ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Combinaisons. Solution de quelques problèmes dépendant de la théorie des combinaisons

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 165-195

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__165_0>

COMBINAISONS.

Solution de quelques problèmes dépendant de la théorie des combinaisons;

Par M. ***.
Gergonne.

Je me propose de traiter ici quelques problèmes de combinaison dont je n'ai encore rencontré la solution nulle part. Indépendamment de l'attrait que présentent toujours ces sortes de problèmes et de l'utile exercice qu'ils donnent à l'esprit ; on sait qu'ils se rattachent à diverses théories intéressantes, et notamment à celle des probabilités.

PROBLÈME I. De combien de manières peut-on faire n *parts, avec* m *choses toutes différentes les unes des autres, avec la faculté de faire les parts si inégales qu'on voudra ; mais sous la condition d'admettre au moins une chose dans chaque part ; c'est-à-dire, de ne point faire de parts nulles, et d'employer la totalité des choses, dans chaque système de répartition ?*

Solution. Ayons d'abord égard au rang qu'occupent les parts, dans chaque système de répartition ; c'est-à-dire, considérons d'abord comme systèmes de répartitions différens ceux-là mêmes où les mêmes parts sont disposées dans un autre ordre ; il nous sera facile ensuite de voir ce que doivent devenir nos formules, lorsqu'on ne veut plus tenir compte de cette différence.

Si d'abord on ne veut faire qu'*une* part unique, on sera contraint de la composer des m choses, ce qui ne se pourra que d'une manière ; de sorte que le nombre des manières de faire une part sera donc simplement 1.

S'agit-il de faire *deux* parts ? on pourra prendre successivement, pour la première $1, 2, 3, \ldots m-1$, choses, et tout le reste pour la seconde ; mais, en général, on pourra composer la première part de k choses d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\ldots\ldots\frac{m-k+1}{k},$$

et puisqu'alors la seconde part se trouve tout-à-fait déterminée, il s'ensuit que, suivant qu'on voudra faire la premiere part de 1, 2, 3, ... $m-2$, $m-1$ choses, le nombre des systêmes de répartition possibles sera

$$
\begin{array}{ll}
\text{Pour } 1 \text{ chose}\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{m}{1}, \\[2ex]
2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{m}{1}\cdot\dfrac{m-1}{2}, \\[2ex]
3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{m}{1}\cdot\dfrac{m-1}{2}\cdot\dfrac{m-2}{3}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\[2ex]
m-2\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{m}{1}\cdot\dfrac{m-1}{2}, \\[2ex]
m-1\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{m}{1}.
\end{array}
$$

Le nombre total des modes de répartition en deux parts sera donc la somme des ces termes, que l'on reconnaît de suite être

$$(1+1)^m-2=2^m-2\ .$$

Il est clair d'ailleurs que ces divers systèmes de répartition ne différeront deux à deux que par le rang des deux mêmes parts, dont la première dans l'un sera la seconde dans l'autre.

S'agit-il de faire *trois* parts ? si l'on veut composer la première de k choses, cela se pourra d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-k+1}{k}\ ;$$

il restera ensuite à répartir en deux parts les $m-k$ choses restantes ; ce qui, d'après ce qui précède, pourra se faire d'un nombre de manières exprimé par

$$2^{m-k}-2\ ;$$

ainsi le nombre total des systèmes de répartition où la première part sera composée de k choses sera donc

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-k+1}{k}(2^{m-k}-2)\ ;$$

faisant donc successivement, dans cette formule, $k=1$, 2, 3, ..., $m-2$, $m-1$, on aura, pour le nombre des systèmes de répartition relatif à chaque nombre de choses adopté à la première part, savoir :

Pour 1 chose . . . . $\frac{m}{1}(2^{m-1}-2)$,

2 . . . . $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(2^{m-2}-2)$,

$$3 \ldots\ldots\ldots \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}(2^{m-3}-2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$m-2 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(2^2-2),$$

$$m-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m}{1}(2-2),$$

à la vérité, il est impossible d'admettre $m-1$ choses à la première part, lorsqu'il en faut faire trois; mais aussi le facteur $2-2$ réduit à zéro le nombre des systèmes de répartition qui convient à ce cas.

Le nombre total des modes de répartition possibles en trois parts sera donc la somme de tous ces nombres; mais cette somme se décompose dans les deux séries que voici

$$\frac{m}{1}2^{m-1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}2^{m-2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}2^{m-3}+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}2^2+\frac{m}{1}2,$$

$$-2\left(\frac{m}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\right);$$

la somme de la première est évidemment

$$(2+1)^m-2^m-1=3^m-2^m-1,$$

et celle de la seconde

$$-2[(1+1)^m-2]=-2.2^m+4;$$

réunissant donc ces deux sommes, nous aurons pour le nombre total des systèmes de répartition de nos m choses en trois parts

$$3^m-3.2^m+3 .$$

On conçoit d'ailleurs que ces systèmes ne différeront six à six que par les rangs que les trois mêmes parts y occuperont.

