GERGONNE

Questions résolues. Solution du premier des problèmes de géométrie proposés à la page 228 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 379-400
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__379_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des problèmes de géométrie proposés à la page 228 de ce volume ;

Par M. GERGONNE.

POUR ne point interrompre la marche de nos recherches par des questions incidentes, nous allons, avant d'entrer en matière, établir quelques formules qui nous seront nécessaires pour parvenir à notre but.

Soit une section conique rapportée à deux axes obliques quelconques, et donnée par l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+C'=0\,, \qquad (1)$$

et soit une droite rapportée aux mêmes axes et donnée par l'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,. \qquad (2)$$

Nous allons chercher quelle relation il doit exister entre les coefficiens de ces deux equations, pour que la droite soit tangente à la section conique.

Pour obtenir cette relation, remarquons d'abord qu'en désignant par (x', y') le point de contact, l'equation de la tangente est

$$(Ax'+Cy'+A')x+(By'+Cx'+B')y+(A'x'+B'y'+C')=0\,,$$

ou bien

$$\frac{x}{-\dfrac{A'x'+B'y'+C'}{Ax'+Cy'+A'}}+\frac{y}{-\dfrac{A'x'+B'y'+C'}{By'+Cx'+B'}}=1\,;$$

cette équation devant être la même que l'équation (2), il s'ensuit qu'on doit avoir

$$-\frac{A'x'+B'y'+C'}{Ax'+Cy+A'}=a\,, \qquad -\frac{A'x'+B'y'+C'}{By'+Cx'+B'}=b\,,$$

ou

$$a(Ax'+Cy'+A')+(A'x'+B'y'+C')=0\,,$$

$$b(By'+Cx'+B')+(A'x'+B'y'+C')=0\,,$$

ou encore

$$(aA+A')x'+(aC+B')y'+(aA'+C')=0\,,$$

$$(bB+B')y'+(bC+A')x'+(bB'+C')=0\,;$$

mais, parceque le point de contact est sur la droite (2), on doit avoir aussi

bx'

$$bx'+ay'-ab=0\ ;$$

éliminant donc x', y' entre ces trois dernières équations, il viendra pour l'équation qui exprime la condition demandée

$$\left.\begin{array}{r}a^2b^2(C^2-AB)+2a^2b(A'C-AB')+\ a^2(A'^2-AC')\\ +2ab^2(B'C-BA')+2ab(CC'-A'B')\\ +\ b^2(B'^2-BC')\end{array}\right\}=0\ . \quad (3)$$

Si la droite donnée était l'axe des x ou celui des y, on aurait, dans le premier cas, $b=0$ et dans le second $a=0$, ce qui réduirait la condition à

$$A'^2-AC'=0\ , \quad (4) \quad \text{ou} \quad B'^2-BC'=0\ . \quad (5)$$

Si, après avoir changé respectivement a, b en λa, λb, on suppose ensuite $\lambda=0$, la droite passera par l'origine, et aura pour équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\ ; \quad (6)$$

en faisant les mêmes transformations dans l'équation (3), elle devient

$$a^2(A'^2-AC')+2ab(CC'-A'B')+b^2(B'^2-BC')=0\ ; \quad (7)$$

c'est donc là l'équation de condition qui exprime que la droite (6) est tangente à la courbe (1).

Si, de plus, la courbe (1) passait elle-même par l'origine, qui serait alors le point de contact, on aurait $C'=0$; ce qui réduirait la condition (7) à celle-ci :

$$aA'-bB'=0\ . \quad (8)$$

Nous terminerons par rappeler que le centre de la courbe (1) est donné par les dérivées de son équation, prises successivement par rapport à x, y, lesquelles sont

$$Ax+Cy+A'=0\,, \quad (9) \qquad By+Cx+B'=0\,, \quad (10)$$

et donnent

$$(c^2-AB)x+(B'C-A'B)=0\,, \qquad (11)$$

$$(c^2-AB)y+(A'C-B'A)=0\,. \qquad (12)$$

PROBLÈME I. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui touchent à la fois quatre droites données quelconques ?

