ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

H. G. SCHMIDTEN

Analise transcendante. Recherches sur les intégrales définies

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 205-222
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__205_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les intégrales définies ;

Par M. H. G. Schmidten.

TOUTE fonction se développant, en général, suivant les puissances de la variable indépendante, on peut toujours mettre une fonction quelconque $F(t)$ sous la forme $S.y_xt^x$, le signe S s'étendant à tous les nombres entiers, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et y_x étant indépendant de t.

Cela posé, le problème général de la sommation des suites revient à transformer la quantité $S.y_xt^x$ de la manière la plus propre à l'évaluation de la fonction $F(t)$; et les différentes méthodes qu'offre l'analise pour cet objet, soit par le calcul des différences finies, soit par les substitutions employées par Euler, se ramènent toutes aux *fonctions génératrices*.

Mais si, au lieu de transformer de diverses manières la série qui équivaut à la fonction $F(t)$, on se proposait d'en déduire de nouvelles, qui répondissent à certaines conditions, le problème serait essentiellement différent du premier ; et les différentes méthodes qui se présentent, dans cette partie de l'analise, se rattachent presque toutes à la théorie des *intégrales définies*, quoiqu'on voie difficilement la liaison qui existe entre elles. C'est pourquoi je me propose de présenter quelques recherches où elles sont comprises comme des conséquences d'un seul principe que je vais d'abord exposer dans toute sa généralité.

Soit ∇U une fonction quelconque linéaire de U, c'est-à-dire telle que $\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V$, et pouvant par conséquent renfermer un nombre quelconque de différentiation et d'intégrations par rapport à toutes les variables contenues dans U, on aura $\nabla.\mathrm{F}(t)=\mathrm{S}.y_x\nabla.t^x$, en supposant que le signe ∇ se rapporte uniquement à la quantité t ; faisant donc $\nabla t^x=z_x$, on aura $\nabla.\mathrm{F}(t)=\mathrm{S}.y_x z_x$. L'on voit ainsi que chaque forme différente de ∇ mène à une valeur différente de z_x, et par conséquent de $\mathrm{S}.y_x z_x$; mais, dans l'impossibilité de les parcourir toutes, il faut se borner à celles qui se présentent naturellement les premières, et qui peuvent servir de base à des recherches plus compliquées.

La forme la plus simple que l'on puisse donner à ∇, après celle d'un simple produit, est la forme différentielle. En supposant, pour plus de généralité, $t=U$, et de plus U et U_1 des fonctions quelconques de u, on aura

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}.U_1\mathrm{F}(U)=\mathrm{S}.y_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}.U_1U^x=\mathrm{S}\,y_x z_x .$$

Donnant, par exemple, à U et U_1 des formes de puissances ou d'exponentielles, on aura z_x de la forme $(n+mx)u^{n+mx-1}$, ou $(a+bx)e^{(c+bx)u}$; et l'on en peut déduire une infinité d'autres séries, en continuant les mêmes opérations si loin qu'on voudra. Si ∇ avait la forme d'une différence ou intégale aux différences finies, on ne trouverait facilement des résultats élégans que lorsque U et U_1 auraient la forme d'exponentiels; mais ces opérations n'ayant d'ailleurs aucune difficulté, je vais m'occuper du cas où ∇ a la forme d'une intégrale ordinaire ; ce qui donne lieu à des conséquences très-variées et très-remarquables. Mais, pour ne pas être entraîné en des recherches trop compliquées, je me bornerei à la comparaison des séries à simple entrée, et c'est ce qu'on fait en admettant pour les quantités U_1 et U des formes qui ne soient pas plus générales que celle du binome, dont on sait que les fonctions exponentielles et circulaires ne sont que des cas particuliers.

Dans cette supposition, le principe qui sert de base aux recherches contenues dans ce mémoire se réduit au fond à celui que Euler a employé le premier pour représenter, par des intégrales définies, la série qui intègre une certaine espèce d'équations différentielles; mais, si on l'expose dans toute sa généralité, on voit s'y rattacher les résultats les plus généraux qu'on ait obtenu sur la théorie des intégrales définies. Parmi les résultats que présente cette théorie, il faut bien distinguer ceux qui comprennent une infinité de fonctions différentes, assujetties seulement à une propriété commune, de ceux qui, par leur nature, se bornent à une classe particulière de fonctions; et, quoique ceux-ci soient presque tous trouvés par des considérations particulières et par des artifices très-divers, il faut néanmoins qu'ils se déduisent, comme des corollaires, de ceux-là.

