KRAMP

Analise transcendante. Essai d'une nouvelle méthode servant à intégrer rigoureusement, lorsque cela est possible, toute équation differentielle à deux variables

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 97-113
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__97_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai d'une nouvelle méthode servant à intégrer rigoureusement, lorsque cela est possible, toute équation différentielle à deux variables ;

Par M. le professeur KRAMP, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

1. ON sait que toute équation différentielle à deux variables a pour intégrale complète une équation, entre les mêmes variables et des constantes arbitraires, en nombre égal à celui qui désigne l'ordre de l'équation proposée ; constantes qui peuvent se trouver impliquées avec les variables de toutes les manières diverses admises dans l'analise comme moyens de combinaison. Mais, quoiqu'on démontre très-rigoureusement que, quelle que puisse être la forme de l'équation différentielle, elle a toujours une intégrale, on est bien loin encore de savoir assigner cette intégrale dans tous les cas.

2. Le problème inverse, c'est-à-dire, celui où étant donné l'intégrale complète, avec toutes ses constantes arbitraires, on propose de redescendre à son équation différentielle, délivrée de toutes ces constantes, se montre incomparablement plus traitable. Il ne s'agit en effet, pour le résoudre, que de différentier l'équation proposée autant de fois consécutivement qu'il y a de constantes

distinctes à faire disparaître, et d'éliminer ensuite ces constantes entre la proposée et ses différentielles successives. L'ordre, le degré et la forme de l'équation différentielle résultante dépendront évidemment du nombre des constantes que renfermait la proposée, et de la manière dont elles s'y trouvaient combinées avec les variables et les quantités communes.

3. Que si, ensuite, on rencontre une autre équation différentielle, de même forme que celle à laquelle on sera parvenu, on sera fondé à supposer que l'intégrale de cette dernière doit aussi être de même forme que celle de la première ; et, par un procédé analogue à la méthode des coefficiens indéterminés, on pourra essayer de remonter à celle-ci. Voilà donc un nouveau champ de recherches qui s'ouvre devant nous, et dans lequel nous allons tenter de nous engager.

4. En ne considérant, en premier lieu, que les équations du premier ordre, qui ne comportent qu'une seule constante arbitraire, et supposant qu'elles admettent une intégrale algébrique, cette intégrale ne pourra être que de la forme

$$0=(P+Qy+Ry^2+\dots)+(P'+Q'y+R'y^2+\dots)c$$
$$+(P''+Q''y+R''y^2+\dots)c^2+\dots$$

où c est la *constante arbitraire*, et où P, P', P'', ... Q, Q', Q'', ... R, R', R'', ... peuvent être supposées des fonctions rationnelles et entières de x; puisque, dans le cas où quelques-unes de ces fonctions se trouveraient affectées de dénominateurs, on pourrait toujours préalablement les faire disparaître.

5. Si de plus l'équation différentielle n'est que du premier degré seulement, la constante ne devra également entrer qu'au premier degré dans son intégrale ; c'est-à-dire, que cette intégrale sera simplement de la forme

$$o=(P+Qy+Ry^2+\ldots)+(P'+Q'y+R'y^2+\ldots)c\ .$$

Nous nous occuperons uniquement, dans le présent mémoire, des équations différentielles dont l'intégrale donne la valeur de y en x au premier degré seulement, et où conséquemment cette variable est une fonction rationnelle fractionnaire de la constante c ; c'est-à-dire, que nous ne considérerons, de l'équation précédente, que le cas très-particulier

$$o=(P+Qy)+(P'+Q'y)c\ .$$

6. La différentielle de cette équation est

$$o=(\mathrm{d}P+y\mathrm{d}Q+Q\mathrm{d}y)+(\mathrm{d}P'+y\mathrm{d}Q'+Q'\mathrm{d}y)c\ ;$$

éliminant donc c entre l'une et l'autre, il viendra

$$(P+Qy)(\mathrm{d}P'+y\mathrm{d}Q'+Q'\mathrm{d}y)=(P'+Q'y)(\mathrm{d}P+y\mathrm{d}Q+Q\mathrm{d}y)\ ;$$

ou, en développant et réduisant

$$\left.\begin{array}{r} PQ' \\ -P'Q \end{array}\right|\mathrm{d}y+\left.\begin{array}{r} P\mathrm{d}P' \\ -P'\mathrm{d}P \end{array}\right|+\left.\begin{array}{r} P\mathrm{d}Q' \\ -P'\mathrm{d}Q \\ +Q\mathrm{d}P' \\ -Q'\mathrm{d}P \end{array}\right|y+\left.\begin{array}{r} Q\mathrm{d}Q' \\ -Q'\mathrm{d}Q \end{array}\right|y^2=o\ .$$