Solution. Soient prises deux quelconques des droites données pour axes des coordonnées, et soient les équations des deux autres ainsi qu'il suit :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,. \qquad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1\,.$$

Supposons que l'équation (1) soit celle des courbes dont il s'agit; parce que ces courbes doivent toucher les deux axes, les équations (4, 5) auront lieu; on exprimera ensuite que ces courbes touchent les deux autres droites, en exprimant que l'équation (3) a lieu, ainsi qu'une autre équation que l'on déduirait de celle-là en y changeant respectivement a, b en a', b'; mais, en vertu des conditions (4, 5), ces équations se simplifient et deviennent

$$ab\,(C^2-AB)+2a\,(A'C-AB')+2b\,(B'C-BA')+2(CC'-A'B')=0\,;$$

$$a'b'(C^2-AB)+2a'(A'C-AB')+2b'(B'C-BA')+2(CC'-A'B')=0\,.$$

En y substituant pour les deux binomes $A'C-AB'$, $B'C-BA'$

leurs valeurs données par les équations (11, 12), où x, y sont les coordonnées des centres, elles deviendront

$$(C^2-AB)(2b\,x+2a\,y-a\,b)=2(CC'-A'B')\ ,$$

$$(C^2-AB)(2b'x+2a'y-a'b')=2(CC'-A'B')\ ;$$

d'où, en multipliant en croix et réduisant

$$2bx+2ay-ab=2b'x+2a'y-a'b'\ ;$$

le lieu des centres des sections coniques qui touchent à la fois les quatre droites données est donc une ligne droite.

Il ne s'agit, pour construire cette droite, que de connaître deux points de sa direction; or, il est aisé de voir qu'on satisfait également à son équation soit qu'on fasse

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}a\ , \\ y=\frac{1}{2}b'\ , \end{array}\right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}a'\ , \\ y=\frac{1}{2}b\ ; \end{array}\right.$$

or, par la situation de nos quatre tangentes, il est aisé de reconnaître l'un ou l'autre de ces points pour le point milieu de la droite qui joint l'intersection de deux quelconques de ces tangentes à l'intersection des deux autres; on a donc cet élégant théorème :

THEORÈME. Le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques inscrites à un même quadrilatère est la droite qui joint les milieux des trois diagonales de ce quadrilatère (*).

(*) C'est un renversement du théorème de Newton, cité par M. le capitaine Poncelet, à la page 211 de ce volume. Cet estimable géomètre nous en a adressé récemment une démonstration purement géométrique que nous publierons à la première occasion.

Rien ne sera plus aisé, d'après cela, que d'assigner le centre de la section conique inscrite à un pentagone donné quelconque. Il ne s'agira en effet, pour cela, que de faire tour à tour abstraction d'un côté puis d'un autre côté du pentagone, et de construire, à chaque fois, la droite, lieu des centres des sections coniques qui touchent ses quatre autres côtés; on obtiendra ainsi deux droites dont l'intersection sera le centre cherché; on voit clairement par là que le problème ne saurait avoir qu'une solution.

Comme on peut obtenir cinq droites qui contiennent le centre demandé et que ce centre est unique, il s'ensuit que ces cinq droites doivent se couper au même point; d'où résulte un élégant théorème sur le pentagone, que nous laissons au lecteur le soin de suppléer.

Lorsqu'une section conique est inscrite à un triangle, on peut toujours la considérer comme inscrite à un quadrilatère, pourvu que l'on regarde son point de contact avec l'un des côtés comme un quatrième sommet tel que les deux côtés du quadrilatère qui s'y terminent font entre eux un angle égal à deux angles droits; on a donc ce théorème:

THÉORÈME. Le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques qui, étant inscrites à un même triangle, touchent l'un de ses côtés en un même point, est la droite qui passe par le milieu de ce côté et par le milieu de la distance du sommet opposé au point de contact commun.