En effet, la méthode générale, dont nous allons exposer les conséquences, consiste à former l'équation

$$\int U_1 \mathrm{F}(U) du = \mathrm{S} y_x \int U_1 U^x du = \mathrm{S} y_x z_x \ ,$$

où il s'agit de déterminer z_x, pour les différentes formes de U_1 et de U, la variable u étant prise entre des limites convenables. D'abord, on peut laisser à $\mathrm{F}(U)$ et à y_x une forme quelconque, ce qui donne une grande généralité à celles qui en résultent. Ainsi, par exemple, si l'on substitue pour U_1 et U des exponentielles imaginaires, on en déduira, par des considérations très-simples que nous exposerons plus bas, le théorème de M. Fourier. Mais, la plupart des recherches qu'on a faites sur les intégrales définies dépendent de valeurs particulières de y_x, parmi lesquelles on s'est sur-tout attaché à discuter celles qui ramènent en même temps les deux séries $\mathrm{S}.y_x$ et $\mathrm{S}.y_x z_x$ à des fonctions qu'on a adoptées dans la langue analitique. C'est ainsi, par exemple, que la supposition

$y_x = \frac{(-a^x)^x}{1.2.3.\ldots.x}$ fait la première égale à Cos.a, et celle de $U = u^2$, $U_1 = e^{-u^x}$ fait la seconde égale à $\frac{\sqrt{\varpi}}{2}.e^{-\frac{u}{4}}$. Cependant, il faut encore, dans cette partie, remarquer des formes fondamentales, d'où dépendent un grand nombre de formes secondaires plus ou moins élégantes, telles sont, par exemple,

$$\int \frac{\text{Cos}.mu}{n^2+u^2}\text{d}u\ , \qquad \int u^a e^{-u}\text{Cos}.mu.\text{d}u\ , \quad \text{etc.}$$

qu'on a trouvées par la réduction à des équations différentielles, par le passage du réel à l'imaginaire, etc. Nous aurons soin de les exposer, comme des corollaires de la formule générale

$$\int U_1 \text{F}(U)\text{d}u = \text{S}y_x \int U_1 U^x \text{d}u\ ;$$

et ne supposant pas U_1 et U des fonctions plus générales que le binome, nous rappellerons seulement la formule connue

$$\int u^{m-1}\text{d}u(1-au^n)^p = u^{m-n}(1-au^n) + \frac{m-n}{a(m+np)}\int u^{m-n-1}(1-au^n)^p\text{d}u\ ;$$

d'où on tire, en supposant n, p et $m-rn-1$ positifs, et prenant l'intégrale depuis $u=0$ jusqu'à $u = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$,

$$\int u^{m-1}\text{d}u(1-au^n)^p = \frac{(m-n)(m-2n)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (m-rn)}{a^r(m+np)[m+n(p-1)]\ldots[m+n(p-r+1)]}\int u^{m-rn-1}(1-au^n)^p\text{d}u$$

Faisant d'abord $U=u$ et $U_1=(1-au^n)^p$, on aura

$$\int u^x(1-au^n)^p\text{d}u = z_x\ ;$$

mais il est facile de voir, par la formule précédente, que cette quantité doit, en général, dépendre d'un nombre n d'intégrales différentes. En effet, x étant un nombre entier, on peut toujours lui donner la forme d'un multiple de n plus un nombre entier moindre que n, en supposant ce dernier nombre également entier, ce qui donne les rélations suivantes :

$$\int u^{rn}(1-au^n)^p du = \frac{1(1+n)\ldots\ldots[1+(r-1)n]}{a^r[1+(p+1)n]\ldots[1+(p+r)n]}\int(1-au^n)^p du\ ,$$

$$\int u^{rn+1}(1-au^n)^p du = \frac{2(2+n)\ldots\ldots[2+(r-1)n]}{a^r[2+(p+1)n]\ldots[2+(p+r)n]}\int u(1-au^n)^p du\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\int u^{rn+n-1}(1-au^n)^p du = \frac{n.2n.3n\ldots\ldots rn}{a^r(p+2)n\ldots(p+r+1)n}\int u^{n-1}(1-au^n)^p du\ ;$$

d'où l'on déduit

$$\int du(1-au^n)^p F(u) = \left\{y_0 + \frac{1}{a[1+(p+1)n]}y_n + \frac{1(1+n)}{a^2[1+(p+1)n][1+(p+2)n]}y_{2n} + \ldots\right\}\int(1-au^n)^p du$$

$$+\left\{y_1 + \frac{2}{a[2+(p+1)n]}y_{n+1} + \frac{2(2+n)}{a^2[2+(p+1)n][2+(p+2)n]}y_{2n+1} + \ldots\right\}\int(1-au^n)^p u du$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{y_{n-1} + \frac{1}{a(p+2)}y_{2n-1} + \frac{1.2}{a^2(p+2)(p+3)}y_{3n-1} + \ldots\right\}\int(1-au^n)^p u^{n-1} du\ ;$$

