
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Analyse transcendante. De l'intégration approchée des équations différentielles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 361-378

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__361_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

De l'intégration approchée des équations différentielles;

Par M. le professeur KRAMP, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.



(*Deuxième mémoire*). (*)

I. **D**ANS un précédent mémoire nous sommes occupés de l'intégration approchée de l'équation

$$y + \frac{dy}{dx} = Q,$$

dont l'intégrale rigoureuse est

$$y = e^{-x} \int e^x Q dx .$$

Si l'on fait

(*) Voyez la page 317 du présent volume.

$$\int e^x Q dx = A + X,$$

cette intégrale devient

$$y = Ae^{-x} + Xe^{-x};$$

désignant par $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots$ ce que devient Q dans les suppositions particulières de $x=0, 1, 2, 3, \dots$, on voit que vu que l'intégrale de cette équation, où la quantité y , pourrait être représentée par une expression de cette forme

$$y = Aq_0 + Bq_1 + Cq_2 + Dq_3 + \dots;$$

et qu'on avait alors, pour le diviseur

Deux ; $2y = q_0 + q_2$;

Trois ; $6y = 2q_0 - 3q_1 + 6q_2 + q_3$;

Quatre ; $6y = q_0 - 2q_1 + 3q_2 + 2q_3 + 2q_4$;

Cinq ; $60y = 7q_0 - 25q_1 + 50q_2 - 40q_3 + 55q_4 + 13q_5$;

Six ; $360y = 19q_0 - 72q_1 + 135q_2 - 80q_3 + 45q_4 + 216q_5 + 97q_6$;

Sept ; $5040y = 216q_0 - 1246q_1 + 3528q_2 - 5670q_3 + 6440q_4 - 3906q_5$
 $+ 4536q_6 + 1142q_7$

Huit ; $40320y = 600q_0 - 3072q_1 + 6832q_2 - 5376q_3 - 3360q_4 + 17920q_5$
 $- 14448q_6 + 31488q_7 + 9736q_8$;

Neuf ; $15120y = 260q_0 - 2115q_1 + 8218q_2 - 19278q_3 + 30744q_4 - 34030q_5$
 $+ 28560q_6 - 14778q_7 + 14148q_8 + 3391q_9$;

et ainsi de suite. Ces résultats ne sont pas seulement approximatifs ; mais ils sont exacts , à la rigueur , toutes les fois que la fonction Q est une puissance de x à exposant *entier et positif* ; ce qui rend la quantité $e^x Q dx$ intégrable par elle-même. Si cette condition n'est pas remplie , les résultats que nous venons de donner ne seront qu'approximatifs , mais de manière qu'en se servant seulement du diviseur *six* on aura du moins , dans les cas ordinaires , l'intégrale jusqu'à *cinq* décimales au moins ; et qu'avec le diviseur *neuf* on pourra aller jusqu'à *douze*.

2. On rend cette équation un peu plus générale en affectant $\frac{dy}{dx}$ du facteur constant n ; elle devient alors

$$y + n \frac{dy}{dx} = Q.$$

Nous avons déjà remarqué qu'elle se réduit facilement à la première , par la simple supposition $x = nx'$, qui donne

$$y + \frac{dy}{dx'} = Q' ;$$

Q' étant une fonction de x' , plus ou moins différente de la première. Ce procédé fort simple est en effet plus que suffisant dans toutes les intégrations particulières des équations de la forme

$$y + n \frac{dy}{dx} = Q,$$

dans lesquelles Q est une fonction de x ; mais on serait forcé de le reconnaître insuffisant dans les équations des ordres plus élevés , telles que

$$y + A \frac{dy}{dx} + B \frac{d^2y}{dx^2} = Q,$$

$$y + A \frac{dy}{dx} + B \frac{d^2y}{dx^2} + C \frac{d^3y}{dx^3} = Q,$$

et ainsi des autres. On sera donc obligé, dans tous les cas, d'avoir des solutions qui donnent immédiatement en A, B, C, \dots la véritable valeur de l'inconnue y .

