ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Géométrie élémentaire. Théorie élémentaire des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 1-67
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__1_0>

ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Théorie élémentaire des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes;

Par M. J. B. Durrande, professeur de mathématiques spéciales et de physique au collége royal de Cahors.

On a souvent reproché à la géométrie élémentaire, telle que l'ont cultivée Euclide et Apollonius, chez les anciens, Viète et Fermat, chez les modernes, de ne pouvoir s'élever à cette généralité qui coordonne entre elles et rattache à un principe commun toutes les parties d'une même théorie. On l'a jugé à peu près incapable de cette élégante et féconde simplicité qui accompagne si souvent les autres méthodes; et on l'a mise, en particulier, beaucoup au-dessous de cette géométrie nouvelle que l'on doit au génie créateur de l'illustre Monge; et qui a offert à ses nombreux disciples un si vaste champ de belles découvertes.

Mais, sans prétendre faire ici le procès à des méthodes dont je me plais à reconnaître toute la supériorité; sans prétendre non plus assimiler l'ancienne géométrie à cette autre géométrie qui, née des méditations de notre Descartes, a reçu de si grands développemens entre les mains de Lagrange et de ce même Monge, dont la destinée semble avoir été d'associer son nom à toutes les grandes découvertes qui ont signalé la dernière moitié du XVIII.e siècle; je n'en demeure pas moins persuadé que la géométrie d'Euclide, maniée d'une manière convenable, peut, quelque bornée qu'elle puisse paraître, au premier abord, dans ses moyens d'investigation, aller aussi loin qu'aucune autre méthode qu'on tenterait de lui substituer; et qu'elle peut notamment égaler la géométrie analitique, par la généralité et l'élégance de ses résultats; et c'est principalement à faire partager au lecteur ma conviction sur ce point que je consacre l'essai que l'on va lire.

Je prendrai pour exemple deux problèmes qui n'ont pas acquis moins de célébrité par le rang éminent des géomètres qui en ont fait tour-à-tour le sujet de leurs recherches, que par le nombre et la variété des procédés qui leur ont été successivement appliqués; mais qui néanmoins n'ont été que très-récemment résolus, de manière à ne plus laisser d'espoir d'une solution plus heureuse, par M. Gergonne, qui semble s'être frayé, dans la géométrie analitique, une route entièrement nouvelle (*). On sent assez que je veux parler des problèmes où il s'agit de décrire un cercle qui en touche trois autres sur un plan ou une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace. Apollonius avait traité le premier de ces deux problèmes, dans un ouvrage qui ne nous est point parvenu. Adrien Romain, géomètre Belge, tenta de réparer cette perte; mais il eut recours à des intersections de sections coniques, tandis que le problème est de nature à être résolu par les élé–

(*) Voyez les *Mémoires de l'académie de Turin*, pour 1814, ou les *Annales de Mathématiques*, tom. IV, pag. 349, et tom. VII, pag. 289.

mens, comme en effet Viète le fit peu après. La solution de Viète, qui consiste à ramener successivement le problème à une suite d'autres plus simples n'est point extrêmement compliquée ; mais elle est fort longue et tout-à-fait dépourvue d'élégance, au point qu'il n'est pas du tout facile d'en garder le souvenir. Fermat résolut ensuite l'autre problème ; mais il y a peu d'invention dans sa solution, exactement calquée sur celle de Viète, et conséquemment sujette aux mêmes reproches. Postérieurement, ces mêmes problèmes ont été de nouveau attaqués par un grand nombre de géomètres, parmi lesquels je distinguerai seulement Descartes, qui tenta le premier de les résoudre par l'analise algébrique, et ne recueillit de cet essai que des formules excessivement compliquées ; Newton, qui y est revenu à plusieurs reprises et par des procédés divers, tant dans ses *Principes* que dans son *Arithmétique universelle* ; et enfin les élèves les plus distingués de Monge, qui y ont appliqué les méthodes de leur maître. Mais, indépendamment de leur élégant laconisme qui permet d'en réduire l'énoncé à quelques mots, ce qui distingue éminemment les constructions de M. Gergonne, ce qui leur assure une incontestable supériorité, c'est que, tandis que jusqu'ici on n'était généralement parvenu à résoudre ces problèmes qu'en les ramenant successivement à d'autres, de plus en plus faciles ; ce qui, en définitif, rendait la construction totale assez compliquée. M. Gergonne, au contraire, arrive directement au but, et par des procédés qui, avec de très-légères modifications, se plient sans effort à la résolution de ces mêmes problèmes auxquels on avait coutume de ramener ceux-là. Il fait plus encore, et résout, par les mêmes procédés, le problème où il s'agit de décrire un cercle qui en touche trois autres sur une sphère ; problème que, jusqu'à présent, personne n'avait même songé à aborder.

Dans le dessein où je suis de venger l'ancienne géométrie du reproche d'impuissance dont ces mêmes problèmes ont semblé offrir un nouveau motif, je ne puis donc rien faire de plus convenable que de lutter avec elle seule contre ce que la géométrie analitique offre peut-être de plus élégant, et de montrer que, par de simples comparaisons de triangles, on peut facilement être conduit à ces mêmes constructions auxquelles M. Gergonne est parvenu par une voie tout-à-fait différente.

Mais, comme les détails dans lesquels je vais entrer se lient à la théorie des pôles et polaires, à celle des centres axes et plans de similitude, à celle des centres axes et plans radicaux; théories qui n'ont guère été démontrées jusqu'ici que par les méthodes de Monge; je commencerai par en établir les principaux points à l'aide de l'ancienne géométrie. Je ne ferai ainsi, au surplus, qu'atteindre plus complètement le but que j'ai en vue; puisque, tandis que, dans les applications de ce genre, les considérations déduites de la doctrine de Monge sont souvent inapplicables, on verra qu'au contraire les démonstrations élémentaires, par lesquelles je me propose de les remplacer, ne refusent jamais le service, et s'appliquent sans distinction à tous les cas. Je pense d'ailleurs ne point faire une chose tout-à-fait inutile, en mettant à la portée des hommes même qui n'ont en géométrie que les notions les plus élémentaires, des théories dont chaque jour voit étendre les applications, et auxquelles leur extrême fécondité méritera sans doute bientôt une place distinguée dans tous les ouvrages destinés à l'enseignement des principes de cette belle science.

Un point pouvant être considéré indistinctement comme un cercle ou une sphère dont le rayon est nul; une droite comme un cercle dont le rayon est infini, ou comme un cône dont l'angle générateur est nul, ou, et enfin, comme un cylindre dont le rayon est nul; et un plan comme une sphère ou un cylindre dont le rayon est infini, ou comme un cône dont l'angle générateur est droit; il s'ensuit que tout ce que nous allons dire des cercles, des sphères, des cônes et des cylindres est aussi applicable, avec des modifications convenables, aux points, droites et plans; mais, pour atteindre plus rapidement notre but, et écarter des discussions beaucoup plus longues que difficiles, nous abandonnerons à la sagacité du lecteur l'examen de ces cas particuliers, sur lesquels, au surplus, nous pourrons revenir dans une autre occasion.

Par le même motif, lorsque nous parlerons de plusieurs cercles, de plusieurs sphères, de plusieurs cônes ou de plusieurs cylindres, nous supposerons qu'ils ne sont ni égaux ni concentriques ; il sera aisé de voir ensuite ce qui arriverait s'il en était autrement.

Enfin, il faudra toujours supposer les objets dans le cas le plus général ; c'est-à-dire, que les points dont nous parlerons ne seront jamais ni au centre des cercles et des sphères, ni sur l'axe des cônes ou des cylindres, ni à la circonférence des cercles, ni à la surface des sphères, cylindres et cônes ; et des suppositions analogues devront avoir lieu pour les droites et les plans.

SECTION PREMIÈRE.

Propriétés des cercles sur un plan.

§. I.

Des pôles et polaires.

1. Nous appellerons, à l'avenir, *pôles conjugués* d'un cercle, deux points en ligne droite avec son centre, et du même côté de ce centre, tels que le rayon du cercle sera moyen proportionnel entre leurs distances à son centre (*).

2. Il suit de cette definition, 1.° qu'il n'est aucun point du plan d'un cercle qui ne puisse être pris pour pôle, et auquel il ne

(*) Il est presque superflu de prévenir qu'ici le mot *pôle* a une toute autre acception que celle qu'on lui donne, lorsqu'il est question des cercles d'une sphère ; nous en aurions employé une autre, sans la répugnance, bien ou mal fondée, que l'on montre généralement pour les mots nouveaux.

réponde un pôle conjugué, dont il est lui-même le conjugué; 2.° que de ces deux points l'un est toujours intérieur et l'autre extérieur au cercle, de telle sorte que, plus l'un s'éloigne du centre, plus l'autre s'en approche; 3.° que le sommet d'un angle circonscrit au cercle et le milieu de sa corde de contact sont deux pôles conjugués l'un à l'autre.

3. Lorsque par l'un quelconque de deux pôles conjugués par rapport à un cercle, on menera une perpendiculaire indéfinie à la droite qui contient ces deux points, nous dirons de cette droite qu'elle est la *droite polaire* ou simplement la *polaire* de l'autre point qu'à l'inverse nous appellerons le *pôle* de cette droite.

4. Il suit de ces définitions, 1.° qu'il n'est, sur le plan d'un cercle, aucun point qui n'ait sa polaire, ni aucune droite qui n'ait son pôle; 2.° que le pôle est extérieur ou intérieur au cercle, suivant que la polaire lui est sécante ou ne le rencontre pas; 3.° que le sommet de l'angle circonscrit est le pôle de la corde de contact, dont le milieu est à son tour le pôle de la parallèle à cette droite menée par le sommet de l'angle.

5. *THÉORÈME. Le pôle d'une droite est la commune section des cordes de contact de tous les angles circonscrits qui ont leur sommet sur cette droite; et réciproquement la polaire d'un point est le lieu géométrique des sommets des angles circonscrits dont les cordes de contact passent par ce point.*

Démonstration. Soit PQ (fig. 1, 2) une droite fixe passant par le centre C d'un cercle; soit S le sommet d'un angle quelconque circonscrit à ce cercle, le touchant en A, B; soit P l'intersection de la corde de contact AB avec la droite PQ et soit Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur la même droite.

Soient menés le rayon CA et la droite CS coupant perpendiculairement AB en son milieu M. Les triangles rectangles CQS, CMP seront semblables, et il en sera de même des triangles rectangles CAS, AMC; on aura donc les deux proportions

$$CP : CS :: CM : CQ,$$

$$CS : CA :: CA : CM ;$$

d'où on conclura, par multiplication et réduction

$$\div CP : CA : CQ ;$$

les points P, Q sont donc (1) deux pôles conjugués ; P est donc le pôle de SQ (3) ; ce qui démontre le théorème énoncé (*).

6. Ce théorème revient à dire, en d'autres termes, que l'*intersection de deux droites est le pôle de la droite qui passe par les pôles de ces deux-là.* Il offre ainsi un moyen commode de déterminer le pôle par la polaire et réciproquement.

7. Si, en effet, le pôle est donné, on menera deux cordes quelconques qui y concourent, et les sommets des angles circonscrits qui auront ces cordes pour cordes de contact seront deux points de la polaire cherchée Si, au contraire, c'est la polaire qui est donnée, on fera de deux quelconques de ses points les sommets de deux angles circonscrits, dont les cordes de contact se couperont au pôle demandé (**).

§. II.

Des centres et axes de similitude.

8. Nous dirons, à l'avenir, qu'un *angle* est *circonscrit à deux*

(*) La démonstration de Monge n'est applicable qu'au seul cas où la polaire est extérieure au cercle.

(**) Ces constructions ont, sur toutes autres qu'on leur substituerait, l'avantage de n'exiger, à la rigueur, que le simple usage de la règle.

cercles ; lorsque ses côtés seront des tangentes communes à ces deux cercles, ayant l'une et l'autre les deux cercles du même côté, ou l'une et l'autre ces deux cercles de différens côtés ; l'angle circonscrit sera dit *extérieur* dans le premier cas, et *intérieur* dans le second. Dans l'un et l'autre cas, le sommet de l'angle circonscrit est évidemment en ligne droite avec les centres des deux cercles.

9. Nous appellerons, à l'avenir, *centre de similitude de deux cercles*, un point de la droite qui joint leurs centres dont les distances à ces deux centres seront respectivement proportionnelles aux rayons des deux cercles. C'est, en d'autres termes, un point à la fois semblablement placé par rapport aux deux cercles, ce qui justifie sa dénomination introduite par Monge.

10. Deux cercles tracés sur un même plan ont toujours deux centres de similitude ; l'un situé sur la droite même qui joint leurs centres, et l'autre situé sur le prolongement de cette droite, du côté du plus petit des deux cercles. Pour distinguer ces deux points l'un de l'autre, nous les désignerons respectivement sous les dénominations de *centre de similitude interne* et de *centre de similitude externe*.

11. Il est aisé de voir que, lorsque les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, leurs centres de similitude interne et externe ne sont respectivement autre chose (8) que les sommets des angles circonscrits, tant intérieurs qu'extérieurs ; de sorte qu'alors la détermination de ces deux points se trouve ramenée à celle de la tangente commune à deux cercles. Nous verrons bientôt comment on peut les déterminer dans les autres cas.

12. *THÉORÈME. Les centres de similitude externes de trois cercles, tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, sont tous trois situés sur une même ligne droite ; et chacun d'eux se trouve en ligne droite avec deux des centres de similitude interne des mêmes cercles ; de telle sorte que ces six points sont les intersections de quatre droites formant un quadrilatère complet.*

Démonstration.

Démonstration. Soient C, C', C'' (fig. 3) les centres des trois cercles, dont les rayons soient respectivement R, R', R''; soient E, I respectivement les centres de similitude externe et interne des deux cercles dont les centres sont C', C''; soient E', I' ceux des deux cercles dont les centres sont C'', C; soit menée par le point C'' une parallèle indéfinie à CC', coupant EE' en M et II' en N.

Désignons par E'' l'intersection de EE' et CC'; en vertu de la définition des centres de similitude (9) et à cause des parallèles, nous aurons

$$CE':C''E' \quad \text{ou} \quad R:R''::CE'':C''M\,,$$

$$C''E:C'E \quad \text{ou} \quad R'':R'::C''M:C'E''\,;$$

d'où nous conclurons, par multiplication et réduction,

$$R:R'::CE'':C'E''$$

Le point E'', intersection de EE' et CC', est donc (9) le centre de similitude externe des deux cercles dont les centres sont C, C'; les trois centres de similitude externes E, E', E'' sont donc situés sur une même ligne droite; ce qui démontre la première partie du théorème.

