ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analise élémentaire. De l'élimination dans les équations du premier degré

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 281-284
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__281_0>

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

De l'élimination dans les équations du premier degré ;

Par M. Gergonne.

Soit l'équation du premier degré à une seule inconnue

$$ax+b=0\,, \qquad (1)$$

on en tire évidemment

$$x=-\frac{b}{a}\,;$$

Si l'on avait une seconde équation

$$a'x+b'=0\,, \qquad (2)$$

le problème se trouverait plus que déterminé, et ne pourrait être résolu qu'autant que la valeur de x, déduite de la première équation, satisferait à la seconde, c'est-à-dire, qu'autant qu'on aurait

$$-a'\frac{b}{a}+b'=0\,;$$

c'est-à-dire,

$$a'b-ab'=0\,: \qquad (3)$$

Telle est donc l'équation de condition nécessaire pour que les deux équations (1, 2) puissent avoir lieu en même temps.

Soient présentement les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} a\,x+b\,y+c\,=0\,, \\ a'x+b'y+c'=0\,, \end{array}\right\}\ (1')$$

Si l'on nous donnait la valeur de y, dès-lors $by+c$, $b'y+c'$ deviendraient des termes connus, et la recherche de x rentrerait dans le problème plus que déterminé à une inconnue qui vient de nous occuper ; la valeur donnée pour y devrait donc être telle qu'on eût (3)

$$a(b'y+c')-a'(by+c)=0\ ;$$

mais, si y n'est pas encore déterminée, on se trouvera à temps de faire en sorte que cette dernière équation soit satisfaite ; et il ne s'agira pour cela que de prendre y égale à la valeur qu'elle donne pour cette inconnue, c'est-à-dire ;

$$y=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},$$

d'où on déduit, par une simple permutation de lettres

$$x=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\ ;$$

et telles sont, conséquemment, les valeurs de x, y déduites des équations (1').

Si, outre ces deux équations, on avait encore

$$a''a+b''y+c''=0\ , \qquad (2')$$

le problème se trouverait plus que déterminé, et ne pourrait être résolu qu'autant que les valeurs de x et y déduites des équations (1') satisferaient à cette dernière, c'est-à-dire, qu'autant qu'on aurait

$$-a''.\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}-b''.\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}+c''=0\ ,$$

c'est-à-dire,

$$(a'b''-b'a'')c+(a''b-b''a)c'+(ab'-ba')c''=0. \qquad (3')$$

Telle est donc l'équation de condition nécessaire pour que les trois équations (1', 2') puissent avoir lieu en même temps.

Soient, en troisième lieu, les équations

$$\left.\begin{aligned} a\,x+b\,y+c\,z+d\,&=0\ ,\\ a'x+b'y+c'z+d'&=0\ ,\\ a''x+b''y+c''z+d''&=0\ .\end{aligned}\right\}\quad(1'')$$

Si l'on nous donnait la valeur de z, dès-lors $cz+d$, $c'z+d'$, $c''z+d''$ deviendraient des termes connus, et la recherche de x et y rentrerait dans le problème plus que déterminé à deux inconnues qui vient en dernier lieu de nous occuper; la valeur donnée pour z devrait donc être telle qu'on eut (3')

$$(a'b''-b'a'')(cz+d)+(a''b-b''a)(c'z+d')+(ab'-ba')(c''z+d'')=0$$

mais, si z n'est pas encore déterminé, on se trouvera à temps de faire en sorte que cette dernière équation soit satisfaite; et il ne s'agira que de prendre z égal à la valeur qu'elle donne pour cette inconnue, c'est-à-dire,

$$z=-\frac{(a'b''-b'a'')d+(a''b-b''a)d'+(ab'-ba')d''}{(a'b''-b'a'')c+(a''b-b''a)c'+(ab'-ba')c''}\,;$$

d'où on déduit, par une simple permutation de lettres

$$x=-\frac{(b'c''-c'b'')d+(b''c-c''b)d'+(bc'-cb')d''}{(b'c''-c'b'')a+(b''c-c''b)a'+(bc'-cb')a''}\,,$$

$$y=-\frac{(c'a''-a'c'')d+(c''a-a''c)d'+(ca'-ac')d''}{(c'a''-a'c'')b+(c''a-a''c)b'+(ca'-ac')b''}\,;$$

et telles sont, conséquemment, les valeurs de x, y, z déduites des équations (1''); valeurs dans lesquelles la différence des dénominateurs n'est qu'apparente, comme il est aisé de l'apercevoir.

Si, outre ces trois équations, on avait encore

$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0\ ,\qquad(2'')$$

le problème se trouverait plus que déterminé, et ne pourrait être résolu qu'autant que les valeurs de x, y, z, déduites des équations (1''), satisferaient à l'équation (2''), c'est-à-dire, qu'autant qu'on aurait

$$\left.\begin{aligned}
&-a'''.\frac{(b'c''-c'b'')d+(b''c-c''b)d'+(bc'-cb')d''}{(b'c''-c'b'')a+(b''c-c''b)a'+(bc'-cb')a''}\\
&-b'''.\frac{(c'a''-a'c'')d+(c''a-a''c)d'+(ca'-ac')d''}{(c'a''-a'c'')b+(c''a-a''c)b'+(ca'-ac')b''}\\
&-c'''.\frac{(a'b''-b'a'')d+(a''b-b''a)d'+(ab'-ba')d''}{(a'b''-b'a'')c+(a''b-b''a)c'+(ab'-ba')c''}\\
&+d'''
\end{aligned}\right\}=0;$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{aligned}
&(a'b''c'''-a'c''b'''+c'a''b'''-b'a''c'''+b'c''a'''-c'b''a''')d\\
&+(a''b'''c-a''c'''b+c''a'''b-b''a'''c+b''c'''a-c''b'''a)d'\\
&+(a'''bc'-a'''cb'+c'''ab'-b'''ac'+b'''ca'-c'''ba')d''\\
&+(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')d'''
\end{aligned}\right\}=0.\ (3'')$$

Telle est donc l'équation de condition nécessaire pour que les quatre équations (1'', 2'') puissent avoir lieu en même temps.

Nous voilà donc parvenus, sans calcul, et en n'ayant absolument que la simple peine d'écrire, à la construction des formules générales qui résolvent les problèmes déterminés du premier degré à une, deux et trois inconnues ; et on voit qu'il ne nous en coûterait que la même peine pour aller plus avant. Nous avons en outre obtenu, chemin faisant, l'équation de condition qui doit avoir lieu, dans chaque cas, lorsque le nombre des équations surpasse d'une unité celui des inconnues, pour que le problème soit possible.

Cette méthode nous paraît plus briève encore que celle des multiplicateurs indéterminés ; même en la présentant comme nous l'avons fait à la page 47 du II.e volume de ce recueil ; et nous ne lui préférons que la théorie de M. Laplace que nous avons développée à la page 148 du IV.e volume ; mais cette théorie pouvant paraître un peu trop au-dessus de la portée des commençans, nous avons pensé qu'il pourrait n'être pas inutile pour eux de la remplacer d'abord par ce qui précède.

QUESTIONS