S'agit-il de former *quatre* parts ? en se déterminant à former la première de k choses, on pourra choisir cette part d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-k+1}{k} ;$$

il restera ensuite à faire trois parts des $m-k$ choses restantes, ce qui, d'après ce qui précède, pourra se faire d'un nombre de manières exprimé par

$$3^{m-k}-3.2^{m-k}+3 ;$$

d'où il suit que le nombre total des modes de répartition où la première part comprend k choses, est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-k+1}{k}(3^{m-k}-3.2^{m-k}+3) ;$$

faisant donc successivement, dans cette formule, $k=1, 2, 3, \ldots m-2, m-1$, on trouvera, pour le nombre des systèmes de répartition relatif à chaque nombre de choses adopté à la première part, savoir :

Pour 1 chose. . . . . . $\frac{m}{1}(3^{m-1}-3.2^{m-1}+3)$;

2 . . . . $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(3^{m-2}-3.2^{m-2}+3)$,

$$3 \;.\;.\;.\;.\; \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}(3^{m-3}-3.2^{m-3}+3)\;;$$

. . . . ;

$$m-2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(3^2-3.2^2+3)\;,$$

$$m-1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{m}{1}(3-3.2+3)\;.$$

A la vérité, lorsqu'on doit répartir m choses en quatre parts, la première part n'en saurait admettre $m-1$, ni même $m-2$; mais aussi arrive-t-il que les facteurs $3^2-3.2^2+3$ et $3-3.2+3$, qui répondent aux deux derniers cas, sont nuls d'eux-mêmes.

Le nombre total des systèmes possibles de répartition de nos m choses en quatre parts sera donc la somme de toutes ces formules, laquelle se résout évidemment en ces trois suites

$$\frac{m}{1}.3^{m-1}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.3^{m-2}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.3^{m-3}+\ldots+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.3^2+\frac{m}{1}3,$$

$$-3\left(\frac{m}{1}.2^{m-1}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.2^{m-2}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.2^{m-3}+\ldots+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.2^2+\frac{m}{1}.2\right),$$

$$+3\left(\frac{m}{1}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}+\ldots\ldots+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\right),$$

lesquelles peuvent ensuite être respectivement remplacées par les expressions suivantes

$$+[(3+1)^m-3^m-1]=4^m-3^m-1\;,$$

$$-3[(2+1)^m-2^m-1]=-3.3^m+3.2^m+3\;,$$

$$+3[(1+1)^m-1-1]=+3.2^m-6\;.$$

En conséquence, le nombre total des systèmes de décompositions en quatre parts sera

$$4^m-4.3^m+6.2^m-4 ;$$

bien entendu que ces systèmes ne différeront, 24 à 24, que par les rangs respectifs des quatre mêmes parts.

Un raisonnement tout-à-fait semblable prouvera que le nombre total des systèmes de décomposition en cinq parts est la somme des nombres

$$\begin{aligned}
&+\ (4+1)^m-4^m-1 = 5^m-\ 4^m \qquad\qquad -1\ ,\\
&-4[(3+1)^m-3^m-1] = \ -4.4^m+4.3^m \qquad +4\ ,\\
&+6[(2+1)^m-2^m-1] = \qquad\quad +6.3^m-6.2^m-6\ ,\\
&-4[(1+1)^m-1\ -1] = \qquad\qquad\quad -4.2^m+8\ ;
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, que le nombre de ces systèmes est

$$5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5\ .$$

On trouvera pareillement que, pour le cas de la répartition en six parts, le nombre des systèmes est

$$6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6\ ;$$

et ainsi de suite.

Rapprochons présentement les uns des autres ces divers résultats. Nous voyons que, suivant le nombre des parts que l'on veut faire, le nombre des systèmes de répartition possibles est, savoir ;

Pour le cas d'une part unique . . . . $+1$;

de 2 . . . . 2^m-2 ,

de 3 . . . . $3^m-3.2^m+3$,

de 4 . . . . $4^m-4.3^m+6.2^m-4$,

de 5 . . . . $5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5$,

de 6 . . . $6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6$,

or, la loi de ces résultats est manifeste, et l'on ne peut conclure de suite, comme il serait d'ailleurs facile de s'en assurer par une induction rigoureuse, que l'on peut distribuer en n parts m choses toutes différentes les unes des autres, de manière à ce qu'aucune part ne soit nulle, d'un nombre de manières exprimé par

$$n^m-\frac{n}{1}(n-1)^m+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^m-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^m+\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}2^m\mp\frac{n}{1}\ ;$$

pourvu toutefois que l'on admette comme systèmes différens ceux-là même où les mêmes parts ne sont simplement que transposées.

Avant d'aller plus loin, observons que, comme il est impossible de faire n parts effectives avec un nombre de choses inferieur à n ; et que comme, d'un autre côté, les diverses manières de faire n parts avec n choses ne sont que les diverses manières de permuter ces choses entre elles ; il s'ensuit qu'on doit avoir

$$n-\frac{n}{1}(n-1)+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)+\ldots\pm n=0\ ,$$

n^2-

$$n^2-\frac{n}{1}(n-1)^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^2-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^2+\ldots\pm n=0\,,$$

. . . . ;

$$n^{n-1}-\frac{n}{1}(n-1)^{n-1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^{n-1}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^{n-1}+\ldots\pm n=0\,,$$

$$n^{n}-\frac{n}{1}(n-1)^{n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^{n}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^{n}+\ldots\pm n=1.2.3\ldots n\,.$$

Nous croyons devoir consigner ici ces diverses relations, qui d'ailleurs se vérifient parfaitement, dans les cas particuliers, parce que souvent elles peuvent être utilement employées, comme moyens de réduction (*). Elles peuvent aussi, dans certains cas, faciliter des éliminations.