Désignons, en second lieu, par E'' l'intersection de II' et CC'; en vertu de la définition des centres de similitude (9) et à cause des parallèles, nous aurons

$$CI':C''I' \quad \text{ou} \quad R:R''::CE'':C''N\,,$$

$$C''I:C'I \quad \text{ou} \quad R'':R'::C''N:C'E''\,;$$

d'où nous conclurons, par multiplication et réduction,

$$R : R' :: CE'' : C'E''$$

Le point E'', considéré comme intersection de II' et CC', est donc encore le centre de similitude externe des deux cercles dont les centres sont C, C'; deux quelconques I, I' des centres de similitude internes sont donc en ligne droite avec l'un E'' des centres de similitude externes ; ce qui démontre la seconde partie du théorème (*).

13. A l'avenir, nous appellerons *axe de similitude* de trois cercles, toute droite qui contiendra trois de leurs centres de similitude. Cette droite sera dite *axe de similitude externe*, lorsqu'elle contiendra les trois centres de similitude externe ; elle sera dite, au contraire, *axe de similitude interne*, lorsqu'elle contiendra un seul de ces centres, avec deux centres de similitude internes. Il est aisé de voir que chacun de ces axes est semblablement placé par rapport aux trois cercles : ce qui justifie leur dénomination.

14. Notre théorème peut, entre autres applications, servir à déterminer les centres de similitude de deux cercles, dans les cas que nous avons exceptés (11). Pour y parvenir, on décrira arbitrairement un troisième à la fois extérieur aux deux cercles donnés ; on déterminera (11) ses centres de similitude, tant internes qu'externes, avec chacun d'eux ; alors, 1.° en joignant par une droite deux centres de similitude de même dénomination, cette droite coupera la droite qui joint leurs centres au centre de similitude externe ; 2.° en joignant, au contraire, par une droite deux centres de similitude de dénominations contraires, cette droite, par son intersection avec celle qui joint les centres des deux cercles, fera connaître le centre de similitude interne (*).

(*) La démonstration de Monge n'est applicable qu'au seul cas où les trois cercles sont extérieurs les uns aux autres.

(**) On peut aussi déterminer, dans tous les cas, les deux centres de similitude de deux cercles, en observant que, si l'on fait, de deux diamètres

15. Sachant ainsi déterminer, dans tous les cas, les centres de similitude, tant internes qu'externes de deux cercles; on pourra aussi, dans tous les cas, déterminer les quatre axes de similitude de trois cercles donnés.

§. III.

Des centres et axes radicaux.

16. Nous appellerons à l'avenir *centre radical* de deux cercles, un point de la droite qui joint leurs centres tel que la différence des quarrés de ses distances à ces deux centres est égale à la différence des quarrés des rayons des deux cercles respectivement.

17. Il suit de cette définition, 1.° que deux cercles, tracés sur un même plan, ont toujours un centre et n'ont jamais qu'un seul centre radical; 2.° que, suivant que le quarré de la distance des centres est plus grand que la différence des quarrés des rayons, égal à cette différence ou plus petit qu'elle, le centre radical est sur le prolongement de la droite qui joint les centres, du côté du plus petit des deux cercles, au centre même de ce cercle ou entre les deux centres; mais toujours, dans ce dernier cas, plus près du centre du plus petit cercle que de celui du plus grand.

18. Nous appellerons à l'avenir, avec M. Gaultier de Tours, *axe radical de deux cercles*, la perpendiculaire indéfinie menée, dans leur plan, à la droite qui joint leurs centres, par leur centre radical.

19. Il est aisé de voir que, lorsque deux cercles se touchent ou se coupent, leur axe radical n'est autre chose que leur tan-

---

parallèles quelconques, les deux bases d'un trapèze, le point de concours des deux côtés non parallèles sera le centre de similitude externe, tandis que l'intersection des deux diagonales sera le centre de similitude interne. C'est une conséquence toute naturelle de la doctrine des points et lignes homologues, doctrine peut-être trop négligée aujourd'hui, et sur laquelle on trouve d'amples développemens dans les *Élémens de géométrie* de CAMUS.

gente ou leur corde commune. Nous verrons bientôt comment on peut facilement déterminer cette droite dans les autres cas.

20. *THÉORÈME. Les tangentes menées à deux cercles de tous les points et des seuls points de leur axe radical, terminées à leurs points de contact, sont égales entre elles.*

Démonstration. Soit P (fig. 4, 5) un point duquel soient menées à deux cercles, dont les centres sont C, C′ des tangentes dont les points de contact respectifs soient T, T′; du même point P soit abaissée sur CC′ une perpendiculaire dont le pied soit O. Soient menés les rayons CT, C′T′, ainsi que les droites PC, PC′. On aura

$$\overline{CP}^2 \text{ ou } \overline{PO}^2+\overline{OC}^2=\overline{PT}^2+\overline{CT}^2 ,$$

$$\overline{C'P}^2 \text{ ou } \overline{PO}^2+\overline{OC'}^2=\overline{PT'}^2+\overline{C'T'}^2 ;$$

d'où, en retranchant et réduisant,

$$\overline{OC}^2-\overline{OC'}^2=(\overline{PT}^2-\overline{PT'}^2)+(\overline{CT}^2-\overline{C'T'}^2) .$$

Or, 1.° si P est un point de l'axe radical, O sera le centre radical, et on aura (16)

$$\overline{OC}^2-\overline{OC'}^2=\overline{CT}^2-\overline{C'T'}^2 ;$$

notre équation deviendra donc, en réduisant, transposant et extrayant la racine quarrée,

$$PT=PT' ;$$

c'est-à-dire que les tangentes partant du point P seront égales.

2.° Réciproquement, si les tangentes PT, PT′ sont égales, notre équation deviendra simplement

$$\overline{OC}^2-\overline{OC'}^2=\overline{CT}^2-\overline{C'T'}^2\ ;$$

le point O sera donc (16) le centre radical ; et par conséquent (18) le point P sera un des points de l'axe radical.

21. *THÉORÈME. Les axes radicaux de trois cercles tracés sur un même plan, et considérés successivement deux à deux, se coupent tous trois au même point.* Voir page 162. Note.

Démonstration. Soient C, C′, C″ les trois cercles, X, X′, X″, respectivement, les axes radicaux de C′, C″, de C″, C, de CC′, et soit O le point de concours des deux premiers. La tangente menée de ce point à C sera (20) égale aux tangentes menées du même point aux cercles C′, C″; ces deux derniers seront donc égales entre elles ; leur point de concours O sera donc (20) un point de X; d'où il suit que X, X′, X″ passent par ce point O (*).

22. Nous appellerons, à l'avenir, *centre radical* de trois cercles, le point de concours des axes radicaux de ces trois cercles, pris deux à deux.

23. Notre théorème (21) fournit un moyen fort simple de déterminer l'axe radical de deux cercles, dans les cas que nous avons exceptés (19). Il consiste à décrire arbitrairement un troisième cercle qui coupe à la fois les deux premiers ; ses cordes communes avec eux seront deux des axes radicaux des trois cercles (19) ; leur point de concours sera donc leur centre radical, et par conséquent l'un des points de l'axe radical des deux cercles dont il s'agit; menant donc, par ce point, une perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres, cette perpendiculaire sera l'axe radical cherché.

(*) La démonstration de Monge n'est applicable qu'au seul cas où, non seulement les trois cercles se coupent deux à deux, mais encore où ils se coupent de telle sorte qu'une portion de leur plan leur est commune à tous trois.

On pourra, au lieu de terminer ainsi la construction, chercher, au moyen d'un nouveau cercle arbitraire, un second point de l'axe radical, qui ainsi se trouvera complètement déterminé.

24. Sachant ainsi déterminer, dans tous les cas, l'axe radical de deux cercles, on pourra aussi, dans tous les cas, construire facilement le centre radical de trois cercles donnés.

SECTION II.

Propriétés des sphères dans l'espace.

§. I.

Des pôles droites et plans polaires.

25. Nous appellerons à l'avenir *pôles conjugués d'une sphère* les pôles conjugués communs à toutes les sections circulaires faites à cette sphère par des plans passant par l'un quelconque de ses diamètres (1).

26. Lorsque, par l'un quelconque de deux pôles conjugés d'une sphère, on conduira un plan indéfini, perpendiculaire à la droite qui joint ces deux pôles, nous dirons que ce plan est le *plan polaire* de l'autre point, que nous appellerons, à l'inverse, *le pôle* de ce plan.

27. Enfin, nous appellerons *polaires conjuguées* d'une sphère deux droites qui, passant par deux pôles conjugués de cette sphère, seront à la fois perpendiculaires entre elles et à la droite qui joint ces deux pôles.

28. *THÉORÈME. Le pôle d'un plan est la commune section des plans des lignes de contact de tous les cônes circonscrits à la sphère qui ont leur sommet sur ce plan; et réciproquement le plan polaire d'un point est le lieu géométrique des sommets de tous les cônes circonscrits dont les plans des lignes de contact passent par ce point.*

Démonstration. Soient C le centre de la sphère, S le somme d'un cône circonscrit, P un quelconque des points du plan de la ligne de contact, et Q le point de la droite CP où elle est coupée par le plan conduit par S, perpendiculairement à cette droite. En concevant un plan par C, S, P, on se trouvera exactement dans le cas des figures 1, 2; on démontrera donc, comme nous l'avons fait (5), que les points P, Q sont deux pôles conjugués, et que, conséquemment, le point P est (26) le pôle du plan conduit par Q, perpendiculairement à CP.

29. *THÉORÈME. La polaire conjuguée d'une droite est la commune section des plans des lignes de contact de tous les cônes circonscrits à la sphère qui ont leurs sommets sur cette droite; et, réciproquement, le lieu géométrique des sommets de tous les cônes circonscrits à la sphère, dont les plans des lignes de contact se coupent suivant une droite, est la polaire conjuguée de cette droite.*

Démonstration. Une droite D étant située d'une manière quelconque par rapport à une sphère, concevons que, par cette droite, on fasse passer arbitrairement deux plans P, P′, dont les pôles soient respectivement p, p'; il est aisé de voir (5) que la droite d, passant par ces deux derniers points, sera (27) la polaire conjuguée de D; or, le plan de la ligne de contact de tout cône circonscrit à la sphère, dont le sommet sera sur l'un ou l'autre des deux plans P, P′, passera (28) par p ou p' respectivement, et réciproquement; d'où il suit que le plan de la ligne de contact de tout cône circonscrit dont le sommet sera à l'intersection D de ces deux plans, passera à la fois par p et p', et conséquemment par la polaire conjuguée d de D et réciproquement.

30. Il est aisé de voir (27) que, lorsqu'un angle dièdre est circonscrit à une sphère, son arête et la sécante qui joint les points de contact de ses faces avec la sphère sont deux polaires conjuguées l'une à l'autre, par rapport à cette sphère. Or, de là résulte évidemment (28) le théorème suivant.

31. *THÉORÈME. Les droites qui joignent les deux points de*

contact avec la sphère des faces de tous les angles dièdres circonscrits qui ont leur arête sur un plan fixe quelconque, se coupent toutes au pôle de ce plan; et réciproquement, si les droites qui joignent les deux points de contact avec la sphère des faces d'une suite d'angles dièdres circonscrits passent toutes par un même point fixe, les arêtes de ces angles dièdres seront toutes situées sur le plan polaire de ce point.

§. II.

Des centres, axes et plans de similitude.

32. Deux sphères, extérieures l'une à l'autre, étant données dans l'espace, on peut toujours concevoir deux cônes qui soient à la fois circonscrits à l'un et à l'autre. L'axe commun de ces deux cônes passera par les centres des deux sphères; mais, tandis que le sommet de l'un sera sur la droite même qui joint ces deux centres, l'axe de l'autre sera sur le prolongement de cette droite, au-delà du centre de la plus petite. Pour distinguer ces deux cônes l'un de l'autre, nous dirons que le premier est *circonscrit intérieurement*, et que l'autre est *circonscrit extérieurement* aux deux sphères. Il est clair que les sections de ces cônes par des plans passant par les deux centres seront (8) des angles circonscrits aux cercles résultant de la section des deux sphères par le même plan.

33. Nous appellerons *angle dièdre circonscrit* à deux sphères, extérieures l'une à l'autre, tout angle dièdre dont les faces seront, l'une et l'autre, des plans tangens communs à ces deux sphères. Il est aisé de voir que ces angles dièdres sont en même temps circonscrits à l'un ou à l'autre des deux cônes circonscrits à ces mêmes sphères, et que conséquemment leur arête passe constamment par le sommet de l'un ou de l'autre cône; ces arêtes coupent donc constamment la droite qui passe par les centres, et se trouvent

trouvent conséquemment avec elle dans un même plan, que l'on conçoit devoir diviser l'angle dièdre en deux parties égales ; mais, tandis que l'arête des angles dièdres circonscrits à l'un des cônes coupe la droite même qui joint les centres, l'arête de ceux qui sont circonscrits à l'autre cône coupe le prolongement de cette droite au-delà du centre de la plus petite des deux sphères. Nous dirons, en conséquence, des angles dièdres de la première série, qu'ils sont *circonscrits intérieurement*, et de ceux de la seconde qu'ils sont *circonscrits extérieurement* aux deux sphères.

34. Nous appellerons à l'avenir *centres de similitude de deux sphères* les centres de similitude communs à tous les systèmes de deux cercles résultant des sections de ces sphères par des plans quelconques passant par la droite qui joint leurs centres. Le centre de similitude des deux sphères sera dit *interne* ou *externe*, suivant qu'il sera tel par rapport aux sections circulaires dont il vient d'être question. C'est, dans tous les cas, un point semblablement situé par rapport aux deux sphères.

35. Lorsque deux sphères sont extérieures l'une à l'autre, leurs centres de similitude interne et externe ne sont autre chose que les sommets respectifs des cônes circonscrits intérieurement et extérieurement : ce sont aussi les points communs de concours des arêtes des angles dièdres circonscrits intérieurement et extérieurement.

36. *THÉORÈME. Les centres de similitude externes de trois sphères, prises successivement deux à deux, sont tous trois situés sur une même ligne droite ; et chacun d'eux se trouve en ligne droite avec deux des centres de similitude internes ; de telle sorte que ces six points sont les intersections de quatre droites formant un quadrilatère complet, dont le plan est celui même qui contient les centres des trois sphères.*

Démonstration. Cela est évident (12), puisque ces six points ne sont autre chose (34) que les centres de similitude des cercles résultant de la section des trois sphères par un plan passant par leurs centres.

37. A l'avenir, nous appellerons *axe de similitude* de trois sphères toute droite qui contiendra trois de leurs centres de similitude. Cette

droite sera dite *axe de similitude externe*, lorsqu'elle contiendra les trois centres de similitude externes ; elle sera dite, au contraire, *axe de similitude interne*, lorsqu'elle contiendra un seul de ces centres avec deux des centres de similitude internes. Ce sont évidemment des droites homologues à la fois par rapport aux trois sphères, ce qui justifie leur dénomination.