Il sera donc très-facile d'assigner le centre de la section conique qui, étant inscrite à un triangle donné, touche deux côtés du triangle en des points donnés; il ne s'agira pour cela, en effet, que de mener des droites par les milieux de ces deux côtés et par les milieux des distances des sommets opposés aux points de contact donnés; ces deux droites se couperont au centre cherché.

Lorsqu'une section conique touche les deux côtés d'un angle, on peut toujours la considérer comme inscrite à un quadrilatère, pourvu que l'on regarde ses points de contact avec les deux côtés de l'angle comme deux sommets opposés du quadrilatère, et qu'on admette que ses deux autres sommets se confondent avec le sommet même de l'angle ; de là, et de ce qui a été dit ci-dessus, résulte ce théorème :

THÉORÈME. Le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques qui touchent les deux côtés d'un même angle aux deux mêmes points, est la droite menée du sommet de cet angle au milieu de celle qui joint les deux points de contact.

PROBLÈME II. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant à la fois trois droites données, passent en même temps par un même point donné ?

Solution. Soient encore prises ici deux quelconques de trois droites données pour axes des coordonnées, et soit pour l'équation de la troisième

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ ;$$

soient enfin a', b' les coordonnées du point donné. D'abord, parce que nos courbes touchent les deux axes, nous aurons (4, 5)

$$A'^2-AC'=0\ , \quad B'^2-BC'=0\ ;$$

en second lieu, parce qu'elles touchent la troisième droite, nous aurons, comme ci-dessus,

$$(C^2-AB)(2bx+2ay-ab)=2(CC'-A'B')\ ;$$

en outre, parce que ces courbes passent par le point donné, nous aurons

$$Aa'^2+Bb'^2+2Ca'b'+2A'a'+2B'b'+C'=0\ ;$$

enfin, x, y désignant les coordonnées des centres dont le lieu est demandé, nous aurons encore (9, 10)

$$Ax+Cy+A'=0\ , \qquad By+Cx+B'=0\ ;$$

et tout se réduira à éliminer A, B, C, A', B', C' entre ces six équations.

Si, dans la quatrième équation, on substitue pour A', B' les valeurs données par les deux dernières, elle donnera

$$C'=a'(2x-a')A+b'(2y-b')B+2(b'x+a'y-a'b')C\ .$$

Cette valeur et celles de A', B' étant substituées dans les trois premières, elles deviendront

$$\{(x-a')A+(y-b')C\}^2+b'(2y-b')(C^2-AB)=0\ ,$$

$$\{(y-b')B+(x-a')C\}\ +a'(2x-a')(C^2-AB)=0\ ,$$

$$2\{(x-a')A+(y-b')C\}\{(y-b')B+(x-a')C\}$$

$$=\{2(b'x+a'y-a'b')-2bx+2ay-ab)\}(C^2-AB)\ ;$$

de telle sorte qu'en posant, pour abréger,

$$(x-a')A+(y-b')C=P\ ,$$

$$(y-b')B+(x-a')C=Q\ ,$$

$$C^2-AB=R^2\ ,$$

tout se réduira à éliminer P, Q, R, entre les trois équations

$$P^2+b'(2y-b')R^2=0\ , \qquad Q^2+a'(2x-a')R^2=0\ ,$$

$$2PQ=\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}R^2\ .$$

La valeur de R^2, introduite dans les deux premières, au moyen de la dernière, donne en réduisant

$$2b'(2y-b')Q+\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}P=0\ ,$$

$$2a'(2x-a')P+\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}Q=0\ ;$$

d'où, en transposant, multipliant membre à membre, et divisant ensuite par PQ,

$$4a'b'(2x-a')(2y-b')=\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}^2\ ;$$

le lieu cherché est donc une section conique (*).