et, dans le cas particulier où $a=\frac{b}{p}$ et $p=\infty$, on aura

$$\int du.e^{-bu^n}.F(u) = \left\{y_0 + \frac{1}{bn}y_n + \frac{1(1+n)}{b^2.n^2}y_{2n} + \ldots\right\}\int e^{-bu^n}du$$

$$+\left\{y_1 + \frac{2}{bn}y_{n+1} + \frac{2(2+n)}{b^2.n^2}y_{2n+1} + \ldots\right\}\int ue^{-bu^n}du$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{y_{n-1} + \frac{1}{b}y_{2n-1} + \frac{1.2}{b^2}y_{3n-1} + \ldots\right\}\int u^{n-1}e^{-bu^n}du\ .$$

Ces n suites infinies se réduisent à une seule, dans le cas où la fonction $\mathrm{F}(t)$ ne contient que les puissances de t^n; car, en faisant $\mathrm{F}(t)=\mathrm{f}(t^n)=\mathrm{S}.\nu_x t^{xn}$, on aura

$$\int(1-au^n)^p u^q \mathrm{f}(u^n)\mathrm{d}u=\mathrm{S}.\nu_x\int(1-au^n)^p u^{q+nx}\mathrm{d}u$$

$$=\mathrm{S}.\nu_x.\frac{q(q+n)\ldots\ldots[q+(x-1)n]}{a^x[q+(p+1)n]\ldots.[q+(p+x)n]}\int(1-au^n)^p u^q\mathrm{d}u\ .$$

Pouvant répéter ces opérations tant de fois qu'on voudra, on formera facilement l'équation

$$\frac{\int^{n}(1-au^{\varepsilon}{}_{n})^{\frac{p_n}{\varepsilon}}u_n^{m_n-1}\ldots.(1-au^{\varepsilon}{}_{2})^{\frac{p_2}{\varepsilon}}u_2^{m_2-1}(1-au^{\varepsilon}{}_{1})^{\frac{p_1}{\varepsilon}}u_1^{m_1-1}\mathrm{f}(u^{\varepsilon}{}_{n},u^{\varepsilon}{}_{n-1},\ldots.u^{\varepsilon}{}_{1})\mathrm{d}u_n\ldots\mathrm{d}u_1}{T_n\ldots\ldots T_2.T_1}$$

$$=\mathrm{S}.\frac{m_1m_2\ldots.m_n.(m_n+\varepsilon)\ldots.(m_n+\varepsilon)\ldots.[m_1+(x-1)\varepsilon]\ldots.[m_n+(x-1)\varepsilon]}{a^{nx}(m_1+p_1+\varepsilon)\ldots..(m_n+p_n+\varepsilon)\ldots..(m_1+p_1+x\varepsilon)\ldots..(m_n+p_n+x\varepsilon)}\nu_x\ ;$$

Les qualités ε, m_1, m_2, ..., p_1, p_2, ... étant des constantes quelconques, assujetties à la seule condition de ne pas rendre les intégrales infinies entre les limites assignées; et chacune des quantités T_1, T_2, ... ayant la forme

$$T_r=\int(1-au^{\varepsilon}{}_{r})^{\frac{p_r}{\varepsilon}}u_r^{m_r-1}\mathrm{d}u_r\ ;$$

toutes ces intégrales étant prises d'ailleurs entre les limites o et $\sqrt[\varepsilon]{\frac{1}{a}}$.

On trouve facilement que cette formule donne, sous forme finie, l'intégrale de l'équation

$$\frac{A_0+B_0x^{\varepsilon}}{1}.\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+\frac{A_1+B_1x^{\varepsilon}}{x}.\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\ldots.+\frac{A_n+B_nx^{\varepsilon}}{x^n}.y=\varkappa x^{\beta}\ .$$

En effet, l'on trouve, par un procédé que j'ai exposé ailleurs (*Annales*, tom. XI) pour la valeur complète de y, un nombre $n+1$ de séries, dont chacune présente un nombre de constantes égal à celui des quantités m_1, m_2, ..., p_1, p_2, ... Quant à la fonction $f(u^s)$, on trouve que, pour ce cas, elle prend la forme $\frac{1}{1-\delta u^s}$, les quantités ν_0, ν_1, ν_2, ... devant être de simples puissances d'une constante δ.

