GERGONNE

Géométrie transcendante. Construction graphique approchée du problème de la duplication du cube

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 242-244
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__242_1>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Construction graphique approchée du problème de la duplication du cube ;

Par M. Gergonne.

J'ai montré, à la page 204 du précédent volume, comment, au moyen d'une parabole et de sa développée, exactement tracées à l'avance et une fois pour toutes, sur une feuille de cuivre ou de carton, on pouvait aisément parvenir à déterminer graphiquement, d'une manière approchée, les racines de toute équation donnée et numérique du troisième degré, et obtenir conséquemment une solution graphique approchée du problème de la *Trisection de l'angle.*

J'ai remarqué postérieurement que la même figure pouvait aussi très-simplement fournir une construction graphique approchée du problème de la *Duplication du cube.* La manière de l'employer à ce nouvel usage peut être comprise sous l'énoncé que voici, et qui me paraît n'être point dépourvu d'une certaine élégance.

Cherchez le point de la parabole dont l'ordonnée est égale à l'arète du cube donné ; menez la normale de ce point, laquelle sera en même temps tangente à la développée en un certain point ; cherchez le point de la développée dont l'ordonnée est double de celle de celui-là ; par ce nouveau point, menez à la développée une tangente, qui sera en même temps normale à la parabole en *un second point*; *l'ordonnée de ce dernier point sera l'arête du cube cherché, double en volume du cube donné.*

Soit, en effet, l'équation de la parabole

$$y'^2=4cx' \;;$$

l'équation d'une normale sera

$$y-y'=-\frac{y'}{2c}(x-x') \;,$$

ou

$$2c(y-y')+y'(x-x')=0 \;.$$

Si l'on veut que le point (x, y) soit un point de la développée, il faudra qu'en différentiant cette dernière équation par rapport à x', y', les coordonnées x, y demeurent constantes, ce qui donnera

$$[(x-x')-2c]\,\frac{dy'}{dx'}=y' \;;$$

mais la différentielle de l'équation de la parabole est

$$y'\,\frac{dy'}{dx'}=2c \;;$$

éliminant donc $\frac{dy'}{dx'}$ entre ces deux équations, il viendra

$$2c[(x-x')-2c]=y'^2 \;;$$

éliminant enfin $x-x'$ entre cette dernière équation et celle de la normale, on aura

$$y'^3=-4c^2y \;;$$

ce qui nous apprend que *les ordonnées des divers points de la développée sont proportionnelles aux cubes des ordonnées des points correspondans de la parabole*, et justifie ainsi la construction indiquée plus haut.

On voit en même temps qu'une construction tout-à-fait analogue résoudrait le problème, plus général, où il s'agirait de *déterminer l'arête d'un cube dont le volume fût à celui d'un autre cube dont l'arête est donnée dans un rapport donné?*

Si la parabole avait une étendue trop bornée pour qu'on pût l'employer à la solution immédiate du problème, on substituerait à l'arète du cube donné, sa moitié, son tiers, son quart, ou tout autre de ses sous-multiples, et, opérant comme nous l'avons prescrit ci-dessus, on parviendrait au même sous-multiple de l'arète cherchée.