
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Géométrie de la règle. Solution et construction, par la géométrie
analitique, de deux problèmes dépendant de la géométrie de la règle**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 325-334

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__325_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1816-1817, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

Solution et construction, par la géométrie analytique, de deux problèmes dépendant de la géométrie de la règle ;

Par M. GERGONNE.



EN montrant, dans un précédent article (page 289 de ce volume), comment la géométrie analytique, convenablement employée, peut conduire, pour la solution des problèmes de géométrie, à des constructions bien supérieures, pour l'élégance et la simplicité, à celles que fournit la géométrie pure, j'ai promis d'ajouter encore de nouveaux exemples de cette vérité à celui qu'offrait cet article. C'est dans la vue de remplir cette promesse, que je me propose ici de résoudre les deux problèmes suivans :

PROBLÈME I. A une ligne quelconque du second ordre, inscrire un triangle dont les côtés passent par trois points donnés ; en n'employant que la règle seulement ?

PROBLÈME II. A une ligne quelconque du second ordre, circonscrire un triangle dont les sommets soient sur trois droites données ; en n'employant que la règle seulement ?

Le premier de ces deux problèmes, borné seulement au cercle, et sans exclure l'emploi du compas, a été long temps célèbre ; et depuis Pappus, qui en a traité un cas très-particulier, beaucoup d'illustres géomètres en ont fait le sujet de leurs recherches.

Tom. VII, n.º XI, 1.º mai 1817.

En 1810, j'essayai d'y appliquer la géométrie analytique, toujours pour le cas du cercle; elle me conduisit à une construction fort simple qui a paru dans les recueils de l'*Académie du Gard*; mais on n'y pouvait parvenir qu'à la suite d'un calcul assez laborieux; et, comme je n'avais pas aperçu que cette construction n'exigeait que l'emploi de la règle, je ne songeai nullement à l'étendre à toutes les sections coniques.

A la page 126 du 1.^{er} volume du présent recueil, je proposai de démontrer géométriquement la solution graphique que j'avais obtenue, sans faire connaître l'analyse qui m'y avait conduit. On me fit aussitôt observer que ma construction pouvait s'étendre indistinctement à toutes les lignes du second ordre; et c'est ce qui me détermina à généraliser mon premier énoncé, comme on le voit à la page 259 du même volume. MM. Servois et Rochat donnèrent l'un et l'autre (pag. 337 et 342) une solution du problème ainsi généralisé.

Mais autre chose est de légitimer par le raisonnement une construction déjà connue ou de parvenir à cette construction. Je me propose donc de faire voir ici comment la géométrie analytique, bien employée, conduit à cette même construction d'une manière pour ainsi dire inévitable.

Comme il est très-aisé de ramener le dernier de nos deux problèmes au premier, c'est d'abord de celui-ci uniquement que je m'occuperai; et, comme un problème du domaine de la géométrie de la règle est résolu, pour toutes les sections coniques, dès qu'il l'est pour une seule d'entre elles, je supposerai, pour plus de simplicité, que la courbe dont il s'agit est une parabole.

Je réduirai donc le problème au suivant :

PROBLÈME. Incrire à une parabole un triangle rectiligne dont les côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent par trois points donnés sur le plan de cette courbe ?

Solution. Soient P , P' , P'' les points donnés, et S , S' , S''

les sommets du triangle cherché; de telle sorte que P soit sur S'S'', P' sur S'S, et P'' sur SS'.

Il est évident que, si l'un des sommets, le sommet S par exemple, était connu, le problème pourrait être réputé résolu; car, en menant de ce point des droites par les points P', P'', leurs intersections avec la parabole détermineraient respectivement les deux autres sommets S'', S'. Occupons-nous donc uniquement de la recherche de ce point S.