38. Lorsque trois sphères sont extérieures les unes aux autres, on peut toujours, de deux manières, leur conduire un plan tangent ; car ce plan peut laisser les trois sphères d'un même côté et pourra être appelée, pour cette raison, *plan tangent commun externe*, ou bien il pourra avoir deux des sphères d'un même côté et la troisième de l'autre, et sera dit *plan tangent commun interne* ; à chaque plan tangent commun il en répondra un autre, symétrique avec lui par rapport au plan qui contient les centres, et ces deux plans formeront un angle dièdre circonscrit. Il y aura donc un seul *angle dièdre circonscrit externe* et trois *angles dièdres circonscrits internes* ; et leurs arêtes ne seront autre chose que ce que nous avons appelé axes de similitude externe et interne des trois sphères.

39. *THÉORÈME. Les centres de similitude externes de quatre sphères, prises successivement deux à deux, sont sur un même plan, aux intersections de quatre droites, formant un quadrilatère complet ; en outre, en prenant trois de ces centres, appartenant à une même droite, et conséquemment relatifs aux trois mêmes sphères prises successivement deux à deux, ils se trouveront aussi, avec les trois centres de similitude internes, relatifs à la quatrième sphère, comparée tour à tour aux trois premières, situés dans un même plan, aux intersections de quatre droites formant également un quadrilatère complet ; enfin, si l'on considère deux centres de similitude externes dont un appartient à deux quelconques des quatre sphères et l'autre aux deux sphères restantes, ces deux points se trouveront, avec les quatre centres de similitude internes, autres que ceux qui appartiennent aux deux mêmes combinaisons de deux sphères, situés dans un même plan, aux*

intersections de quatre droites formant encore un quadrilatère complet.

Démonstration. Soient S, S', S'', S''' les quatre sphères dont il s'agit; désignons respectivement par (S*i*S'), (S*e*S') les centres de similitude interne et externe des deux sphères S, S', et soient adoptées des notations analogues pour toutes nos sphères, prises deux à deux.

D'abord, d'après ce que nous venons de dire (36), les quatre séries de points

$$\left.\begin{array}{lll}(SeS'), & (S'eS''), & (S''eS), \\ (S'eS''), & (S''eS'''), & (S'''eS'), \\ (S''eS'''), & (S'''eS), & (SeS''), \\ (S'''eS), & (SeS'), & (S'eS'''),\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{correspondant}\\ \text{respectivement}\\ \text{aux sphères}\end{array} \left\{\begin{array}{lll}S, & S', & S'', \\ S', & S'', & S''', \\ S'', & S''', & S\ ; \\ S''', & S, & S',\end{array}\right.$$

seront sur quatre droites ; or, ces points ne sont qu'au nombre de six ; ils seront donc aux intersections de ces quatre droites, qui conséquemment appartiendront à un même plan ; ces six points seront donc aussi dans ce plan ; ce qui démontre la première partie du théorème.

En outre, d'après cette même proposition (36), les quatre séries de points

$$\left.\begin{array}{lll}(SeS'), & (S'eS''), & (S''eS), \\ (SeS'), & (SiS'''), & (S'iS'''), \\ (S'eS''), & (S'iS'''), & (S''iS'''), \\ (S''eS), & (S''iS'''), & (SiS'''),\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{correspondant}\\ \text{respectivement}\\ \text{aux sphères}\end{array} \left\{\begin{array}{lll}S, & S', & S''\ ; \\ S, & S', & S'''\ ; \\ S', & S'', & S''', \\ S'', & S, & S''',\end{array}\right.$$

seront en lignes droites ; or, ces points ne sont qu'au nombre de six seulement ; ils sont donc aux intersections de ces quatre droites, formant conséquemment un quadrilatère complet; ces six points sont donc dans un même plan ; ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Enfin, et toujours d'après la même proposition (36), les quatre séries de points

(SeS') , (SiS'') , $(S'iS'')$		S , S' , S'' ,
(SeS') , (SiS''') , $(S'iS''')$	correspondant respectivement	S , S' , S''' ,
$(S''eS''')$, (SiS'') , (SiS''')	aux sphères	S , S'' , S''' ,
$(S''eS''')$, $(S'iS'')$, $(S'iS''')$		S' , S'' , S''' ,

seront en lignes droites ; or, ces points ne sont qu'au nombre de six seulement ; ils sont donc aux intersections de quatre droites, formant conséquemment un quadrilatère complet ; ces six points sont donc dans un même plan ; ce qui démontre la troisième partie du théorème.

40. A l'avenir, nous appellerons *plan de similitude de quatre sphères* tout plan qui contiendra six des douze centres de similitude de ces quatre sphères prises deux à deux, sans que ces six points appartiennent aux trois mêmes sphères. Ce plan de similitude sera dit *externe*, s'il contient les six centres de similitude externes : il sera dit *interne*, au contraire, s'il contient deux centres de similitude externes seulement, avec quatre centres de similitude internes ; enfin, il sera dit *mixte*, s'il contient trois centres de chaque sorte. Quatre sphères ont donc, généralement parlant, un plan de similitude externe, trois plans de similitude internes, et quatre plans de similitude mixtes. Il est aisé de voir, au surplus, que chacun de ces huit plans est à la fois homologue par rapport aux quatre sphères, ce qui justifie leur dénomination.

§. III.

Des plans, axes et centres radicaux.

41. Nous appellerons à l'avenir *centre radical de deux sphères*, le centre radical commun de tous les systèmes de deux cercles résultant de la section de ces sphères par des plans passant par la droite qui joint leurs centres. C'est conséquemment (16) un point de la droite qui passe par les centres dont la différence des quarrés des distances à ces centres est égale à la différence des quarrés des rayons des deux sphères.

42. Nous appellerons à l'avenir *plan radical de deux sphères* le plan indéfini, mené perpendiculairement à la droite qui joint leurs centres, par leur centre radical ; c'est évidemment (18) le lieu géométrique des axes radicaux de tous les systèmes de deux cercles résultant de la section des deux sphères par des plans passant par leurs centres ; d'où il suit (19) que, lorsque les deux sphères se touchent ou se coupent, leur plan radical n'est autre chose que leur plan tangent commun, dans le premier cas, et celui de leur commune section dans le second.

43. *THÉORÈME. Les tangentes menées à deux sphères de tous les points et des seuls points de leur plan radical sont égales entre elles, ou, en d'autres termes, les cônes circonscrits de même sommet, dont le sommet commun est sur le plan radical, et qui se terminent à leurs lignes de contact respectives, ont toujours et ont seuls leurs arêtes égales de part et d'autre.*

Démonstration. Soient C, C′ les centres des deux sphères, P un point quelconque de l'espace, pris pour sommet commun de deux cônes circonscrits, et O le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite qui joint les centres. Par les trois points P, C, C′, soit conduit un plan ; tout sera dans ce plan, comme dans les figures 4 et 5 ; PC, PC′ seront les axes des deux cônes, et PT, PT′ en seront les arêtes ; donc (20), suivant que P sera ou ne sera pas sur l'axe radical des deux cercles, les droites PT, PT′ seront égales ou inégales, et réciproquement ; or, suivant que P sera ou ne sera pas sur l'axe radical des deux cercles, ce même point sera ou ne sera pas sur le plan radical des deux sphères ; notre théorème se trouve donc ainsi démontré.

44. Nous appellerons à l'avenir *centre radical de trois sphères*, le centre radical des trois cercles résultant de leur section par le plan passant par leurs centres ; et nous appellerons *axe radical* des trois mêmes sphères, la perpendiculaire indéfinie menée par leur centre radical au plan qui contient leurs centres.

45. *THÉORÈME. Les plans radicaux de trois sphères, prises*

successivement deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite, perpendiculaire au plan qui contient leurs centres, laquelle n'est autre chose que l'axe radical des trois sphères.

Démonstration. Si, par les centres des trois sphères, on conçoit un plan, les intersections avec les trois sphères seront trois grands cercles, et ses intersections avec les plans radicaux ne seront autre chose (42) que les axes radicaux de ces trois cercles ; ces axes passeront donc tous trois (21) par un même point qui sera le centre radical de ces trois cercles ; en menant donc, par ce point, l'axe radical des trois sphères, cet axe se trouvera à la fois dans les trois plans, qui conséquemment se couperont suivant cette droite.

46. *THÉORÈME. Les tangentes menées à trois sphères de tous les points et des seuls points de leur axe radical sont égales entre elles, ou, en d'autres termes, les cônes circonscrits de même sommet, dont le sommet commun est sur l'axe radical, et qui se terminent à leurs lignes de contact respectives, ont toujours et ont seuls leurs arêtes de même longueur.*

Démonstration. Soient S, S′, S″ les trois sphères, R, R′, R″ les plans radicaux respectifs de S′, S″, de S″, S, de S, S′, se coupant dans l'axe radical X ; pour que les tangentes menées d'un même point P à S′, S″ soient de même longueur que la tangente menée de ce point à S ; il sera nécessaire et il suffira (43) que ce point P soit à la fois sur les deux plans R′, R″ ; il devra donc être sur leur commune section, c'est-à-dire (45) sur l'axe radical des trois sphères.

47. *THÉORÈME. Les six plans radicaux de quatre sphères, prises successivement deux à deux, et conséquemment les quatre axes radicaux de ces mêmes sphères, prises successivement trois à trois se coupent en un même point.*

Démonstration. Soient S, S′, S″, S‴ les quatre sphères dont il s'agit, et soient X, X′, X″, X‴ les axes radicaux respectifs de S′, S″, S‴, de S″, S‴, S, de S‴, S, S′, de S, S′, S″ ; soient de plus R′, R″, R‴, respectivement les plans radicaux de S, S', de S, S'', de S, S'''. Les deux plans R'', R''' se couperont (45) suivant l'axe X' ; pour les mêmes raisons, les deux plans R''', R' se couperont suivant l'axe X'', et les deux plans R', R'' suivant l'axe X'''. Les trois axes X' X'' X''' se couperont donc suivant les intersections, deux à deux, des trois plans R', R'', R''' ; c'est-à-dire, au même point ; il en devra donc être de même des trois axes X, X', X'' ; le premier de ceux-ci passera donc par le point de concours des trois autres, et conséquemment ils se couperont tous quatre aux mêmes points.

48. Il suit de là que quatre sphères étant quelconques dans l'espace, il existe toujours (46) un point et un seul point duquel menant des tangentes à ces quatre sphères, ces tangentes, terminées à leurs points de contact, sont de même longueur ; ou ce qui revient au même, un point tel que les cônes circonscrits qui y auront leur sommet commun, et qui se termineront à leurs lignes de contat, auront toutes leurs arêtes de même longueur. Nous appellerons à l'avenir ce point le *centre radical des quatre sphères.*

SECTION III.

Propriétés des cônes et des cylindres.

§. I.

Des droites et plans polaires.

49. Soit un angle dièdre circonscrit arbitrairement à un cône qui aura conséquemment son sommet sur l'arête de cet angle ; l'angle dièdre touchera le cône suivant deux droites, formant un angle qui sera coupé perpendiculairement en deux parties égales par le plan qui sera conduit par l'axe du cône et par l'arête de l'angle dièdre. Cela posé, si l'on coupe le cône par un plan quelconque perpendiculaire à son axe, ce plan coupera l'arête de l'angle dièdre et la droite divisant l'angle de contact en deux parties égales en deux points qui seront des pôles conjugués du cercle résultant de la section du cône par le même plan.

En effet, le plan de la section circulaire coupera l'angle dièdre suivant un angle circonscrit dont le sommet sera un des points dont il s'agit ; ce même plan coupera l'angle de contact suivant la corde de contact de cet angle circonscrit ; et l'autre point sera le milieu de cette corde ; or, ce sont précisément là (2) les caractères de deux pôles conjugués.

50. On voit donc qu'en prenant sur les diverses sections circulaires du cône une suite de pôles situés sur une même droite passant par son sommet, leurs conjugués seront aussi sur une droite passant par ce même point. A l'avenir, nous désignerons le système de deux pareilles droites sous la dénomination de *polaires conjuguées* du cône.

51. Il suit de cette définition (2), 1.° qu'il n'y a aucune droite passant par le sommet d'un cône qui ne puisse être prise pour polaire de ce cône et à laquelle il ne réponde une polaire conjuguée dont elle est elle-même la conjuguée ; 2.° que de ces deux droites, l'une est toujours intérieure et l'autre extérieure au cône ; 3.° que l'arête de l'angle dièdre circonscrit au cône et la droite qui divise son angle de contact en deux parties égales, sont deux polaires conjuguées de ce cône.

52. Lorsque, par l'une quelconque des deux polaires conjuguées d'un cône, on conduira un plan indéfini, perpendiculaire à celui qui les contient, nous dirons de ce plan qu'il est le *plan polaire* de l'autre droite, que nous appellerons, à l'inverse, la *droite polaire*, ou simplement la polaire de ce plan.

53. Il suit de ces définitions (4), 1.° qu'il n'est aucune droite menée par le sommet d'un cône qui n'ait son plan polaire, ni aucun plan, passant par ce même sommet qui n'ait sa droite polaire ; 2.° que la polaire est extérieure ou intérieure au cône, suivant que le plan polaire lui est sécant ou ne le rencontre pas ; 3.° que l'arête de l'angle dièdre circonscrit est la polaire du plan de l'angle de contact ; comme la droite qui divise cet angle en deux parties égales est, à l'inverse, la polaire du plan conduit, par l'arête de l'angle dièdre, perpendiculairement

perpendiculairement à celui qui contient cette arête et l'axe du cône.

54. *THÉORÈME. La polaire d'un plan passant par le sommet d'un cône est la commune section des plans des angles de contact de tous les angles dièdres circonscrits à ce cône, qui ont leur arête sur ce plan; et réciproquement, le plan polaire d'une droite passant par le sommet d'un cône, est le lieu géométrique des arêtes des angles dièdres circonscrits à ce cône, dont les plans des angles de contact passent par cette droite.*

Démonstration. Concevons, en effet, par l'un quelconque C des points de l'axe du cône un plan perpendiculaire à cet axe, coupant l'arête de l'angle dièdre circonscrit en un point S, ses lignes de contact en A, B, la polaire en P, et en Q l'intersection du plan qui contient l'axe et cette polaire avec le plan perpendiculaire à ce dernier, conduit par l'arête de l'angle dièdre; on se trouvera exactement dans le cas des figures 1, 2; d'où on conclura (5) que SQ est la polaire du point P; et que conséquemment (50, 52) le plan dont SQ est l'intersection avec celui de la figure, est le plan polaire de la droite dont P est l'intersection avec ce même plan.

55. Ce théorème revient, au surplus, à dire que l'intersection de deux plans qui passent par le sommet d'un cône est la polaire du plan qui passe par les polaires de ces deux-là, et réciproquement.

