④ ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

Géométrie analitique. Essai sur les tangentes aux courbes planes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 285-291
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__285_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Essai sur les tangentes aux courbes planes ;

Par M. BRET, professeur à la faculté des sciences de Grenoble.

ON sait que la méthode imaginée par Roberval, pour mener des tangentes aux courbes, est fondée sur les lois du mouvement d'un point générateur. Nous nous proposons, dans cet essai, de déduire ces mêmes constructions de l'analise, et de les généraliser.

Soit

$$F(x,y)=0$$

l'équation, en coordonnées rectangulaires d'une courbe plane donnée quelconque ; si X et Y sont les coordonnées d'un point déterminé de cette courbe, on aura

$$F(X,Y)=0\;;$$

les équations de la corde qui joindra ce point au point (x,y) seront

$$X=x+ar\,,\qquad Y=y+br\,;\qquad\qquad (A)$$

on aura donc l'équation

$$F(x+ar\,,\;y+br)=0\;;$$

en développant et remplaçant simplement, pour abréger, $F(x, y)$ par F, elle deviendra

$$F+\left(a\frac{dF}{dx}+b\frac{dF}{dy}\right)r+\ldots\ldots=0\ ;$$

en observant que $F=0$, elle se réduit à

$$\left(a\frac{dF}{dx}+b\frac{dF}{dy}\right)+Mr+Nr^2+\ldots\ldots=0\ :$$

Cela posé, nous exprimerons que cette droite est tangente, en posant $r=0$; ce qui donnera l'équation de condition

$$a\frac{dF}{dx}+b\frac{dF}{dy}=0\ ;$$

laquelle exprime conséquemment que la corde (A) est tangente à la courbe.

Eliminant donc a et b entre cette dernière et les équations (A), nous aurons finalement pour l'équation de la tangente

$$\frac{dF}{dx}(X-x)+\frac{dF}{dy}(Y-y)=0\ ;$$

dans laquelle x et y sont les coordonnées du point de contact, tandis que X et Y sont les coordonnées courantes.

En conséquence, l'équation d'une perpendiculaire à la tangente, par le point (x, y) sera

$$\frac{dF}{dx}(Y-y)=\frac{dF}{dy}(X-x)\ ;$$

donc, si l'on fait

$$X-x=\mu\frac{dF}{dx}\ ,\qquad Y-y=\mu\frac{dF}{dy}\ ,$$

μ étant quelconque ; ces équations représenteront les coordonnees des différens points de la normale, ce qui donne lieu à la construction suivante :

Au point (x, y), on mènera des parallèles respectives aux axes rectangulaires ; et on portera sur ces parallèles, à partir de ce point, des parties proportionnelles à $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$; achevant enfin le rectangle de ces parties, la diagonale qui dans ce rectangle joindra le sommet (x, y) au sommet opposé sera la normale à la courbe.

Soit présentement un point fixe quelconque (α, β) ; soit p la distance variable de ce point au point (x, y) ; la courbe pourra être exprimée par une équation de relation entre p et x ; équation que nous supposerons être

$$\varphi(p, x)=0 .$$

On aura donc

$$p=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} ;$$

de sorte que l'équation de la courbe, en coordonnées rectangulaires, sera

$$\varphi[\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}, x]=F(x, y)=0 ;$$

on aura donc, pour les équations de la normale,

$$X=x+\mu\frac{dF}{dx}, \qquad Y=y+\mu\frac{dF}{dy} .$$

Mais, en remplaçant simplement, pour abréger, $\varphi(p, x)$ par φ, on trouve

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d(\varphi)}{dx}=\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{dF}{dy}=\frac{d(\varphi)}{dy}=\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dy};$$

et, comme on a d'ailleurs

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{y-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}\,;$$

il viendra

$$\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}x}=\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,,$$

$$\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}y}=\frac{y-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\,;$$

de plus, on sait que

$$\frac{x-a}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}\,,\qquad \frac{y-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}\,,$$

sont les cosinus respectifs des angles que fait le rayon vecteur p avec les axes des x et des y : de sorte qu'en représentant ces cosinus par a et b, les équations de la normale deviendront

$$X=x+\mu a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}+\mu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,,$$

$$Y=y+\mu b\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\,;$$

d'où l'on déduira la construction suivante :

Soit porté sur le rayon vecteur p, et sur la coordonnée x, à partir du point (p, x), des longueurs respectivement proportionnelles à $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$ et $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$; en construisant un parallélogramme sur ces longueurs, la diagonale qui joindra le sommet (p, x) de ce parallélogramme au sommet opposé sera normale à la courbe.