Nous avons uniquement considéré le cas où l'intégrale

$$\int(1-au^n)^p\mathrm{F}(u)\mathrm{d}u$$

se ramène à une seule série, pour des valeurs quelconques de n, et nous allons maintenant discuter les simplifications que comportent des valeurs particulières de cette quantité. D'abord, il est facile de voir que, lorsque $n=1$, on n'aura jamais qu'une seule série pour l'intégrale proposée ; mais il est encore possible d'y ramener le cas où $n=2$. En effet, si l'on observe que l'intégrale

$$\int(1-au^2)^pu\mathrm{d}u\ ,$$

prise depuis $u=-\sqrt{\frac{1}{a}}$ jusqu'à $u=+\sqrt{\frac{1}{a}}$ est $=0$, on verra que la valeur de

$$\int(1-au^2)^p\mathrm{F}(u)\mathrm{d}u$$

se réduit à la seule série

$$\left\{y_0+\frac{1}{a(3+2p)}y_2+\frac{1.3}{a^2(3+2p)(5+2p)}y_4+\ldots\right\}\int(1-au^2)^p\mathrm{d}u,\ \left\{\begin{matrix}u=-\sqrt{\frac{1}{a}}\\ u=+\sqrt{\frac{1}{a}}\end{matrix}\right\}$$

Si l'on suppose $a=\frac{b}{p}$ et $p=\infty$, on a la formule par laquelle M. Laplace a présenté, sous forme finie, l'intégrale de l'équation

$\frac{dz}{dy}=\frac{d^2z}{dx^2}$. Pour les autres valeurs de n, il paraît, en général, impossible de ramener à une seule les n séries différentes ; c'est pourquoi nous nous bornerons, pour le moment, aux cas où $n=1$ ou 2.

Soit donc $U=u^\alpha(1-au)^\beta$ et $U_1=u^\gamma(1-au)^\delta$, on aura, en supposant α et γ des nombres entiers,

$$\int u^\gamma(1-au)^\delta \mathrm{F}[u^\alpha(1-au)^\beta]du=$$

$$S.y_x\frac{1.2.3\ldots\ldots(\gamma+\alpha x)}{(1+\delta+\beta x)\ldots\ldots[1+\delta+\gamma+(\beta+\alpha)x]a^{\gamma+\alpha x+1}}\;;\qquad \left\{\begin{matrix} u=0 \\ u=\frac{1}{a}\end{matrix}\right\}$$

d'où

$$\int u^\gamma e^{-\delta u}\mathrm{F}(u^\alpha,\, e^{-\beta u})du=Sy_x\frac{1.2.3\ldots(\gamma+\alpha x)}{(\delta+\beta x)^{\gamma+\alpha x+1}}\,.\qquad \left\{\begin{matrix} u=0 \\ u=\infty\end{matrix}\right\}$$

Si, par exemple, on a $\mathrm{F}(t)=e^t$, on aura

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{(\delta+\beta)^2}+\frac{1}{(\delta+2\beta)^3}+\ldots\ldots=\int e^{-\delta u}.e^{ue^{-\beta u}}du\;;$$

et si l'on fait $\mathrm{F}(t)=\mathrm{Cos}.t$,

$$\frac{1}{\delta}-\frac{1}{(\delta+\beta)^3}+\frac{1}{(\delta+2\beta)^5}-\ldots\ldots=\int e^{-\delta u}.\mathrm{Cos}.ue^{-\beta u}.du\,,$$

et ainsi de suite.

Si γ n'était pas entier, il faudrait ramener l'intégrale $\int u^{\gamma+\alpha x}(1-au)^{\delta+\beta x}$ à celle-ci

$$\frac{(\gamma+\alpha x)\ldots\ldots(\gamma+1)}{a^{\alpha x}(\gamma+\alpha x+\delta+\beta x+1)\ldots\ldots(\gamma+\delta+\beta x+2)}\int u^\gamma(1-au)^{\delta+\beta x}du\;;$$

mais x étant différent pour les différens termes de la suite, il faut

faut absolument supposer $\beta=0$, à moins que l'on ne veuille introduire une transcendante irréductible dans chaque terme.

Faisant, par exemple,

$$\gamma_x=\frac{(-c^2)^x}{1.2.3\ldots\ldots2x};$$

on aura

$$\int u^\gamma(1-au)^\delta\text{Cos}.cu.\text{d}u=$$

$$\left\{1-\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)c^2}{1.2a^2(\gamma+\delta+2)(\gamma+\delta+3)}+\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)c^4}{1\ldots4a^4(\gamma+\delta+2)\ldots(\gamma+\delta+5)}-\ldots\right\}\int u^\gamma(1-au)^\delta\text{d}u$$

d'où

$$\int u^\gamma e^{-\delta u}\text{Cos}.cu.\text{d}u=$$

$$\left\{1-\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{1.2\delta^2}c^2+\frac{(\gamma+1)\ldots.(\gamma+4)}{1.2.3.4\delta^4}c^4-\ldots\right\}\int u^\gamma e^{-\delta u}\text{d}u$$

$$=\frac{\left(1-\frac{c}{\delta}\sqrt{-1}\right)^{-(\gamma+1)}+\left(1+\frac{c}{\delta}\sqrt{-1}\right)^{-(\gamma+1)}}{2}\int u^\gamma e^{-\delta u}\text{d}u\left(\begin{matrix}u=0\\u=\infty\end{matrix}\right)$$