56. En considérant le cylindre comme un cône dont le sommet est infiniment éloigné, on est conduit à appeler *polaires conjuguées* d'un cylindre deux droites situées dans un même plan avec l'axe du cylindre, et parallèles à sa direction, telles que le rayon de ce cylindre est moyen proportionnel entre les distances de ces deux droites à cet axe. On appelle aussi *plan polaire* d'une droite, parallèle à l'axe d'un cylindre un plan perpendiculaire à celui qui contient cette droite et cet axe, passant par la polaire conjuguée de cette même droite. A l'aide de ces définitions, on peut (54) établir le théorème suivant :

57. *THÉORÈME. La polaire d'un plan parallèle à l'axe d'un*

cylindre est la commune section des plans des lignes de contact de tous les angles dièdres circonscrits au cylindre dont les arêtes sont sur ce plan; et réciproquement, le plan polaire d'une droite parallèle à l'axe d'un cylindre est le lieu géométrique des arêtes des angles dièdres circonscrits au cylindre, dont les plans des lignes de contact passent par cette droite.

§. II.

Des axes et plans de similitude.

58. Nous dirons, à l'avenir, qu'un *angle dièdre* est *circonscrit* à deux cônes de même sommet, lorsque ses faces seront des plans tangens communs à ces deux cônes, ayant, l'un et l'autre, les deux cônes du même côté, ou l'un et l'autre les deux cônes de différens côtés; l'angle dièdre circonscrit sera dit *extérieur*, dans le premier cas, et *intérieur* dans le second. Dans l'un et l'autre cas, l'arête de l'angle dièdre passe évidemment par le sommet commun des deux cônes, et se trouve dans le même plan avec leurs axes.

59. *LEMME. Si deux sphères, variables de grandeur et de situation, sont continuellement inscrites à deux cônes de même sommet, leurs centres de similitude, tant interne qu'externe, ne sortiront pas de deux droites fixes, passant par le sommet commun des deux cônes, et situées dans le même plan avec leurs axes.*

Démonstration. Soit S le sommet commun des deux cônes. Soient A, B les deux sphères dans leur premier état; E, I leurs centres de similitude externe et interne respectivement. Soient A′, B′, ces sphères dans leur second état; E′, I′ leurs centres de similitude externe et interne, respectivement. Soient enfin e, i les centres de similitude externe et interne des deux sphères A′, B. Il est clair que S sera (35) le centre commun de similitude externe soit des sphères A, A′, soit des sphères B, B′.

Cela posé, en considérant d'abord les trois sphères A, A′, B, on verra (36) que trois points e, E, S sont en ligne droite, et qu'il en est de même des trois points i, I, S.

En considérant ensuite les trois sphères B, B′, A′, on verra pareillement (36) que les trois points E′, *e*, S sont en ligne droite, et qu'il en est de même des trois points I′, *i*, S.

La droite qui contient les trois points *e*, E, S et celle qui contient les trois points E′, *e*, S, ayant ainsi deux points communs *e*, S ; elles doivent ne faire qu'une seule et même droite ; et conséquemment les deux points E, E′ doivent être en ligne droite avec le point S.

Pareillement, la droite qui contient les trois points *i*, I, S, et celle qui contient les trois points I′, *i*, S, ayant ainsi deux points communs *i*, S ; elles doivent se confondre en une seule et même droite ; et conséquemment les deux points I, I′ doivent être en ligne droite avec le point S.

La proposition se trouve donc ainsi complètement démontrée.

60. Nous appellerons à l'avenir *axe de similitude* de deux cônes de mêmes sommets, la droite qui contient les centres de similitude de même dénomination de tous les systèmes de deux sphères respectivement inscrites à ces deux cônes. Ces axes de similitude seront dits *internes* ou *externes*, suivant qu'ils contiendront les centres de similitude internes ou les centres de similitude externes des systèmes de sphères dont il s'agit. Ce sont deux droites passant par le sommet commun des deux cônes, situées dans le même plan avec leurs axes, et dont la direction ne dépend uniquement que de la grandeur et de la situation respective de ces deux cônes (*).

61. Il est aisé de voir que, lorsque les deux cônes sont extérieurs l'un à l'autre, leurs axes de similitude, interne et externe, ne sont autre chose (58) que les arêtes des angles dièdres, tant intérieur qu'extérieur, circonscrits à ces deux cônes.

62. *THÉORÈME. Les axes de similitude externes de trois cônes de même sommet, pris successivement deux à deux, sont tous trois*

(*) La dénomination d'*axe de similitude* est impropre, attendu qu'il n'y a de cônes semblables que des cônes égaux ; aussi ne l'employons-nous que par analogie.

dans un même plan ; *et chacun d'eux est dans un même plan avec deux des axes de similitude internes* ; *de telle sorte que ces six droites sont les intersections de quatre plans formant un angle tétraèdre complet.*

Démonstration. Soit O le sommet commun des trois cônes ; auxquels soient respectivement et arbitrairement inscrites trois sphères S, S′, S″. Soient E, E′, E″, respectivement, les centres de similitude externes de S′, S″, de S″, S, de S, S′ ; et soient I, I′ les centres de similitude internes de S′, S″, de S″, S respectivement ; OE, OE′, OE″ seront (60) les axes de similitude externes des trois cônes pris deux à deux, et OI, OI′ seront deux de leurs axes de similitude internes.

Or (36), les points E, E′, E″ étant en ligne droite, il s'ensuit que les axes OE, OE′, OE″ sont dans un même plan. De plus, E″ étant (36) en ligne droite avec I, I′ ; il s'ensuit que l'axe OE″ est dans un même plan avec les axes OI, OI′, ce qui démontre complètement le théorème.

63. Nous appellerons à l'avenir *plan de similitude* de trois cônes de même sommet, tout plan qui contiendra trois de leurs axes de similitude. Ce plan de similitude sera dit *externe*, s'il contient les trois axes de similitude externes ; il sera dit *interne*, au contraire, s'il contient un seul axe de similitude externe avec deux axes de similitude internes. Trois cônes de même sommet ont donc quatre plans de similitude, dont un seul externe et trois internes.

64. En considérant des cylindres dont les axes sont parallèles comme des cônes dont le sommet commun est infiniment éloigné, on est conduit à appeler *axe de similitude* de deux cylindres, dont les axes sont parallèles, un parallèle à la direction commune de ces axes, tellement située dans leur plan que ses distances aux axes des deux cylindres sont proportionnelles à leurs rayons respectifs. L'axe de similitude est d'ailleurs dit *interne* ou *externe*, suivant qu'il se trouve situé entre les axes des deux cylindres, ou au-delà de l'intervalle qui les sépare. Lorsque les deux cylindres

sont extérieurs l'un à l'autre, ces deux droites ne sont autre chose que les arêtes des angles dièdres circonscrits intérieurement et extérieurement à ces deux cylindres.

De tout cela, il est aisé de déduire le théorème suivant.

65. *THÉORÈME. Les axes de similitude externes de trois cylindres, dont les axes sont parallèles, pris successivement deux à deux, sont tous trois dans un même plan; et chacun d'eux est dans un même plan avec deux des axes de similitude internes; de telle sorte que ces six droites sont aux intersections de quatre plans formant un prisme tétraèdre complet.*

66. On comprend aisément, d'après cela, ce que nous voudrons dire à l'avenir, lorsque nous parlerons des *plans de similitude*, tant *internes* qu'*externes*, de trois cylindres ayant leurs axes parallèles; et on voit en même temps que ces plans sont au nombre de quatre, dont trois internes et un seul externe.

§. III.

Des axes et plans radicaux.

67. *LEMME. Si deux sphères sont respectivement inscrites à deux cônes de même sommet, de telle sorte que les arêtes des deux cônes, terminées à leurs lignes de contact avec les sphères, soient égales de part et d'autre; quel que soit le système des deux sphères, elles auront toujours le même plan radical, passant par le sommet commun des deux cônes.*

Démonstration. Soit S (fig. 6) le sommet commun des deux cônes; et concevons que le plan de la figure soit celui de leurs axes. Soient A, A′ les points où ce plan coupe les lignes de contact des sphères, dont nous supposons les centres en C, C′. A cause des tangentes égales SA, SA′, le point S est (20) un des points de l'axe radical des cercles résultant de la section des deux sphères; et par conséquent la perpendiculaire SO sur CC′ est l'axe radical de ces deux cercles.

Il reste présentement à faire voir que pourvu qu'on ait constamment $SA = SA'$, quels que soient d'ailleurs les deux cercles, l'axe radical SO demeurera invariable. Or, c'est une chose facile à apercevoir. En effet, quels que soient ces deux cercles $\frac{SC}{SA}$, $\frac{SC'}{SA'}$ seront constans; et il en sera donc de même du rapport de ces deux fractions, lequel, à cause de $SA = SA'$, se réduit simplement à $\frac{SC}{SC'}$; ce dernier rapport étant donc constant; CC′ sera constamment parallèle à elle-même; elle sera donc aussi constamment perpendiculaire à la droite fixe SC qui sera ainsi l'axe radical commun à tous les systèmes de deux cercles qui pourront être décrits sous les conditions prescrites.

Donc aussi le plan perpendiculaire à celui de la figure, conduit par la droite fixe SO sera le plan radical commun à tous les systèmes de deux sphères inscrites respectivement aux deux cônes, de telle sorte que leurs lignes de contact soient à la même distance du sommet commun S; ce qui démontre la proposition annoncée.

68. A l'avenir, nous appellerons *plan radical de deux cônes* de même sommet le plan radical commun à tous les systèmes de sphères inscrites aux deux cônes, de telle sorte que leurs lignes de contact avec les deux cônes soient à une même distance quelconque de leur sommet commun. L'intersection de ce plan avec celui des axes sera ce que nous appellerons l'*axe radical* des deux cônes. Il est aisé de voir que, lorsque les deux cônes se touchent ou se coupent, leur plan radical n'est autre chose que leur plan tangent commun ou celui de leurs communes sections.

69. *THÉORÈME. Si, par le sommet commun de deux cônes, on mène arbitrairement une droite dans leur plan radical; et que par cette droite on conduise des plans tangens aux deux cônes, les lignes de contact de ces plans feront des angles égaux avec la droite dont il s'agit; et réciproquement, si les lignes de contact de deux plans respectivement tangens à deux cônes de même som-*

met font des angles égaux avec l'intersection de ces deux plans, cette intersection sera située sur le plan radical des deux cônes.

Démonstration. Soit C le sommet commun des deux cônes, et soit P un autre point quelconque, extérieur à l'un et à l'autre. Par CP soient conduits respectivement des plans tangens aux deux cônes; soient inscrits à ces mêmes cônes deux sphères telles que les distances de leurs lignes de contact au sommet commun soient égales à CP; ces lignes de contact couperont celles des plans tangens; soit A l'une des intersections sur l'un des cônes, et A′ l'une des intersections sur l'autre cône; on aura par construction CA $=$CA′$=$CP; et les droites PA, PA′ seront des tangentes aux deux sphères.

Cela posé, suivant que ces tangentes PA, PA′ seront égales ou inégales, le point P sera ou ne sera pas (42) dans le plan radical des deux sphères, qui est aussi celui des deux cônes et réciproquement; et conséquemment CP sera ou ne sera pas sur ce plan; mais, suivant que les mêmes circonstances auront ou n'auront pas lieu, les triangles isocèles ACP, A′CP auront leurs bases égales ou inégales et réciproquement; donc enfin, suivant que CP sera ou ne sera pas sur l'axe radical des deux cônes, les angles PCA, PCA′ seront égaux ou inégaux et réciproquement.

70. *THÉORÈME. Les plans radicaux des trois cônes de même sommet, pris successivement deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite.*

Démonstration. Soient C, C′, C″ les trois cônes, X, X′, X″, respectivement, les plans radicaux de C′, C″, de C″, C, de C, C′, et soit O l'intersection des deux premiers. Si par cette droite O on mène respectivement des plans tangens aux trois cônes, ces plans détermineront sur eux trois lignes de contact T, T′, T″; et par ce qui vient d'être dit (69), l'angle de O avec T″ sera égal aux angles de la même droite avec T, T′; ces deux derniers seront donc aussi égaux entre eux; O est donc aussi sur X″;

et par conséquent X, X′, X″ se coupent suivant une même droite, comme l'annonce le théorème.

71. Nous appellerons à l'avenir *axe radical de trois cônes* de même sommet, la commune section des plans radicaux de ces trois cônes pris successivement deux à deux.

72. En considérant les cylindres dont les axes sont parallèles comme des cônes qui ont un même sommet infiniment éloigné, on est conduit à appeler *axe radical* des deux cylindres, une parallèle à leurs axes situés dans le plan de ces axes, de telle manière que la différence des quarrés des distances de cette droite aux axes des deux cylindres est égale à la différence des quarrés de leurs rayons. On appellera pareillement *plan radical* des deux mêmes cylindres le plan perpendiculaire à celui de leurs axes conduit par leur axe radical. Si les cylindres se touchent ou se coupent, leur axe radical n'est autre chose que leur plan tangent commun, ou celui de leurs communes sections.

Au moyen de ces définitions, et de ce qui a été établi (69, 70), nous aurons les deux théorèmes suivans ;

73. *THÉORÈME. Les lignes de contact avec deux cylindres, dont les axes sont parallèles, de deux plans tangens qui partent d'une même droite parallèle à ces axes, tracée comme l'on voudra sur le plan radical des deux cylindres, sont également distantes de cette droite; et réciproquement, si les lignes de contact des plans tangens aux deux cylindres sont également distantes de l'intersection de ces plans, cette intersection sera sur le plan radical des deux cylindres.*

74. *THÉORÈME. Les plans radicaux de trois cylindres, dont les axes sont parallèles, pris successivement deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite,*

75. Nous appellerons à l'avenir *axe radical de trois cylindres*, dont les axes sont parallèles, la commune section des plans radicaux de ces trois cylindres, pris successivement deux à deux.

SECTION

SECTION IV.

Propriétés des cercles sur la sphère.

§. I.

Des pôles et arcs polaires.

76. Nous appellerons à l'avenir *pôles conjugués* d'un cercle de la sphère les deux points de sa surface où elle est rencontrée par deux polaires conjuguées d'un cône qui, ayant son sommet au centre de la sphère, passera par ce cercle. Si, par l'un quelconque de ces deux pôles, on conduit un arc de grand cercle, perpendiculaire à celui qui les contient tous deux; nous dirons que l'autre point est le *pôle* de cet arc, que nous appellerons, à l'inverse, l'*arc polaire* de ce point.

77. *THÉORÈME. Le pôle d'un arc de grand cercle est la commune section des arcs de grands cercles joignant les points de contact de tous les angles sphériques circonscrits qui ont leur sommet sur cet arc; et réciproquement, l'arc polaire d'un point est le lieu géométrique des sommets des angles sphériques circonscrits, de manière que les arcs de grands cercles qui joignent leurs points de contacts, passent par ce point.*

Démonstration. C'est une suite évidente de ce qui a été dit ci-dessus (54).

