB'-CA'}{BA'-CB'}\ ,$$

de sorte que l'équation de la droite menée de l'origine au centre sera réellement

$$(BA'-CB')y=(AB'-CA')x\ :\qquad (3)$$

Cela posé, supposons que les axes des coordonnées soient les côtés de l'angle circonscrit lui-même, et désignons par a et b les distances de son sommet aux points où il touche la courbe; la distance a étant prise sur l'axe des x, et la distance b sur celui des y. Il faudra qu'en faisant $y=0$ dans (1) elle devienne, à un multiplicateur près, le quarré de $x-a$; et qu'en y faisant $x=0$, elle devienne, aussi à un multiplicateur près, le quarré de $y-b$; on devra donc avoir les deux équations identiques

$$Ax^2+2A'x+C'=A(x-a)^2\ ,\ By^2+2B'y+C'=B(y-b)^2\ ;$$

ou, en développant et réduisant,

$$2(A'+Aa)x+(C'-Aa^2)=0\ ,\quad 2(B'+Bb)y+(C'-Bb^2)=0\ .$$

Cela donnera

$$A'+Aa=0\ ; \qquad B'+Bb=0\ ,$$

$$Aa^2=C'\quad , \qquad Bb^2=C'\quad .$$

les équations de la première ligne donnent

$$a=-\frac{A'}{A}\ , \qquad b=-\frac{B'}{B}\ ; \qquad (4)$$

qui, substituées dans celles de la seconde, donnent les deux équations de condition

$$A'^2-AC'=0\ , \qquad B'^2-BC'=0\ ; \qquad (5)$$

qui expriment que les axes des coordonnées sont tangens à la courbe, il en résulte

$$A=\frac{A'^2}{C'}\ ; \qquad B=\frac{B'^2}{C'}\ ;$$

qui, substitués dans les valeurs (4) des distances de l'origine aux points de contact, les changent en celles-ci,

$$a=-\frac{C'}{A'}\ , \qquad b=-\frac{C'}{B'}\ ; \qquad (6)$$

d'après quoi les équations du milieu de la corde de contact seront

$$x=-\frac{C'}{2A'}\ , \qquad y=-\frac{C'}{2B'}\ . \qquad (7)$$

Les mêmes valeurs de A et B, substituées dans l'équation (3) de la droite qui joint le centre au sommet de l'angle circonscrit, la changent en celle-ci

$$B'(A'B'-cc')y=A'(A'B'-cc')x \;,$$

ou simplement

$$B'y=A'x \;; \qquad (8)$$

or, cette équation est satisfaite par les valeurs (7) ; donc, la droite qui joint le centre avec le sommet de l'angle circonscrit passe par le milieu de la corde de contact.

En mettant dans l'équation (1) les valeurs de A et B, elle devient

$$A'^2x^2+B'^2y^2+2CC'xy+2A'C'x+2B'C'y+C'^2=0 \;;$$

qui, combinée avec (8), donne pour l'abscisse de l'intersection de la courbe avec la droite qui va du centre au sommet de l'angle inscrit.

$$x=C'.\frac{-2A'B'\pm\sqrt{2A'B'(A'B'-CC')}}{2A'(A'B'+CC')} \;;$$

ces mêmes valeurs de A et B, mises dans les équations (2), donnent, pour l'abscisse du centre,

$$x=-\frac{B'C'}{A'B'+CC'} \;;$$

enfin, nous avons trouvé pour l'abscisse du milieu de la corde de contact

$$x=-\frac{C'}{2A'} \;.$$

En conséquence, les projections sur l'axe des x des distances du centre, 1.° au milieu de la corde ; 2.° au point d'intersection avec la courbe ; 3.° au sommet de l'angle, seront respectivement

$$\frac{C'(A'B'-C\mathfrak{C}')}{2A'(A'B'+CC')}\,,\qquad \frac{C'\sqrt{2A'B'(A'B'-CC')}}{2A'(A'B'+CC')}\,,\qquad \frac{B'C'}{A'B'+CC'}\,;$$

or, la seconde est moyenne pjoportionnelle entre les deux autres ; donc la même relation doit avoir lieu entre les distances dont elles sont les projections.

THÉORÈME II. La droite qui va du sommet du cône circonscrit à une surface du second ordre au centre de cette surface passe par le centre de la ligne de contact.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence presque évidente du précédent. Concevons en effet un plan quelconque passant par la droite qui joint le sommet du cône au centre de la surface dont il s'agit ; ce plan coupera le cône et la surface à laquelle il est circonscrit suivant un angle circonscrit à une section conique qui aura même centre que cette surface ; d'où il suit, par le précédent théorème, que le point où la droite qui joint le sommet du cône au centre de la surface perce le plan de la ligne de contact, sera le milieu de la corde de contact ; mais cette corde est aussi une corde de la ligne de contact menée par ce même point ; donc le point dont il s'agit est tel que toutes les cordes de la ligne de contact qui y passent y ont leur milieu ; c'est donc en effet le centre de cette ligne.

Il est aisé de voir de plus qu'ici encore la distance du centre au point où notre droite perce la surface est moyenne proportionnelle entre les distances du même centre au sommet du cône et au centre de la ligne de contact (*).

(*) M. Durrande a également démontré ce dernier théorème.

J. D. G.