On fait aisément disparaître les imaginaires contenus dans cette dernière expression, en observant que

$$\text{Cos}.mx=\frac{(\text{Cos}.x)^{-m}}{2}\left\{\left(1+\sqrt{-1}\frac{\text{Sin}.x}{\text{Cos}.x}\right)^{-m}+\left(1-\sqrt{-1}\frac{\text{Sin}.x}{\text{Cos}.x}\right)^{-m}\right\}$$

et faisant $\text{Tang}.x=\frac{c}{\delta}$, d'où

$$\text{Cos}.x=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{\delta^2}}};$$

on aura ainsi

$$\text{Cos.}\left[m\,\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{c}{\delta}\right)\right]=\frac{\left(1+\frac{c^2}{\delta^2}\right)^{\frac{m}{2}}}{2}\times$$

$$\left\{\left(1+\sqrt{-1}\,\frac{c}{\delta}\right)^{-m}+\left(1-\sqrt{-1}\,\frac{c}{\delta}\right)^{-m}\right\};$$

d'où l'intégrale connue

$$\int u^{\gamma}e^{-\delta u}.\text{Cos.}cu.\text{d}u=\frac{\text{Cos.}\left[(\gamma+1)\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{c}{\delta}\right)\right]}{\left(1+\frac{c^2}{\delta^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}\int u^{\gamma}e^{-\delta u}\text{d}u\ .$$

Si, au lieu de $\text{Cos.}cu$, on avait $\text{Sin.}cu$, on procéderait d'une manière analogue.

Faisant présentement $U=u^{\alpha}(1-au^2)^{\beta}$ et $U_1=u^{\gamma}(1-au^2)^{\delta}$, l'on aura

$$\int U_1\text{F}(U)\text{d}u=S.y_x\int u^{\gamma+\alpha x}(1-au^2)^{\delta+\beta x},$$

d'où

$$\int u^{\gamma}e^{-}\quad\text{F}(u^{\alpha},e^{-\beta u^2})\text{d}u=S.y_x\int u^{\gamma+\alpha x}e^{-u^2(\delta+\beta x)}\text{d}u\ .\qquad\binom{u=-\infty}{u=+\infty}$$

Supposant $\alpha=2$ et $\gamma=2c$, on trouve, pour le second membre

$$S.y_x\,.\,\frac{1.3.5\ldots\ldots[2(c+x)-1]}{[2(\delta+\beta x)]^{c+x}(\delta+\beta x)^{\frac{1}{2}}}\int e^{-t^2}\text{d}t\ .\qquad\binom{t=-\infty}{t=+\infty}$$

Soient, par exemple, $\beta=0$, $\text{F}(U)=\text{Cos.}u$; en observant que

$$\int e^{-t^2}\text{d}t=\sqrt{\varpi}\ ,$$

on trouve facilement

$$\int e^{-\delta u^2}\text{Cos.}u.\,\text{d}u=e^{-\frac{\delta}{4}}\sqrt{\frac{\varpi}{\delta}}\ ;$$

et, si les limites étaient o et ∞, cette dernière quantité se réduirait à la moitié de sa valeur.

Mais ces recherches se continuant sans difficulté, par le principe que nous avons posé, je passe aux fonctions circulaires; et, quoique ces dernières fonctions puissent être considérées comme cas particuliers de celles que nous venons de discuter, elles exigent néanmoins des modifications remarquables.

En effet, de la formule connue

$$\int u^{m-1}(1+bu)^p du=(1+bu)^{p+1}\left\{\frac{u^{m-1}}{b(m+p)}-\frac{(m-1)u^{m-2}}{b^2(m+p)(m+p-1)}\right\}$$

$$+\frac{(m-1)(m-2)}{b^2(m+p)(m+p-1)}\int u^{m-3}(1+bu)^p du\ ,$$

en faisant

$$\frac{(1+bu\sqrt{-1})^p+(1-bu\sqrt{-1})^p}{2}=\varphi(p\ ,u)\ ,$$

$$\frac{(1+bu\sqrt{-1})^p-(1-bu\sqrt{-1})^p}{2\sqrt{-1}}=\psi(p\ ,u)\ ,$$

on tire

$$\int u^{m-1}\varphi(p\ ,u)du=\psi(p+1\ ,u)\ \frac{u^{m-1}}{b(m+p)}+\frac{(m-1)u^{m-2}\varphi(p+1\ ,u)}{b^2(m+p)(m+p-1)}$$