3. La solution de ce cas est plus longue, sans être beaucoup plus difficile. En posant

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \dots;$$

et

$$n \frac{dy}{dx} = nB + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \dots$$

substituant donc dans l'équation

$$y + n \frac{dy}{dx} = Q,$$

elle deviendra

$$Q = (A + nB) + (B + 2nC)x + (C + 3nD)x^2 + (D + 4nE)x^3 + \dots$$

En désignant encore ici par $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots$ ce que devient Q , lorsqu'on y fait successivement $x = 0, 1, 2, 3, \dots$, et faisant

$$\Delta q = q_1 - q_0,$$

$$2\Delta^2 q = q_2 - 2q_1 + q_0,$$

$$6\Delta^3 q = q_3 - 3q_2 + 3q_1 - q_0,$$

$$24\Delta^4 q = q_4 - 4q_3 + 6q_2 - 4q_1 + q_0,$$

..... ; .

on

on aura les différences consécutives Δq , $2\Delta^2 q$, $6\Delta^3 q$, de la manière qui suit :

$$q = A + nB,$$

$$\Delta q = B + (1+2n)C + (1+3n)D + (1+4n)E + (1+5n)F + (1+6n)G + \dots$$

$$\Delta^2 q = C + (3+3n)D + (7+12n)E + (15+35n)F + (31+90n)G + \dots;$$

$$\Delta^3 q = D + (6+4n)E + (25+30n)F + (90+150n)G + \dots,$$

$$\Delta^4 q = E + (10+5n)F + (65+60n)G + \dots,$$

$$\Delta^5 q = F + (15+6n)G + \dots,$$

$$\Delta^6 q = G + \dots,$$

.....

On regardera les quantités q , Δq , $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$, comme données et les coefficients A , B , C , D , comme les inconnues du problème. Il sera donc facile de trouver celles-ci, en commençant par la dernière, pour laquelle j'ai pris le douzième coefficient, désigné par la lettre N . De celle-ci on remontera à M ; de M on ira jusqu'à L , et ainsi de suite. On aura ainsi les valeurs des douze premiers coefficients A , B , C , N , ainsi qu'il suit :

1.° Coefficient A .

$$A = q - n\Delta q + n(1+2n)\Delta^2 q - n(2+6n+6n^2)\Delta^3 q$$

$$+ n(6+22n+36n^2+24n^3)\Delta^4 q$$

$$- n(24+100n+210n^2+240n^3+120n^4)\Delta^5 q$$

$$+ n(120+548n+1350n^2+2040n^3+1800n^4+720n^5)\Delta^6 q$$

$$\begin{aligned}
& -n(720+3528n+9744n^2+17640n^3+21000n^4 \\
& \quad +15120n^5+5040n^6)\Delta^7q \\
& +n(5040+26136n+78792n^2+162456n^3+235200n^4 \\
& \quad +231840n^5+741120n^6+40320n^7)\Delta^8q \\
& -n(40320+219168n+708744n^2+1614816n^3 \\
& \quad +2693880n^4+3265920n^5+2731840n^6 \\
& \quad +1451520n^7+362880n^8)\Delta^9q \\
& +n(362880+2053152n+7036200n^2+17368320n^3 \\
& \quad +32519000n^4+45554560n^5+47628000n^6 \\
& \quad +35078400n^7+16329600n^8+3628800n^9)\Delta^{10}q \\
& -n(3628800+21257280n+76521456n^2+201828000n^3 \\
& \quad +410031600n^4+649479600n^5+795175920n^6 \\
& \quad +731808000n^7+479001600n^8+199584000n^9 \\
& \quad +39916800n^{10})\Delta^{11}q \\
& +n(39916800+241087680n+905507856n^2 \\
& \quad +2526193824n^3+5519487600n^4+9604465200n^5 \\
& \quad +1393923200n^6+14411295360n^7+11855289600n^8 \\
& \quad +6985440000n^9+2634508800n^{10}+479001600n^{11})\Delta^{12}q.
\end{aligned}$$

2.º Coefficient B.