Soit $2p$ le paramètre de la parabole dont il s'agit. Soit pris son axe pour axe des x , et la tangente à son sommet pour axe des y . Soient alors les coordonnées tant des points donnés P, P', P'', que des points cherchés S, S', S'', ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{l} \text{Pour P} \left\{ \begin{array}{l} a, \\ b; \end{array} \right. \quad \text{Pour P'} \left\{ \begin{array}{l} a', \\ b'; \end{array} \right. \quad \text{Pour P''} \left\{ \begin{array}{l} a'', \\ b''; \end{array} \right. \\ \\ \text{Pour S} \left\{ \begin{array}{l} x, \\ y; \end{array} \right. \quad \text{Pour S'} \left\{ \begin{array}{l} x', \\ y'; \end{array} \right. \quad \text{Pour S''} \left\{ \begin{array}{l} x'', \\ y''; \end{array} \right. \end{array}$$

D'abord, puisque S, S', S'' sont des points de la courbe; on doit avoir

$$y^2 = px, \quad y'^2 = 2px', \quad y''^2 = 2px''. \quad (1)$$

En second lieu, puisque chacun des points P, P', P'' est en ligne droite avec deux de ceux-là, on doit avoir

$$\frac{x-x'}{y-y'} = \frac{x-a''}{y-b''}, \quad \frac{x'-x''}{y'-y''} = \frac{x'-a}{y'-b}, \quad \frac{x''-x}{y''-y} = \frac{x''-a'}{y''-b'}; \quad (2)$$

Voilà donc six équations, au moyen desquelles on peut déterminer

les six coordonnées xy , $x'y'$, $x''y''$ des trois points inconnus S , S' , S'' ; mais, comme nous bornons notre recherche à celle du point S , il nous suffira d'éliminer x' , y' , x'' , y'' entre les cinq dernières; il en résultera une équation en x et y qui, jointe à la première, nous fera connaître les coordonnées du point cherché.

Mais on peut, par une combinaison convenable de ces six équations, en obtenir d'autres incomparablement plus simples. En retranchant, en effet, deux à deux, les équations (1), on obtient celles-ci

$$\frac{x-x'}{y-y'} = \frac{y+y'}{2p}, \quad \frac{x'-x''}{y'-y''} = \frac{y'+y''}{2p}, \quad \frac{x''-x}{y''-y} = \frac{y''+y}{2p}. \quad (3)$$

En comparant ces équations respectivement aux équations (2), on en déduit les suivantes

$$\frac{y+y'}{2p} = \frac{x-a''}{y-b''}, \quad \frac{y'+y''}{2p} = \frac{x'-a}{y'-b}, \quad \frac{y''+y}{2p} = \frac{x''-a'}{y''-b'}. \quad (4)$$

en chassant les dénominateurs dans ces dernières et en y remplaçant respectivement $2px$, $2px'$, $2px''$ par leurs valeurs y^2 , y'^2 , y''^2 , données par les équations (1); elles deviendront enfin

$$\left. \begin{aligned} y y' - b''(y + y') + 2pa'' &= 0, \\ y' y'' - b (y' + y'') + 2pa &= 0, \\ y'' y - b' (y'' + y) + 2pa' &= 0. \end{aligned} \right\} (5)$$

équations délivrées de x , x' , x'' ; et entre lesquelles il n'est plus question que d'éliminer y' et y'' pour obtenir la valeur de y .

L'élimination de y'' entre les deux dernières donne

$$\frac{by' - 2pa}{y' - b} = \frac{b'y - 2pa'}{y - b'} ;$$

ou, en chassant les dénominateurs et transposant,

$$(b - b')yy' + (bb' - 2pa)y - (bb' - 2pa')y' + 2p(ab' - a'b) = 0 ;$$

Eliminant enfin y' entre celle-ci et la première des équations (5) il viendra

$$\frac{(bb' - 2pa)y + 2p(ab' - a'b)}{(b - b')y - (bb' - 2pa')} + \frac{b''y - 2pa''}{y - b''} = 0 ;$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$\begin{aligned} & \{bb' + bb'' - b'b'' - 2pa\}y^2 \\ & + 2\{bb'b'' + p[b(a' + a'') - b'(a + a'') - b''(a + a')]\}y \\ & + 2p\{a'bb'' + a''bb' - ab'b'' - 2pa'a''\} = 0 . \end{aligned}$$