Voyons quel est le centre de cette courbe ; on sait que ce centre est donné par les deux dérivées de l'équation de la courbe, prises successivement par rapport à x et y ; les deux équations du centre cherché seront donc

$$2a'b'(2y-b')=(b'-b)\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}\ ,$$

$$2a'b'(2x-a')=(a'-a')\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}\ .$$

Ce centre se trouvera donc aussi sur toute ligne dont l'équation sera une combinaison quelconque de ces deux-là ; il sera donc, en particulier, sur la droite dont on obtient l'équation en divisant ces deux-là membre à membre ; c'est-à-dire, sur la droite dont l'équation est

$$\frac{2x-a'}{a-a'}=\frac{2y-b'}{b-b'}\ .$$

Or, on voit aisément, 1.° que cette droite passe par le milieu de la distance du point donné à l'origine ; 2.° qu'elle passe aussi

(*) M. le capitaine Poncelet a aussi démontré cette proposition, par des considérations géométriques.

par le milieu du segment de la troisième tangente intercepté entre celles qui ont été prises pour axes.

En considérant donc que cette troisième tangente peut être choisie de trois manières différentes, on parviendra à la construction suivante du centre de la section conique, lieu des centres de toutes les sections coniques qui, étant inscrites ou ex-inscrites à un même triangle donné, passent par un même point donné, intérieur ou extérieur à ce triangle : *Par le milieu de la distance du point donné à chacun des sommets et par le milieu du côté opposé soit menée une droite ; les trois droites menées de cette manière se couperont en un même point, qui sera le centre cherché* (*).

A l'aide de l'équation de la courbe, on peut obtenir autant de ses points qu'on voudra. Occupons-nous seulement de la recherche de ceux qui paraissent être de la construction la plus facile; mais d'abord mettons l'équation sous une autre forme. En développant le second membre comme le quarré d'un binome, et transposant dans le premier le premier terme de ce quarré, il vient, en réduisant,

$$4(a'y-b'x)^2=(2bx+2ay-ab)\{4(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\} .$$

Or, on satisfait à cette équation, en posant à la fois

$$a'y-b'x=0 ,$$

$$2bx+2ay=ab ;$$

(*) On voit par là, pour le dire en passant, que si le point donné est le centre de gravité de l'aire du triangle formé par les tangentes données, ce point sera en même temps le centre de la courbe cherchée.

d'où

d'où il suit que ce sont là les équations de deux droites qui se coupent sur la courbe dont il s'agit. Or, la première est celle qui joint le point donné à l'origine ; et quant à la seconde, c'est la droite qui joint les milieux des segmens des deux premières tangentes déterminés par la troisième ; en prenant donc tour à tour chacune des tangentes pour la troisième, on aura la construction suivante de trois points de la courbe : *inscrivez au triangle des tangentes un autre triangle dont les sommets soient les milieux des côtés du premier ; les points où les côtés de ce second triangle seront respectivement coupés par les droites menées du point donné aux sommets du premier seront trois points de la courbe demandée ;* et, comme le centre est connu, rien ne sera plus facile que d'obtenir *trois autres* points de cette courbe.

Si l'on demandait le centre d'une section conique touchant à la fois quatre droites données et passant en outre par un point donné ; ce centre devant se trouver à la fois (*Prob. I*) sur une droite et (*Prob. II*) sur une section conique, le problème aurait au plus deux solutions.

Mais, si l'on demandait le centre d'une section conique qui, touchant à la fois trois droites données, passât en outre par deux points donnés ; on voit (*Prob. II*) que ce centre devrait se trouver à la fois sur deux sections coniques, et qu'ainsi le problème pourrait avoir jusqu'à quatre solutions.

Si l'on demandait le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques qui, passant par un point donné, fussent inscrites à un angle donné et touchassent en outre un de ses côtés en un point donné ; on considérerait la distance du point de contact donné au sommet de l'angle donné comme un triangle d'une aire nulle, ayant deux côtés égaux et coïncidens, et son troisième côté, de longueur nulle, dirigé suivant l'autre côté de l'angle donné ; le problème se trouverait donc ramené au précédent ; le lieu cherché serait donc une section conique, et l'on pourrait assigner son centre ainsi que six points de son périmètre.

PROBLÈME III. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant à la fois deux droites données, passent en outre par deux points donnés ?