$$\begin{aligned}
B = & \Delta q - (1+2n)\Delta^2 q + (2+6n+6)\Delta^3 q - (6+22n+36n^2+24n^3)\Delta^4 q \\
& + (24+100n+210n^2+240n^3+120n^4)\Delta^5 q \\
& - (120+548n+1350n^2+2040n^3+1800n^4+720n^5)\Delta^6 q \\
& + (720+3528n+9744n^2+17640n^3+21000n^4+15220n^5+5040n^6)\Delta^7 q \\
& - (5040+26136n+78792n^2+162456n^3+2325200n^4 \\
& \quad + 231840n^5+141120n^6+40320n^7)\Delta^8 q \\
& + (40320+219168n+708744n^2+1614816n^3+2693880n^4 \\
& \quad + 3265920n^5+2751840n^6+1451520n^7+362880n^8)\Delta^9 q \\
& - (362880+2053152n+7036200n^2+17368320n^3+32319000n^4 \\
& \quad + 45556560n^5+47628000n^6+35078400n^7 \\
& \quad + 16329600n^8+3628800n^9)\Delta^{10} q \\
& + (3628800+21257280n+76521456n^2+201828000n^3 \\
& \quad + 410031600n^4+649479600n^5+795175920n^6 \\
& \quad + 731808000n^7+479001600n^8+199584000n^9 \\
& \quad + 39916800n^{10})\Delta^{11} q . \\
& - (39916800+241087680n+905507856n^2+2526193824n^3 \\
& \quad + 5519487600n^4+9604465200n^5+13293292320n^6 \\
& \quad + 14411295360n^7+11855289600n^8+6985440000n^9 \\
& \quad + 2634508800n^{10}+479001600n^{11})\Delta^{12} q .
\end{aligned}$$

3.º Coefficient C.

$$\begin{aligned}
C = & \Delta^2 q - (3+3n)\Delta^3 q + (11+18n+12n^2)\Delta^4 q - (50+105n+120n^2+60n^3)\Delta^5 q \\
& + (274+675n+1020n^2+960n^3+360n^4)\Delta^6 q \\
& - (1764+4872n+8820n^2+10500n^3+7560n^4+2520n^5)\Delta^7 q \\
& + (13068+39396n+81218n^2+117600n^3+115920n^4 \\
& \quad + 70560n^5+80160n^6)\Delta^8 q \\
& - (109584+354372n+807408n^2+1396940n^3 \\
& \quad + 1632960n^4+1375920n^5+725760n^6+181440n^7)\Delta^9 q \\
& + (1026576+3518100n+8684160n^2+16159500n^3 \\
& \quad + 22778280n^4+23814000n^5+17539200n^6 \\
& \quad + 8164800n^7+1814400n^8)\Delta^{10} q \\
& - (10628640+38250728n+100914000n^2+205015800n^3 \\
& \quad + 324739800n^4+397587960n^5+365904000n^6 \\
& \quad + 239500800n^7+99792000n^8+19958400n^9)\Delta^{11} q \\
& + (120543840+452753928n+1263096912n^2 \\
& \quad + 2759748800n^3+4802232600n^4+6646646160n^5 \\
& \quad + 7205647680n^6+5927644800n^7+3492720000n^8 \\
& \quad + 1317254400n^9+239500800n^{10})\Delta^{12} q .
\end{aligned}$$

4.° Coefficient D.

$$\begin{aligned}
D = & \Delta^3 q - (6+4n)\Delta^4 q + (35+40n+20n^2)\Delta^5 - (225+340n+300n^2+120n^3)\Delta^6 q \\
& + (1624+2940n+3500n^2+2520n^3+840n^4)\Delta^7 q \\
& - (13132+27076n+39200n^2+38640n^3+23520n^4+6720n^5)\Delta^8 q \\
& + (118124+269136n+448980n^2+544320n^3+458640n^4 \\
& \quad + 241920n^5+60480n^6)\Delta^9 q \\
& - (1172700+2894720n+5386500n^2+7592760n^3 \\
& \quad + 7938000n^4+5846400n^5+2721600n^6+604800n^7)\Delta^{10} q \\
& + (12753576+33638000n+68358640n^2+108246600n^3 \\
& \quad + 132529320n^4+121968000n^5+79833600n^6 \\
& \quad + 33264000n^7+6652800n^8)\Delta^{11} q \\
& - (150917976+421032304n+919914600n^2 \\
& \quad + 1600744200n^3+2215548720n^4 \\
& \quad + 2401882560n^5+1975881600n^6 \\
& \quad + 1164240000n^7+439084800n^8 \\
& \quad + 79833600n^9)\Delta^{12} q .
\end{aligned}$$