Nous sommes donc fondés à considérer toute équation différentielle de la forme

$$V\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+X+X'y+X''y^2=o\ ,$$

où V, X, X', X'', sont des fonctions rationnnelles et entiers de x, sans y, comme devant avoir une intégrale de la forme

$$o=(P+Qy)+(P'+Q'y)c\ ,$$

où c est la constante et où P, P', Q, Q' sont également des fonctions rationnelles et entières de x sans y; et, si nous nous proposons de remonter à cette intégrale, ces quatre dernières fonctions seront les inconnues du probléme.

7. En exprimant que les deux équations différentielles sont identiquement les mêmes, ce qui est permis, puisque nous avons admis des coefficiens à tous les termes, nous aurons

$$PQ'-QP'=V\ ,$$

$$P\mathrm{d}P'-P'\mathrm{d}P=X\mathrm{d}x\ ,$$

$$P\mathrm{d}Q'-P'\mathrm{d}Q+Q\mathrm{d}P'-Q'\mathrm{d}P=X\mathrm{d}x\ ,$$

$$Q\mathrm{d}Q'-Q'\mathrm{d}Q=X''\mathrm{d}x\ .$$

8. On peut simplifier la troisième équation, en lui ajoutant et lui retranchant successivement la différentielle de la première qui est

$$P\mathrm{d}Q'-P'\mathrm{d}Q-Q\mathrm{d}P'+Q'\mathrm{d}P=\mathrm{d}V\ ,$$

on a alors pour résoudre le problème les quatre équations

$$P\mathrm{d}P'-P'\mathrm{d}P=X\mathrm{d}x\ ,$$

$$Q\mathrm{d}Q'-Q'\mathrm{d}Q=X''\mathrm{d}x\ ,$$

$$QdP'-Q'dP=\tfrac{1}{2}(X'dx-dV) \;,$$

$$PdQ'-P'dQ=\tfrac{1}{2}(X'dx+dV) \;.$$

9. Prenant successivement ; 1.° la somme des produits respectifs des première et troisième équations par $+Q$ et $-P$; 2.° la somme des produits respectifs des deuxième et quatrième par $-P$ et $+Q$; 3.° la somme des produits respectifs des première et troisième par $+Q'$ et $-P'$; 4.° enfin la somme des produits respectifs des deuxième et quatrième par $-P'$ et $+Q'$, et remplaçant chaque fois $PQ'-QP'$(7) par sa valeur V, il viendra

$$2VdP=PdV+(2XQ-X'P)dx \;,$$

$$2VdQ=QdV-(2X''P-X'Q)dx \;,$$

$$2VdP'=P'dV+(2XQ'-X'P')dx \;,$$

$$2VdQ'=Q'dV-(2X''P'-X'Q')dx \;.$$

Nous avons donc décomposé notre problème à quatre inconnues en deux problèmes à deux inconnues, puisque les deux premières équations ne renferment plus que P et Q; et les deux dernières P' et Q'. Pour mieux dire, nous l'avons réduit à un seul problème à deux inconnues, puisque les deux dernières équations ne diffèrent uniquement des deux premières qu'en ce que P' et Q' y ont pris la place de P et Q respectivement. Nous sommes donc fondés à en conclure que si P et P' ne sont pas racines d'une même équation du second degré, ils ne différeront au moins que par des constantes ; et on peut en dire autant de Q et Q'.