Que, par exemple, il faille tirer la valeur de x des quatre équations

$$4t+4^2u+4^3v+4^4x=A\,,$$

$$3t+3^2u+3^3v+3^4x=B\,,$$

(*) Elles sont du genre de celle donnée par M. Sarrus, à la page 222 du précédent volume, et on peut, comme par rapport à celle-là, se demander si elles auraient lieu encore dans le cas où n serait fractionnaire ou négatif. On peut, au surplus, de leur combinaison, en déduire une infinité d'autres. Si, par exemple, on en prend la somme, on aura

$$\frac{1}{n-1}[n^n-1]-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{n-2}[(n-1)^n-1]+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{n-3}$$

$$[(n-2)^n-1]-\ldots\ldots\pm n^2=1.2.3\ldots\ldots n\,.$$

J. D. G.

$$2t+2^2u+2^3v+2^4x=C\ ;$$

$$t+u+v+x=D\ ;$$

en remarquant que, d'après ce qui précède,

$$4-4.3+6.2-4=0\ ;$$

$$4^2-4.3^2+6.2^2-4=0\ ,$$

$$4^3-4.3^3+6.2^3-4=0\ ;$$

$$4^4-4.3^4+6.2^4-4=1.2.3.4\ ,$$

on voit que, pour parvenir au but, il ne s'agit que de prendre la somme des produits respectifs de ces quatre équations par $+1$, -4, $+6$, -4; ce qui donne sur-le-champ,

$$1.2.3.4x=A-4B+6C-4D\ .$$

Tout ce que nous venons de dire est, comme nous l'avons observé, relatif au cas où l'on admet, comme autant de différens systèmes de répartition, ceux-là même qui peuvent ne différer les uns des autres que par les rangs que les mêmes parts y occupent; mais si, au contraire, on ne veut admettre, comme systèmes différens, que ceux-là seulement qui ne sont pas, en totalité, composés des mêmes parts, on considérera que, dans le cas de n parts, par exemple, un seul système, pris au hasard, peut, par la simple permutation des parts dont il est formé, en fournir un nombre $1.2.3.4.....n$, lesquels ne doivent plus compter ici que pour une part unique; d'où il suit que, dans le cas de n parts, le nombre des systèmes de répartition réellement différens ne doit plus être simplement que

$$\frac{n^m - \frac{n}{1}(n-1)^m + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^m - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^m + \ldots \pm \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}2^m \pm n}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

ainsi, ce sera dans le cas de *une* part. . . . . $\frac{1}{1}$;

de 2. . . . . $\frac{2^m-2}{1.3}$;

de 3. . . . . $\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3}$,

de 4. . . . . $\frac{4^m-4.3^m+6.2^m-4}{1.2.3.4}$;

de 5. $\frac{5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5}{1.2.3.4.5}$,

de 6. . . . . $\frac{6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6}{1.2.3.4.5.6}$;

et ainsi des autres; d'où l'on voit que ces sortes de fonctions n'ont que l'apparence fractionnaire.

Si l'on demande, par exemple, de combien de manières dix fruits, tous d'espèces différentes, peuvent être répartis entre quatre personnes, on trouvera, pour le nombre cherché,

$$4^{10}-4.3^{10}+6.2^{10}-4=818520\ ;$$

mais, si l'on demandait simplement de combien de manières on peut faire quatre parts avec ces dix fruits, sans aucun égard aux personnes à qui ces parts devraient être destinées, la réponse serait

$$\frac{818520}{1.2.3.4}=34105\ .$$

PROBLÈME II. De combien de manières peut-on faire n *parts, avec* m *choses toutes différentes les unes des autres, lorsqu'on a la faculté de faire tant de parts nulles qu'on veut, sous la condition cependant d'employer toutes les* m *choses dans chaque mode de répartition?*

Solution. La solution de ce problème est très-facile à déduire de celle du problème qui vient d'être résolu, ainsi qu'on va le voir; mais il s'en faut que les résultats qu'on en obtient soient aussi simples que ceux que nous avons obtenus du premier.

D'abord, si l'on ne veut faire qu'*une* seule part, on ne pourra faire de parts nulles; tout se passera donc comme dans le premier problème, et l'on aura, pour le nombre des modes de répartition, $\frac{1}{1}$.

Si l'on veut faire *deux* parts, on ne pourra faire qu'une seule part nulle, et d'une seule manière seulement, et conséquemment le nombre des systèmes qu'avait donné le précédent problème pour ce cas devra simplement être augmenté d'une unité; il sera donc, dans le cas actuel,

$$\frac{2^m-2}{2}+1=\frac{2^m}{2}.$$

Si l'on veut faire *trois* parts, on pourra faire une ou deux parts nulles. On pourra faire une part nulle d'autant de manières qu'il y en a de faire, avec *m* choses, deux parts dont aucune ne soit nulle; et, quant à deux parts nulles, on ne pourra les faire que d'une manière unique, puisqu'on sera contraint de tout mettre dans la troisième. Le nombre total des systèmes de répartition en trois parts sera donc

$$\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3}+\frac{2^m-2}{2}+1;$$

ou bien, par ce qui précède,

$$\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3}+\frac{2^m}{2}=\frac{3^m+3}{1.2.3}.$$

Si l'on veut faire *quatre* parts, on en pourra faire une, deux ou trois nulles. On en pourra faire une nulle d'autant de manières qu'il y en a de faire, avec m choses, trois parts dont aucune ne soit nulle. On en pourra faire deux nulles d'autant de manières qu'il y en a de faire, avec m choses, deux parts dont aucune ne soit nulle. Enfin, on n'en pourra faire trois nulles que d'une manière unique. En conséquence, le nombre des systèmes de quatre parts sera ici

$$\frac{4^m-4.3^m+6.2^m-4}{1.2.3.4}+\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3}+\frac{2^m}{2},$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{4^m-4.3^m+6.2^m-4}{1.2.3.4}+\frac{3^m+3}{1.2.3}=\frac{4^m+6.2^m+8}{1.2.3.4}.$$

En poursuivant le même raisonnement, on trouvera qu'ici le nombre des systèmes de cinq parts est

$$\frac{5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5}{1.2.3.4.5}+\frac{4^m+6.2^m+8}{1.2.3.4}=\frac{5^m+10.3^m+20.2^m+45}{1.2.3.4.5};$$

que le nombre des systèmes de six parts est

$$\frac{6^m+15.4^m+40.3^m+135.2^m+264}{1.2.3.4.5.6};$$

et ainsi de suite.

