ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

DE STAINVILLE

Algèbre élémentaire. Démonstration d'un fait de calcul algébrique très-important et très-remarquable, et des principales consequences qui en resultent

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 229-240

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__229_0>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un fait de calcul algébrique très-important et très-remarquable, et des principales consequences qui en resultent;

Par M. de STAINVILLE, répétiteur d'analise à l'école royale polytechnique.

SOIT la série indéfinie

$$1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots;$$

et soit une autre série

$$1+b\frac{z}{1}+b(b+k)\frac{z^2}{1.2}+b(b+k)(b+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots,$$

ne différant uniquement de celle-là qu'en ce que b y a pris la place de a. Nous nous proposons, en premier lieu, de démontrer que le produit de ces deux séries est une série composée en $(a+b)$ de la même manière que la première l'est en a et la seconde en b; c'est-à-dire, que ce produit est

$$1+(a+b)\frac{z}{1}+(a+b)(a+b+k)\frac{z^2}{1.2}+(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots$$

Pour y parvenir, assurons-nous d'abord de la forme des premiers termes du développement de ce produit ; nous trouverons, pour ces premiers termes

$$\begin{array}{l|l|l|l}
1+a & \frac{z}{1}+a(a+k) & \frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k) & \frac{z^3}{1.2.3}+\ldots \\
+b & +\quad 2ab & +\quad 3ab(a+k) & +\ldots \\
 & +b(b+k) & +\quad 3ab(b+k) & +\ldots \\
 & & +b(b+k)(b+2k) & +\ldots \\
 & & & +\ldots
\end{array}$$

On voit d'abord que le coefficient de $\frac{z}{1}$ est $a+b$. Celui de $\frac{z^2}{1.2}$ peut se décomposer en ces deux parties

$$a[(a+k)+b] \qquad \text{ou} \qquad a(a+b+k)\ ,$$

$$b[(b+k)+a] \qquad \text{ou} \qquad b(a+b+k)\ ;$$

dont la somme sera conséquemment

$$(a+b)(a+b+k)\ .$$

Le coefficient de $\frac{z^3}{1.2.3}$ peut également se décomposer en ces deux parties

$$a\{(a+k)(a+2k)+2b(a+k)+b(b+k)\}$$

$$b\{(b+k)(b+2k)+2a(b+k)+a(a+k)\}$$

or, le multiplicateur de a, dans la première partie, est évidemment ce que devient le coefficient de $\frac{z^2}{1.2}$, lorsqu'on y change a en $a+k$; et le multiplicateur de b dans la seconde est ce que devient ce même coefficient, lorsqu'on y change b en $b+k$; puis donc que nous avons trouvé que le coefficient de $\frac{z^2}{1.2}$ revenait à $(a+b)(a+b+k)$, il en résulte que le multiplicateur de a, dans la première partie du coefficient de $\frac{z^3}{1.2.3}$ et celui de b dans la seconde sera également

$$(a+b+k)(a+b+2k)\ ;$$

l'ensemble de ces deux parties, ou le coefficient de $\frac{z^3}{1.2.3}$, sera donc

$$a(a+b+k)(a+b+2k)+b(a+b+k)(a+b+2k)\ ;$$

c'est-à-dire,

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ .$$

Il demeure donc prouvé, par ce qui précède, que du moins la loi dont il s'agit se soutient pour les quatre premiers termes du produit de nos deux séries; et il ne serait pas difficile de s'assurer qu'elle a également lieu pour un plus grand nombre de termes de ce produit.