On conçoit qu'on obtiendrait une construction semblable, en partant de l'équation $\varphi(p, y)=0$.

Soient enfin deux points fixes quelconques (α, β) et (α', β') ;

soient p, p' les distances respectives de ces deux points à un point de la courbe ; cette courbe pourra être exprimée par une équation de relation entre p et p', équation que nous supposerons être

$$\psi(p\,,p')=0\ .$$

On aura de plus

$$p=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\ ,\qquad p'=\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}\ ;$$

de sorte que l'équation en coordonnées rectangulaires sera

$$\psi[\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\ ,\ \sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}]=F(x\,,y)=0\ ;$$

Mais, en remplaçant simplement, pour abréger, $\psi(p\,,p')$ par ψ; on trouve

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d(\psi)}{dx}=\frac{d\psi}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{d\psi}{dp'}\frac{dp'}{dx}\ ,$$

$$\frac{dF}{dy}=\frac{d(\psi)}{dy}=\frac{d\psi}{dp}\frac{dp}{dy}+\frac{d\psi}{dp'}\frac{dp'}{dy}\ ;$$

On a d'ailleurs, en désignant par a, b, a', b' les cosinus des angles que font les directions p, p' avec les axes des x et des y,

$$\frac{dp}{dx}=a\ ,\qquad \frac{dp'}{dx}=a'\ ,$$

$$\frac{dp}{dy}=b\ ,\qquad \frac{dp'}{dy}=b'\ ;$$

on aura donc

$$\frac{dF}{dx}=a\frac{d\psi}{dp}+a'\frac{d\psi}{dp'}\ ,\qquad \frac{dF}{dy}=b\frac{d\psi}{dp}+b'\frac{d\psi}{dp'}\ ;$$

au moyen de quoi les équations de la normale seront

$$X=x+\mu a\frac{d\psi}{dp}+\mu a'\frac{d\psi}{dp'},$$

$$Y=y+\mu b\frac{d\psi}{dp}+\mu b'\frac{d\psi}{dp'};$$

d'où on déduira la construction suivante :

Soient portées sur p et p', à partir du point (x, y), des longueurs respectivement proportionnelles à $\frac{d\psi}{dp}$ et $\frac{d\psi}{dp'}$; en construisant un parallélogramme sur ces longueurs, la diagonale qui joindra le sommet (x, y) de ce parallélogramme au sommet opposé sera normale à la courbe.

En appliquant ces constructions aux sections coniques, il en résulte diverses méthodes pour mener des tangentes à ces courbes.

On sait d'abord qu'en rapportant une section conique à l'un de ses foyers et une parallèle à sa directrice, son équation prend la forme

$$Ap+Bx+C=0;$$

ce qui donne $\frac{d\varphi}{dp}=A$, $\frac{d\varphi}{dx}=B$; d'où l'on voit qu'en prenant respectivement sur p et x des parties proportionnelles aux grandeurs constantes A et B, et achevant le parallélogramme, sa diagonale sera la normale à la courbe.

Comme, en particulier, on a pour la parabole $B=-A$, il s'ensuit que, pour cette courbe, la normale divise en deux parties égales l'angle des coordonnées x et p.

En second lieu, on sait qu'en rapportant l'ellipse et l'hyperbole à leurs foyers, on a pour leur équation

$$p\pm p'=2A;$$

ce qui donne $\frac{d\psi}{dp}=\mp 1$, $\frac{d\psi}{dp'}=\pm 1$; d'où l'on déduit la construction, très-connue, des géomètres grecs, et qui prouve que, soit la tangente, soit la normale, divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs.

Dans un second article, nous étendrons ces méthodes à la construction des plans tangens aux surfaces courbes et des tangentes aux courbes à double courbure.