Comme ces résultats se présentent sous une forme peu symétriques, il vaudra peut-être mieux se rappeler simplement, dans la pratique, que, pour obtenir la solution du problème proposé, il faut prendre la somme d'autant de termes de la suite, très-régulière;

$$\frac{1}{1},$$

$$\frac{2^m-2}{1.2},$$

$$\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3},$$

$$\frac{4^m-4.3^m+6.2^m-4}{1.2.3.4},$$

$$\frac{5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5}{1.2.3.4.5},$$

$$\frac{6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6}{1.2.3.4.5.6},$$

. . . . ,

qu'il y a de parts à faire.

Si, par exemple, il s'agit, comme ci-dessus, de répartir dix fruits de nature différentes en quatre parts, on aura

$$\left.\begin{array}{r} \frac{4^{10}-4.3^{10}+6.2^{10}-4}{1.2.3.4}=34105 \\ \frac{3^{10}-3.2^{10}+3}{1.2.3}=9330 \\ \frac{2^{10}-2}{1.2}=511 \\ \frac{1}{1}=1 \end{array}\right\} 53947:$$

de sorte que le nombre des systèmes de répartition sera 53947.

Mais ceci suppose qu'on ne tient aucun compte de la manière dont les parts sont disposées ; or, il y a des cas où il est nécessaire d'avoir égard à leur disposition ; et tel est, en particulier, celui où il s'agirait de répartir les dix fruits entre quatre personnes ; car le système de répartition où, par exemple, telle personne aurait tout, ne pourrait être assimilé à celui où cette même personne n'aurait rien. Voyons donc comment on pourra avoir égard à cette circonstance.

S'il n'est question que d'*une* part unique, on ne pourra, dans ce cas, comme dans le précédent, la faire que d'*une* manière.

S'il s'agit de *deux* parts, en les faisant d'abord toutes deux effectives, comme dans le Problème I, le nombre des systèmes de répartition sera 2^m-2. En faisant ensuite une part nulle, elle pourra être indifféremment la première ou la seconde, ce qui fournira encore deux systèmes ; de sorte que leur nombre total sera simplement $2.^m$

S'agit-il de faire *trois* parts, on pourra d'abord les rendre toutes effectives d'un nombre de manières exprimé par

$$3^m-3.2^m+3\ .$$

En choisissant ensuite une part déterminée pour être nulle, on pourra former les deux autres d'un nombre de manières exprimé par 2^m-2 ; mais, comme la part nulle pourra occuper trois places différentes ; il en résultera encore un nombre de système de répartitions exprimé par

$$3.2^m-6\ .$$

Enfin, il y aura encore trois systèmes possibles où deux parts seront nulles. Réunissant donc tous ces résultats, on trouvera que le nombre total des systèmes de répartition en trois parts est simplement 3^m.

En poursuivant le même raisonnement, on trouvera 4^m pour le nombre des systèmes de répartition en quatre parts, 5^m pour le nombre des systèmes de répartition en cinq parts, et ainsi de suite; d'où on sera conduit à conclure qu'en général, le nombre des systèmes possibles de répartitions de m choses en n parts est n^m; c'est, au surplus, une conclusion qu'il serait facile d'établir sur un raisonnement rigoureux.

Ainsi par exemple, s'il est question de la répartition des dix fruits d'espèces diverses entre quatre personnes différentes; elle pourra avoir lieu d'un nombre de manières exprimées par $4^{10}=1048576$.

PROBLÈME III. De combien de manières différentes peut-on faire n *parts, avec* m *choses toutes égales entre elles avec la faculté de faire les parts aussi inégales qu'on voudra; mais, sous la condition de ne point faire de parts nulles, et d'employer la totalité des choses, dans chaque système de répartition ?*

Solution. Ce problème semblerait, au premier abord, devoir être incomparablement plus simple que le premier. Nous l'avons cependant trouvé beaucoup plus compliqué, peut-être par suite de la manière dont nous l'avons attaqué. En conséquence nous nous bornerons à en traiter les cas les plus simples.

Si d'abord on ne doit faire qu'*une* part, il est clair qu'il faudra tout employer; et qu'ainsi cela ne pourra s'exécuter que d'*une* manière unique.

Veut-on faire deux parts ? en s'imposant la condition de placer constamment la plus petite des deux parts à la gauche de la plus grande, lorsqu'elles seront inégales, tous les systèmes possibles de répartition pourront être compris dans le tableau suivant:

$$1 \ldots\ldots\ldots (m-1),$$

$$2 \ldots\ldots\ldots (m-2),$$

$$3 \ldots\ldots\ldots (m-3);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et

et ce tableau devra être prolongé jusqu'à ce que, dans la première colonne, on soit parvenu à la moitié de m, si m est pair, ou au nombre immédiatement inférieur à cette moitié, c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}(m-1)$, si m est impair.

Il en résulte immédiatement que le nombre des systèmes de répartition sera,

Si m est de la forme $2k$ . . . . $\frac{m}{2}$;

Si m est de la forme $2k+1$, ... $\frac{m-1}{2}$;

du moins si l'on n'a aucun égard à l'ordre des parts dans chaque système de répartition. Dans le premier cas, il y aura un seul système ou les deux parts seront égales; dans le second, les deux parts seront constamment inégales.