Il n'est donc plus question, pour compléter notre démonstration, que de prouver que si cette même loi se soutient jusqu'au coefficient de $\frac{z^{p-1}}{1.2....(p-1)}$ inclusivement, elle aura lieu également pour celui de $\frac{z^p}{1.2....p}$; or, on trouve, pour le premier de ces deux coefficiens,

$$a(a+k)(a+2k)(a+3k)\ \ldots\ldots\ldots\ [a+(p-2)k]$$

$$+\frac{p-1}{1}\,b.a(a+k)(a+2k)\ \ldots\ldots\ldots\ [a+(p-3)k]$$

$$+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\,b(b+k).\,a(a+k)\ \ldots\ldots\ldots\ [a+(p-4)k]$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\,a(a+k).b(b+k)\ldots\ldots\ldots\ [b+(p-4)k]$$

$$+\frac{p-1}{1}\,a.b(b+k)(b+2k)\ \ldots\ldots\ldots\ [a+(p-3)k]$$

$$+b(b+k)(b+2k)(b+3k)\ \ldots\ldots\ [b+(p-2)k]$$

et pour le second

$$a(a+k)(a+2k)(a+3k)\ \ldots\ldots\ldots\ [a+(p-1)k]$$

$$+\frac{p}{1}\,b.a(a+k)(a+2k)\ \ldots\ldots\ldots\ [a+(p-2)k]$$

$$+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\,b(b+k).a(a+k)\ \ldots\ldots\ldots\ [a+(p-3)k]$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\,a(a+k).b(b+k)\ldots\ldots\ldots\ [b+(p-3)k]$$

$$+\frac{p}{1}\,a.b(b+k)(b+2k)\ \ldots\ldots\ldots\ [b+(p-2)k]$$

$$+b(b+k)(b+2k)(b+3k)\ \ldots\ldots\ldots\ [b+(p-1)k]$$

Or, en remarquant que

$\frac{p}{1}$

$$\frac{p}{1}=\frac{p-1}{1}+1\,,$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}=\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}+\frac{p-1}{1}\,;$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}=\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\cdot\frac{p-3}{3}+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on verra que ce coefficient peut se décomposer en deux parties, dont la première est

$$a\left\{\begin{array}{l}
a(a+k)(a+2k)(a+3k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-1)k]\\
+\frac{p-1}{1}b\,.(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-2)k]\\
+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}b(b+k)\,.(a+k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-3)k]\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\frac{p-1}{1}(a+k).(b+k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-3)k]\\
+b(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-2)k]
\end{array}\right\}$$

et la seconde

$$
b\left\{
\begin{array}{ll}
a(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots & [a+(p-2)k] \\
+\frac{p-1}{1}(b+k).a(a+k)\ldots\ldots\ldots\ldots & [a+(p-3)k] \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-2}{2}a(a+k).(b+k)\ldots\ldots\ldots\ldots & [b+(p-3)k] \\
+\frac{p-1}{1}a.(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots & [b+(p-2)k] \\
+(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots & [b+(p-1)k]
\end{array}
\right\}
$$

Or, il est aisé de voir que le multiplicateur de a, dans la première de ces deux parties, est ce que devient le coefficicient de $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots.(p-1)}$, lorsqu'on y change a en $a+k$, et que le multiplicateur de b, dans la seconde, est ce que devient ce même coefficient, lorsqu'on y change b en $b+k$; si donc, comme nous le supposons, le coefficient de $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots.(p-1)}$ est en effet réductible à la forme

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots..[a+b+(p-2)k] \;;$$

le multiplicateur de a, dans la première de ces deux parties, et celui de b dans la seconde, sera également

$$(a+b+k)(a+b+2k)(a+b+3k)\ldots..[a+b+(p-1)k] \;;$$

en réunissant donc ces deux parties, et ayant égard au facteur commun qui les affecte, on aura, pour le coefficient de $\frac{z^p}{1.2\ldots.p}$

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots..[a+b+(p-1)k] \;;$$

comme nous l'avions annoncé. Il est donc prouvé, par ce qui précède, que, si la loi dont il s'agit se soutient jusqu'à un terme quelconque du produit, elle aura lieu également pour le terme qui le suivra immédiatement ; puis donc que nous nous sommes assurés de son existence pour les quatre premiers termes, il s'ensuit qu'elle a lieu pour tous, et qu'ainsi le théorème est démontré en toute rigueur.