78. En supposant le rayon de la sphère infini, on retombe sur le théorème démontré (5).

§. II.

Des centres et axes de similitude.

79. Nous appellerons à l'avenir *centre de similitude* de deux cercles de la sphère, le point de sa surface où elle sera rencontrée par l'un des axes de similitude de deux cônes qui, ayant leur sommet commun au centre de la sphère, passeraient par ces deux cercles. Ce centre de similitude sera dit *interne* ou *externe*, suivant que l'axe de similitude des deux cônes, sur lequel il se trouvera situé, sera lui-même interne ou externe. Si les deux cercles sont l'un hors de l'autre, leurs deux centres de similitude ne seront autre chose que les sommets des deux angles sphériques circonscrits tant intérieurement qu'extérieurement aux deux cercles.

80. Comme deux grands cercles d'une sphère se coupent toujours en deux points opposés, il s'ensuit que deux cercles d'une sphère ont toujours, à proprement parler, deux centres de similitude internes et deux centres de similitude externes, mais, pour plus de simplicité, nous n'en considérerons qu'un seul de chaque sorte.

81. *THÉORÈME. Les centres de similitude externes de trois cercles d'une même sphère, pris successivement deux à deux, sont tous trois situés sur un même arc de grand cercle ; et chacun d'eux se trouve aussi sur un même arc de grand cercle avec deux des centres de similitude internes ; de telle sorte que ces six points sont les intersections de quatre arcs de grands cercles formant un quadrilatère sphérique complet.*

Démonstration. Ce théorème est une suite évidente de ce qui a été dit ci-dessus (62).

82. Nous appellerons à l'avenir *axe de similitude* de trois cercles d'une sphère, tout arc de grand cercle qui contiendra trois de leurs centres de similitude ; cet axe de similitude sera dit *externe*,

s'il contient les trois centres de similitude externes ; il sera dit *interne*, au contraire, s'il contient un de ces centres, avec deux des centres de similitude internes. Trois cercles d'une sphère ont donc quatre axes de similitude : un externe et trois internes.

83. Au moyen de notre théorème (81), et de ce qui a été observé (79), rien ne sera plus aisé que d'assigner les centres de similitude tant internes qu'externes de deux cercles d'une sphère, dans toutes les situations où ces cercles pourront se trouver l'un par rapport à l'autre. On pourra donc aussi, sans plus de difficulté, construire les quatre axes de similitude de trois cercles quelconques d'une sphère, et cela par un procédé tout-à-fait analogue à celui qui a été indiqué (14, 15).

84. Si l'on suppose que le rayon de la sphère devient infini, on retombe sur le théorème déjà démontré (12).

§. III.

Des centres et axes radicaux.

85. Nous appellerons à l'avenir *centre radical* de deux cercles d'une sphère, le point où sa surface est rencontrée par l'axe radical de deux cônes qui, ayant leur sommet commun au centre de cette sphère, passeraient par ces deux cercles. L'*axe radical* des deux mêmes cercles sera l'arc de grand cercle perpendiculaire à celui qui joint leurs pôles, conduit par leur centre radical ; c'est évidemment (68) l'intersection de la surface de la sphère avec le plan radical des deux cônes. Il est d'ailleurs facile de voir que, lorsque les deux cercles se touchent ou se coupent, leur axe radical n'est autre chose que l'arc de grand cercle qui les touche tous deux ou qui passe par leurs intersections.

86. *THÉORÈME. Les arcs de grands cercles tangens à deux*

cercles d'une sphère, menés de tous les points et des seuls points de leur axe radical, et terminés à leurs points de contact, sont de même longueur.

Démonstration. C'est une suite évidente de ce qui a été démontré ci-dessus (69).

87. *THÉORÈME. Les axes radicaux de trois cercles de la sphère, pris successivement deux à deux, se coupent tous trois au même point.*

Démonstration. C'est une suite évidente de ce qui a été démontré ci-dessus (70).

88. Nous appellerons à l'avenir *centre radical* de trois cercles d'une sphère, le point de concours des axes radicaux de ces trois cercles pris successivement deux à deux. On conçoit que ces trois cercles doivent aussi se couper en un point opposé de la sphère ; de manière qu'à proprement parler, les trois mêmes cercles d'une sphère ont deux centres radicaux situés aux deux extrémités d'un même diamètre de cette sphère.

89. Au moyen de notre théorème (87), et de ce qui a été observé (85), rien ne sera plus aisé que d'assigner l'axe radical de deux cercles de la sphère, quelle que puisse être d'ailleurs leur situation respective. On pourra donc aussi, sans plus de difficulté, construire le centre radical de trois cercles de la sphère, de quelque manière d'ailleurs que ces cercles puissent être posés l'un par rapport à l'autre ; et cela par des procédés tout-à-fait analogues à ceux qui ont été indiqués (23, 24).

90. Si l'on suppose le rayon de la sphère infini, les théorèmes que nous venons d'énoncer (86, 87) deviennent précisément ceux qui ont été démontrés ci-dessus (20, 21).

SECTION V.

Théorèmes et problèmes sur les contacts.

§. I.

Contacts des cercles, et cercle tangent à trois autres sur un plan.

91. Nous appellerons à l'avenir *polaires de similitude* de deux cercles, deux droites ayant pour pôle commun, par rapport à ces deux cercles, l'un de leurs centres de similitude ; ces polaires seront dites d'ailleurs *internes* ou *externes*, suivant que le centre de similitude qui en sera le pôle commun sera lui-même interne ou externe.

92. Chacun des deux centres de similitude de deux cercles étant (9) un point à la fois semblablement situé par rapport à ces deux cercles ; et les polaires des points homologues étant évidemment des droites homologues ; il s'ensuit que les polaires de similitude, soit internes soit externes, de deux cercles sont des droites semblablement situées par rapport à ces deux cercles ; c'est-à-dire, des droites dont les distances aux centres des deux cercles sont respectivement proportionnelles à leurs rayons. C'est d'ailleurs une chose que l'on parviendrait aisément à établir d'une manière directe.

93. *THÉORÈME. Dans tout système de deux cercles, les polaires de similitude internes sont également distantes des polaires de similitude externes, de telle sorte qu'il existe une même perpendiculaire à la droite qui joint les centres également distans des unes et des autres.*

Démonstration. Soient c, c' (fig. 7, 8) les centres de deux cercles dont les centres de similitude, interne et externe, soient respectivement I, E, et dont les polaires de similitude coupent la droite qui joint les centres; savoir : les internes en i, i', et les externes en e, e'. D'après la situation de ces différens points, nous aurons (1), en désignant par R, R' les rayons des deux cercles

$$ci : R :: R : c\mathrm{I}, \qquad c'i' : R' :: R' : c'\mathrm{I},$$

$$R : ce :: c\mathrm{E} : R; \qquad R' : c'e' :: c'\mathrm{E} : R';$$

d'où, en multipliant par ordre, et réduisant,

$$ci : ce :: c\mathrm{E} : c\mathrm{I}; \qquad c'i' : c'e' :: c'\mathrm{E} : c'\mathrm{I};$$

de là on tire

$$ci - ce : c\mathrm{E} - c\mathrm{I} :: ci : c\mathrm{E}; \qquad c'i' + c'e' : c'\mathrm{E} + c'\mathrm{I} :: c'i' : c'\mathrm{E};$$

c'est-à-dire,

$$ei : \mathrm{EI} :: ci : c\mathrm{E}; \qquad e'i' : \mathrm{EI} :: c'i' : c'\mathrm{E};$$

mais on a aussi (1, 9)

$$ci : R :: R : c\mathrm{I},$$

$$R' : c'\mathrm{I} :: c'i' : R';$$

$$c'\mathrm{I} : R' :: c\mathrm{I} : R;$$

$$R : c\mathrm{E} :: R' : c'\mathrm{E};$$

d'où, en multipliant par ordre et réduisant,

$$ci : cE :: c'i' : c'E ;$$

la comparaison de cette proportion avec les deux précédentes donne

$$ei : EI :: e'i' : EI ;$$

donc $ei = e'i'$; d'où on peut conclure encore $ei' = e'i$. Donc, si O est le milieu de ii', ce sera aussi le milieu de ee' ; et par conséquent la perpendiculaire conduite par O, à la droite qui joint les centres, sera à la fois également distante et des deux polaires de similitude internes et des deux polaires de similitude externes.

94. *THÉORÈME. La perpendiculaire à la droite qui joint les centres de deux cercles, qui est à la fois également distante de leurs polaires de similitude internes et de leurs polaires de similitude externes, n'est autre chose que l'axe radical de ces deux cercles.*

Démonstration. On a, par ce qui précède,

$$R^2 = ce \,.\, cE = ce\,(cc' + c'E),$$

$$R'^2 = c'e' \,.\, c'E = c'e'(cE - cc');$$

donc

$$-R'^2 = cc'(ce + c'e') + c'E \,.\, ce - cE \,.\, c'e' ;$$

mais, parce que les points e, e' sont homologues dans les deux cercles, et que le point E est homologue par rapport à tous deux, on doit avoir

$$cE : c'E :: ce : c'e',$$

d'où

$$cE \,.\, c'e' = c'E \,.\, ce \;;$$

donc, on aura simplement,

$$R^2 - R'^2 = cc'(ce + c'e') \;;$$

mais, à cause de $Oe = Oe'$, on a

$$ce + c'e' = (Oe + ce) - (Oe' - c'e') \,,$$

ou

$$ce + c'e' = Oc - Oc' \;;$$

on a d'ailleurs

$$cc' = Oc + Oc' \;;$$

donc enfin

$$R^2 - R'^2 = (Oc + Oc')(Oc - Oc') = \overline{Oc}^2 - \overline{Oc'}^2 \;;$$

donc enfin (18) la perpendiculaire menée par le point O à la droite qui joint les centres est l'axe radical des deux cercles.

95. Voilà donc une manière fort simple de construire l'axe radical de deux cercles, lorsqu'on connaît déjà leurs polaires de similitude, soit internes, soit externes.

96. *THÉORÈME. L'axe radical de deux cercles est placé, par rapport à tout cercle qui les touche tous deux, de la même manière que le sont, par rapport à ces deux cercles, leurs polaires de similitude; savoir : leurs polaires de similitude externes, si le troisième cercle touche les deux autres de la même manière, et leurs polaires de similitude internes, si, au contraire, ce troisième cercle touche les deux autres d'une manière différente. D'où il suit que l'axe radical de deux cercles est une droite semblablement placée par rapport à tous les cercles qui les touchent tous deux; pourvu que chaque cercle soit toujours touché de la même manière par tous ceux-là.*

Démonstration. Soit C le centre d'un cercle touchant de la même manière (fig. 9, 10, 11, 12) et d'une manière différente (fig. 13, 14), en t, t' deux autres cercles dont les centres sont c, c', et dont le centre de similitude externe est E (fig. 9, 10, 11, 12), ou dont le centre de similitude interne est I (fig. 13, 14).

Les points t, t' étant (9) des centres de similitude, de même dénomination (fig. 9, 10, 11, 12) et de dénomination contraire (fig. 13, 14); ces points doivent se trouver, avec le point E (fig. 9, 10, 11, 12) et avec le point I (fig. 13, 14), sur une même ligne droite, qui n'est autre (13) que l'axe de similitude externe (fig. 10, 11, 12) ou l'un des axes de similitude internes (fig. 9, 13, 14) de nos trois cercles; et qui doit conséquemment (13) être semblablement placée par rapport à ces trois cercles; donc, le pôle P de cette droite, par rapport au cercle touchant, doit être placé, à l'égard de ce cercle, de la même manière que le sont les pôles p, p' de la même droite, par rapport aux cercles touchés, relativement à ces derniers. D'un autre côté, le pôle P est (20) un point de l'axe radical des deux cercles touchés; et les points p, p' sont respectivement (7) des points des polaires de similitude de ces deux cercles. Or, lorsque, par des points homologues de plusieurs figures semblables, on mène des droites qui font des angles égaux avec des droites homologues de ces figures, les droites, ainsi menées sont elles-mêmes homologues; puis donc que l'axe radical et les deux polaires, comme droites parallèles, font des angles égaux avec la droite tt', homologue à la fois par rapport à nos trois cercles, et qu'ils passent respectivement par les points homologues P, p, p', il s'ensuit que l'axe radical des deux cercles touchés est situé, par rapport au cercle touchant, de la même manière que le sont, par rapport aux deux autres, leurs polaires de similitude respectives.

97. Nous appellerons à l'avenir *pôle de similitude* d'un cercle, dans le système de trois cercles, le pôle de l'un quelconque des axes de similitude de ces trois cercles, pris par rapport à ce cercle.

Chacun des cercles du système a donc ainsi quatre pôles de similitude ; savoir ; un *externe*, un *interne* et deux *mixtes*.

98. Il est aisé de voir que l'un quelconque de ces pôles, pour l'un quelconque des trois cercles, est toujours (7) l'intersection de deux polaires de similitude obtenues pour ce cercle, en le comparant tour à tour aux deux autres. Ces polaires sont au nombre de quatre ; parallèles deux à deux, et formant ainsi un parallélogramme, dont les sommets sont les quatre pôles dont il s'agit. Le pôle de similitude externe est l'intersection des deux polaires de similitude externes ; le pôle de similitude interne est l'intersection des deux pôlaires de similitude internes ; enfin, chacun des pôles de similitude mixtes est l'intersection d'une polaire de similitude externe et d'une polaire de similitude interne.

99. Pour pouvoir désigner et différencier commodément entre eux ces divers pôles, nous adopterons les notations suivantes : soient c, c', c'' les trois cercles ;

1.° Nous aurons, pour c comparé à c', une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c_e, c') et une polaire de similitude interne que nous désignerons par (c_i, c'). Nous aurons de même, pour c comparé à c'', une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c_e, c''), et une polaire de similitude interne que nous désignerons par (c_i, c'').

2.° Nous aurons, pour c' comparé à c'', une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c'_e, c''), et une polaire de similitude interne, que nous désignerons par (c'_i, c''). Nous aurons de même, pour c' comparé à c, une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c'_e, c), et une polaire de similitude interne, que nous désignerons par (c'_i, c).

3.° Nous aurons enfin, pour c'' comparé à c, une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c''_e, c), et une polaire de similitude interne, que nous désignerons par (c''_i, c). Nous aurons de même, pour c'' comparé à c', une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c''_e, c'), et une polaire de similitude interne, que nous désignerons par (c''_i, c').

On voit, d'après ces notations, que, par exemple, les quatre polaires pour c seront

$$(c_e, c'), \quad (c_e, c''), \quad (c_i, c'), \quad (c_i, c'');$$

et il en sera de même pour les deux autres cercles.

