ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

Géométrie analitique. Sur une méthode analitique pour la recherche des foyers des sections coniques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 317-321
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__317_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Sur une méthode analitique pour la recherche des foyers des sections coniques ;

Par M. BRET, professeur à la faculté des sciences de Grenoble.

Au Rédacteur des Annales ;

MONSIEUR ET CHER CONFRÉRE,

M. Poncelet, dans son intéressant mémoire, inséré à la page 301 du présent volume, observe que la définition des foyers des sections coniques, telle qu'on la donne dans les élémens de *Géométrie analitique*, n'est point satisfaisante, et il propose de la remplacer par une autre plus analitique ; mais il me semble qu'avant d'opérer ce changement, il serait convenable d'examiner d'abord plus particulièrement la définition des foyers donnée par Euler.

Lorsque la section conique est rapportée à son premier axe ou axe principal, comme axe des abscisses, on dit communément que le foyer est un point tel que sa distance à un point quelconque de la courbe est une fonction rationnelle et entière de l'abscisse correspondante ; mais il est évident que rien n'empêche de généraliser cette idée, et de donner un caractère des foyers qui puisse convenir à tous les systèmes de coordonnées parallèles à deux axes fixes. Je propose donc la définition suivante :

Le foyer (α, β) *d'une section conique est un point tellement situé que sa distance, à un point quelconque de* (x, y) *de la courbe, est une fonction rationnelle et entière des coordonnées de ce point.*

En partant de là, je crois qu'on peut exposer, très-simplement et d'une manière générale, la théorie des foyers.

Soit, en effet, l'équation générale du second degré

$$ax^2+by^2+2cxy+2a'x+2b'y+d=0\ ,$$

rapportée, pour plus de simplicité, à un système de coordonnées rectangulaires. On aura, d'après cela, pour la distance du point (α, β) au point (x, y)

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\ ;$$

si donc l'on veut que le point (α, β) soit un foyer, on devra avoir

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=gx+hy+k\ ;$$

et tout se réduira à exprimer que cette équation est identique avec la proposée, ou du moins qu'elle n'en diffère que par un facteur constant λ; il faudra donc déterminer α et β de manière à rendre identique, quels que soient x et y, l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(gx+hy+k)^2$$
$$=\lambda(ax^2+by^2+2cxy+2a'x+2b'y+d)\ .$$

On obtient ainsi, entre les six inconnues α, β, g, h, k, λ; les six équations suivantes, en nombre suffisant pour les déterminer

$$1-g^2=\lambda a\ , \qquad -\alpha-kg=\lambda a'\ ,$$
$$1-h^2=\lambda b\ , \qquad -\beta-kg=\lambda b'\ ,$$
$$-gh=\lambda c\ , \qquad \alpha^2+\beta^2-k^2=\lambda d\ ,$$

Il résulte de là que les sections coniques ont, généralement parlant, quatre foyers; car, par l'élimination de g, h, k, λ, on parvient à deux équations du second degré entre α, β et les coefficiens de la proposée.

Pour faire à l'ellipse l'application de cette analise nous prendrons son équation la plus simple, qui est, comme l'on sait,

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1=0\ ;$$

on aura alors

$$a=\frac{1}{A^2}\ ,\quad b=\frac{1}{B^2}c=0\ ,\ a'=0\ ,\ b'=0\ ;\ d=-1\ ;$$

en sorte que les six équations ci-dessus deviendront

$$1-g^2=\frac{\lambda}{A^2}\ ,\qquad \alpha+kg=0\ ,$$

$$1-h^2=\frac{\lambda}{B^2}\ ,\qquad \beta+kh=0\ ,$$

$$gh=0\ ,\qquad \alpha^2+\beta^2-k^2=-\lambda\ ;$$

d'où l'on tirera ces deux systèmes de valeurs

$$\begin{array}{ll}
g=0\ , & h=0\ ; \\
h=\frac{1}{B}\sqrt{B^2-A^2}\ , & g=\frac{1}{A}\sqrt{A^2-B^2}\ , \\
k=B\ , & k=A\ , \\
\alpha=0\ , & \beta=0\ , \\
\beta=-\sqrt{B^2-A^2}\ . & \alpha=-\sqrt{A^2-B^2}\ .
\end{array}$$