10. En prenant successivement la somme et la différence, d'abord

des deux premières équations, puis ensuite des deux dernières, il viendra

$$2V\mathrm{d}(P+Q)=(P+Q)\mathrm{d}V-X'(P-Q)\mathrm{d}x+2(XQ-X''P)\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}(P-Q)=(P-Q)\mathrm{d}V-X'(P+Q)\mathrm{d}x+2(XQ+X''P)\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}(P'+Q')=(P'+Q')\mathrm{d}V-X'(P'-Q')\mathrm{d}x+2(XQ'-X''P')\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}(P'-Q')=(P'-Q')\mathrm{d}V-X'(P'+Q')\mathrm{d}x+2(XQ'+X''P')\mathrm{d}x\ .$$

Posant donc

$$\left.\begin{array}{l} P+Q=2p\ , \\ P-Q=2q\ , \\ P'+Q'=2p'\ , \\ P'-Q'=2q'\ ; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} P=p+q\ , \\ Q=p-q\ , \\ P'=p'+q'\ , \\ Q'=p'-q'\ ; \end{array}\right.$$

ces équations deviendront

$$2V\mathrm{d}p=p\,[\mathrm{d}V+(X-X'')\mathrm{d}x]-q\,(X+X'+X'')\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}q=q\,[\mathrm{d}V-(X-X'')\mathrm{d}x]+p\,(X-X'+X'')\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}p'=p'[\mathrm{d}V+(X-X'')\mathrm{d}x]-q'(X+X'+X'')\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}q'=q'[\mathrm{d}V-(X-X'')\mathrm{d}x]+p'(X-X'+X'')\mathrm{d}x\ .$$

11. En posant donc, pour abréger,

$$\mathrm{d}V+(X-X'')\mathrm{d}x=R\,\mathrm{d}x\ ,\quad X+X'+X''=+S\ ,$$

$$\mathrm{d}V-(X-X'')\mathrm{d}x=R'\mathrm{d}x\ ,\quad X-X'+X''=-S'\ ;$$

ces équations deviendront

$$2V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=Rp-Sq\ ,\qquad 2V\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}=Rp'-Sq'\ ,$$

$$2V\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}=R'q-S'p\ ,\qquad 2V\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}x}=R'q'-S'p'\ .$$

12. Au moyen de ces dernières, il est facile, par la différentiation, d'en obtenir d'autres dont chacune ne renferme qu'une seule des inconnues du problème. Si, en effet, ou élimine d'abord entre les deux équations de la première colonne et la différentielle de la première q et $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$, comme deux inconnues au premier degré, puis qu'entre ces deux mêmes équations et la différentielle de la dernière on élimine p et $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, comme deux autres inconnues au premier degré; et si l'on opère d'une manière semblable sur les équations de la seconde colonne, il viendra

$$4V^2S\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}+2V\left\{2\frac{S\mathrm{d}V-V\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}-S(R+R')\right\}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$+\left\{2V\frac{R\mathrm{d}S-S\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+S(RR'-SS')\right\}p=0\ ,$$

$$4V^2S'\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}x^2}+2V\left\{2\frac{S'\mathrm{d}V-V\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x}-S'(R+R')\right\}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$$

$$+\left\{2V\frac{R'\mathrm{d}S'-S'\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}+S(RR'-SS')\right\}q'=0\ ,$$

$$4VS\frac{\mathrm{d}^2p'}{\mathrm{d}x^2}+2V\left\{2\frac{S\mathrm{d}V-V\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}-S(R+R')\right\}\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}$$

$$+\left\{2V\frac{R\mathrm{d}S-S\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+S(RR'-SS')\right\}p'=0\ ,$$

$$4V^2S'\frac{d^2q'}{dx^2}+2V\left\{2\frac{S'dV-VdS'}{dx}-S'(R+R')\right\}\frac{dq'}{dx}$$

$$+\left\{2V\frac{R'dS'-S'dR'}{dx}+S'(RR'-SS')\right\}q'=0\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$2(SdV-VdS)-S(R+R')dx=Tdx$$

$$2(S'dV-VdS')-S'(R+R')dx=T'dx\ ;$$

$$2V(RdS-SdR)+S(RR'-SS')dx=Udx\ ,$$

$$2V(S'dS'-R'dR')+S'(RR'-SS')dx=U'dx\ ;$$

les quatre équations à résoudre seront

$$4V^2S\frac{d^2p}{dx^2}+2VT\frac{dp}{dx}+Up=0\ ;$$

$$4V^2S'\frac{d^2q}{dx^2}+2VT'\frac{dq}{dx}+U'q=0\ ,$$

$$4V^2S\frac{d^2p'}{dx^2}+2VT\frac{dp'}{dx}+Up'=0\ ,$$

$$4V^2S'\frac{d^2q'}{dx^2}+2VT'\frac{dq'}{dx}+U'q'=0\ ;$$

13. Au moyen de ces quatre équations, on déterminera p, q, p', q', d'où on conclura (10) P, Q, P', Q' qui (5), substitués dans la formule