Si donc on voulait avoir égard à la disposition des parts dans chaque système, il faudrait doubler chacun des deux nombres que nous venons d'obtenir, en retranchant une unité au double du premier, à raison des deux parts égales; ce qui donnerait également $m-1$ pour le nombre des systèmes quel que fût m; comme il est d'ailleurs évident.

Supposons présentement qu'il soit question de faire *trois* parts? en s'imposant la condition de disposer constamment les parts, dans chaque système, par ordre de grandeur, de gauche à droite, de la plus petite à la plus grande, et de ranger dans une même colonne tous les systèmes dans lesquels la première part est la même; on obtiendra le tableau de répartition que voici:

$1\,,\ 1\,,\ m-2$	$2\,,\ 2\,,\ m-4$	$3\,,\ 3\,,\ m-6$	$4\,,\ 4\,,\ m-8$	....
$1\,,\ 2\,,\ m-3$	$2\,,\ 3\,,\ m-5$	$3\,,\ 4\,,\ m-7$	$4\,,\ 5\,,\ m-9$	....
$1\,,\ 3\,,\ m-4$	$2\,,\ 4\,,\ m-6$	$3\,,\ 5\,,\ m-8$	$4\,,\ 6\,,\ m-10$	....
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	....

et il ne s'agira, pour parvenir au but, que de compter le nombre des systèmes de répartition enregistrés dans ce tableau ; ce à quoi on parviendra à l'aide des observations suivantes.

La première colonne, en y supprimant le 1 initial, indique toutes les manières de faire deux parts avec $m-1$ choses égales ; et comme suivant que m est pair ou impair, $m-1$ est au contraire impair ou pair, il s'ensuit, d'après ce qui a été dit plus haut, que le nombre des lignes de cette première colonne est

$$\text{Si } m \text{ est pair} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m-2}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m-1}{2}.$$

La seconde colonne, en y supprimant le 2 initial, est le tableau de toutes les manières de faire deux parts avec $m-2$ choses, dans lequel on aurait supprimé la première ligne ; et, comme $m-2$ est pair ou impair, dans les mêmes circonstances que m, il s'ensuit que le nombre des lignes de cette seconde colonne est

$$\text{Si } m \text{ est pair } \frac{m-2}{2}-1 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-4}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } \frac{m-3}{2}-1 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-5}{2}.$$

La troisième colonne, en y supprimant le 3 initial, offre le tableau de toutes les manières de faire deux parts avec $m-3$ choses, dans lequel on aurait supprimé les deux premières lignes ; en observant donc que, suivant que m est pair ou impair, $m-3$ est au contraire impair ou pair, on trouvera que le nombre des lignes de cette troisième colonne est

$$\text{Si } m \text{ est pair } \frac{m-4}{2}- \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-8}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } \frac{m-3}{2}-2 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-7}{2}.$$

Par un raisonnement tout-à-fait semblable, on prouvera que le nombre des lignes de la quatrième colonne est

$$\text{Si } m \text{ est pair } \frac{m-4}{2}-3 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-10}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } \frac{m-5}{2}-3 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-11}{2};$$

que le nombre des lignes de la cinquième est

$$\text{Si } m \text{ est pair } \frac{m-6}{2}-4 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-14}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } \frac{m-5}{2}-4 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-13}{2};$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que le nombre total des lignes de tout le tableau, c'est-à-dire, le nombre cherché, est

$$\text{Si } m \text{ est pair } = \tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-4)+(m-8)+(m-10)+(m-14)+\ldots\},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } = \tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-5)+(m-7)+(m-11)+(m-13)+\ldots\}.$$

Pour être en état de sommer ces suites, il faut au moins pouvoir assigner le dernier terme de chacune d'elles. Occupons-nous d'abord de la première ; m y étant pair ne peut être que de l'une de ces trois formes $6k$, $6k+2$, $6k+4$.

Dans le premier cas, il est évident que la dernière colonne n'aura qu'une ligne qui sera

$$2k,\ 2k,\ 2k, \text{ ou } \frac{m}{3},\ \frac{m}{3},\ \frac{m}{3};$$

la série aura donc $\frac{m}{3}$ termes dont le dernier sera l'unité ou $\frac{1}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-4)+(m-8)+(m-10)+(m-14)+\ldots+4+2\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci :

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-8)+(m-14)+(m-20)+\ldots\ldots+10+4\},$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-4)+(m-10)+(m-16)+(m-22)+\ldots\ldots+8+2\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences, ayant 6 pour raison commune, et ayant chacune $\frac{m}{6}$ termes ; on aura donc, pour la réunion de leurs sommes de termes

$$\frac{1}{2}\,\frac{m}{6}\left\{\frac{m+2}{2}+\frac{m-2}{2}\right\}=\frac{m^2}{12}\ ;$$

et ce sera là le nombre des solutions du problème.

Si m, toujours pair, est de la forme $6k+2$, la dernière colonne aura deux lignes qui seront

$$\left.\begin{array}{lll} 2k\ , & 2k\ , & 2k+2\ , \\ 2k\ , & 2k+1\ , & 2k+1\ , \end{array}\right\}\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{lll} \frac{m-2}{3}\ , & \frac{m-2}{3}\ , & \frac{m+4}{3}\ , \\ \frac{m-2}{3}\ , & \frac{m+1}{3}\ , & \frac{m+1}{3}\ , \end{array}\right.$$

la série aura donc $\frac{m-2}{3}$ termes, dont le dernier sera 2 ou $\frac{4}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-4)+(m-8)+(m-10)+(m-14)+\ldots+6+4\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-8)+(m-14)+(m-20)+\ldots\ldots+12+6\};$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-4)+(m-10)+(m-16)+(m-22)+\ldots\ldots+10+4\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences dont la raison commune est 6, et dont le nombre des termes est $\frac{m-2}{6}$, pour l'un et l'autre. Réunissant donc les sommes de ces deux séries, nous aurons

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m-2}{6}\left\{\frac{m+4}{2}+\frac{m}{2}\right\}=\frac{(m-2)(m+2)}{12}=\frac{m^2-4}{12};$$

et c'est là, dans ce cas, la solution du problème.