Solution. Prenons les deux tangentes pour axes des coordonnées, et soient $(a\,,\,b)$, $(a'\,,\,b')$ les deux points donnés. En supposant toujours que l'équation (1) est celle des courbes dont on cherche le lieu des centres, nous aurons d'abord (4, 5)

$$A'^2-AC'=0\,, \qquad (\alpha) \qquad\qquad B'^2-BC'=0\,. \qquad (\beta)$$

En second lieu, parce que ces courbes passent par les deux points donnés, nous aurons

$$Aa^2+Bb^2+2Cab+2A'a+2B'b+C'=0\,, \qquad (\gamma)$$

$$Aa'^2+Bb'^2+2Ca'b'+2A'a'+2B'b'+C'=0\,; \qquad (\gamma')$$

enfin, x, y étant les coordonnées du lieu des centres, nous aurons encore (9, 10)

$$Ax+Cy+A'=0\,, \qquad (\delta) \qquad\qquad By+Cx+B'=0\,; \qquad (\varepsilon)$$

et il s'agira d'éliminer A, B, C, A', B', C' entre ces six équations.

Si d'abord on élimine C' entre les deux premières, et C entre les deux dernières, on aura

$$AB'^2=BA'^2\,,$$

$$x(Ax+A')=y(By+B')\,.$$

En éliminant B entre ces deux équations, on trouve

$$(A'x-B'y)\{A(A'x+B'y)+A'^2\}=0\,,$$

équation qui peut être satisfaite de deux manières. Prenons d'abord

$$A(A'x+B'y)+A'^2=0 ,$$

nous en conclurons

$$A=-\frac{A'^2}{A'x+B'y} ,$$

puis, en vertu de l'équation $AB'^2=BA'^2$;

$$B=-\frac{B'^2}{A'x+B'y} ;$$

l'équation (δ) donnera alors

$$C=-\frac{A'B'}{A'x+B'y} ;$$

et l'on aura enfin par l'équation (κ)

$$C'=-(A'x+B'y) ;$$

Toutes ces valeurs étant substituées dans l'équation (γ), elle deviendra

$$\{A'(x-a)+B'(y-b)\}^2=0 ,$$

d'où

$$A'(x-a)+B'(y-b)=0 ;$$

On aura de même, par l'équation (γ'),

$$A'(x-a')+B'(y-b')=0 ;$$

d'où, en transposant, divisant et réduisant,

$$\frac{x-a}{x-a'}=\frac{y-b}{y-b'}\,,$$

ou encore

$$\frac{x-a}{a-a'}=\frac{y-b}{b-b'}\,;$$

équation de la droite qui passe par les deux points donnés.

Or, cette droite ne saurait être le lieu cherché des centres; car alors elle devrait l'être encore lorsque les points donnés seraient respectivement sur les deux côtés de l'angle des tangentes données; tandis qu'il a été reconnu ci-dessus (*Prob. I*) qu'alors la droite, lieu des centres, devait passer par le sommet de cet angle.

Il faut donc adopter l'autre équation

$$A'x=B'y\,;$$

en substituant dans $AB'^2=BA'^2$, elle donne

$$Ax^2=By^2\,;$$

on a donc

$$B=A\frac{x^2}{y^2}\,,\qquad B'=A'\frac{x}{y}\,;$$

et de plus, par (α) et (δ),

$$C'=\frac{A'^2}{A}\,,\qquad C=-\frac{Ax+A'}{y}\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (γ), elle deviendra

$$(ay-bx)^2A^2+2y(bx+ay-ab)AA'+y^2A'^2=0\,;$$

l'équation (γ') donnera pareillement

$$(a'y-b'x)^2A^2+2y(b'x+a'y-a'b')AA'+y^2A'^2=0\ ,$$

en éliminant $A'y$ comme inconnue, entre ces deux équations, A disparaîtra de lui-même, et l'on obtiendra, pour l'equation de la courbe cherchée

$$\{(ay-bx)^2-(a'y-b'x)^2\}^2$$

$$=4\{(bx+ay-ab)-(b'x+a'y-a'b')\}\{(ay-bx)^2(b'x+a'y-a'b')-(a'y-b'x)^2(bx+ay-ab)\}\ .$$

En développant cette équation, on trouve qu'elle est généralement du qatrième degré, non décomposable en deux facteurs rationnels du second; de sorte que le lieu cherché n'est ni une section conique ni un système de sections coniques.