5.° Coefficient E.

$$\begin{aligned}
E = & \Delta^4 q - (10+5n)\Delta^5 q + (86+75n+30n^2)\Delta^6 q \\
& - (735+875n+630n^2+210n^3)\Delta^7 q \\
& + (6769+9800n+9660n^2+5880n^3+1680n^4)\Delta^8 q \\
& - (67284+112245n+136080n^2+114660n^3+60480n^4 \\
& \quad + 13720n^5)\Delta^9 q
\end{aligned}$$

Tom. X.

50 bis.

$$\begin{aligned}
&+(725680+1346625n+1893190n^2+1984500n^3 \\
&\quad +1451600n^4+680400n^5+151200n^6)\Delta^{10}q \\
&-(8409500+17084650n+27061650n^2+33132330n^3 \\
&\quad +30492000n^4+19958400n^5+8316000n^6 \\
&\quad +1663200n^7)\Delta^{11}q \\
&+(105258076+229978650n+400186050n^2+553887180n^3 \\
&\quad +600470640n^4+493970400n^5+291060000n^6 \\
&\quad +109771200n^7+19958400n^8)\Delta^{12}q .
\end{aligned}$$

6.° Coefficient. F.

$$\begin{aligned}
F &= \Delta^5 q - (15 + 6n)\Delta^6 q + (175 + 126n + 42n^2)\Delta^7 q \\
&\quad - (1960 + 1932n + 1176n^2 + 336n^3)\Delta^8 q \\
&\quad + (22449 + 27216n + 22932n^2 + 12096n^3 + 3024n^4)\Delta^9 q \\
&\quad - (269325 + 379638n + 396900n^2 + 292320n^3 \\
&\quad \quad + 136080n^4 + 30240n^5)\Delta^{10}q \\
&\quad + (3416930 + 5412330n + 6626466n^2 + 6098400n^3 \\
&\quad \quad + 3991680n^4 + 1663200n^5 + 332640n^6)\Delta^{11}q \\
&\quad - (45995730 + 80037210n + 110777436n^2 + 120094128n^3 \\
&\quad \quad + 98794080n^4 + 58212000n^5 + 21954240n^6 \\
&\quad \quad + 3991680n^7)\Delta^{12}q .
\end{aligned}$$

7.° Coefficient G.

$$\begin{aligned}
 G = & \Delta^8 q - (21 + 7n) \Delta^7 q + (322 + 169n + 56n^2) \Delta^6 q \\
 & - (4536 + 3822n + 2016n^2 + 504n^3) \Delta^5 q \\
 & + (63273 + 16150n + 48720n^2 + 22680n^3 + 5040n^4) \Delta^4 q \\
 & - (902055 + 1104411n + 1016400n^2 + 665280n^3 + 277200n^4 \\
 & \quad + 55440n^5) \Delta^3 q \\
 & + (13339535 + 18462906n + 20015688n^2 + 16465680n^3 \\
 & \quad + 9702000n^4 + 3659040n^5 + 665280n^6) \Delta^2 q .
 \end{aligned}$$

8.° Coefficient H.

$$\begin{aligned}
 H = & \Delta^7 q - (28 + 8n) \Delta^6 q + (546 + 288n + 72n^2) \Delta^5 q \\
 & - (9450 + 6960n + 3240n^2 + 720n^3) \Delta^4 q \\
 & + (157773 + 145200n + 95040n^2 + 39600n^3 + 7920n^4) \Delta^3 q \\
 & - (2637558 + 2859384n + 2352241n^2 + 1386000n^3 \\
 & \quad + 322720n^4 + 95040n^5) \Delta^2 q .
 \end{aligned}$$

9.° Coefficient I.

$$\begin{aligned}
 I = & \Delta^6 q - (36 + 9n) \Delta^5 q + (870 + 405n + 90n^2) \Delta^4 q \\
 & - (18150 + 11880n + 4950n^2 + 990n^3) \Delta^3 q \\
 & + (357423 + 294030n + 173250n^2 + 65340n^3 + 11880n^4) \Delta^2 q .
 \end{aligned}$$