Pour designer un pôle de similitude, ou l'intersection de deux polaires de similitude, relatives à un même cercle, nous séparerons par une virgule les symboles qui désigneront ces deux polaires, en renfermant le tout entre deux crochets; ainsi, par exemple, les quatre pôles de similitude relatifs à c seront désignés comme il suit.

$$[(c_e, c'), (c_e, c'')],$$

$$[(c_i, c'), (c_i, c'')],$$

$$[(c_e, c'), (c\ , c'')],$$

$$[(c_i, c'), (c_e, c'')].$$

et il en sera de même des autres.

Nous continuerons enfin à désigner par E, E′, E″, les centres de similitude externes, et par I, I′, I″ les centres de similitude internes respectivement relatifs à c' et c'', c'' et c, c et c'; et nous désignerons les axes de similitude par les trois lettres qui représentent les centres qui s'y trouvent situés, écrites de suite et renfermées entre deux parenthèses, en cette manière (EE′E″), (EI′I″), (IE′I″), (II′E″).

Rien ne sera plus aisé, d'après cela, que de former le tableau des pôles de similitudes qui, pour chaque cercle, répondent à chacun de ces axes : voici ce tableau.

(EE'E'') ;...$[(c_e, c'), (c_e, c'')]$, $[(c'_e, c''), (c'_e, c)]$, $[(c''_e, c), (c''_e, c')]$.

(EI'I'') ;...$[(c_i, c'), (c_i, c'')]$, $[(c'_e, c''), (c'_i, c)]$, $[(c''_i, c), (c''_e, c')]$.

(IE'I'') ;...$[(c_i, c'), (c_e, c'')]$, $[(c'_i, c''), (c'_i, c)]$, $[(c''_e, c), (c''_i, c')]$.

(II'E'') ;...$[(c_e, c'), (c_i, c'')]$, $[(c'_i, c''), (c'_e, c)]$, $[(c''_i, c), (c''_i, c')]$.

100. *THÉORÈME. Dans le système de trois cercles, les pôles de similitude relatifs à chaque axe de similitude sont des points semblablement placés par rapport à ces trois cercles.*

Démonstration. Nous avons déjà vu (13) que chacun des axes de similitude du système de trois cercles est une droite à la fois semblablement située par rapport à ces trois cercles ; et comme il est d'ailleurs évident que les pôles des droites homologues, sont des points homologues, la proposition se trouve ainsi démontrée.

101. On peut, en général, concevoir huit cercles qui touchent à la fois les trois mêmes cercles donnés. Pour rendre la chose évidente, prenons un cas fort simple ; concevons que ces trois cercles, de même rayon, aient leurs centres situés aux trois sommets d'un triangle équilatéral, et soient extérieurs les uns aux autres. 1.° On pourra concevoir deux cercles dont l'un les touche tous trois extérieurement, tandis que l'autre les enveloppera tous trois ; cela ne se pourra que d'une manière unique ; et, dans l'un et dans l'autre cas, les trois cercles se trouveront touchés de la même manière par le quatrième. 2.° On pourra concevoir deux cercles, dont l'un touche deux des cercles donnés extérieurement et enveloppe le troisième ; tandis qu'au contraire, l'autre enveloppera les deux premiers, et touchera le troisième extérieurement ; mais ici, chaque cas pourra arriver de trois manières différentes, ce qui en fera six, dans chacun desquels deux cercles seront touchés

de

de la même manière, et le troisième d'une manière différente; on aura donc, en effet, huit cercles tangens à la fois aux trois cercles donnés.

Mais il faut remarquer que ce nombre de huit pourrait se trouver réduit, dans certains cas, d'après la grandeur et la situation respective des cercles donnés. Il pourrait même se faire qu'aucun cercle ne pût les toucher tous trois; et c'est, par exemple, ce qui arriverait si, ces trois cercles étant inégaux, le plus petit se trouvait intérieur au moyen, et celui-ci au plus grand.

102. *THÉORÈME. Le centre radical de trois cercles est situé, par rapport à un quatrième cercle qui les touche tous trois, de la même manière que le sont, par rapport à ces cercles, leurs pôles de similitude respectifs; savoir : les pôles relatifs à l'axe de similitude externe, si les trois cercles sont touchés de la même manière par le quatrième; et les pôles relatifs à l'un des axes de similitude internes, si l'un des cercles n'est pas touché de la même manière que les deux autres; pourvu que, dans ce dernier cas, on choisisse celui des axes de similitude qui contient le centre de similitude externe des deux cercles touchés de la même manière par le quatrième cercle.*

Démonstration. Soient c, c', c'' les trois cercles touchés, C le cercle touchant, X', X'' les axes radicaux de c et c', de c et c'', respectivement; soient de plus x', x'' les polaires de c relatives à la nature du contact, soient enfin p le pôle de c et P le centre radical des trois cercles; de manière que p soit l'intersection de x', x'' et P celle de X', X''. D'après ce qui a été démontré (96) x', X'' sont des lignes homologues de c et C; et il en est de même de x'', X''; donc le point P, intersection de X' et X'', est placé, par rapport à C, de la même manière que l'est, par rapport à c, le point p d'intersection de x', x''; et on démontrerait la même chose des pôles de c', c''.

103. Non seulement le centre radical P et le pôle p de c qui convient à la situation de C, sont deux points semblablement si-

tués par rapport aux deux cercles C , c ; mais ils sont de plus semblablement situés par rapport à la droite qui joint les centres de ces deux cercles, laquelle est une droite homologue dans l'un et dans l'autre. Cela est évident , puisque les deux droites qui , par leur intersection, déterminent le premier de ces points , sont respectivement parallèles à leurs homologues , dont l'intersection détermine le dernier ; de manière que les droites homologues , dans les deux systèmes, font des angles égaux, soit avec la droite qui joint les centres, soit avec la tangente commune ; droites homologues communes des deux cercles.

104. *THÉORÈME. La droite qui joint le centre radical de trois cercles à l'un quelconque des quatre pôles de similitude de l'un quelconque de ces trois cercles contient aussi les points de contact de ce cercle avec deux des huit cercles qui touchent à la fois les trois cercles dont il s'agit ; savoir : avec les deux cercles qui les touchent tous trois de la même manière , si le pôle est l'intersection des deux polaires de similitude externes ; avec les deux cercles qui touchent celui-là autrement que les deux autres, si le pôle est l'intersection des deux polaires de similitude internes* ; *et enfin avec deux cercles qui touchent celui-là de la même manière que l'un des deux autres , et le troisième d'une manière différente* , *si le pôle est l'intersection d'une polaire de similitude interne avec une polaire de similitude externe.*

Démonstration. Soient c , c' , c'' les centres des trois cercles dont il s'agit , P leur centre radical , C le centre d'un cercle qui les touche tous trois d'une manière quelconque ; t , t' , t'' ses points de contact respectifs avec eux, et enfin p , p' , p'' leurs pôles de similitude respectifs , déterminés conformément à la manière dont ils sont touchés par le cercle dont le centre est C.

Si nous menons la droite Cc ; qui contient le point t, ainsi que les droites tP , tp ; parce que P , p sont semblablement placés (103) par rapport aux droites homologues tC , tc , les angles CtP et ctp devront être égaux ; puis donc que tC et tc ne forment qu'une seule ligne droite, il en devra être de même de tP et tp; c'est-à-dire, que le point t sera en ligne droite avec les points P, p. On prouvera, par un raisonnement semblable, que les points t', t'' sont respectivement sur Pp', Pp''.

105. Les deux polaires de similitude, dont l'intersection détermine le point p, ont leurs polaires respectivement parallèles et correspondantes, relatives à c', c'', lesquelles, prolongées s'il est nécessaire, concourent en un certain point q; de sorte que les deux points p, q sont des sommets opposés d'un parallélogramme, formé par ces quatre polaires. Mais les axes radicaux X$'$, X$''$, dont le point P est l'intersection, sont respectivement parallèles aux côtés de ce parallélogramme, et ne sont autre chose (94) que les droites qui joignent les milieux de ses côtés opposés; le point P, intersection de ces deux droites, est donc le centre de ce même parallélogramme, et est par conséquent sur une même ligne droite avec les points p, q; puis donc que le point t est en ligne droite avec les points P, p, il sera également en ligne droite avec les points p, q.

106. *PROBLÈME. Décrire, sur un plan, un cercle qui touche à la fois trois cercles donnés?*

Solution. Déterminez, pour l'un quelconque des cercles donnés, ses polaires de similitude avec les deux autres; ayant soin de prendre la polaire externe pour les cercles qui doivent être touchés de la même manière, et l'interne pour ceux qui doivent être touchés d'une manière différente par le cercle cherché. Ces polaires se couperont en un certain point; et les polaires homologues relatives aux deux autres cercles, et respectivement parallèles à celles-là, se couperont en un second point. En joignant ces deux points par une droite, cette droite coupera le premier des trois cercles donnés aux points où il devra être touché par deux cercles dont chacun touchera à la fois les trois cercles de la manière que vous vous serez proposée. En faisant les mêmes opérations relativement à chacun des deux autres cercles, on déterminera pareillement leurs points de contact avec les deux cercles cherchés; de sorte que le problème se trouvera réduit à celui où il s'agit de faire passer un cercle par trois points donnés.

On pourra même se contenter de chercher les points de contact des cercles cherchés avec deux des cercles donnés seulement ; attendu qu'en menant des rayons à ces points, ils détermineront, par leur concours, les centres des cercles cherchés.

Pour chacune des quatre manières dont on voudra que le cercle cherché touche les trois cercles donnés, on trouvera deux cercles qui résoudront le problème ; ce qui fera huit solutions en tout.

Cette solution est exactement celle qui a été donnée par M. Gergonne, dans les *Mémoires de Turin*.

Autrement. On peut aussi se borner à chercher, pour chacun des trois cercles donnés, le pôle de similitude qui convient à la manière dont on veut qu'ils soient touchés par le cercle cherché, ainsi que le centre radical des trois cercles. En joignant ce dernier point à chacun des trois autres par des droites, ces droites, par leurs intersections respectives avec les cercles donnés, détermineront sur ces cercles les points où ils devront être touchés par les deux cercles remplissant les conditions du problème particulier qu'on se sera proposé.

Cette nouvelle solution est celle que M. Gergonne a donnée en l'endroit cité des *Annales de mathématiques* ; elles résultent évidemment, l'une et l'autre, de ce qui a été dit ci-dessus (104 et 105).

107. Si quelques-unes des droites qui doivent déterminer, sur les cercles donnés, leurs points de contact avec le cercle cherché, au lieu de couper ces cercles, leur étaient simplement tangentes, ou même ne les rencontraient pas, le nombre des solutions du problème s'en trouverait d'autant diminué, et pourrait même, dans certains cas, devenir tout-à-fait nul.

108. Les points et les droites n'étant que des cercles dont le rayon est nul ou infini, on sent qu'il suffira de faire subir quel-

ques légères modifications à ces solutions pour en déduire celles des dix problèmes d'Apollonius, résolus pour la première fois par Viète.

§. II.

Contacts des sphères, et sphère tangente à quatre autres dans l'espace.

109. Nous appellerons à l'avenir *plans polaires de similitude* de deux sphères, deux plans ayant pour pôle commun, par rapport à ces deux sphères, l'un de leurs centres de similitude; ce sont, en d'autres termes, les lieux géométriques des polaires de similitude de tous les systèmes de deux cercles résultant de la section des deux sphères par des plans passant par la droite qui joint leurs centres.

110. On voit par là, et par ce qui a été dit (91, 92), que deux sphères ont toujours deux systèmes de deux plans polaires de similitude; savoir, des externes et des internes; et que les uns comme les autres sont semblablement situés par rapport aux deux sphères. On peut aussi de là, et de ce qui a été dit (93, 94), conclure le théorème suivant:

111. *THÉORÈME. Dans tout système de deux sphères, les plans polaires de similitude internes sont également distans des plans polaires de similitude externes; de telle sorte qu'il existe un même plan, perpendiculaire à la droite qui joint les centres également distans des uns et des autres; et ce plan n'est autre chose que le plan radical des deux sphères.*

112. *THÉORÈME. Le plan radical de deux sphères est placé, par rapport à toute sphère qui les touche toutes deux, de la même manière que le sont, par rapport à ces deux sphères, leurs plans polaires de similitude; savoir, leurs plans polaires de similitude externes, si la troisième sphère touche les deux autres de la*

même manière, et leurs plans polaires de similitude internes, si, au contraire, cette troisième sphère touche les deux autres d'une manière différente. D'où il suit que le plan radical de deux sphères est un plan semblablement situé par rapport à toutes les sphères qui les touchent toutes deux; pourvu que chaque sphère soit touchée de la même manière par toutes celles-là.

Démonstration. Si, par les centres des trois sphères, on fait passer un plan, ce plan sera évidemment semblablement placé par rapport aux trois sphères, et il en sera de même des cercles résultant de la section. De plus, l'intersection de ce plan avec le plan radical des deux sphères touchées, axe radical des sections circulaires de ces sphères, se trouvera située, par rapport à la section circulaire de la sphère touchante (96), de la même manière que le seront les intersections du même plan avec les plans polaires de similitude des sphères touchées, lesquelles intersections ne sont autre chose que les polaires de similitude des sections circulaires de ces sphères. Ces polaires de similitude et l'axe radical seront donc trois droites parallèles semblablement situées dans des sections homologues des trois sphères; les plans polaires de similitude et le plan radical, qui sont trois plans parallèles, passant par ces droites, sont donc des plans homologues par rapport aux trois sphères.

113. Nous appellerons à l'avenir *polaire de similitude* d'une sphère, dans le système de trois sphères, la polaire conjuguée de l'un quelconque des axes de similitude de ces trois sphères, prise par rapport à cette sphère. Chacune des sphères du système a donc quatre polaires de similitude; savoir: une *externe*, une *interne* et deux *mixtes*.

114 Il est aisé de voir que l'une quelconque de ces polaires, pour l'une quelconque des trois sphères, est toujours à l'intersection de deux plans polaires de similitude obtenus, pour cette sphère, en la comparant tour à tour aux deux autres. Ces plans polaires sont au nombre de quatre, parallèles deux à deux, et

formant ainsi un prisme tétraèdre indéfini, dont les quatre arêtes sont les quatre polaires dont il s'agit. La polaire de similitude externe est l'intersection des deux plans polaires de similitude externe. La polaire de similitude interne est l'intersection des deux plans polaires de similitude internes; enfin, les deux polaires de similitude mixtes sont l'intersection d'un plan polaire de similitude externe avec un plan polaire de similitude interne.

115. *Dans le système de trois sphères, les polaires de similitude relatives à chaque axe de similitude sont des droites semblablement situées par rapport à ces trois sphères.*

Démonstration. Nous avons déjà vu (37) que chacun des axes de similitude du système de trois sphères est une droite à la fois semblablement située par rapport à ces trois sphères; et, comme il est d'ailleurs évident que les polaires des droites homologues sont elles-mêmes des droites homologues, la proposition se trouve ainsi démontrée.