Le nombre m, toujours pair, est-il enfin de la forme $6k+4$; la dernière colonne du tableau n'aura qu'une seule ligne qui sera

$$2k+1\,,\ 2k+1\,,\ 2k+2\,,\quad \text{ou}\quad \frac{m-1}{3},\ \frac{m-1}{3},\ \frac{m+2}{3};$$

la série aura donc $\frac{m-1}{3}$ termes, dont le dernier sera l'unité ou $\frac{2}{2}$;
cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-4)+(m-8)+(m-10)+(m-14)+\ldots+6+2\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-8)+(m-14)+(m-20)+\ldots+8+2\};$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-4)+(m-10)+(m-16)+(m-22)+\ldots+12+6\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences dont la raison commune est 6, et dont le nombre des termes est $\frac{m+2}{6}$, pour la première, et $\frac{m-4}{6}$, pour la seconde. Réunissant donc les sommes de ces deux séries, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{m}{2}\cdot\frac{m+2}{6}+\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m-4}{6}\right\}=\frac{(m-2)(m+2)}{12}=\frac{m^2-4}{12}.$$

qui sera, pour ce cas, le nombre cherché.

Supposons présentement que m soit impair, il sera de l'une de ces trois formes $6k+1$, $6k+3$, $6k+5$.

Dans le premier cas, la dernière colonne du tableau n'aura qu'une seule ligne, qui sera

$$2k\ ,\ 2k\ ,\ 2k+1\ ,\quad \text{ou}\quad \frac{m-1}{3}\ ,\quad \frac{m-1}{3}\ ,\quad \frac{m+2}{3}\ ;$$

la série aura donc $\frac{m-1}{3}$ termes, et son dernier terme sera l'unité ou $\frac{2}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-5)+(m-7)+(m-11)+(m-13)+\ldots\ldots+6+2\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci :

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-7)+(m-13)+(m-19)+\ldots.+6\}\ ,$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-5)+(m-11)+(m-17)+(m-23)+\ldots.+2\}\ ,$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences, ayant, l'une et l'autre, $\frac{m-1}{6}$ termes, et dont la raison commune est 6; on aura donc, pour la réunion de leurs sommes de termes

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m-1}{6}\left\{\frac{m+5}{2}+\frac{m-3}{2}\right\}=\frac{(m-1)(m+1)}{12}=\frac{m^2-1}{12}\ ;$$

et ce sera là le nombre des solutions du problème.

Si m, toujours impair, est de la forme $6k+3$, la dernière colonne n'aura qu'une ligne, qui sera

$$2k+1\ ,\ 2k+1\ ,\ 2k+1\ ,\quad \text{ou}\quad \frac{m}{3}\ ,\quad \frac{m}{3}\ ,\quad \frac{m}{3}\ ;$$

la série aura donc $\frac{m}{3}$ termes, dont le dernier sera l'unité ou $\frac{2}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-5)+(m-7)+(m-11)+(m-13)+\ldots+4+2\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci :

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-7)+(m-13)+(m-19)+\ldots\ldots+8+2\};$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-5)+(m-11)+(m-17)+(m-23)+\ldots\ldots+10+4\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences dont 6 est la raison commune et dont le nombre des termes est $\frac{m+3}{6}$, pour la première, et $\frac{m-3}{6}$, pour la seconde ; leurs sommes de termes réunies donneront donc

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left\{\frac{m+3}{6}\cdot\frac{m+1}{2}+\frac{m-3}{6}\cdot\frac{m-1}{2}\right\}=\frac{m^2+3}{12};$$

et ce sera là le nombre des solutions du problème.

Si enfin m, toujours impair, est de la forme $6k+5$, le dernier tableau aura deux lignes qui seront

$$\left.\begin{array}{l} 2k+1,\ 2k+1,\ 2k+3, \\ 2k+1,\ 2k+2,\ 2k+2, \end{array}\right\}\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{lll} \frac{m-2}{3}, & \frac{m-2}{3}, & \frac{m+4}{3}; \\ \frac{m-2}{3}, & \frac{m+1}{3}, & \frac{m+1}{3}; \end{array}\right.$$

le nombre des termes de la série sera donc $\frac{m-2}{3}$, et son dernier terme sera 2 ou $\frac{4}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-5)+(m-7)+(m-11)+(m-13)+\ldots\ldots+6+4\};$$

laquelle se décompose en ces deux-ci :

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-7)+(m-13)+(m-19)+\ldots\ldots+10+4\},$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-5)+(m-11)+(m-17)+(m-23)+\ldots\ldots+12+6\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions dont la raison commune est 6, et dont le nombre des termes est $\frac{m+1}{6}$, pour la première, et $\frac{m-5}{6}$ pour la seconde; on aura donc, pour la réunion des sommes de leurs termes

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{m+1}{6}\cdot\frac{m+3}{2}+\frac{m-5}{6}\cdot\frac{m+1}{2}\right\}=\frac{(m-1)(m+1)}{12}=\frac{m^2-1}{12};$$

et ce sera là le nombre des solutions du problème.