0=

$$0=(P+Qy)+(P'+Q'y)c\ ,$$

donneront l'intégrale de l'équation

$$V\frac{dy}{dx}+X+X'y+X''y^2=0\ .$$

14. On dira peut-être que nous ne faisons que déplacer la difficulté et même d'une manière désavantageuse ; puisque nous ne faisons que ramener l'intégration d'une seule équation du premier ordre à celle de deux équations du second ; mais observons que ces dernières sont linéaires , et même de la forme la plus simple ; et nous verrons bientôt d'ailleurs que , lorsque l'on sait que l'intégrale de la proposée doit être algébrique et rationnelle, on peut assigner assez facilement l'intégrale de ces dernières.

15. On pourrait encore objecter que l'intégration de chacune de ces équations introduisant deux constantes , on se trouvera avoir bien plus de constantes que ne le comporte la nature du problème ; mais il faut se rappeler, 1.° que les valeurs de p , q , p' , q' doivent vérifier les quatre équations du premier ordre que nous avons d'abord obtenues (11) ; 2.° que celles de P , Q , P' , Q' doivent vérifier l'équation $PQ'-QP'=V$; 3.° enfin la valeur de y , déduite de l'intégrale , qui devra vérifier l'équation différentielle proposée ; ce qui nous fournira les conditions nécessaires pour déterminer les constantes superflues.