Or, comme A est nécessairement plus grand ou plus petit que B, il s'ensuit que, excepté le cas du cercle, pour lequel on a à la fois $\alpha=0$, $\beta=0$, toujours l'un de ces systèmes sera réel et l'autre imaginaire. Ainsi, indépendamment de deux foyers réels, situés sur son grand axe, l'ellipse en a deux autres imaginaires, situés sur son petit axe.

Si, dans ces deux séries de valeurs, on change B en $B\sqrt{-1}$, on aura les formules qui conviennent à l'hyperbole dont l'équation est

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}-1=1\ ;$$

ces formules seront

$$\begin{array}{ll}
g=0\ , & h=0\ , \\
h=\frac{1}{B}\sqrt{A^2+B^2}, & g=\frac{1}{A}\sqrt{A^2+B^2}, \\
k=B\sqrt{-1}\ , & k=A\ , \\
\alpha=0\ , & \beta=0\ , \\
\beta=-\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{-1}\ ; & \alpha=-\sqrt{A^2+B^2}\ ;
\end{array}$$

de sorte qu'ici ce sera toujours le second système qui sera réel.

S'il s'agit de la parabole, on pourra prendre l'équation

$$y^2-2Px=0\ ;$$

ce qui donnera

$$a=0\ ,\quad b=1\ ;\quad c=0\ ,\quad a'=-P\ ;\quad b'=0\ ;\quad d=0\ ;$$

en conséquence, nos six équations deviendront

$$\begin{array}{ll}
1-g^2=0\ , & \alpha+kg=\lambda P\ , \\
1-h^2=\lambda\ , & \beta+kh=0\ , \\
gh=0\ , & \alpha^2+\beta^2-k^2=0\ ;
\end{array}$$

d'où on tirera

$$g=\pm 1\,,\qquad k=\tfrac{1}{2}P\,,$$
$$h=0\,,\qquad \alpha=\tfrac{1}{2}P\,,$$
$$\lambda=1\,,\qquad \beta=0\,.$$

J'observerai, en terminant, que l'équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=gx+hy+k\,;$$

offre un moyen bien simple de construire les sections coniques par l'intersection d'une droite mobile constamment parallèle à une droite fixe, avec un cercle variable de rayon, dont le centre fixe n'est autre chose que le foyer de la courbe (*).

Agréez, etc.

Grenoble, le 21 avril 1818.

(*) Ce que propose ici M. Bret vaut, sans contredit, incomparablement mieux que ce qu'on pratique communément, dans la vue de parvenir aux foyers des sections coniques; mais cela ne peut guère servir à découvrir les points remarquables dans les courbes des degrés supérieurs. Nous persistons donc à penser que, pour parvenir à la découverte de ces sortes de points, il faut se proposer le problème suivant :

Trouver deux points du plan d'une courbe auxquels tous les points de cette courbe étant rapportés, son équation devienne la plus simple possible?

On voit bien que, si $f(x,y)=0$ est l'équation de la courbe, il faudra, pour résoudre le problème, éliminer x et y entre cette équation et les deux équations

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2&=r^2\,,\\(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2&=r'^2\,,\end{aligned}\right\}\qquad\text{(A)}$$

et profiter ensuite de l'indétermination des quatre constantes α, β, α', β' pour rendre l'équation résultante en r et r' la plus simple possible. Mais l'élimination ne pourrait être que très-laborieuse, même pour le second degré. A la vérité, on pourrait substituer à l'une des équations (A) la différence de ces deux