En résumant présentement ces divers résultats, et observant que les formes $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$ rentrent respectivement dans les formes $6k-3$, $6k-2$, $6k-1$; nous pourrons dire que le nombre des manières de faire *trois* parts effectives avec m choses, toutes égales entre elles, est

Si m est de la forme $6k$, ... $\frac{m^2}{12}$,

Si m est de la forme $6k\pm1$; . . . . $\frac{m^2-1}{12}$,

Si m est de la forme $6k\pm2$, ... $\frac{m^2-4}{12}$;

Si m est de la forme $6k\pm3$, ... $\frac{m^2+3}{12}$.

On peut désirer de connaître combien il y a de systèmes dans lesquels plusieurs parts sont égales et combien il y a de parts égales dans chacun de ceux-là. Pour cela, remarquons que, d'abord les trois parts ne sauraient être égales qu'autant que m est de l'une ou l'autre des deux formes $6k$, $6k\pm3$, et cela ne saurait arriver qu'une seule fois.

Mais,

Mais, quelle que soit la forme de m, il y aura toujours des systèmes, en nombre plus ou moins grand, dans lesquels deux seulement des trois parts seront égales; c'est d'abord ce qui arrive constamment dans la première ligne de chaque colonne du tableau; et ce sont alors les deux premières parts, c'est-à-dire, les deux plus petites qui sont dans ce cas. En outre, de deux en deux colonnes, à commencer par la première ou par la seconde, suivant que m est impair ou pair, la dernière ligne a aussi deux parts égales; mais ce sont ici les deux dernières ou les deux plus fortes.

En conséquence, et d'après ce qui précède, 1.° si m est de la forme $6k$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\left(\frac{m}{3}-1\right)+\left(\frac{m}{6}-1\right)=\frac{m-4}{2}\,.$$

2.° Si m est de la forme $6k+1$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\frac{m-1}{3}+\frac{m-1}{6}=\frac{m+1}{2}\,;$$

3.° Si m est de la forme $6k+2$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\frac{m-2}{3}+\frac{m-2}{6}=\frac{m-2}{2}\,;$$

4.° Si m est de la forme $6k+3$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\left(\frac{m}{3}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}-1\right)=\frac{m-3}{2}\,.$$

5.° Si m est de la forme $6k+4$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\frac{m-1}{3}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{m-1}{3}-1\right)=\frac{m-2}{2}\ .$$

6.° Si enfin m est de la forme $6k+5$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\frac{m-2}{3}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{m-2}{3}+1\right)=\frac{m-1}{2}\ .$$

Ainsi, en résumé, le nombre des systèmes à deux parts égales sera,

Si m est de la forme $6k$, ... $\frac{m-4}{2}$,

Si m est de la forme $6k\pm1$, ... $\frac{m-1}{2}$,

Si m est de la forme $6k\pm2$, ... $\frac{m-2}{2}$,

Si m est de la forme $6k\pm3$, ... $\frac{m-3}{2}$.

En retranchant ces nombres de ceux qui expriment le nombre total des parts, et retranchant en outre une unité, dans le premier et le dernier cas, à raison du système unique dans lequel les trois parts sont égales, on trouvera, pour le nombre des systèmes dans lesquels les trois parts sont inégales

m étant de la forme $6k$ . . . . . $\frac{m^2}{12}-\frac{m-4}{2}-1=\frac{m^2-6m+12}{12}$,

m étant de la forme $6k\pm1$ . . . . . $\frac{m^2-1}{12}-\frac{m-1}{2}=\frac{m^2-6m+5}{12}$,

m étant de la forme $6k\pm2$ . . . . . $\frac{m^2-4}{12}-\frac{m-2}{2}=\frac{m^2-6m+8}{12}$,

m étant de la forme $6k\pm3$ . . . . . $\frac{m^2+3}{12}-\frac{m-3}{2}-1=\frac{m^2-6m+9}{12}$;

Dans tout ce qui précède, nous avons tacitement supposé que l'on n'avait aucun égard à l'ordre des parts ; mais, si l'on convenait de considérer comme systèmes de répartition distincts ceux-là mêmes qui ne différeraient les uns des autres que par la disposition respective des mêmes parts, voici comment, dans cette nouvelle hypothèse, on parviendrait à assigner le nombre total des systèmes de répartition.

Soit, en général, N_1 le nombre des systèmes à trois parts égales, dans la première hypothèse; nombre que nous avons vu n'être jamais supérieur à l'unité et être souvent nul ; soient en outre N_2 le nombre des systèmes à deux parts égales et N_3 les nombre de ceux dans lesquels les trois parts sont inégales.

Dans la nouvelle hypothèse, les systèmes à trois parts égales n'étant susceptibles d'aucune permutation, N_1 restera toujours N_1.

Dans les systèmes à deux parts égales, la part seule de son espèce pouvant occuper successivement le premier, le second ou le troisième rang N_2 deviendra ici $3N_2$.

Enfin, dans les systèmes à trois parts inégales, les parts étant susceptibles de toutes les sortes de permutations, N_3 devra devenir $6N_3$.

Ainsi, le nombre total des systèmes de répartition qui d'abord était simplement $N_1+N_2+N_3$, deviendra ici

$$N_1+3N_2+6N_3 \quad ;$$

mettant donc successivement pour N_1, N_2, N_3, dans cette dernière formule les nombres qui conviennent à chaque cas, nous trouverons que, dans tous les cas, le nombre cherché est également $\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}$; ce qu'on justifierait d'ailleurs par un raisonnement direct.

De la même manière que nous avons déduit le cas de trois parts de celui de deux, on déduirait pareillement celui des quatre parts de celui de trois, celui de cinq de celui de quatre, et ainsi de suite ; mais le nombre des formes du nombre m qu'il deviendrait nécessaire de discuter croîtrait rapidement, à mesure que le nombre des parts à former deviendrait plus grand.