116. Des considérations analogues à celles que nous avons développées ci-dessus (101) prouvent que les sphères, en nombre infini, qui peuvent toucher à la fois les trois mêmes sphères données, peuvent se trouver dans huit cas distincts. Dans les deux premiers, les trois sphères se trouveront touchées de la même manière : dans les six autres, deux sphères se trouveront touchées de la même manière, et la troisième d'une manière différente.

117. *THÉORÈME. L'axe radical de trois sphères est placé, par rapport à toute sphère qui les touche toutes trois, de la même manière que le sont, par rapport à ces trois sphères, leurs polaires de similitude respectives; savoir : les polaires relatives à l'axe de similitude externe, si les trois sphères sont touchées de la même manière par la quatrième; et les polaires relatives à l'un des axes de similitude internes, si l'une des sphères n'est pas touchée de la même manière que les deux autres; pourvu que, dans ce dernier cas, on choisisse celui des axes de similitude qui contient le centre de similitude externe des deux sphères touchées de la*

même manière par la quatrième sphère. D'où il suit que l'axe radical de trois sphères est une droite semblablement située par rapport à toutes les sphères qui les touchent toutes trois ; pourvu que chacune des trois sphères soit constamment touchée de la même manière par toutes celles-là.

Démonstration. Soient s , s' , s'' les trois sphères touchées, S la sphère touchante, t , t' , t'' les points de contact respectifs, x , x' , x'' les polaires de similitude que l'on considère sur les trois sphères touchées, X l'axe radical de ces trois sphères.

Les points t, t', t'' étant (34) des centres de similitude, le plan que l'on conduira par ces trois points sera (30) un plan à la fois semblablement situé par rapport aux quatre sphères s, s, s, S; les cercles c , c' , c'' , C qu'il déterminera sur elles en seront donc des sections homologues ; les pôles p , p' , p'' , P des plans de ces quatre cercles seront donc des points homologues des quatre sphères ; or, il est aisé de voir (29) que p , p' , p'' sont respectivement situés sur x , x' , x'' , et (46) que P est sur X ; ces quatre droites, parallèles entre elles, passent donc par des points homologues de quatre sphéres par rapport à un plan homologue commun ; elles sont donc elles-mêmes des lignes homologues de ces quatre sphères.

Si l'on conduit trois plans par la droite X et par chacune de ses homologues x , x' , x'' ; il est évident que ces plans contiendront les points t , t' , t'' homologues à la fois par rapport à la sphère S et à chacune des sphères s , s' , s'' ; ces mêmes plans détermineront sur ces trois sphères des sections circulaires, contenant respectivement les points t, t', t''; or, comme ces plans sont invariables quelle que soit la sphère touchante, il en résulte ce théorème, déjà démontré par M. Dupin, mais d'une manière différente.

118. *THÉORÈME. Toutes les sphères qui touchent à la fois les trois mêmes sphères données ont leurs points de contact avec chacune de ces dernières sur une même section circulaire dont le plan, perpendiculaire à celui des centres, passe par l'axe radical des trois sphères et par l'une des polaires de similitude de celle d'entre*

d'entre elles dont il s'agit, pourvu que toutes ces sphères touchent constamment chacune des trois autres de la même manière, et que la polaire soit choisie conformément à la nature du contact.

119. Soient respectivement q, q', q'', Q les points où le plan conduit par t, t', t'' coupe les droites x, x', x'', X ; il est clair que ces points seront des points homologues de quatre sphères, et l'on voit de plus que Qq, Qq', Qq'' contiendront respectivement les points t, t', t'', lesquels sont en même temps les points de contact du cercle C dont il a été tout-à-l'heure question, avec les cercles c, c', c''. On démontrera facilement que ces points q, q', q'', Q, homologues par rapport aux quatre cercles c, c', c'', C sont, savoir ; les trois premiers, les pôles de similitude des trois premiers de ces cercles, et le dernier leur centre radical.

120. Il ne sera pas plus difficile de démontrer que les centres de toutes les sphères d'une même série, tangentes à la fois aux trois mêmes sphères, sont dans un plan mené perpendiculairement à l'un des axes de similitude des trois sphères dont il s'agit, par leur axe radical (*). Nous n'insistons pas sur toutes ces choses, parce que nous n'en ferons aucun usage pour l'objet que nous avons principalement en vue.

121. Nous appellerons à l'avenir *pôle de similitude* d'une sphère, dans le système de quatre sphères, le pôle de l'un quelconque des plans de similitude de ces quatre sphères, pris par rapport à celle-là. Chacune des sphères du système a donc (40) huit pôles de similitude, savoir ; un *externe*, un *interne* et six *mixtes*.

122. Il est aisé de voir (28) que l'un quelconque de ces pôles, pour l'une quelconque des quatre sphères, est toujours l'intersec-

(*) Et, comme ces centres sont aussi sur le cône qui, ayant pour sommet le centre de l'une des sphères touchées, passerait par le petit cercle de cette sphère qui contient ses points de contact avec les sphéres touchantes ; il s'ensuit que le lieu de ces mêmes centres est une section conique.

tion de trois plans polaires de similitude obtenus pour cette sphère, en la comparant tour à tour aux trois autres. Ces plans polaires sont au nombre de six, parallèles deux à deux, et forment ainsi un parallélipipède dont les sommets sont les huit pôles dont il s'agit. Le pôle de similitude externe est l'intersection des trois plans polaires de similitude externes ; le pôle de similitude interne est l'intersection des trois plans polaires de similitude internes ; et les pôles de similitude mixtes sont l'intersection de deux plans polaires de similitude externes avec un interne, ou de deux internes avec un externe.

123. Nous pourrions ici différencier entre eux ces différens pôles, en employant des notations analogues à celles dont nous avons fait usage (99 et suivant) ; mais, comme cela ne saurait offrir de difficulté, nous nous dispenserons de nous y arrêter.

124. *THÉORÈME. Dans le système de quatre sphères, les pôles de similitude relatifs à chaque plan de similitude sont des points semblablement situés par rapport à ces quatre sphères.*

Démonstration. Nous avons déjà vu (40) que chacun des plans de similitude du système de quatre sphères est un plan à la fois semblablement situé par rapport à ces quatre sphères ; et, comme il est d'ailleurs évident que les pôles des plans homologues sont des points homologues, la proposition se trouve ainsi démontrée.

125. On peut, en général, concevoir seize sphères qui touchent à la fois les quatre mêmes sphères données dans l'espace. Pour rendre la chose évidente, prenons un cas fort simple ; concevons que ces quatre sphères, de même rayon, aient leurs centres situés aux quatre sommets d'un tétraèdre régulier, et soient extérieures les unes aux autres. 1.° On pourra concevoir deux sphères, dont l'une les touchent toutes quatre extérieurement, tandis que l'autre les enveloppera toutes trois ; cela ne se pourra que d'une manière unique ; et, dans l'un et l'autre cas, les quatre sphères se trouveront touchées de la même manière par le cinquième. 2.° On

pourra concevoir deux sphères dont l'une touche extérieurement trois des sphères données et enveloppe la quatrième, tandis que l'autre, au contraire, enveloppera les trois premières et touchera la quatrième extérieurement; mais ici chaque cas pourra arriver de quatre manières différentes; ce qui en fera huit, dans chacun desquels trois sphères seront touchées de la même manière, et la quatrième d'une manière différente. 3.° Enfin, on pourra encore concevoir une sphère qui touche extérieurement deux quelconques des quatre sphères données et enveloppe les deux autres; et six sphères pourront être dans ce cas, où deux des sphères données seront touchées d'une même manière, et les deux autres d'une manière différente de celle-là. On aura donc, en effet, seize sphères tangentes à la fois aux quatre sphères données.

Mais il faut remarquer que ce nombre de seize pourrait se trouver réduit, dans certains cas, d'après la grandeur et la situation respective des sphères données. Il pourrait même se faire qu'aucune sphère ne pût les toucher toutes quatre; et c'est, par exemple, ce qui arriverait si, leurs rayons étant tous inégaux, elles se trouvaient, de la plus petite à la plus grande, intérieures les unes aux autres.

126. *THÉORÈME. Le centre radical de quatre sphères est situé par rapport à une cinquième sphère, qui les touche toutes quatre, de la même manière que le sont, par rapport à ces sphères, leurs pôles de similitude respectifs, savoir; les pôles relatifs au plan de similitude externe, si les quatre sphères sont touchées de la même manière par la cinquième; les pôles relatifs à l'un des plans de similitude mixtes, si trois de ces sphères sont touchées de la même manière, et la quatrième d'une manière différente par la cinquième; et enfin les pôles relatifs à l'un des plans de similitude internes, si deux des sphères sont touchées d'une même manière, et les deux autres d'une manière différente par la cinquième; pourvu que dans le second cas on choisisse le plan de similitude qui contient l'axe de similitude externe des trois sphères*

qui doivent être touchées de la même manière ; et que dans le dernier , on choisisse le plan de similitude qui contient les centres de similitude externes des deux couples de sphères qui doivent être touchées d'une même manière par la cinquième.

Démonstration. Soient s, s', s'', s''' les quatre sphères touchées, S la sphère touchante ; X', X'', X''' les plans radicaux de s et s', de s et s'', de s' et s''', respectivement ; soient, de plus, x', $x,'$ x''' les plans polaires de s, relatifs à la nature du contact, respectivement parallèles aux plans radicaux X', X'', X''' ; et soient enfin p le pôle de s et P le centre radical des quatre sphères, de manière que p soit l'intersection des trois plans x', x'', x''', et P celle des trois plans X', X'', X'''; d'après ce que nous avons dit ci-dessus (112) x', X' sont des plans semblablement situés par rapport à s et S ; et il en est de même de x'', X'' et de x''', X''' ; donc le point P, intersection de X', X'', X''', est placé par rapport à S de la même manière que l'est, par rapport à s, le point p d'intersection de x', x'', x''' ; et on démontrerait la même chose des pôles de s', s'', s'''.

127. Non seulement le centre radical P et le pôle p de s qui convient à la situation de S, sont deux points semblablement situés par rapport aux sphères S, s; mais ils sont de plus semblablement situés par rapport à la droite qui joint les centres de ces deux sphères et même par rapport à tout plan passant par cette droite, lesquels droite et plan sont à la fois homologues dans l'une et l'autre sphères. Cela est évident, puisque les trois plans qui, par leur intersection, déterminent le premier de ces points, sont respectivement parallèles à leurs homologues, dont l'intersection détermine le dernier ; de manière que les plans homologues dans les deux systèmes font des angles égaux soit avec un plan quelconque passant par les centres, soit avec le plan tangent commun, plans homologues communs aux deux sphères.

128. *THÉORÈME. La droite qui joint le centre radical de quatre sphères à l'un quelconque des huit pôles de similitude de*

l'une quelconque de ces quatre sphères, contient toujours les points de contact de cette sphère avec deux des seize sphères qui touchent à la fois les quatre sphères dont il s'agit, savoir ; avec les deux sphères qui les touchent toutes quatre de la même manière, si le pôle répond au plan de similitude externe, avec deux des huit sphères qui touchent trois des sphères données d'une même manière, et la quatrième d'une manière différente, si le pôle est relatif à l'un des quatre plans de similitude mixtes ; et enfin avec deux des six sphères qui, touchant deux des sphères données d'une même manière, touchent les deux autres d'une manière différente, si le pôle est relatif à l'un des trois plans de similitude internes.

Démonstration. Soient c, c', c'', c''' les centres des quatre sphères dont il s'agit, P leur centre radical, C le centre d'une sphère qui les touche toutes quatre, d'une manière quelconque, t, t', t'', t''' les points de contact respectifs avec elles, et enfin p, p', p'', p''' leurs pôles de similitude respectifs, déterminés conformément à la manière dont elles sont touchées par la sphère dont le centre est C.

Si, par les points c, C, p, on conçoit un plan ; ce plan contiendra le point t, en ligne droite avec c et C ; et, d'après ce qui vient d'être dit (127), il devra aussi contenir le point P ; menant donc pt, Pt, ces droites se trouveront dans un même plan, à la fois homologues par rapport aux deux sphères ; mais le point t est aussi un point homologue commun à ces deux sphères ; donc pt, Pt en doivent être des lignes homologues ; mais il en est de même des rayons ct, Ct ; donc les angles ctp, CtP doivent être égaux ; puis donc que les trois points c, t, C sont en ligne droite, il doit en être de même des trois points p, t, P. On prouvera, par un raisonnement tout semblable, que les points t', t'', t''' sont respectivement sur t'P, t''P, t'''P.

129. Les trois plans polaires de similitude, dont l'intersection détermine le point p, ont leurs plans polaires respectivement parallèles et correspondans, relatifs à c', c'', c''', lesquels, prolongés,

s'il est nécessaire, concourent en un certain point q; de sorte que les deux points p, q sont des sommets opposés d'un parallélipipède, formé par ces six plans polaires. Mais les plans radicaux X′, X″, X‴, dont le point P est l'intersection, sont respectivement parallèles aux faces de ce parallélipipède, et ne sont autre chose (111) que des plans conduits par les milieux de ses arêtes parallèles; le point P, intersection de ces trois plans, est donc le centre de ce parallélipipède, et doit par conséquent être en ligne droite avec les points p, q; puis donc que le point t est en ligne droite avec les points P, p; il le sera également avec les points p, q.

130. *PROBLÈME. Construire une sphère qui en touche quatre autres, données dans l'espace?*

Solution. Déterminez, pour l'une quelconque des sphères données, ses plans polaires de similitude avec les trois autres; ayant soin de prendre le plan polaire externe, pour les sphères qui doivent être touchées de la même manière, et l'interne pour celles qui doivent être touchées d'une manière différente par la sphère cherchée. Ces plans polaires se couperont en un certain point; et les plans polaires homologues, relatifs aux trois autres sphères et respectivement parallèles à ceux-là, se couperont en un second point. En joignant ces deux points par une droite, cette droite percera la première des quatre sphères données aux points où elle devra être touchée par deux sphères, dont chacune touchera à la fois les quatre sphères données de la manière qu'on se sera proposée. En faisant les mêmes opérations relativement à chacune des trois autres sphères, on déterminera pareillement leurs points de contact avec les deux sphères cherchées; de sorte que le problème se trouvera réduit à celui où il s'agit de faire passer une sphère par quatre points donnés.

On pourra même se contenter de chercher les points de contact des sphères cherchées avec deux des spheres données seulement; attendu qu'en menant des rayons à ces points, ils détermineront, par leur concours, les centres des sphères cherchées.

Pour chacune des huit manières dont on voudra que les sphères données soient touchées par la sphère cherchée, on trouvera deux sphères qui résoudront le problème ; ce qui fera seize solutions en tout.