$$-\frac{(m-1)(m-2)}{b^2(m+p)(m+p-1)}\int u^{m-3}\varphi(p,u)du\ ,$$

et, en continuant ces opérations jusqu'à ce que l'exposant de u soit devenu $=$o, on aura deux séries dont l'une contiendra la fonction φ et l'autre la fonction ψ; et les limites qui les rendent $=$o étant différentes, il sera impossible d'assigner deux limites entre lesquelles tous les termes hors du signe d'intégration disparaissent. En conséquence, si l'on ne veut, dans le problème qui nous occupe, que des séries à simple entrée, il faudra faire $m=1$; c'est-à-dire, ne prendre pour U_1 et U que des valeurs de la forme $(1\pm bu\sqrt{-1})^p$; d'où l'on peut toujours former des quantités réelles, en réunissant deux séries où les signes soient différens.

Faisant

$$U_1=(1\pm bu\sqrt{-1})^\delta, \qquad U(1\pm bu\sqrt{-1})^\beta;$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}\int\{(1+bu\sqrt{-1})^\delta F[(1+bu\sqrt{-1})^\beta]+(1-bu\sqrt{-1})^\delta F[(1-bu\sqrt{-1})^\beta]\}du=$$

$$S.y_x.\frac{(1+bu\sqrt{-1})^{\delta+\beta x+1}-(1-bu\sqrt{-1})^{\delta+\beta x+1}}{2b(\delta+\beta x+1)\sqrt{-1}}$$

entre des limites quelconques; et, à moins que celles-ci ne rendent des termes infinis, on peut étendre le signe S à tous les nombres entiers, soit positifs, soit négatifs. Il est facile d'ailleurs de ramener cette dernière expression à une forme réelle, comme nous l'avons déjà fait plus haut. Cependant, ces formes ne mènent à des résultats élégans que lorsque les puissances se changent en exponentiels; et, si l'on fait

$$U=e^{\pm u\sqrt{-1}}, \qquad U_1=e^{\mp nu\sqrt{-1}};$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}\int[e^{-nu\sqrt{-1}}F(e^{+u\sqrt{-1}})+e^{+nu\sqrt{-1}}F(e^{-u\sqrt{-1}})]du=$$

$$S.y_x\int\frac{e^{(x-n)u\sqrt{-1}}+e^{(n-x)u\sqrt{-1}}}{2}du=S.y_x\int\text{Cos.}(x-n)u.du\ .$$

En assignant à u les limites 0 et ϖ, on réduit la dernière expression à ϖy_n, si l'on suppose qu'aucune des valeurs de x, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ne rend y_x infini.

On a ainsi, pour la même quantité y_n deux transformations différentes, dont chacune a ses avantages; nous allons présentement les discuter, en commençant par la première, où la valeur de y_n est exprimée par la fonction génératrice $F(t)$. Supposons celle-ci $= f(t, v)$; on aura, en développant suivant les puissances de t et v, la série à double entrée

$$\begin{array}{l|l|l}
a_{0,0} + a_{1,0} & v + a_{2,0} & v^2 + \ldots \\
+ t\, a_{0,1} + t\, a_{1,1} & + t\, a_{2,1} & + \ldots \\
+ t^2 a_{0,2} + t^2 a_{1,2} & + t^2 a_{2,2} & + \ldots \\
+ \ldots + \ldots & + \ldots & + \ldots
\end{array}$$

Maintenant, on peut faire v égal à une puissance quelconque entière de t; et, quelle qu'elle soit, on est toujours en état d'exprimer, par une intégrale définie, le coefficient d'une puissance quelconque de t qui provienne de cette substitution pour v. Faisant, par exemple, $v = \frac{t}{t}$, d'où le coefficient de t^n devient

$$a_{n,0} + a_{n+1,1} + a_{n+2,2} + \ldots = \frac{1}{2\pi} \int [e^{-nu\sqrt{-1}} f(e^{+u\sqrt{-1}}, e^{-u\sqrt{-1}})$$

$$+ e^{+nu\sqrt{-1}} f(e^{-u\sqrt{-1}}, e^{+u\sqrt{-1}})] du;$$

depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \pi$. Soit, par exemple, $f(t, v) = e^{te^v}$; on trouve, par cette formule, en faisant $n = 0$, la série

$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{4^2}{(1.2.3)^2} + \frac{5^3}{(1.2.3.4)^2} + \frac{6^4}{(1.2.3.4.5)^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int (e^{e^{+u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}} + e^{e^{-u\sqrt{-1}} + e^{+u\sqrt{-1}}}) du;$$