PROBLÈME IV. De combien de manières différentes peut-on faire n *parts, avec* m *choses toutes égales entre elles, avec la faculté de faire tant de parts nulles qu'on voudra ; mais sous la condition néanmoins d'employer toutes les* m *choses dans chaque répartition ?*

Solution. La solution de ce problème se déduit de celle du Problème III, de la même manière que nous avons déduit celle du Problème II de celle du Problème I.

N'ayons d'abord aucun égard à la disposition des parts entre elles, dans un même système de répartition. Si l'on ne veut faire qu'une seule part, on ne pourra faire de parts nulles ; et conséquemment le nombre des systèmes de répartition sera encore égal à l'unité.

Si l'on veut faire *deux* parts, on ne pourra faire qu'une part nulle, et d'une manière seulement ; le nombre des systèmes de répartition sera donc, d'après le précédent problème,

Si m est de la forme $2k$, ... $\frac{m}{2}+1=\frac{m+2}{2}$,

Si m est de la forme $2k+1$, ... $\frac{m-1}{2}+1=\frac{m+1}{2}$.

Il y aura toujours un système unique à deux parts égales, dans le premier cas, et point dans le second.

Si donc on veut avoir égard à l'ordre des parts, on remarquera que deux parts sont, en général, susceptibles de deux dispositions différentes, mais que cependant, dans le premier cas, les deux parts égales ne sont point susceptibles de permutations. En conséquence, on trouvera que, quel que soit m, le nombre des systèmes de répartition, dans ce cas, est constamment $m+1$.

Si l'on veut faire trois parts, on pourra faire une ou deux parts nulles seulement. On pourra faire une part nulle d'autant de manières qu'il y en a de faire, avec m choses égales, deux parts dont aucune ne soit nulle. On pourra faire deux parts nulles d'une manière unique. En conséquence, et d'après le précédent problème, le nombre des systèmes possibles de répartition sera

Pour la forme paire. . . . $6k$; $\frac{m^2}{12}+\frac{m}{2}+1=\frac{m^2+6m+12}{12}$,

Pour la forme impaire . . . $6k\pm1$, $\frac{m^2-1}{12}+\frac{m-1}{2}+1=\frac{m^2+6m+5}{12}$,

Pour la forme paire. . . . $6k\pm2$, $\frac{m^2-4}{12}+\frac{m}{2}+1=\frac{m^2+6m+8}{12}$,

Pour la forme impaire. . . . $6k\pm3$, $\frac{m^2+3}{12}+\frac{m-1}{2}+1=\frac{m^2+6m+9}{12}$.

Ici le nombre des systèmes à trois parts égales sera toujours 1, pour les deux formes extrêmes, et zéro pour les deux autres. Quant au nombre des systèmes à deux parts égales, il se trouvera d'abord, pour toutes les formes, augmenté d'une unité, à raison du système à deux parts nulles; mais, dans les formes paires, il se trouvera encore augmenté d'une unité, à raison du système où deux parts sont égales à la moitié de m et la troisième nulle. Le nombre des systèmes à deux parts égales se trouvera donc ainsi, dans le cas actuel,

Pour la forme $6k$, ... $\frac{m-4}{2}+2=\frac{m}{2}$;

Pour la forme $6k\pm1$, ... $\frac{m-1}{2}+1=\frac{m+1}{2}$, Pour la forme $6k\pm2$, ... $\frac{m-2}{2}+2=\frac{m+2}{2}$,

Pour la forme $6k\pm3$, ... $\frac{m-3}{2}+1=\frac{m-1}{2}$.

Retranchant donc ces nombres de ceux que nous avions trouvés pour le nombre total des systèmes de répartition, et retranchant en outre une unité pour les deux formes extrêmes, à raison des trois parts égales, nous aurons pour le nombre des systèmes où les trois parts sont inégales,

Pour la forme $6k$, ... $\frac{m^2+6m+12}{12}-\frac{m}{2}-1=\frac{m^2}{12}$,

Pour la forme $6k\pm1$, ... $\frac{m^2+6m+5}{12}-\frac{m+1}{2}=\frac{m^2-1}{12}$,

Pour la forme $6k\pm2$, ... $\frac{m^2+6m+8}{12}-\frac{m+2}{2}=\frac{m^2-4}{12}$,

Pour la forme $6k\pm3$, ... $\frac{m^2+6m+9}{12}-\frac{m-1}{2}-1=\frac{m^2+3}{12}$.

En rapprochant ces résultats de ceux auxquels nous a conduit le troisième problème, on est conduit à en conclure que le nombre des manières de faire trois parts avec m choses égales, lorsqu'on admet des parts nulles, mais qu'on rejette les systèmes dans lesquels plusieurs parts sont égales, est égal au nombre des manières de faire trois parts avec les mêmes choses lorsqu'au contraire l'on admet les systèmes dans lesquels des parts sont égales, mais en rejetant ceux où des parts sont nulles ; d'où l'on peut encore conclure que, dans la totalité des systèmes de répartition, il y en a autant où les parts ne sont pas toutes effectives qu'il y en a où elles ne sont pas toutes inégales.

Veut-on présentement avoir égard à la disposition des parts les unes par rapport aux autres ; en procédant comme nous l'avons fait dans le précédent problème, on trouvera

$$\text{Pour } m \text{ pair}, \ldots\ldots \quad \frac{(m+2)(m+7)}{2},$$

$$\text{Pour } m \text{ impair}, \ldots\ldots \quad \frac{(m+1)(m+8)}{2}.$$

On poursuivrait sur le même plan, s'il était question de former un plus grand nombre de parts.