16. Appliquons ces divers procédés à un exemple ; et soit l'équation différentielle proposée à intégrer

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+4x+(1+x^2)y=0\ ;$$

nous aurons

$$V = x - x^3 \ , \quad X = 4x \ , \quad X' = 1 + x^2 \ , \quad X'' = 0 \ ;$$

De là nous conclurons successivement

$$\frac{dV}{dx} = 1 - 3x^2 \ , \quad X - X'' = 4x \ ,$$

$$R = \frac{dV}{dx} + (X - X'') = 1 + 4x - 3x^2 \ ,$$

$$R' = \frac{dV}{dx} - (X - X'') = 1 - 4x - 3x^2 \ ,$$

$$S = \ X + X' + X'' = 1 + 4x + x^2 \ ,$$

$$S' = -X + X' - X'' = 1 - 4x + x^2 \ ,$$

$$\frac{dR}{dx} = +4 - 6x \ , \quad \frac{dR'}{dx} = -4 - 6x \ ,$$

$$\frac{dS}{dx} = +4 + 2x \ , \quad \frac{dS'}{dx} = -4 + 2x \ ,$$

$$S \frac{dV}{dx} = 1 + 4x - 2x^2 - 12x^3 - 3x^4 \ ,$$

$$S' \frac{dV}{dx} = 1 - 4x - 2x^2 + 12x^3 - 3x^4 \ ,$$

$$V \frac{dS}{dx} = +4x + 2x^2 - 4x^3 - 2x^4 \ ,$$

$$V \frac{dS'}{dx} = -4x + 2x^2 + 4x^3 - 2x^4 \ ,$$

$$R \frac{dS}{dx} = +4 + 18x - 4x^2 - 6x^3 \ ,$$

$$R'\frac{dS'}{dx}=-4+18x+4x^2-6x^3\ ;$$

$$S\frac{dR}{dx}=+4+10x-20x^2-6x^3\ ;$$

$$S'\frac{dR'}{dx}=-4+10x+20x^2-6x^3\ ,$$

$$S\frac{dV}{dx}-V\frac{dS}{dx}=1-4x^2-8x^3-x^4\ ,$$

$$S'\frac{dV}{dx}-V\frac{dS'}{dx}=1-4x^2+8x^3-x^4\ ;$$

$$R\frac{dS}{dx}-S\frac{dR}{dx}=8x(1+2x)\ ,$$

$$R'\frac{dS'}{dx}-S'\frac{dR'}{dx}=8x(1-2x)\ ;$$

$$RR'=1-22x^2+9x^4\ ,$$

$$SS'=1-14x^2+x^4\ ;$$

$$RR'-SS'=-8x^2(1-x^2)\ ,$$

$$R+R'=2-6x^2\ ,$$

$$S(R+R')=2+8x-4x^2-24x^3-6x^4\ ,$$

$$S'(R+R')=2-8x-4x^2+24x^3-6x^4\ ,$$

$$S(RR'-SS')=-8x^2(1-x^2)(1+4x+x^2)\ ;$$

$$S'(RR'-SS')=-8x^2(1-x^2)(1-4x+x^2)\ ;$$

$$T=2\left(S\frac{dV}{dx}-V\frac{dS}{dx}\right)-S(R+R')=-4x(2+x)(1-x^2)\,,$$

$$T'=2\left(S'\frac{dV}{dx}-V\frac{dS'}{dx}\right)-S'(R+R')=+4x(2-x)(1-x^2)\,,$$

$$U=2V\left(R\frac{dS}{dx}-S\frac{dR}{dx}\right)+S(RR'-SS')=8x^2(1-x^2)^2\,;$$

$$U'=2V\left(R'\frac{dS'}{dx}-S'\frac{dR'}{dx}\right)+S'(RR'-SS')=8x^2(1-x^2)^2\,;$$

substituant donc dans nos équations du second ordre, en p et q; elles deviendront

$$4x^2(1-x^2)^2(1+4x+x^2)\frac{d^2p}{dx^2}-8x^2(1-x^2)^2(2+x)\frac{dp}{dx}+8x^2(1-x^2)^2p=0\,,$$

$$4x^2(1-x^2)^2(1-4x+x^2)\frac{d^2q}{dx^2}+8x^2(1-x^2)^2(2-x)\frac{dq}{dx}+8x^2(1-x^2)^2q=0\,,$$

ou, en simplifiant,

$$(1+4x+x^2)\frac{d^2p}{dx^2}-2(2+x)\frac{dp}{dx}+2p=0\,,$$

$$(1-4x+x^2)\frac{d^2q}{dx^2}+2(2-x)\frac{dq}{dx}+2q=0\,.$$

Les équations qui devront donner p' et q' seront donc

$$(1+4x+x^2)\frac{d^2p'}{dx^2}-2(2+x)\frac{dp'}{dx}+2p'=0\,,$$

$$(1-4x+x^2)\frac{d^2q'}{dx^2}+2(2-x)\frac{dq'}{dx}+2'q'=0\,.$$

Il suffira donc d'obtenir l'intégrale des deux premières pour avoir celle des deux dernières.

17. Essayons de faire

$$p=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\ldots,$$

A, B, C, ... étant des coefficiens numériques inconnus, nous aurons

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2p}{dx^2}=2C+6Dx+12Ex^2+20Fx^3+\ldots\ldots;$$

substituant dans la première équation, elle deviendra, en ordonnant;

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
0=A & +3Dx+6D & x^2+\ D & x^3+\ 3E & x^4+\ 6F & x^5+\ldots\ldots \\
-2B & +6E & +16E & +30F & +48G & \\
+\ C & & +10F & +15G & +21H &
\end{array}$$

exprimant donc que cette équation est identique, nous aurons

$$\left.\begin{array}{r}
A-2B+C=0\ , \\
D=0\ , \\
D+E=0\ , \\
D+16E+10F=0\ , \\
E+10F+5G=0\ , \\
2F+16G+7H=0\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}
C=2B-A\ , \\
D=0\ , \\
E=0\ , \\
F=0\ , \\
G=0\ , \\
H=0\ , \\
\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Substituant dans la valeur hypothétique de p, elle deviendra

$$p=A+Bx+(2B-A)x^2=A(1-x^2)+Bx(1+2x)\ ;$$

où A et B sont les deux constantes arbitraires que comporte l'intégrale.

L'équation en q, traitée de la même manière, donnera

$$q=A'(1-x^2)+B'x(1-2x)\ ,$$

où A' et B' seront les deux constantes.

