ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Solution d'un cas particulier du problème de dynamique proposé à la page 72 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 298-303

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__298_0>

Solution d'un cas particulier du problème de dynamique proposé à la page 72 de ce volume ;

Par M. Le Barbier.

Problème. Déterminer le mouvement du centre de gravité d'un corps solide posé sur un plan horizontal et términé inférieurement par une courbe donnée, dans le cas où le plan qui passe par l'axe du corps partage ce corps en deux parties égales et symétriques (*) ?

Solution. Soient ABDE (fig. 2) la section du plan vertical avec le corps ; $A'B'D'E'$ cette section dans la position d'équilibre ; position où l'axe AB, qui est alors $A'B'$, est supposé vertical ; Ox, Oy deux axes rectangulaires, pris dans le plan de la section ABDE, tels que Ox représente la projection du plan horizontal ; G le centre de gravité du corps ; K le point de contact de la section ABDE avec le plan horizontal. Soient de plus CA, CE deux axes rectangulaires, auxquels nous rapportons l'équation de la section ABDE ; M la masse du corps, g la gravité, h la hauteur du centre de gravité G au-dessus du plan horizontal, dans sa position d'équilibre ; GX, GY deux droites quelconques rectangulaires entre elles.

(*) L'axe du corps est ici, comme dans notre *Mémoire sur la stabilité de l'équilibre des corps flottans* (Annales, tom. VIII, pag. 37), la droite verticale qui, dans la position d'équilibre du corps, passe par son centre de gravité.

Soient enfin menés GK, ainsi que la droite GH, perpendiculaire sur Ox. Soient faits

$$Ang.\mathrm{XGH}=\omega\ ,\quad Ang.\mathrm{XGK}=\theta\ ,\quad Ang.\mathrm{KGH}=\varphi\ ,\quad \mathrm{GH}=h-\zeta\ .$$

La force Mg, dirigée suivant la verticale GH, se décompose, à cause de la résistance du plan horizontal, en deux autres, l'une dirigée suivant GK, et l'autre dirigée suivant GF, perpendiculaire à GK ; de sorte que $Mg\mathrm{Cos}.\varphi$ sera la force Mg, décomposée suivant GK. Mais cette dernière force, que nous pouvons représenter par la partie KM du prolongement de GK, se décompose, à son tour, suivant KN, perpendiculaire à OX et KL, dirigée suivant OX ; ainsi, en achevant le parallélogramme KMNL, on aura $\mathrm{KN}=Mg\mathrm{Cos}.^2\varphi$. Le centre de gravité du corps sera donc mue en vertu de la force unique

$$Mg-Mg\mathrm{Cos}.^2\varphi=Mg.\mathrm{Sin}.^2\varphi\ .$$

La seconde des équations (1) (*Annales*, tom. VIII, pag. 39) devient ainsi

$$M.\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}-Mg\mathrm{Sin}.^2\varphi=0\ ;$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}-g\mathrm{Sin}.^2\varphi=0\ . \qquad (1)$$

Soit maintenant $y=fx$ l'équation de la courbe ABDE, rapportée aux axes GX, GY. Si on désigne généralement par x l'abscisse du point K, on aura évidemment

$$\mathrm{Tang}.\omega=-\frac{1}{f'x}\ ,\quad \mathrm{Tang}.\theta=\frac{fx}{x}\ ;$$

mais comme, au moyen de la formule trigonométrique qui donne la tangente de la différence de deux arcs en fonction des tangentes de chacun d'eux, on a

$$\text{Sin.}^2\varphi=\frac{(\text{Tang.}\alpha-\text{Tang.}\theta)^2}{(1+\text{Tang.}^2\alpha)(1+\text{Tang.}^2\theta)}\ ;$$

il viendra, en vertu des valeurs de Tang.α et Tang.θ

$$\text{Sin.}^2\varphi=\frac{(x+fxf'x)^2}{(1+f'^2x)(x^2+f^2x)}\ .$$

Désignons, pour abréger, cette dernière fonction de x par Fx, et faisons $x=a+\alpha$. Si a designe l'abscisse qui repond au point A, α sera une petite quantité, dans l'hypothèse où le corps a été très-peu écarté de sa position d'équilibre; de sorte que, si l'on développe la fonction F$(a+\alpha)$, suivant les puissances ascendantes de α, au moyen du *Théorème de Taylor*; l'équation du mouvement deviendra, en employant les fonctions prime, seconde, tierce,....... de la *Théorie des fonctions analitiques*,

$$0=\frac{d^2\xi}{dt^2}-g\left(\text{F}a+\frac{\text{F}'a}{1}\alpha+\frac{\text{F}''a}{1.2}\alpha^2+\ldots\ldots\right). \qquad (2)$$

