PAGANI MICHEL

Autres démonstrations des mêmes théorèmes et de théorèmes plus généraux

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 171-177
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__171_1>

Autres démonstrations des mêmes théorèmes et de théorèmes plus généraux ;

Par M. Pagani Michel, ingénieur italien, résidant à Genève.

L'APPLICATION du calcul différentiel à la démonstration des théorèmes proposés, au moyen de l'expression des diamètres conjugués en fonction des axes et des angles que ces diamètres font avec eux, ne pouvant offrir d'autre difficulté que la longueur des calculs, nous nous sommes cru fondés à penser qu'en demandant la démonstration de ces théorèmes, ce n'était pas tant une démonstration quelconque qu'on désirait qu'une démonstration simple et élémentaire, à la portée des jeunes-gens qui étudient l'application de l'analise algébrique à la géométrie des lignes et surfaces du second ordre.

C'est d'après cette considération que nous nous sommes proposés de démontrer les théorèmes dont il s'agit, sans rien emprunter du calcul infinitésimal, et en nous appuyant uniquement sur ces principes connus, savoir que, dans l'ellipse et l'ellipsoïde, la somme des quarrés des diamètres conjugués est une quantité constante, et que le plus grand et le plus petit des diamètres principaux sont aussi le plus grand et le plus petit de tous les diamètres.

Ayant ensuite aperçu que ces théorèmes n'étaient que des cas particuliers d'autres théorèmes plus généraux et non moins faciles à démontrer ; nous avons pensé devoir nous attacher de préférence à la démonstration de ces derniers.

THÉORÈME I. Si deux variables x , y , *constamment positives l'une et l'autre, sont liées entre elles par l'équation* $x^m+y^m=a^m+b^m$, *où* a *et* b *sont aussi des quantités positives , que l'on suppose inégales , et dans laquelle* m *est un nombre positif quelconque plus grand que l'unité ; et si* x *et* y , *ne pouvant varier qu'entre les limites* a *et* b , *peuvent d'ailleurs recevoir , entre ces limites , toutes les valeurs compatibles avec l'équation qui les lie* ; $x+y$ *et* xy *seront* maximums , *lorsqu'on aura* $x=y$, *et* minimums, *lorsqu'on aura* $x=a$, $y=b$.

Démonstration. Soit posé

$$x^m+y^m=a^m+b^m=2c^m ,$$

ce qui est permis, et soient fait ensuite

$$x^m=c^m+t , \qquad y^m=c^m-t ,$$

t étant une nouvelle variable, il viendra

$$x=c\sqrt[m]{1+\frac{t}{c^m}}=c\left\{1+\frac{1}{m}\frac{t}{c^m}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\frac{t^2}{c^{2m}}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\frac{t^3}{c^{3m}}-\ldots\right\},$$

$$y=c\sqrt[m]{1-\frac{t}{c^m}}=c\left\{1-\frac{1}{m}\frac{t}{c^m}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\frac{t^2}{c^{2m}}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\frac{t^3}{c^{3m}}-\ldots\right\};$$

d'où

$$x-y=2c\left\{\frac{1}{m}\frac{t}{c^m}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\frac{t^3}{c^{3m}}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\cdot\frac{3m-1}{4m}\cdot\frac{4m-1}{5m}\frac{t^5}{c^{5m}}+\ldots\right\},$$

$$x+y=2c-2c\left\{\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{t^2}{c^{2m}}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\cdot\frac{3m-1}{4m}\cdot\frac{t^4}{c^{4m}}+\ldots\right\};$$

on aura ensuite

$$x^m y^m=c^{2m}-t^2\ ,\quad \text{d'où}\quad xy=\sqrt[m]{c^{2m}-t^2}=c^2\sqrt[m]{1-\left(\frac{t}{c^m}\right)^2}.$$

Cela posé, on voit que t sera d'autant plus petit ou d'autant plus grand que $x-y$ sera lui-même plus petit ou plus grand, c'est-à-dire, que x et y approcheront plus ou moins de l'égalité, mais, par les expressions de $x+y$ et de xy, on voit que ces deux fonctions seront d'autant plus grandes que t sera plus petit, et d'autant moindres que t sera plus grand; donc $x+y$ et xy seront *maximums* lorsqu'on aura $x=y$, et *minimums*, lorsqu'on aura $x=a$, $y=b$.