L'introduction des imaginaires dans les intégrales comportant de grandes difficultés, relativement à l'évaluation ; il est intéressant de discuter le cas le plus étendu où il serait possible de les faire disparaître ; c'est-à-dire, où les exponentiels imaginaires pourraient se réduire en des cosinus ou sinus réels. On voit que cela ne peut avoir lieu que lorsque $f(t, v)$ a la forme $f(t+v)$ où $v=\frac{1}{t}$; et, dans ce cas, on trouve pour le coefficient de t^n

$$\frac{1}{2\varpi}\int(e^{+nu\sqrt{-1}}+e^{-nu\sqrt{-1}})f(e^{+u\sqrt{-1}}+e^{-u\sqrt{-1}})du$$

$$=\frac{1}{\varpi}\int \mathrm{Cos}.nu.f(2\mathrm{Cos}.u)du \ .$$

Soit, par exemple,

$$f(t+v)=A_0+A_1(t+v)^m+A_2(t+v)^{2m}+\ldots\ldots;$$

on aura, en multipliant par $(t+v)^n$, faisant $v=\frac{1}{t}$ et prenant la partie indépendante de t dans la supposition de m et n pairs, attendu que, pour qu'elle ne soit pas nulle, il faut qu'une partie des nombres n, $n+m$, $n+2m$, $n+3m$, ... soient pairs. On aura ainsi

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{n}{2}}A_0+\frac{(n+m)\ldots\ldots\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}{1\ldots\ldots\frac{n+m}{2}}A_1+$$

$$\frac{(n-2m)\ldots\ldots\left(\frac{n+2m}{2}+1\right)}{1\ldots\ldots\frac{n+2m}{2}}A_2+\ldots=\frac{1}{\varpi}\int \mathrm{Cos}\, nu f(2\mathrm{Cos}.u)du \ .$$

Si l'on avait fait $m=1$ et $n=0$, on aurait eu

$$A_0+\frac{2}{1}A_2+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}A_4+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}A_6+\ldots\ldots=\frac{1}{\varpi}\int f(2\mathrm{Cos}.u)\mathrm{d}u \; .$$

Dans le cas particulier où la fonction $f(t, v)$, que nous avons considérée plus haut, a la forme $\psi(t)\times\varphi(u)$, en supposant

$$\psi(t)=\mathrm{S}.A_m t^m \; , \qquad \varphi(v)=\mathrm{S}.B_m v^m \; ,$$

on aura

$$\mathrm{S}.A_m B_m \qquad \text{ou} \qquad A_0B_0+A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2\varpi}\int\left[\varphi(e^{+u\sqrt{-1}})\psi(e^{-u\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-u\sqrt{-1}})\psi(e^{+u\sqrt{-1}})\right]\mathrm{d}u \; , \qquad (a)$$

c'est le théorème de Parseval.

Le cas le plus étendu où les imaginaires disparaissent étant déterminé par la condition $f(v, t)=f(v+t)$, on a ici la condition

$$f(v+t)=\varphi(v)+\psi(t)=\varphi(t)+\psi(v) \; ,$$

de laquelle on déduit facilement que les fonctions f, φ, ψ doivent avoir la forme exponentielle. En effet, on a, dans ce cas, la formule connue

$$\frac{1}{\varpi}\int e^{2\mathrm{Cos}.u}\mathrm{d}u=1+\left(\frac{1}{1}\right)^2+\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)^2+\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\right)^2+\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\right)^2+\ldots\ldots \; ,$$

que l'on pourrait aussi déduire de la formule (a) en y faisant $f(2\mathrm{Cos}.u)=e^{2\mathrm{Cos}.u}$.

Considérons présentement la seconde valeur de y_n, savoir

$$\frac{1}{\varpi}\,\mathrm{S}.y_x\int\mathrm{Cos}.(n-x)u\,\mathrm{d}u \; , \qquad \begin{pmatrix} u=0 \\ u=\varpi \end{pmatrix}$$

le signe S s'étendant à tous les nombres entiers, depuis 0 jusqu'à ∞.

D'abord, on peut donner à cette quantité une forme beaucoup plus commode, en changeant les différences finies en des différentielles : c'est ce qu'on fait en supposant

$$x=\frac{x'}{\mathrm{d}x'}\,,\quad n=\frac{n'}{\mathrm{d}x'}\,,\quad u=u'\mathrm{d}x'\,,\quad y_x=\mathrm{f}(x')\,,\quad y=\mathrm{f}(n')\;;$$

et effaçant ensuite les accens. On trouve ainsi

$$\mathrm{f}(n)=\frac{1}{\varpi}\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}u\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{Cos.}(n-x)u. \qquad \left(\begin{array}{ll} u=0\,, & x=0 \\ u=\infty\,, & x=\infty \end{array}\right)$$