10.° Coefficient K.

$$\begin{aligned}
 K = & \Delta^5 q - (45 + 10n) \Delta^4 q + (1320 + 550n + 110n^2) \Delta^3 q \\
 & + (32670 + 12500n + 7260n^2 + 1320n^3) \Delta^2 q .
 \end{aligned}$$

11.° Coefficient L.

$$L = \Delta^1 q - (55 + 11n) \Delta^1 q + (1925 + 726n + 132n^2) \Delta^1 q .$$

12.° Coefficient M.

$$M = \Delta^1 q - (66 + 12n) \Delta^1 q .$$

13.° Coefficient N.

$$N = \Delta^1 q .$$

4. Les valeurs des coefficients de cette longue série de résultats se présentent très-facilement, pour peu qu'on ait sous les yeux la table de ceux des *facultés numériques*, telle que je l'ai donnée dans mon *Analyse des réfractions*, et dont je vais donner une copie, continuée jusqu'à douze. La voici :

I.	1						
II.	1	1					
III.	1	3	2				
IV.	1	6	11	6			
V.	1	10	35	50	24		
VI.	1	15	85	225	274	120	
VII.	1	21	175	735	1624	1764	720
VIII.	1	28	322	1960	6769	13132	13068
IX.	1	36	546	4536	22449	67284	118124
X.	1	45	870	9450	63273	269325	723580
XI.	1	55	1320	18150	157773	902035	3416930
XII.	1	66	1925	32670	357423	2637558	13339535

VIII.

VIII.	5040				
IX.	109584	40320			
X.	1172700	1026576	362880		
XI.	8409500	12753576	10628640	3628800	
XII.	45995730	105258076	150917976	120543840	39916800

5. Supposons à présent qu'on demande la partie de la série qui fait connaître le *quatrième coefficient*, ou D . Cette série commence par la *troisième différence* de q , ou par $\Delta^3 q$, qui est multipliée par l'*unité seule*.

Le *second terme* sera la différence plus élevée d'une unité, ou bien $\Delta^4 q$. Pour trouver les nombres qui multiplient cette *quatrième différence*, on prendra ceux de la *quatrième faculté*, ou de $4!$, à commencer par le *troisième terme* de cette faculté; on aura 6, 1; on les multipliera, le *premier*, par 1, le *second*, par 4; on aura les produits 6.1, 1.4; il en résultera $6+4n$; c'est le coefficient de $\Delta^4 q$.

Le troisième terme sera $\Delta^5 q$, multiplié par une *fonction trinôme* de n . Pour trouver les coefficients de cette fonction, prenez, dans la faculté suivante, ou dans $5!$, les termes, à commencer depuis le troisième; c'est-à-dire, 35, 10, 1; multipliez ces trois termes, le premier par 1, le second par 4, et le troisième par $4 \times 5 = 20$; vous aurez 35.1, 10.4, 1.20; c'est-à-dire, 35, 40, 20; il en résultera $35+40n+20n^2$; c'est le coefficient de $\Delta^5 q$.

Le *quatrième* sera $\Delta^6 q$, multiplié par une *fonction quadrinôme* de n . Prenez, dans la faculté suivante, ou dans $6!$, les termes à commencer depuis le *quatrième*, savoir; 225, 85, 15, 1; multipliez ces quatre nombres, le *premier*, par 1, le *second*, par 4, le *troisième*, par $4.5 = 20$, et le *quatrième*, par $4.5.6 = 120$; vous aurez les produits 225.1, 85.4, 15.20, 1.120; c'est-à-dire, 225, 340,

300, 120; il en résultera le *quadrinome* $225 + 360n + 300n^2 + 120n^3$ c'est le coefficient de $\Delta^6 q$.