Si l'on suppose que a, b sont les deux demi-diamètres principaux d'une ellipse; et qu'on fasse $m=2$, x et y seront deux demi-diamètres conjugués quelconques: ce théorème deviendra donc le premier des deux théorèmes proposés, et il sera démontré en outre que l'angle des diamètres conjugués, dont le sinus est en général $\frac{ab}{xy}$, devient le plus petit possible, lorsque ces diamètres sont égaux.

THÉORÈME II. Si trois variables x, y, z, *constamment positives, sont liées entre elles par l'équation* $x^m+y^m+z^m=a^m+b^m+c^m$, *où* a, b, c *sont également des quantités positives, telles qu'on a* $a>b$, $b>c$, *et dans laquelle* m *est un nombre positif quelconque plus grand que l'unité; et si* x, y, z, *ne pouvant varier qu'entre les limites* a, c, *peuvent d'ailleurs recevoir, entre ces limites, toutes les valeurs compatibles avec l'équation qui les lie;* $x+y+z$ *et* xyz *seront* maximums, *lorsqu'on aura* $x=y=z$, *et* minimums, *lorsqu'on aura* $x=a$, $y=b$, $z=c$.

Démonstration. 1.° Si l'on niait que le *maximum*, tant de $x+y+z$

que de xyz ; dût répondre au cas où $x=y=z$, il faudrait qu'on montrât des *maximums* de ces deux fonctions dans lesquels deux au moins des trois variables x, y, z fussent inégales. Supposons que ce soient x, y ; en mettant l'équation de condition sous la forme

$$x^m+y^m=a^m+b^m+c^m-z^m ,$$

et considérant z comme une constante, on voit qu'aux valeurs inégales de x, y, on pourrait (*Théor. I*) substituer des valeurs égales qui rendraient $x+y$ et xy, et conséquemment $x+y+z$ et xyz, plus grand qu'auparavant ; leurs valeurs primitives ne seraient donc point *maximums*, ainsi qu'on l'avait supposé.

2.° Si l'on niait que le *minimum*, tant de $x+y+z$ que de xyz, dût répondre au cas où deux des trois variables x, y, z ont atteint les limites de grandeur et de petitesse entre lesquelles elles se trouvent renfermées, et où conséquemment la troisième a la valeur moyenne entre ces limites, il faudrait qu'on montrât des *minimums* de ces fonctions dans lesquelles deux au moins des trois variables auraient des valeurs différentes de a, b, c ; supposons que ce soient x, y ; en mettant l'équation de condition sous la forme

$$x^m+y^m=a^m+b^m+c^m-z^m ;$$

et supposant z constant, on voit qu'il y aurait moyen de rendre x et y plus inégaux encore, sans que cette équation cessât d'avoir lieu ; mais alors (*Théor. I*) $x+y$ et xy, et par conséquent $x+y+z$ et xyz deviendraient plus petits qu'ils ne l'étaient d'abord, et conséquemment leurs valeurs primitives ne seraient point des *minimums*, ainsi qu'on l'avait d'abord supposé.

En supposant que a, b, c sont les trois demi-diamètres principaux d'une ellipsoïde, et faisant $m=2$, on pourra considérer x, y, z comme trois demi-diamètres conjugués quelconques, et notre théorème deviendra le dernier des deux théorèmes proposés.

On voit de plus qu'en poursuivant de la même manière on étendrait sans peine la proposition à un nombre quelconque de variables.

En recourant au calcul différentiel, on peut même s'élever à un théorème incomparablement plus général et démontrer que si des variables x, y, z, ..., en nombre quelconque sont liées entre elles par la condition

$$\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)+\mathrm{f}(z)+\dots\dots=\text{Const}.$$

leur somme $x+y+z+\dots\dots$ et leur produit $xyz\dots\dots$ seront *maximums*, si les deux premières dérivées $\mathrm{f}'(x)$ et $\mathrm{f}''(x)$ sont de mêmes signes; et qu'au contraire $x+y+z+\dots\dots$ sera *minimum*, si ces deux mêmes dérivées sont de signes contraires, et qu'il en sera de même de $xyz\dots\dots$, si dans ce cas on a en outre $1+x\dfrac{\mathrm{f}''(x)}{\mathrm{f}'(x)}<0$.

