FRÉDÉRIC SARRUS

Questions résolues. Démonstration du théorème d'analise transcendante, énoncé à la page 388 du X.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 195-198
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__195_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème d'analise transcendante, énoncé à la page 388 *du X.e volume des* Annales;

Par M. Frédéric Sarrus,
Et par un ancien Elève de l'école polytechnique.

M. Sarrus attaque la question d'une manière tout-à-fait synthétique. Il remarque d'abord que l'on a, par les théories connues,

$$\text{Sin.}\,z=2\text{Sin.}\frac{z}{2}\,\text{Cos.}\frac{z}{2}\;,$$

$$\text{Sin.}\frac{z}{2}=2\text{Sin.}\frac{z}{4}\,\text{Cos.}\frac{z}{4}\;,$$

$$\text{Sin.}\frac{z}{4}=2\text{Sin.}\frac{z}{8}\text{Cos.}\frac{z}{8}\;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{Sin.}\frac{z}{2^{n-2}}=2\text{Sin.}\frac{z}{2^{n-1}}\text{Cos.}\frac{z}{2^{n-1}}\;;$$

$$\text{Sin.}\frac{z}{2^{n-1}}=2\text{Sin.}\frac{z}{2^{n}}\text{Cos.}\frac{z}{2^{n}}\;;$$

d'où ; en multipliant et réduisant ,

$$\text{Sin.}z=2^n\text{Sin.}\frac{z}{2^n}\text{Cos.}\frac{z}{2}\text{Cos.}\frac{z}{4}\text{Cos.}\frac{z}{8}\ldots\ldots\text{Cos.}\frac{z}{2^n}\;.$$

Mais comme , à mesure que n augmente , $\text{Sin.}\frac{z}{2^n}$ tend sans cesse à devenir $\frac{z}{2^n}$; il s'ensuit que, dans le même cas, $2^n\text{Sin.}\frac{z}{2^n}$ tend sans cesse à se confondre avec l'arc z ; de sorte qu'en faisant n infini, on a rigoureusement

$$\text{Sin.}z=z\text{Cos.}\frac{z}{2}\text{Cos.}\frac{z}{4}\text{Cos.}\frac{z}{8}\text{Cos.}\frac{z}{16}\text{Cos.}\frac{z}{32}\ldots\ldots;$$

formule dont le second membre a une infinité de facteurs tendant sans cesse vers l'unité , quel que soit l'arc z, ce qui en garantit la convergence.

En prenant les différentielles logarithmiques des deux membres, on tire de là , en transposant,

$$\frac{1}{z}=\text{Cot.}z+\frac{1}{2}\text{Tang.}\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\text{Tang.}\frac{z}{4}+\frac{1}{8}\text{Tang.}\frac{z}{8}+\ldots.\quad\text{(I)}$$

Si

Si l'on pose ensuite $z=\frac{\varpi}{2}$, ϖ étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, en observant que Cot. $\frac{\varpi}{2}=0$ et divisant par 2, on aura

$$\frac{1}{\varpi}=\frac{1}{4}\text{Tang}\,\frac{\varpi}{4}+\frac{1}{8}\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{8}+\frac{1}{16}\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{16}+\ldots\ldots; \qquad \text{(II)}$$

qui est précisément la formule à démontrer.

M. Sarrus observe que ces deux séries, l'une et l'autre très-régulières, convergent rapidement toutes deux vers des progressions décroissantes par quotiens ayant 4 pour raison; de sorte qu'en prenant pour n un très-grand nombre, la dernière, par exemple, pourra être sensiblement remplacée par cette formule finie

$$\frac{1}{\varpi}=\frac{1}{4}\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{4}+\frac{1}{8}\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{2^n}+\frac{2}{3.2^n}\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{2^{n+1}}.$$

L'anonyme, au contraire, parvient à son but par un procédé tout-à-fait analitique, et conséquemmeut inverse de celui de M. Sarrus. Il cherche généralement quelle fonction finie peut être équivalente à la série infinie

$$\frac{1}{4}\text{Tang.}\,\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\text{Tang.}\,\frac{x}{8}+\frac{1}{16}\text{Tang.}\,\frac{x}{16}+\ldots\ldots;$$

où x désigne un arc quelconque. Posant donc cette série égale à une certaine variable y, multipliant par dx et intégrant, il obtient

$$\int y\mathrm{d}x=C-\left\{\text{Log.Cos.}\,\frac{x}{4}+\text{Log.Cos.}\,\frac{x}{8}+\text{Log.Cos.}\,\frac{x}{16}+\ldots\right\};$$

ou bien

$$\int y\mathrm{d}x = C - \text{Log.}\left(\text{Cos.}\frac{x}{4}\,\text{Cos.}\frac{x}{8}\,\text{Cos.}\frac{x}{16}\,\text{Cos.}\frac{x}{32}\ldots\right);$$

observant ensuite que

$$\text{Cos.}\frac{x}{4}\,\text{Cos.}\frac{x}{8}\,\text{Cos.}\frac{x}{16}\,\text{Cos.}\frac{x}{32}\ldots\ldots = \frac{\text{Sin.}x}{x\text{Cos.}\frac{x}{2}},$$

il en conclut que

$$\int y\mathrm{d}x = C - \text{Log.}\frac{\text{Sin.}x}{x\text{Cos.}\frac{x}{2}} = C - \text{Log}\,\text{Sin.}x + \text{Log.Cos.}\frac{x}{2} - \text{Log.}x\ ;$$

d'où, en différentiant et divisant par $\mathrm{d}x$,

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\text{Tang.}\frac{x}{2} - \text{Cot.}x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\text{Cot.}\frac{x}{2}\ ;$$

ce qui donne, en remettant pour y sa valeur et transposant,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\text{Cot.}\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\text{Tang.}\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\text{Tang.}\frac{x}{8} + \frac{1}{16}\text{Tang.}\frac{x}{16} + \ldots\ldots\ ;$$

formule qui est générale quel que soit l'arc x.

Si ensuite on suppose $x=\frac{\varpi}{2}$, on tombe précisément sur la formule proposée à démontrer.