PROBLÈME IV. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant une même droite donnée, passent en outre par les trois mêmes points donnés?

Solution. Soit pris l'un quelconque des trois points donnés pour origine, et soient fait passer les axes des x et des y par les deux autres que nous supposons distants de celui-là des quantités a, b. Soit de plus l'équation

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1\ ,$$

celle de la tangente. En prenant toujours l'équation (1) pour l'équation des courbes dont on cherche le lieu des centres, nous exprimerons que les courbes passent par l'origine en faisant $C'=0$. Les conditions de passer par les deux autres points donneront ensuite

$$Aa+2A'=0\ ,\qquad Bb'+2B'=0\ ,$$

de plus, la condition de toucher la droite donnée deviendra (3), à cause de $C'=0$,

$$a'^2b'^2(C^2-AB)+2a'^2b'(A'C-AB')+(a'A'-b'B')^2=0 \; :$$
$$+2a'b'^2(B'C-BA') \; .$$

Enfin, x, y étant les coordonnées du lieu des centres, on devra avoir (9, 10)

$$Ax+Cy+A'=0 \; , \qquad By+Cx+B'=0 \; ;$$

et il s'agira d'éliminer A, B, C, A', B' entre ces cinq équations.

Mais d'abord, au moyen des équations (11, 12), nous pouvons simplifier la troisième qui devient

$$(a'A'-b'B')^2=a'b'(2b'x+2a'y-a'b')(C^2-AB) \; ;$$

ou, en y mettant pour A', B' leurs valeurs données par les deux premières équations

$$(Aaa'-Bbb')^2=4a'b'(2b'x+2a'y-a'b')(C^2-AB) \; ;$$

les mêmes valeurs, substituées dans les deux dernières, donnent

$$(2x-a)A+2Cy=0 \; , \qquad (2y-b)B+2Cx=0 \; ;$$

tirant de celles-ci les valeurs de A, B, pour les substituer dans la précédente, C s'en ira de lui-même, et il viendra, pour l'équation du lieu demandé,

$$\{bb'x(2x-a)-aa'y(2y-b)\}^2$$
$$+a'b'(2x-a)(2y-b)(2bx+2ay-ab)(2b'x+2a'y-a'b')=0$$

équation du quatrième degré, non décomposable en deux facteurs rationnels du second degré. Ainsi, en général, le lieu cherché n'est ni une section conique, ni un système de sections coniques.

Si néanmoins la tangente passait par l'origine, c'est-à-dire, par l'un quelconque des points donnés; en supposant son equation

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=0\,,$$

ce qui revient à supposer que a', b' se changent respectivement en $\lambda a'$, $\lambda b'$, et à faire ensuite $\lambda=0$, l'équation deviendrait simplement

$$bb'x(2x-a)=aa'y(2y-b)\;;$$

qui est celle d'une section conique. Ainsi, le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, passant par les trois mêmes points, sont tangentes à une même droite en l'un de ces points est lui-même une section conique.

Si l'on prend successivement les dérivées de cette équation par rapport à x et y, on aura, pour déterminer le centre de la courbe, les deux équations

$$4x-a=0\,,\qquad 4y-b=0\,.$$

Ainsi ce centre est le milieu de la droite menée du point qui est sur la tangente au milieu de la distance entre les deux autres; de sorte que le centre de la courbe est tout-à-fait indépendant de la direction de la tangente. On voit d'ailleurs que la courbe a deux diamètres conjugués, paralleles aux droites qui joignent le point de contact aux deux autres points.

On voit que la courbe passe par le point de contact, et, d'après la position du centre, elle passe aussi par le milieu de l'intervalle entre les deux autres points; elle passe encore par les milieux des distances du point de contact aux deux autres. Il serait facile au surplus, à l'aide de l'équation ci-dessus, de trouver d'autres points de cette courbe.

