
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Solution du problème de géométrie proposé à la page 140 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 312-315

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__312_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Solution du problème de géométrie proposé à la page 140 de ce volume ;

PAR M. GERGONNE.



PROBLÈME. *A quelle courbe appartient une suite indéfinie de points tellement situés sur un même plan ; 1.° que leurs ordonnées sont équidistantes ; 2.° que la droite menée de l'origine à chacun d'eux , et prolongée au-delà , retranche de l'ordonnée de celui qui le suit immédiatement , à sa partie supérieure , une longueur constante ?*

Solution. Soit a la distance constante entre les ordonnées consécutives ; et soit b la longueur , aussi constante , retranchée à chacune , à sa partie supérieure , par le prolongement de la droite menée de l'origine au point qui précède immédiatement celui auquel cette ordonnée appartient.

Concevons que, à partir de l'un quelconque, ces points aient été consécutivement numérotés 1, 2, 3, $z-1$, z ; soient P_{z-1} , P_z ceux d'entre eux qui occupent respectivement les rangs $z-1$ et z ; soient x_{z-1} , y_{z-1} les coordonnées du premier; soient x_z , y_z les coordonnées du second; l'équation de la droite menée de l'origine au point P_{z-1} sera

$$y = \frac{y_{z-1}}{x_{z-1}} x ;$$

en conséquence, la partie de l'ordonnée de P_z interceptée entre cette droite et l'axe des x sera

$$\frac{y_{z-1}}{x_{z-1}} x_z ;$$

il faudra donc que cette longueur, augmentée de b , soit égale à l'ordonnée de P_z ; c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{y_{z-1}}{x_{z-1}} x_z + b = y_z ;$$

c'est-à-dire,

$$y_z x_{z-1} - x_z y_{z-1} = b x_{z-1} ; \quad (1)$$

mais si l'on appelle A l'abscisse arbitraire du point P_0 , on aura

$$x_{z-1} = A + (z-1)a , \quad x_z = A + za ;$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation (1); elle deviendra

$$[A + (z-1)a] y_z - [A + za] y_{z-1} = b [A + (z-1)a] ; \quad (2)$$

équations aux différences du premier ordre et du premier degré.

L'intégrale de cette équation est, en désignant par B l'ordonnée qui répond à l'abscisse A

$$y = (A+za) \left\{ \frac{B}{A} + b \left[\frac{1}{A+za} + \frac{1}{A+(z-1)a} + \frac{1}{A+(z-2)a} + \dots + \frac{1}{A+a} \right] \right\};$$

mais on a $A+za=x$; substituant donc, il viendra

$$y = x \left\{ \frac{B}{A} + b \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-2a} + \dots + \frac{1}{A+a} \right) \right\}.$$

Si l'on suppose $A=a$ et $B=b$, cette équation deviendra

$$y = bx \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} + \dots + \frac{1}{x} \right).$$

Un géomètre nous a adressé une solution pour le cas où la distance constante entre les ordonnées étant infiniment petite et égale à dx , la longueur b serait aussi infiniment petite et égale à λdx . On a dans ce cas

$$y(x-dx) - x(y-dy) = \lambda dx(x-dx);$$

ou en réduisant

$$x dy - y dx = \lambda x dx;$$

ou encore

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = d \left(\frac{y}{x} \right) = \lambda \frac{dx}{x} = \lambda d. \text{Log. } x;$$

d'où

$$\frac{y}{x} = \lambda \text{Log. } Cx,$$

ou encore

$$y = \lambda x \text{Log. } Cx.$$

Si l'on veut que la courbe passe par le point (A, B) , on aura

$$B = \lambda A \text{Log. } CA;$$

ce qui donne

$$C = \frac{\sqrt[\lambda]{e^{\frac{A}{\lambda}}}}{A} ;$$

donc

$$y = \lambda x \text{Log.} \frac{x}{A} \sqrt[\lambda]{e^{\frac{A}{\lambda}}} ;$$

ou bien

$$y = \lambda x \left\{ \text{Log.} \frac{x}{A} + \frac{B}{\lambda a} \right\} .$$