Cette solution est exactement celle qui a été donnée par M. Gergonne, dans les *Mémoires de Turin*.

Autrement. On peut aussi se borner à chercher, pour chacune des quatre sphères données, le pôle de similitude qui convient à la manière dont on veut qu'elles soient touchées par la sphère cherchée, ainsi que le centre radical des quatre sphères. En joignant ce dernier point à chacun des quatre autres par des droites, ces droites, par leurs intersections respectives avec les sphères données, détermineront sur ces sphères les points où ils devront être touchés par les deux sphères remplissant les conditions du problème particulier qu'on se sera proposé.

Cette nouvelle solution est celle que M. Gergonne a donnée en l'endroit déjà cité des *Annales de mathématiques* ; elles résultent évidemment, l'une et l'autre, de ce qui a été dit ci-dessus (128, 129).

131. Si quelqu'unes des droites qui doivent déterminer, sur les sphères données, leurs points de contact avec la sphère cherchée, au lieu de percer ces sphères, leur étaient simplement tangentes, ou même ne les rencontraient pas, le nombre des solutions du problème s'en trouverait d'autant réduit, et pourrait même, dans certains cas, devenir tout-à-fait nul.

132. Les points et les plans n'étant que des sphères dont le rayon est nul ou infini, on sent qu'il suffira de faire quelques legères modifications à ces solutions, pour en déduire celles des quinze problèmes résolus pour la première fois par Fermat.

§. III.

Contacts des cônes et cylindres, et cône et cylindre tangens à trois autres.

133. Nous appellerons à l'avenir *plans polaires de similitude* de deux cônes de même sommet, deux plans ayant pour polaire commune, par rapport à ces deux cônes, l'un de leurs axes de similitude; ces plans polaires seront dits *internes* ou *externes*, suivant que l'axe de similitude qui en sera la polaire sera lui-même interne ou externe.

134. Nous appellerons à l'avenir *polaires de similitude* d'un cône dans le système de trois cônes du même sommet, la polaire de l'un quelconque des plans de similitude de ces trois cônes, prise par rapport à ce cône. Chacun des cônes du système a donc ainsi quatre polaires de similitude; savoir : une *externe*, une *interne* et deux *mixtes*.

135. Il est aisé de voir que l'une quelconque de ces polaires, pour l'un quelconque des trois cônes, est toujours (54) l'intersection de deux plans polaires de similitude obtenus pour ce cône, en le comparant tour à tour aux deux autres. Ces plans polaires sont au nombre de quatre formant un angle tétraèdre dont les arêtes sont les quatre polaires dont il s'agit. La polaire de similitude externe est l'intersection des deux plans polaires de similitude externes; la polaire de similitude interne est l'intersection des deux plans polaires de similitude internes; enfin, chacune des deux polaires de similitude mixtes est l'intersection d'un plan polaire de similitude externe avec un plan polaire de similitude interne. On peut, pour désigner ces diverses polaires et les différencier entre elles, employer des

des notations analogues à celles dont nous avons fait usage ci-dessus (99).

136. Par des considérations tout-à-fait analogues à celles qui nous ont guidés (101), on se convaincra facilement que trois cônes qui ont un sommet commun peuvent, en général, être touchés à la fois par huit autres cônes de même sommet qu'eux ; deux d'entre eux touchent les trois cônes de la même manière, tandis que les six autres touchent, deux à deux, deux des trois cônes d'une même manière, et le troisième d'une manière différente.

137. *THÉORÈME. Le plan qui contient l'axe radical de trois cônes de même sommet et l'une quelconque des quatre polaires de similitude de l'un quelconque de ces trois cônes contient aussi les lignes de contact de ce cône avec deux des huit cônes de même sommet qui touchent à la fois les trois cônes dont il s'agit ; savoir : avec les deux cônes qui les touchent tous trois de la même manière, si la polaire est l'intersection des deux plans polaires de similitude externes ; avec les deux cônes qui touchent celui-là autrement que les deux autres, si la polaire est l'intersection des deux plans polaires de similitude internes ; et enfin avec deux cônes qui touchent celui-là de la même manière que l'un des deux autres, et le troisième d'une manière différente, si la polaire est l'intersection d'un plan polaire de similitude externe avec un plan polaire de similitude interne.*

Démonstration. Soit C un cône tangent à trois autres c, c', c'', de même sommet O, et les touchant d'une manière déterminée quelconque.

Concevons des sphères S, s, s', s'' respectivement inscrites à ces cônes, de telle sorte que leurs lignes de contact avec eux soient à une même distance quelconque du sommet commun O. Il est clair que la sphère S touchera les trois autres s, s', s'' de la même manière que le cône C touche les cônes c, c', c'', et que ses points de contact avec elles seront sur les lignes de contact respectives de ce cône avec les trois autres.

Il est d'abord évident (68, 70) que l'axe radical des trois sphères sera aussi celui des trois cônes.

Soient k, k', k'' les centres de similitude des trois sphères s, s', s'', déterminés conformément à la nature du contact; ces trois points seront en ligne droite (36); Ok, Ok', Ok'' seront (60) les axes de similitude des trois cônes c, c', c''; et conséquemment (62) ces trois droites seront dans un même plan.

Il suit de là que la polaire de similitude de l'une quelconque des sphères touchées et celle du cône correspondant perceront le plan de sa ligne de contact avec ce cône au même point, et seront conséquemment dans un même plan. En effet, considérons, par exemple, la sphère s, inscrite au cône c. La polaire de s est (29) l'intersection de deux plans dont les pôles sont k', k''; et la polaire de c est l'intersection de deux autres plans dont les droites polaires sont Ox', Ox''; mais le plan de la ligne de contact de s avec c a le point O pour pôle; d'où il suit que le pôle du plan x'Ox'' relatif à la sphère s doit être à la fois sur ces cinq plans, et doit conséquemment être un point du plan de la ligne de contact appartenant à la fois à la polaire de la sphère et à celle du cône qui ainsi se coupent en ce point et sont conséquemment dans un même plan.

Mais l'axe radical des trois cônes et des trois sphères est aussi dans un même plan avec la polaire de similitude du cône c, puisque ces deux droites concourent au point O; et, comme d'ailleurs la polaire de similitude de s, qui, comme nous venons de le voir, a un point sur ce plan, est parallèle à l'axe radical, il s'ensuit que cet axe et les deux polaires sont dans un même plan passant par le point O.

Or, il a été démontré (117) que, lorsqu'une sphère en touche trois autres, le plan qui contient l'axe radical de celles-ci et la polaire de similitude de l'une d'elles contient aussi son point de contact avec la sphère touchante; on pourra donc dire aussi que ce point de contact est sur le plan qui passe par l'axe radical et par la polaire de similitude du cône; et, puisque la ligne de contact du cône touchant et du cône touché passe par ce point de contact et passe de plus par le sommet commun, comme le plan dont il s'agit, cette ligne de contact sera aussi dans ce plan.

138. *PROBLÈME. Construire un cône qui touche à la fois trois cônes donnés du même sommet?*

Solution. Déterminez, pour l'un quelconque des cônes donnés, ses plans polaires de similitude avec les deux autres, ayant soin de prendre le plan polaire externe pour les cônes qui doivent être touchés de la même manière, et le plan polaire interne pour ceux qui doivent être touchés d'une manière différente par le cône cherché. Ces plans polaires se couperont suivant une certaine droite qui sera une des polaires du cône dont il s'agit. Déterminez aussi l'axe radical des trois cônes. Alors, en faisant passer un plan par cette dernière droite et par la polaire, ce plan coupera le premier des trois cônes donnés suivant ses lignes de contact avec deux cônes de même sommet, dont chacun touchera à la fois les trois cônes donnés de la manière que vous vous serez proposée. En exécutant donc les mêmes opérations pour chacun des deux autres cônes, le problème se trouvera ramené à faire passer un cône par trois droites données concourant en un point.

On pourra même se contenter de chercher les lignes de contact des cônes cherchés avec deux des cônes donnés; attendu qu'en conduisant des plans par ces droites et par les axes des cônes auxquels elles appartiennent, leur intersection sera l'axe du cône cherché.

Pour chacune des quatre manières dont on voudra que le cône cherché touche les trois cônes donnés, on trouvera deux cônes qui résoudront le problème, ce qui fera huit solutions en tout.

Cette solution est exactement celle qui a été donnée par M. Gergonne, en l'endroit des *Annales de mathématiques* déjà cité.

139. Si quelques-uns des plans qui doivent déterminer, sur les cônes donnés, leurs lignes de contact avec le cône cherché, au

lieu de couper ces cônes, leur étaient simplement tangens, ou même n'avaient avec eux d'autres points communs que leurs sommmets; le nombre des solutions du problème s'en trouverait d'autant diminué, et pourrait même, dans certains cas, devenir tout-à-fait nul.

140. Les droites et les plans n'étant autre chose que des cônes dont l'angle générateur est nul ou droit, on sent qu'il suffira de faire subir quelques légères modifications à la solution que nous venons de donner, pour en déduire celles de dix problèmes relatifs au cône tout-à-fait analogues à ceux d'Apollonius pour le cercle.

141. En considérant le cylindre comme un cône dont le sommet est infiniment éloigné, on est conduit à appeler *plans polaires de similitude* de deux cylindres, dont les axes sont parallèles, deux plans ayant pour polaire commune, par rapport à ces cylindres, l'un de leurs axes de similitude; ces plans polaires seront dits *internes* ou *externes*, suivant que l'axe de similitude qui en sera la polaire sera lui-même interne ou externe.

142. On appellera de même *polaire de similitude* d'un cylindre, dans le système de trois cylindres, ayant leurs axes parallèles, la polaire de l'un quelconque des plans de similitude de ces trois cylindres prise par rapport à celui-là. Chacun des cylindres du système aura ainsi quatre polaires de similitude; savoir : une *externe*, intersection des deux plans polaires externes, une *interne*, intersection des plans polaires internes, et deux *mixtes*, intersection d'un plan polaire externe avec un plan polaire interne.

142. On voit aussi (136) que les trois mêmes cylindres ayant leurs axes parallèles peuvent toujours être touchés à la fois par huit autres dont les axes seront parallèles aux leurs, et sur la nature du contact desquels il y aura les mêmes observations à faire que sur les diverses sortes de contact d'un cône avec trois autres de même sommet que lui. Tout cela bien entendu, on aura (137) le théorème suivant.

143. *THÉORÈME. Le plan qui contient l'axe radical de trois cylindres dont les axes sont paralèlles et l'une quelconque des quatre polaires de similitude de l'un quelconque de ces cylindres, contient aussi les lignes de contact de ce cylindre avec deux des huit cylindres qui touchent à la fois les trois cylindres dont il s'agit; savoir : avec les deux cylindres qui les touchent tous trois de la même manière, si la polaire est l'intersection des deux plans polaire de similitude externes; avec les deux cylindres qui touchent celui-là autrement que les deux autres, si la polaire est l'intersection des deux plans polaires de similitude internes; et enfin avec les deux cylindres qui touchent celui-là de la même manière que l'un des deux autres et le troisième d'une manière différente, si la polaire est l'intersection de deux plans polaires de dénominations différentes.*

144. *PROBLÈME. Construire un cylindre qui touche, à la fois trois cylindres donnés, dont les axes sont parallèles?*

Solution. La solution de ce problème se déduit tout naturellement du théorème qui vient d'être énoncé de la même manière que la solution de celui dont nous nous sommes occupés (138) se déduit du théorème énoncé (137). On peut aussi couper les trois cylindres donnés par un plan perpendiculaire à la direction commune de leurs axes; décrire (106) sur ce plan, un cercle qui touche à la fois les cercles résultant des cylindres donnés, et considérer ce cercle comme la section par le même plan d'un quatrième cylindre qui résoudra le problème proposé.

145. On peut, au surplus, faire ici des remarques tout-à-fait analogues à celles que nous avons faites (139, 140).

§. IV.

Contact des cercles sur la sphère, et cercle d'une sphère tangent à trois autres.

146. En considérant le sommet commun des cônes dont il a été

question (133 et suiv.) comme le centre d'une sphère de rayon quelconque, on est conduit à appeler *polaire de similitude* de deux cercles d'une sphère, deux arcs de grands cercles ayant pour pôle commun, par rapport à ces deux cercles, l'un de leurs centres de similitude. Ces polaires seront dites *externes* ou *internes* suivant la dénomination du centre de similitude auquel elles seront relatives.

147. On appellera pareillement *pôle de similitude* d'un cercle, dans le système de trois cercles tracés sur la sphère, le pôle de l'un quelconque des axes de similitude de ces trois cercles, pris par rapport à ce cercle. Chacun des cercles du système aura ainsi quatre pôles de similitude; savoir : un *externe*, intersection des deux polaires de similitude externes; un *interne*, intersection des deux polaires de similitude internes, et deux *mixtes*, intersection de deux polaires de dénominations différentes.

148. On voit aussi (136) que les trois mêmes cercles d'une sphère pourront à la fois être touchés par huit cercles différens, sur la nature du contact desquels il y aura à faire des observations analogues à celles que nous avons déjà faites sur le contact d'un cône avec trois autres de mêmes sommets, ou encore (101) sur le contact d'un cercle avec trois autres sur un plan. Ces choses ainsi entendues, on aura (137) le théorème suivant.

149. *THÉORÈME. L'arc de grand cercle qui joint le centre radical de trois cercles d'une sphère à l'un quelconque des quatre pôles de similitude de l'un quelconque de ces trois cercles, contient aussi les points de contact de ce cercle avec deux des huit cercles qui touchent à la fois les trois cercles dont il s'agit; savoir : avec les deux cercles qui les touchent tous trois de la même manière, si le pôle est l'intersection des deux polaires de similitude externes, avec les deux cercles qui touchent celui-là autrement que les deux autres, si le pôle est l'intersection des deux polaires de similitude internes; et enfin avec les deux cercles qui touchent celui-là de la même manière que l'un des deux autres, et le troisième d'une*

manière différente, si le pôle est l'intersection de deux polaires de dénomination différente.

150. *PROBLÈME. Décrire un cercle qui en touche à la fois trois autres donnés sur une sphère?*

Solution. La solution de ce problème se déduit évidemment du théorème qui vient d'être énoncé, de la même manière que nous avons déduit du théorème énoncé (137) celle du problème proposé (138); et il y a encore lieu ici à des remarques analogues à celles que nous avons faites (139 et 140) (*).

151. Si l'on suppose le rayon de la sphère infini, on retombe sur le cas où il s'agit de décrire un cercle qui en touche à la fois trois autres tracés sur un même plan, et notre construction devient alors, en effet, exactement la seconde des deux que nous avons indiquées (106) pour la résolution de ce dernier problème.

(*) On pourrait déduire une autre solution de ce problème de celle d'un problème beaucoup plus général que nous avons donnée à la page 27 du tome VII.e des *Annales*.