Pour abréger, désignons par fa notre première série, c'est-à-dire, posons

$$\mathrm{f}a=1+a\,\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\,\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots;$$

nous aurons pareillement

$$\mathrm{f}b=1+b\,\frac{z}{1}+b(b+k)\frac{z^2}{1.2}+b(b+k)(b+2k)\,\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots\ ;$$

et encore

$$\mathrm{f}(a+b)=1+(a+b)\frac{z}{1}+(a+b)(a+b+k)\,\frac{z^2}{1.2}+\ldots\ ;$$

en conséquence, le théorème qui vient d'être démontré pourra être écrit sous cette forme très-simple

$$\mathrm{f}a.\mathrm{f}b=\mathrm{f}(a+b)\ . \qquad \text{(I)}$$

On remarquera que, d'après cette notation, on doit évidemment avoir $\mathrm{f}0=1$.

Si dans l'équation (I) on change b en $b+c$, elle deviendra

$$\mathrm{f}a.\mathrm{f}(b+c)=\mathrm{f}(a+b+c)\ ;$$

mais, en vertu de la même équation,

$$\mathrm{f}(b+c)=\mathrm{f}b.\mathrm{f}c\ ;$$

substituant donc, on aura

$$fa.fb.fc=f(a+b+c) .$$

En supposant que c se change en $c+d$, et se conduisant de la même manière, on prouvera pareillement que

$$fa.fb.fc.fd=f(a+b+c+d) ;$$

et en poursuivant toujours ainsi, on se convaincra qu'en général

$$fa.fb.fc.fd\ldots\ldots=f(a+b+c+d+\ldots\ldots) ;$$

c'est-à-dire, que le produit de tant de série qu'on voudra, de la forme de la série fa; et ne différant les unes des autres qu'en ce que a s'y trouve successivement changé en b, c, d,..... est une série composée exactement en $a+b+c+d+$..... de la même manière que l'est la première en a, la seconde en b, la troisième en c, la quatrième en d, et ainsi de suite.

Si dans la dernière équation ci-dessus on suppose les quantités a, b, c, d,...... égales entre elles et à la première a, et leur nombre égal à m; elle deviendra

$$(fa)^m=fma ; \qquad \text{(II)}$$

c'est-à-dire qu'une puissance entière et positive quelconque m de la série fa, est une série composée en ma de la même manière que celle-là l'est en a.

Suivant l'équation (I) on a

$$fb.fc=f(b+c) ;$$

posons $b+c=a$, d'où $c=a-b$; il viendra, en substituant

fb

$$\mathrm{f}b.\mathrm{f}(a-b)=\mathrm{f}a\ ;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{f}a}{\mathrm{f}b}=\mathrm{f}(a-b)\ ; \qquad \text{(III)}$$

c'est-à-dire que le quotient de la division de la série $\mathrm{f}a$ par la série $\mathrm{f}b$ est une série composée en $(a-b)$ de la même manière que le dividende l'est en a et le diviseur en b.

Par l'équation (II), on a

$$(\mathrm{f}b)^m=\mathrm{f}mb\ ;$$

posant $mb=a$, d'où $b=\frac{a}{m}$, il viendra

$$\left(\mathrm{f}\frac{a}{m}\right)^m=\mathrm{f}a\ ;$$

d'où on tirera, en extrayant la racine et renversant

$$\sqrt[m]{\mathrm{f}a}=\mathrm{f}\frac{a}{m}\ ; \qquad \text{(IV)}$$

c'est-à-dire que la racine d'un degré quelconque m, entier et positif, de la série $\mathrm{f}a$ n'est autre chose qu'une série composée en $\frac{a}{m}$ de la même manière que la puissance l'est en a.