Le *cinquième* sera $\Delta^5 q$, multiplié par une fonction *pentanome* de n . Prenez, dans la faculté suivante, ou dans $7!$, les termes à commencer depuis le *cinquième*, savoir, 1624, 735, 175, 21, 1; multipliez ces cinq nombres, le *premier*, par 1, le *second*, par 4, le *troisième*, par $4.5 = 20$, le *quatrième*, par $4.5.6 = 120$, le *cinquième*, par $4.5.6.7 = 840$, vous aurez les produits 1624, 2940, 3500, 2520, 840. Il en résulte le polynome $1624 + 2940n + 3500n^2 + 2520n^3 + 840n^4$: c'est le coefficient de $\Delta^5 q$.

Le *sixième* sera $\Delta^6 q$, multiplié par une fonction *hexanome* de n . Prenez, dans la faculté suivante, ou dans $8!$, les termes à commencer depuis le *sixième*, savoir; 13132, 6769, 1960, 322, 28, 1; multipliez-les par ceux de la progression hyper-géométrique 1, 4, 20, 120, 840, 6720; vous aurez pour produits les coefficients du polynome $13132 + 27076n + 39200n^2 + 38640n^3 + 23520n^4 + 6720n^5$; ce sera le coefficient de $\Delta^6 q$.

On continuera de la même manière, tant qu'on voudra, c'est-à-dire, jusqu'à la douzième faculté; c'est là où nous avons arrêté nos calculs.

6. Quant à la progression par laquelle il faudra multiplier les nombres pris dans la table générale des facultés, il faudra remarquer que

Pour *A* c'est la série hyper géométrique ordinaire, savoir;

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, 39916800 .$$

Pour *B* c'est la même série.

Pour *C* c'est cette même série, à partir du second terme et divisée par 2; c'est-à-dire,

$$1, 3, 12, 60, 360, 2520, 20160, 181440, 1814400, 19958400 .$$

Pour *D* c'est cette dernière, à partir du second terme, et divisée par 3; c'est-à-dire,

1,4,20,120,840,6720,60480,604800,6652800 .

Pour *E* c'est la précédente, à partir de son second terme, et divisée par 4; c'est-à-dire,

1,5,30,210,1680,15120,151200,1663200 .

Pour *F* c'est 1,6,42,336,3024,30240,332640 .

Pour *G* c'est 1,7,56,504,5040,55440 ;

Pour *H* c'est . . 1, 8, 72, 720, 7920 ;

Pour *I* c'est 1, 9, 90, 990 ;

Pour *K* c'est 1, 10, 110 ;

Pour *L* c'est 1, 11 ;

Pour *M* c'est 5 . 1 ;

7. Soit $n=2$. On aura

$$y+2 \frac{dy}{dx} = Q ;$$

et la valeur intégrale et rigoureuse de y sera

$$y = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \int e^{\frac{x}{2}} Q dx ;$$

dans cette même supposition, on aura

376 INTÉGRATION APPROCHÉE

$$A = 7 - 2\Delta q + 10\Delta^2 q - 76\Delta^3 q + 772\Delta^4 q - 9808\Delta^5 q + 149552\Delta^6 q - 2660544\Delta^7 q ;$$

$$B = + \Delta q - 5\Delta^2 q + 38\Delta^3 q - 386\Delta^4 q + 4904\Delta^5 q - 74776\Delta^6 q + 1330272\Delta^7 q ;$$

$$C = + \Delta^2 q - 9\Delta^3 q + 95\Delta^4 q - 1220\Delta^5 q + 18664\Delta^6 q - 332388\Delta^7 q ;$$

$$D = + \Delta^3 q - 14\Delta^4 q + 195\Delta^5 q - 3065\Delta^6 q + 55104\Delta^7 q ;$$

$$E = + \Delta^4 q - 20\Delta^5 q + 355\Delta^6 q - 6685\Delta^7 q ;$$

$$F = + \Delta^5 q - 27\Delta^6 q + 595\Delta^7 q ;$$

$$G = + \Delta^6 q - 35\Delta^7 q ;$$

$$H = + \Delta^7 q ;$$

d'où on conclura

$$\begin{aligned} y = & q + (x-2)\Delta q + (x^2-5x+10)\Delta^2 q + (x^3-9x^2+38x-76)\Delta^3 q \\ & + (x^4-14x^3+95x^2-386x+772)\Delta^4 q \\ & + (x^5-20x^4+195x^3-1220x^2+4904x-9808)\Delta^5 q \\ & + (x^6-27x^5+355x^4-3065x^3+18664x^2-74776x+149652)\Delta^6 q \\ & + (x^7-35x^6+595x^5-6685x^4+55104x^3-332388x^2+1330272x \\ & \quad - 2660544)\Delta^7 q + \dots \end{aligned}$$