En remplaçant y^2 par son équivalent $2px$, toute l'équation sera divisible par 2, et pourra ensuite être écrite ainsi

$$\begin{array}{l} -\{b'b'' - p(a' + a'')\} \\ +\{b'b' - p(a + a'')\} \\ +\{b'b'' - p(a + a'')\} \end{array} \left| \begin{array}{l} px + \{b'b'' - p(a' + a'')\}b \\ -\{b'b' - p(a + a'')\}b' \\ -\{b'b'' - p(a + a'')\}b'' \end{array} \right| \begin{array}{l} y - \{b'b'' - p(a' + a'')\}pa \\ +\{b'b' - p(a + a'')\}pa' \\ +\{b'b'' - p(a + a'')\}pa'' \end{array} \Bigg| = 0$$

ce qui revient à

$$(A) \quad \{b'b'' - p(a' + a'')\}\{b\gamma - p(x + a)\}$$

$$= \{bb'' - p(a+a'')\} \{b'y - p(x+a')\} + \{bb' - p(a+a')\} \{b''y - p(x+a'')\} .$$

Telle est donc l'équation qu'il faudrait combiner avec l'équation $y^2 = 2px$, pour obtenir les deux coordonnées x , y du point cherché S ; puis donc que l'équation $y^2 = 2px$ est celle de la parabole donnée, et que l'autre n'est que du premier degré seulement; il en faut conclure que celle-ci est l'équation d'une droite qui coupe la parabole donnée au point cherché S .

Tout se réduit donc à construire la droite (A), ou, ce qui revient au même, à déterminer deux points de sa direction; ce qui revient encore à trouver deux systèmes de relations entre x et y qui y satisfassent.

Or, les deux systèmes de relations les plus naturels à établir pour y satisfaire sont les suivants :

$$\begin{aligned} (B') \left\{ \begin{array}{l} (C') \quad b'y - p(x+a') = 0, \\ (D') \quad \{b'b'' - p(a'+a'')\} \{by - p(x+a)\} = \{bb' - p(a+a')\} \{b''y - p(x+a'')\}; \end{array} \right. \\ (B'') \left\{ \begin{array}{l} (C'') \quad b''y - p(x+a'') = 0, \\ (D'') \quad \{b'b'' - p(a'+a'')\} \{by - p(x+a)\} = \{bb'' - p(a+a'')\} \{b'y - p(x+a')\}; \end{array} \right. \end{aligned}$$

donc le point déterminé par les équations (B') et le point déterminé par les équations (B'') sont deux points de la direction de (A).

On pourrait, pour déterminer chacun de ces points, tirer les valeurs de x et y des deux couples d'équations par lesquels ils sont donnés; mais il est incomparablement plus commode de construire les quatre droites (C'), (D'), (C''), (D'') elles-mêmes. L'intersection des deux premières sera le point (B'), celle des deux dernières sera le point (B'').

Nous examinerons tout-à-l'heure ce que peuvent être les droites (C'), (C''); occupons-nous seulement, pour le présent, de la construction des droites (D'), (D''); ou, pour mieux dire, de la

construction de l'une d'elles ; car on voit assez que (D'') est par rapport au point P'' ce que (D') est par rapport au point P'.

La droite (D') serait déterminée, si nous connaissions deux quelconques des points de sa direction. Or, on voit d'abord que cette droite passe par le point P' ; d'où il suit qu'il ne s'agit plus que d'en trouver un autre point ; or, ce point sera donné par deux relations entre x et y qui résolvent également l'équation (D') ; et, entre toutes les relations qu'il soit possible de choisir, les plus simples sont, sans contredit, les suivantes :

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{l} (C) \quad b y - p(x+a) , \\ (C'') \quad b'' y - p(x+a'') ; \end{array} \right.$$

La droite (D') est donc une droite menée par les points P' et E' ; et ce dernier point, lui-même, se trouve déterminé par l'intersection des droites (C), (C'').

Pour de semblables raisons, la droite (D'') sera une droite menée par le point P'' et par un point E'' intersection des deux droites (C), (C').

Notre construction se trouve donc réduite ainsi à celles des trois droites (C), (C'), (C''), ou plutôt à celle de la première seulement ; puisque les deux autres sont respectivement, par rapport aux points P', P'', ce qu'est celle-ci par rapport au point P.