18. On tirera de là

$$\frac{dp}{dx}=-2Ax+B(1+4x)\ ,\quad \frac{dq}{dx}=-2A'x+B'(1-4x)\ ;$$

en se rappelant qu'ici

$$2V=2x-2x^3\ ;\quad R=1+4x-3x^2\ ,\quad S=1+4x+x^2\ ;$$

$$R'=1-4x-3x^2\ ,\quad S'=1-4x+x^2\ ,$$

et substituant (11) dans les équations du premier ordre en p et q, il viendra, en réduisant,

$$(A-A')(1-x^2)-(B+B')x(1-2x)=0\ ,$$

$$(A-A')(1-x^2)+(B+B')x(1+2x)=0\ .$$

Ces relations devant subsister quel que soit x, nous ferons successivement $x=0$, $x=1$; et les deux équations donneront également $A'=A$, $B'=-B$; de sorte que nous aurons

$$p=A(1-x^2)+Bx(1+2x)\ ,$$

$$q=A(1-x^2)-Bx(1-2x),$$

nous aurons donc aussi

$$p'=A'(1-x^2)+B'x(1+2x),$$

$$q'=A'(1-x^2)-B'x(1-2x);$$

A', B' étant deux nouvelles constantes.

19. Nous conclurons ensuite de là

$$P=p+q=2A(1-x^2)+4Bx^2,$$

$$Q=p-q=2Bx,$$

$$P'=p'+q'=2A'(1-x^2)+4B'x^2,$$

$$Q'=p'-q'=2B'x.$$

En nous rappelant qu'ici $V=x(1-x^2)$, et substituant ces valeurs dans l'équation

$$PQ'-QP'=V,$$

elle deviendra, toutes réductions faites,

$$4(AB'-BA')=1$$

équation de relation entre nos quatre constantes.

20. En subtituant les valeurs de P, Q, P', Q', dans l'équation

$$0=(P+Qy)+(P'+Q'y)c,$$

elle deviendra, en divisant par 2,

$$o=\{[A(1-x^2)+2Bx^2]+Bxy\}+\{[A'(1-x^2)+2B'x^2]+B'xy\}c\,;$$

ou encore

$$o=\{(A+A'c)(1-x^2)+2(B+B'c)x^2\}+(B+B'c)xy\ ;$$

ou enfin

$$o=\left\{\frac{A+A'c}{B+B'c}(1-x^2)+2x^2\right\}+xy=o\ ;$$

d'où l'on voit qu'il n'y a plus proprement qu'une seule constante $\frac{A+A'c}{B+B'c}$; en la représentant par C l'équation deviendra simplement

$$o=\{2x^2+C(1-x^2)\}+xy\ ;$$

d'où

$$y=-\frac{2x^2+C(1-x^2)}{x}\ ;$$

qui est en effet l'intégrale de l'équation différentielle proposée, comme il est facile de s'en convaincre, par la différentiation et l'élimination de la constante C. (*)

(*) On peut faire, contre cette méthode, l'objection très grave, à ce qu'il nous paraît, que le procédé employé pour intégrer les équations du second ordre en p et q, pouvait tout aussi bien, et sans tant de circuit, être immédiatement appliqué à l'équation proposée du premier ordre seulement en y; mais peut-être tout ceci n'est-il encore qu'un provisoire? peut-être M. Kramp, étendant sa théorie, comme il paraît en avoir le dessein, aux équations des ordres supérieurs, nous enseignera-t il dans quelque mémoire subséquent, à intégrer généralement et rigoureusement les équations de la forme

$$G\,\frac{d^2y}{dx^2}+H\,\frac{dy}{dx}+k=o\ ,$$

21. Dans un prochain mémoire, nous nous occuperons soit des équations différentielles qui admettent une intégrale de la forme

$$o=(P+Qy+Ry^2)+c(P'+Q'y+R'y^2) \; ;$$

soit de celle dont l'intégrale a la forme

$$o=(P+Qy)+c(P'+Q'y)+c^2(P''+Q''y) \; :$$

---

dans le cas où G, H, K sont des fonctions rationnelles et entières en x seulement ; ou tout au moins à en ramener l'intégration à celle de quelque autre équation plus simple, dût-elle être même d'un ordre plus élevé. L'intégrale de cette dernière équation doit être de la forme

$$Ly+aM+bN=o \, ,$$

où L, M, N sont aussi des fonctions entières et rationnelles de x seulement, inconnus du problème, et où a et b sont les deux constantes arbitraires. Il s'agirait donc d'exprimer que le résultat de l'élimination de ces constantes entre cette équation et ses première et seconde différentielles, est identique avec la proposée, et de tirer des trois conditions résultantes les valeurs de L, M, N, ou du moins des équations différentielles, d'un ordre quelconque, faciles à intégrer, et dont chacune ne renfermât qu'une seule de ces inconnues.

J. D. G.