En effet, ne supposons, pour fixer les idées, que quatre variables x, y, z, t seulement, nous aurons d'abord, par l'équation de condition,

$$\mathrm{f}'(x)\mathrm{d}x+\mathrm{f}'(y)\mathrm{d}y+\mathrm{f}'(z)\mathrm{d}z+\mathrm{f}'(t)\mathrm{d}t=0\ ; \qquad (1)$$

posant ensuite

$$s=x+y+z+t\ ,$$

$$p=xyzt\ ;$$

nous aurons

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z+\mathrm{d}t\ , \qquad (2)$$

$$\mathrm{d}p=yzt\mathrm{d}x+ztx\mathrm{d}y+txy\mathrm{d}z+xyz\mathrm{d}t\ ; \qquad (3)$$

en mettant dans les équations (2, 3) la valeur de $\mathrm{d}t$ donnée par l'équation (1), elles deviendront

$$\mathrm{d}s=\left\{1-\frac{f'(x)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}x+\left\{1-\frac{f'(y)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}y+\left\{1-\frac{f'(z)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}z\,;$$

$$\mathrm{d}p=yz\left\{t-x\frac{f'(x)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}x+zx\left\{t-y\frac{f'(y)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}y+xy\left\{t-z\frac{f'(z)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}z\,;$$

on voit d'abord que, si l'on a $x=y=z=t$, il en résulte $\mathrm{d}s=0$; $\mathrm{d}p=0$, conditions communes au *maximum* et au *minimum*.

Par une nouvelle différentiation, on a, en considérant x, y, z, comme fonctions de t, et mettant toujours pour $\mathrm{d}t$ sa valeur donnée par l'équation (1)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2s=&-\frac{f'^2(t)f''(x)+f'^2(x)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}x^2-2\frac{f'(y)f'(z)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&-\frac{f'^2(t)f''(y)+f'^2(y)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}y^2-2\frac{f'(z)f'(x)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&-\frac{f'^2(t)f''(z)+f'^2(z)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}z^2-2\frac{f'(x)f'(y)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2p=&-yz\left\{2\frac{f'(x)}{f'(t)}+x\frac{f'^2(t)f''(x)+f'^2(x)f''(t)}{f'^3(t)}\right\}\mathrm{d}x^2\\&-zx\left\{2\frac{f'(y)}{f'(t)}+y\frac{f'^2(t)f''(y)+f'^2(y)f''(t)}{f'^3(t)}\right\}\mathrm{d}y^2\\&-xy\left\{2\frac{f'(z)}{f'(t)}+z\frac{f'^2(t)f''(z)+f'^2(z)f''(t)}{f'^3(t)}\right\}\mathrm{d}z^2\\&-2x\left\{yz\frac{f'(y)f'(z)f''(t)}{f'^3(t)}+\frac{yf'(y)+zf'(z)}{f'(t)}-t\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$-2y\left\{zx\frac{f'(z)f'(x)f''(t)}{f'(\,)}+\frac{zf'(z)+xf'(x)}{f'(t)}-t\right\}dzdx$$

$$-2z\left\{xy\frac{f'(x)f'(y)f''(t)}{f'(t)}+\frac{xf'(x)+yf'(y)}{f'(t)}-\quad\right\}dxdy\ .$$

Si nous faisons $x=y=z=t$, ces valeurs deviennent

$$d^2s=-2\frac{f''(t)}{f'(t)}(dx^2+dy^2+dz^2+dydz+dzdx+dxdy)\ ;$$

$$d^2p=2-t^2\left[1+\frac{tf''(t)}{f'(t)}\right](dx^2+dy^2+dz^2+dydz+dzdx+dxdy)\ ;$$

ou bien encore

$$d^2s=-\frac{f''(t)}{f'(t)}\{(dx^2+dy^2+dz^2)+(dx+dy+dz)^2\}\ ,$$

$$d^2p=-t^2\left[1+t\frac{f''(t)}{f'(t)}\right]\{dx^2+dy^2+dz^2)+(dx+dy+dz)^2\}\ ;$$

d'où l'on voit que s et p seront *maximums* ou *minimums*, suivant que $\frac{f''(t)}{f'(t)}$ et $1+t\frac{f''(t)}{f'(t)}$ seront *positives* ou *négatives*.

Genève, le 26 août 1821.