On aura ainsi

$$\text{Pour } x=3 \dots y = q + \Delta q + 4\Delta^2 q - 16\Delta^3 q .$$

$$\text{Pour } x=4 \dots y = q + 2\Delta q + 6\Delta^2 q - 4\Delta^3 q + 108\Delta^4 q .$$

$$\text{Pour } x=5 \dots y = q + 3\Delta q + 10\Delta^2 q + 14\Delta^3 q + 92\Delta^4 q - 788\Delta^5 q .$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x=6 \dots y = & q + 4\Delta q + 16\Delta^2 q + 44\Delta^3 q + 148\Delta^4 q - 328\Delta^5 q \\ & + 7644\Delta^6 q ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x=7 \dots y = & q + 5\Delta q + 24\Delta^2 q + 92\Delta^3 q + 324\Delta^4 q - 6588\Delta^5 q \\ & - 233324\Delta^6 q - 79672\Delta^7 q . \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 377

Et enfin en mettant pour Δq , $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$, $\Delta^4 q$, leurs valeurs en q , q_1 , q_2 , q_3 , d'après les formules connues, on aura

$$\text{Pour } x=3 \dots\dots 3y=14q-33q_1+30q_2-8q_3 ;$$

$$\text{Pour } x=4 \dots\dots 6y=43q-144q_1+192q_2-112q_3+27q_4 ;$$

$$\text{Pour } x=5 \dots\dots 120y=1303q-5680q_1+10250q_2-9340q_3+4375q_4$$

$$-788q_5 ;$$

$$\text{Pour } x=6 \dots\dots 90y=1534q-8208q_1+18675q_2-22880q_3+15930q_4$$

$$-5904q_5+943q_6 ;$$

et ainsi de suite.

8. *Exemple.* Soit $Q=x^3$, l'équation sera

$$y+2\frac{dy}{dx}=x^3 ;$$

elle aura pour intégrale complète

$$y=Ae^{-\frac{x}{2}}+x^3-6x^2+24x-48 ;$$

La méthode actuelle donne $q=0$, $q_1=1$, $q_2=8$, $q_3=27$, $q_4=64$, $q_5=125$, $q_6=216$,

On aura donc, pour $x=3$,

$$3y=14q-33q_1+30q_2-8q_3=-33+240-216=-9 ;$$

donc $y=-3$.

Pour $x=4$, on aura

$$6y=-144+1536-3024+1728=+96 ;$$

donc $y=16$.

Pour $x=5$, on aura

378 INTÉGRAT.ⁿ APPROCHÉE DES ÉQUAT.^s DIFFÉR.^s

$$120y = -5680 + 82000 - 252180 + 28000 - 9850 = 5640 ;$$

donc $\gamma = 47$.

Pour $x = 6$, on aura

$$90\gamma = -8208 + 149400 - 617760 + 1019520 - 738000 \\ + 203688 = +8640 ;$$

donc $\gamma = 96$. Et ainsi de suite.

Or, toutes ces valeurs, tant de x que de γ , sont visiblement comprises sous la loi générale

$$x^3 - 6x^2 + 24x - 48 ;$$

ainsi l'intégrale complète sera

$$y = Ae^{-\frac{x}{5}} + x^3 - 6x^2 + 24x - 48 .$$

9. La méthode est sur-tout infiniment précieuse dans les cas innombrables où la différentielle

$$2y = e^{-\frac{x}{5}} \int e^{\frac{x}{5}} Q dx ,$$

ou, plus généralement,

$$ny = e^{-\frac{x}{n}} \int e^{\frac{x}{n}} Q dx ,$$

n'est pas intégrable à la rigueur; parce qu'alors elle fait connaître la véritable valeur de l'inconnue ou de la variable γ , avec une approximation beaucoup plus rapide que toute autre méthode connue; ce que nous ferons voir dans le premier mémoire qui suivra celui-ci.