Cela posé, de la valeur de Sin.φ on tirera celle de Cos.φ; et, comme d'ailleurs Cos.$\varphi=\frac{h+\xi}{\text{GK}}$, il viendra, toutes réductions faites,

$$h+\xi=\frac{xf'x-fx}{\sqrt{1+f'^2x}}\ .$$

Si l'on désigne, pour abréger, le second membre de cette équation par Φx, on aura, à cause de $x=a+\alpha$

$$h+\xi=\Phi a+\frac{\Phi'a}{1}\alpha+\frac{\Phi''a}{1.2}\alpha^2+\ldots\ldots,$$

ou bien simplement

$\xi=$

$$\xi = \frac{\Phi'a}{1}\alpha + \frac{\Phi''a}{1.2}\alpha^2 + \ldots\ldots ;$$

parce que ξ est zéro en même temps que α; on aura donc, par le retour des suites,

$$\alpha = \frac{1}{\Phi'a}\xi - \frac{\Phi''a}{2\Phi'^3a}\xi^2 + \ldots\ldots ;$$

substituant cette expression de α dans l'équation (2), prenant α et ξ négativement, comme l'indique la figure, et ne retenant que la première puissance de ξ, il viendra

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - g\left(Fa - \frac{F'a}{\Phi'a}\xi\right) = 0 .$$

Cette équation se simplifie en prenant l'axe AG du corps pour axe des x. En effet, dans ce cas $a = h$, $fh = 0$, $f'h = \infty$, d'où $Fh = 0$, et par conséquent

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + g\frac{F'h}{\Phi'h}\xi = 0 ,$$

équation dont l'intégrale est

$$\xi = \beta\,\mathrm{Cos.}\left(t\sqrt{\frac{gF'h}{\Phi'h}} + \beta'\right) ,$$

β et β' étant deux constantes arbitraires.

Si maintenant on différentie les fonctions Fa et Φa, on trouvera

$$F'a = \frac{2(a+faf'a)}{(1+f'^2a)(a^2+f^2a)}\left\{\frac{1+faf''a+f'^2a}{a+faf'a} - \left(\frac{f'af''a}{1+f'^2a} + \frac{a+faf'a}{a^2+f^2a}\right)\right\} ,$$

$$\Phi a = \frac{(a+faf'a)f''a}{(1+f'^2a)^{\frac{3}{2}}} .$$

Supposons maintenant que la courbe ABDE soit une des sections coniques, renfermées dans l'équation

$$y^2 = nx + mx^2 ; \qquad (3)$$

l'origine des abscisses étant située au sommet de la courbe. Si l'on transporte cette origine à une distance h du sommet, et que l'on prenne pour x positives celles qui se dirigent vers le sommet, on aura $x = h - x'$, de sorte que si, après avoir substitué cette valeur de x dans l'équation (3), on efface l'accent de la nouvelle abscisse x', et que l'on fasse, pour abréger

$$k = h(mh + n) , \qquad l = 2mh + n ,$$

il viendra

$$y^2 = k - lx + mx^2 .$$

D'après les valeurs de $F'a$ et $\Phi'a$, rapportées ci-dessus, on trouvera, en observant toujours que $fh = 0$, $f'h = \infty$, et en faisant les réductions convenables

$$\frac{F'h}{\Phi'h} = \frac{2(\frac{1}{2}n - h)}{h^2} .$$

Ainsi, en supposant qu'il n'y ait point de vitesse initiale, on aura

$$\xi = \beta \operatorname{Cos.} t \sqrt{\frac{2(\frac{1}{2}n - h)}{h^2}} .$$

valeur fort simple qui fait voir 1.° que le mouvement est indépendant de la grandeur du corps et de son poids ; 2.° que l'équilibre sera stable ou non stable, suivant que h sera plus petit ou plus grand que $\frac{1}{2}n$ ou, en d'autres termes, que l'équilibre sera stable ou non stable, suivant que la hauteur du centre de gravité au-dessus du plan horizontal sera plus petite ou plus grande que le rayon de courbure au sommet de la courbe, et que le mouvement sera nul, lorsque la hauteur du centre de gravité sera égale au rayon de courbure. Quant à cette dernière condition, il est facile de s'en assurer, par l'inspection seule de la figure, et par la valeur connue du rayon de courbure des lignes du second ordre (*).

On conclut encore de la valeur de ξ ce théorème que les petits mouvemens seront les mêmes pour tous les corps dont la section ABDE est une des lignes du second ordre qui ont le même paramètre; puisque la valeur de ξ est indépendante de m.

Si l'on désigne par T le temps d'une oscillation entière, ϖ représentant toujours, comme à l'ordinaire, le rapport du rayon à la demi-circonférence, on aura

$$T\sqrt{\frac{2(\frac{1}{2}n-h)}{h^2}}=\varpi\,;$$

et par conséquent

$$T=\varpi\sqrt{\frac{h^2}{2(\frac{1}{2}n-h)}}\,;$$

d'où l'on voit que le temps d'une oscillation entière est le plus petit possible lorsque $h=0$, et va toujours en augmentant, jusqu'à $h=\frac{1}{2}n$ où il est le plus grand possible; c'est-à-dire qu'alors le mouvement est nul.

On aura la position du centre de gravité moyennant les coordonnées HG et OH; or, HG étant égal à $h-\xi$ sera connu; quant à OH, il est facile de voir que l'on a

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}'+Arc\,\mathrm{AK}+\mathrm{CK}\,Sin.\varphi\,;$$

et, comme nous avons Sin.φ, en fonction linéaire de ξ, tout sera connu dans cette dernière expression.

(*) Voyez le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix, tome I, page 450 (deuxième édition).