PROBLÈME V. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui passent par les quatre mêmes points donnés?

Solution. Faisons passer l'axe des x par deux quelconques des quatre points donnés et l'axe des y pour les deux autres; et soient alors les équations de ces quatre points ainsi qu'il suit:

$$\begin{cases} x=a\,, \\ y=0\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x=a'\,, \\ y=0\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0\,, \\ y=b\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0\,, \\ y=b'\,; \end{cases}$$

En prenant toujours l'équation (1) pour l'équation commune des courbes dont il s'agit, et exprimant qu'elles passent par ces quatre points, nous aurons

$$Aa^2+2A'a+C'=0\,, \qquad Bb^2+2B'b+C'=0\,,$$

$$Aa'^2+2A'a'+C'=0\,, \qquad Bb'^2+2B'b'+C'=0\,.$$

De plus, x, y étant les coordonnées du lieu des centres, on aura

$$Ax+Cy+A'=0\,, \qquad By+Cx+B'=0\,.$$

Eliminant A, A' entre les équations de gauche, et B, B' entre celles de droite; il viendra, en réduisant,

$$\{2x-(a+a')\}C'+2aa'yC=0\,,$$

$$\{2y-(b+b')\}C'+2bb'xC=0\,;$$

d'où, éliminant enfin C, C', on obtiendra, pour l'équation du lieu demandé

$bb'x$

$$bb'x\{2x-(a+a')\}=aa'y\{2y-(b+b')\}\ ;$$

ce lieu est donc une section conique.

En égalant à zéro les dérivées de cette équation, prises successivement par rapport à x et y, on aura, pour déterminer le centre de la courbe, les deux équations

$$x=\tfrac{1}{2}(a+a')\ , \qquad y=\tfrac{1}{2}(b+b')\ .$$

Ainsi, la courbe a pour centre le milieu de la droite qui joint le milieu de la distance de deux quelconques de nos quatre points au milieu de la distance entre les deux autres.

On voit, par la forme de l'équation, que la courbe a deux diamètres conjugués paralleles aux axes des coordonnées; d'où l'on peut conclure que si, par le centre de la courbe, on mène deux droites, l'une parallèle à la droite qui joint deux quelconques de nos quatre points et l'autre parallèle à celle qui joint les deux autres, les directions de ces droites seront celles de deux diamètres conjugués.

Voyons présentement quels sont les points les plus remarquables du cours de la courbe. On voit d'abord que cette courbe passe par l'origine: ce qui revient à dire que, si l'on joint deux quelconques des quatre points dont il s'agit par une droite, et les deux autres par une autre droite, le point de concours de ces deux droites sera un point de la courbe.

On satisfait aussi à l'équation de la courbe en posant

$$x=0\ , \qquad y=\tfrac{1}{2}(b+b')\ ,$$

or, ce sont là les coordonnées du milieu de l'intervalle entre les deux points situés sur l'axe des y; puis donc que ces points sont quelconques, on en peut conclure que le milieu de l'intervalle entre deux quelconques des quatre points donnés est un point de la courbe.

Enfin, on satisfait encore à cette équation en posant

$$x=\tfrac{1}{2}(a+a')\ ,\qquad y=\tfrac{1}{2}(b+b')\ ;$$

donc, si l'on mène une parallèle à chacun des axes par le milieu de l'intervalle entre les deux points situés sur l'autre, les deux droites ainsi menées se couperont en un point de la courbe ; ce qui revient à dire que si, ayant joint deux quelconques des points donnés par une droite et les deux autres par une autre droite, on mène par le milieu de chacune de ces deux droites une parallèle à l'autre, les deux droites ainsi menées se couperont en un point de la courbe.