Observant de même que

$$0=\mathrm{S}.y_x\int\mathrm{Cos.}(n+x)u\,\mathrm{d}u\;; \qquad \left(\begin{array}{l} u=0 \\ u=\varpi \end{array}\right)$$

le signe S s'étendant depuis o jusqu'à ∞, d'où

$$0=\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}u\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{Cos.}(x+n)u\,, \qquad \left(\begin{array}{ll} u=0\,, & x=0 \\ u=\infty\,, & x=\infty \end{array}\right)$$

on en tire les deux équations

$$\frac{\varpi}{2}\,\mathrm{f}(n)=\iint\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{Cos.}nu\,\mathrm{Cos.}xu\,,$$

$$\frac{\varpi}{2}\,\mathrm{f}(n)=\iint\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{Sin.}nu\,\mathrm{Sin.}xu\,,$$

qui sont dues à M. Fourier. Parmi un grand nombre de conséquences importantes qu'offre ce beau théorème, je vais rappeler quelques-unes des formules les plus simples et les plus remarquables de la théorie des intégrales définies, que les géomètres ont obtenues par d'autres voies.

Faisant, par exemple, $\mathrm{f}(x)=e^{-ax}$, on trouve

$\frac{\varpi}{2}$

$$\frac{\varpi}{2}e^{-ax}=\int\frac{a\,\mathrm{d}u\,\mathrm{Cos}.nu}{a^2+u^2}=\int\frac{u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{Sin}.nu}{a^2+u^2}\,; \qquad \left(\begin{matrix}u=0\\u=\infty\end{matrix}\right)$$

et l'on sait que ces formes servent de base à un grand nombre d'autres, plus ou moins élégantes, telles que

$$\int\frac{P\,\mathrm{Cos}.nu+Qu\,\mathrm{Sin}.nu}{M}\,\mathrm{d}u\,,$$

P, Q, M étant des fonctions quelconques rationnelles qui ne contiennent que des puissances paires de u, et M n'ayant aucun diviseur qui devienne zéro, pour des valeurs réelles positives de n.

De même, la fonction $\mathrm{F}(\mathrm{Cos}.u)$ étant développable, suivant des cosinus multiples, on fait dépendre de la même forme l'intégrale

$$\int\frac{\mathrm{F}(\mathrm{Cos}.u)\mathrm{d}u}{M}\,;$$

et, dans le cas où $\mathrm{F}(\mathrm{Cos}.u)$ a la forme $\mathrm{Log}.(1+a\,\mathrm{Cos}.u)$; on sait que cette intégrale se ramène à une forme finie.

Soit encore

$$\mathrm{f}(x)=\int e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\mathrm{d}t\,; \qquad \left(\begin{matrix}t=0\\t=\infty\end{matrix}\right)$$

dans ce cas, on aura

$$\frac{\varpi}{2}\int e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\mathrm{d}t=\iiint\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{Cos}.nu\,\mathrm{Cos}.xu.e.^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$$

Intégrant par rapport à t, et faisant $t^2=v$, on aura

$$\frac{\sqrt{\varpi}}{4}\iint\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{Cos}.nu.e^{-v\left(\frac{u^2}{4}+1\right)}=\sqrt{\varpi}\int\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{Cos}.nu}{4+u^2}\,;$$

d'où, comme l'on sait,

$$\int e^{-t^2-\frac{n^2}{t^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\varpi}}{2}e^{-2n}\ .$$

Mais, une des conséquences les plus générales du théorème de M. Fourier, est celle par laquelle on fait dépendre une série $\mathrm{S}.y_n\mathrm{F}(x)$ d'une autre de la forme $\mathrm{S}.y_x{}^{\mathrm{Sin.}}_{\mathrm{Cos.}}nx$. En effet, si l'on fait

$$P=y_0+y_1\mathrm{Cos.}u+y_2\mathrm{Cos.}2u+\ldots\ldots$$

on voit que

$$\frac{2}{\varpi}\iint\mathrm{F}(x)\mathrm{Cos.}xuP\mathrm{d}x\mathrm{d}u=y_0\mathrm{F}(0)+y_1\mathrm{F}(1)+y_2\mathrm{F}(2)+\ldots\ldots,$$

or, nous avons vu que, par le thorème de Parseval, on fait dépendre cette série des deux suivantes

$$y_0+y_1t+y_2t^2+y_3t^3+\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)t+\mathrm{F}(2)t^2+\ldots\ldots;$$

mais l'introduction des imaginaires rend, en général, la première de ces deux méthodes préférable à la seconde, dans tous les cas où la quantité P en est débarrassée ; comme, par exemple, lorsque les quantités y_0, y_1, y_2, ... forment une suite de puissances.

Les recherches que je viens d'exposer me paraissent donner les développemens nécessaires au principe général que j'ai présenté au commencement de ce mémoire. On en déduit une infinité d'autres, en répétant et combinant les différentes opérations qu'on y trouve exposées, et sur-tout en différentiant et intégrant par rapport à de nouvelles variables.