On aura, d'après cela

$$(\mathrm{f}a)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(\mathrm{f}a)^m}=\sqrt[n]{\mathrm{f}ma}=\mathrm{f}\frac{m}{n}a\ ;$$

c'est-à-dire,

$$(\mathrm{f}a)^{\frac{m}{n}}=\mathrm{f}\frac{m}{n}a\ .$$

m et n étant deux nombres positifs quelconques. L'équation (II)

$$(\mathrm{f}a)^m=\mathrm{f}ma$$

a donc lieu, quelque nombre positif, entier ou fractionnaire qu'on représente par m. Il serait ensuite aisé de prouver, à l'aide des raisonnemens usités en pareil cas, qu'il en sera encore de même lorsque m sera un incommensurable positif quelconque.

On aura encore, quel que soit le nombre positif m,

$$(\mathrm{f}a)^{-m}=\frac{1}{(\mathrm{f}a)^m}=\frac{\mathrm{f}0}{(\mathrm{f}a)^m},$$

ou, d'après ce qui précède et le théorème (II)

$$(\mathrm{f}a)^{-m}=\frac{\mathrm{f}0}{\mathrm{f}ma}=\mathrm{f}(0-ma)=\mathrm{f}(-m)a\ .$$

Ainsi, quelque nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, commensurable ou incommensurable qu'on représente par m, il est toujours vrai de dire qu'on a

$$(\mathrm{f}a)^m=\mathrm{f}ma\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\left\{1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots\right\}^m$$

$$=1+ma\frac{z}{1}+ma(ma+k)\frac{z^2}{1.2}+ma(ma+k)(ma+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots$$

et cela quels que soient d'ailleurs a et k.

Si, dans cette équation, on fait $a=1$ et $k=-1$, elle deviendra

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1}z+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}z^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}z^3+\ldots;$$

la formule du *binome* se trouve donc ainsi démontrée, quel que soit l'exposant m.

Si, dans la même équation, on suppose $k=0$, $a=1$, $z=1$, $m=Ax$, elle deviendra

$$\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\right)^{Ax}=1+\frac{Ax}{1}+\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\ldots$$

La série du premier membre est, comme l'on sait, un nombre incommensurable (*), compris entre 2 et 3 : c'est la base du système de logarithmes néperiens ; en le représentant par e, suivant l'usage, on aura

$$e^{Ax}=1+\frac{Ax}{1}+\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\ldots$$

Si l'on fait $e^A=a$, auquel cas A sera le logarithme néperien de a, on aura

$$a^x=1+\frac{x\,\mathrm{l}a}{1}+\frac{x^2\mathrm{l}^2a}{1.2}+\frac{x^3\mathrm{l}^3a}{1.2.3}+\ldots$$

formule qui donne le développement des exponentiels en séries ou, ce qui revient au même, le développement d'un nombre a, en fonction de son logarithme.

Si, dans cette dernière formule, on change x en m et a en $1+x$, elle deviendra

$$(1+x)^m=1+\frac{m\,\mathrm{l}(1+x)}{1}+\frac{m^2\mathrm{l}^2(1+x)}{1.2}+\frac{m^3\mathrm{l}^3(1+x)}{1.2.3}+\ldots$$

mais on a, d'un autre côté,

(*) Voyez la page 50 du présent volume.

$$(1+x)^m=1+m\frac{x}{1}+m(m-1)\frac{x^2}{1.2}+m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

égalant donc entre elles ces deux valeurs, en supprimant l'unité de part et d'autre, et divisant par m, il viendra

$$\mathrm{l}(1+x)+\frac{m\mathrm{l}^2(1+x)}{1.2}+\frac{m^2\mathrm{l}^3(1+x)}{1.2.3}+\ldots$$

$$=\frac{x}{1}+(m-1)\frac{x^2}{1.2}+(m-1)(m-2)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

faisant enfin, dans cette dernière équation, $m=0$, on aura

$$\mathrm{l}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

formule qui donne le logarithme néperien de $1+x$, en fonction du nombre x.

Ceux qui désireront de plus amples détails sur ce sujet pourront consulter nos *Mélanges d'analise algébrique et de géométrie* (veuve Courcier, Paris, 1815).

Dans un prochain article, nous nous occuperons du développement des fonctions circulaires en séries.