On a donc, en résumé, le théorème suivant :

THÉORÈME. Dans tout quadrilatère simple, les six points milieux des quatre côtés et des deux diagonales, les trois points d'intersection tant des deux diagonales que des deux systèmes de côtés opposés, et enfin les trois points d'intersection des parallèles menées soit à chaque diagonale par le milieu de l'autre, soit à chaque côté par le milieu de son opposé, sont douze points d'une même section conique. Son centre est au milieu commun des droites qui joignent les milieux soit des deux diagonales, soit des côtés opposés du quadrilatère. Enfin, les trois systèmes de deux droites, menés par ce centre parallèlement soit aux deux diagonales, soit à deux côtés opposés, sont trois systèmes de diamètres conjugués de la courbe. Cette section conique est le lieu des centres de toutes les sections coniques circonscrites au quadrilatère dont il s'agit.

Il est facile de se convaincre, au surplus, que les douze points de la courbe que nous venons de désigner sont situés deux à deux aux extrémités d'un même diamètre.

Il est également facile de voir que la section conique sera une hyperbole ou une ellipse, suivant que le quadrilatère sera ou ne ne sera pas convexe.

Si donc l'on demandait le centre d'une section conique qui passât par cinq points donnés ; en faisant tour à tour abstraction de deux de ces cinq points on trouverait , par ce qui précède , que le centre de la courbe doit être à la fo sur deux sections coniques ; et comme il est d'ailleurs connu que la section conique qui passe par cinq points donnés est unique ; il s'ensuit que les deux sections coniques qui devraient déterminer le centre de celle-là devraient être tangentes l'une à l'autre. On peut , en excluant ainsi , tour à tour , chacun des cinq points donnés , obtenir cinq sections coniques qui devront toutes se toucher en un même point.

Concevons présentement que de deux des sommets consécutifs du quadrilatère l'un marche en ligne droite vers l'autre jusqu'à se confondre avec lui ; il est clair que notre théorème ne cessera pas pour cela d'être vrai ; mais alors notre quadrilatère se réduira à un triangle , le côté d'une longueur nulle à une droite indéfinie , menée d'une manière quelconque , par l'un des sommets de ce triangle , et les sections coniques circonscrites à des sections coniques passant par deux points donnés et touchant une même droite en un point donné ; on a donc ce théorème :

THÉORÈME. Le lieu des centres de toutes les sections coniques qui , passant par les deux mêmes points donnés , touchent en outre une même droite donnée en un même point est une autre section conique passant par le point de contact donné , par le milieu de la droite qui joint les deux autres points donnés , par le point où cette dernière droite coupe la tangente donnée , par le point où la parallèle menée à la même droite par le point de contact rencontre la parallèle menée à la tangente par le milieu de l'intervalle entre les deux points donnés , enfin par les milieux des distances de ces deux points au point de contact. Cette section conique a son centre au milieu commun de deux droites dont l'une joint le point de contact au milieu de l'intervalle entre les deux autres , tandis que l'autre joint les milieux des distances du point de contact à ces deux-là. Elle a un système de diamètres conjugués parallèles aux droites qui joignent le point de contact aux deux *autres points, et un autre dans lequel un des diamètres est parallèle à la droite qui joint ces deux derniers points, tandis que l'autre est parallele à la tangente.*

Il est, au reste, facile de voir que la courbe est une hyperbole ou une ellipse, suivant que les deux points qui ne sont pas sur la tangente sont situés de même ou de différens côtés par rapport à elle. On aperçoit aussi très-facilement que les six points du cours de cette courbe que nous venons d'assigner sont, deux à deux, aux extrémités d'un même diamètre.

Si présentement nous supposons que les deux points qui ne sont pas sur la tangente se rapprochent l'un de l'autre jusqu'à se confondre, ainsi que l'avaient déjà fait les deux autres, nous obtiendrons ce théorème, déjà obtenu par d'autres considérations (*Prob. I*); mais qui se trouve ici plus complet.

THÉORÈME. Le lieu des centres des sections coniques qui touchent à la fois les deux côtés d'un même angle aux deux mêmes points est le système de deux droites dont l'une joint les deux points de contact, tandis que l'autre joint le sommet de l'angle au milieu de l'intervalle qui sépare ces deux points.