Or, soit pris sur la parabole donnée un point quelconque (x', y') ; la tangente à la courbe en ce point sera, comme l'on sait,

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') ,$$

ou, en réduisant et mettant $2px'$ pour y'^2 ,

$$yy' = p(x + x') . \quad (1)$$

Supposons, en second lieu, qu'il soit question de mener à la parabole une tangente par un point extérieur (a, b) ; en représentant par x' , y' les coordonnées du point de contact; on aura pour déterminer ce point les deux équations

$$y'^2 = 2px' \quad \text{et} \quad by' = p(x' + a); \quad (2)$$

dont la première exprime que le point de contact est sur la courbe, tandis que la seconde exprime que le point (a, b) satisfait à l'équation (1). Puis donc que l'équation $y'^2 = 2px'$ est du second degré et l'autre du premier seulement, on aura deux points de contact et conséquemment deux tangentes par le point (a, b) .

Dans la recherche de ces deux points de contact, au lieu de tirer des équations (2) les deux systèmes de valeurs qu'elles fournissent pour x et y , il revient au même et il est plus commode de construire les lignes qu'expriment ces deux équations. Puis donc que la première est celle de notre parabole elle-même, et que l'autre n'est que du premier degré seulement, cette dernière doit appartenir à une droite passant par les points où les deux tangentes touchent la courbe, c'est-à-dire, que cette droite est la polaire du point (a, b) .

On voit donc, d'après cela, que nos trois droites (C) , (C') , (C'') , à la construction desquelles nous avons ramené notre problème, ne sont autre chose que les polaires respectives des trois points P , P' , P'' .

Or, comme la droite polaire d'un point donné, sur le plan d'une section conique, peut se construire à l'aide de la règle seulement, il s'ensuit que nous pouvons étendre notre construction à une section conique quelconque; et voici à quoi elle se réduit.

Construction I. Soient trois points P , P' , P'' , donnés à volonté, sur le plan d'une ligne du second ordre quelconque; et supposons qu'il soit question d'inscrire à la courbe un triangle dont
les

les côtés ; prolongés au besoin , passent respectivement par les trois points donnés.

Soient S , S' , S'' les trois sommets inconnus , P devant se trouver sur S/S'' , P' sur S'/S , et P'' sur SS' .

Soient construites les polaires des points P , P' , P'' ; représentons-les respectivement par C , C' , C'' ; C' et C'' se coupant en E , C'' et C en E' , C et C' en E'' . Soient menées PE , $P'E'$, $P''E''$, coupant respectivement C , C' , C'' en B , B' , B'' ; alors la courbe sera coupée respectivement en S par B/B'' , en S' par B''/B , en S'' par BB' .

On doit remarquer , au surplus , que chacune de ces droites coupera la courbe en deux points , et qu'ainsi le problème aura deux solutions. On doit remarquer encore , comme nous l'avons déjà fait plus haut , que tout peut se réduire à la construction du point S d'où il est facile de conclure les deux autres. Il est donc superflu de déterminer le point B , et conséquemment de mener la droite PE .

Le second problème se ramène facilement à celui-ci.

Construction II. Soient trois droites C , C' , C'' , données à volonté , sur le plan d'une ligne du second ordre quelconque ; et supposons qu'il soit question de circoncrire à la courbe un triangle dont les sommets soient sur les trois droites données.

Soient S , S' , S'' les points inconnus où la courbe doit être touchée par les côtés du triangle , S étant son point de contact avec le côté qui se termine à C' et C'' ; S' le point de contact avec le côté qui se termine à C'' et C ; et enfin S'' le point de contact avec le côté qui se termine à C et C' .

Cherchez les pôles respectifs P , P' , P'' , des droites C , C' , C'' . Opérez sur ces pôles et sur les droites C , C' , C'' , comme vous l'avez fait dans le problème précédent ; les sommets S , S' , S'' du triangle inscrit dont les côtés passent par P , P' , P'' seront en même temps les points de contact de la courbe avec les côtés du triangle cherché.

Ce qui nous a principalement déterminé à prendre ces deux problèmes pour exemple de nos méthodes, c'est que M. Lhuilier, dans ses *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique*, insinue que, soit sous le rapport de la mise en équation, soit sous celui de la construction, la géométrie analytique, qu'il appelle la *Méthode des coordonnées*, ne paraît guère leur être commodément applicable. Nous pensons que les géomètres qui prendront la peine de comparer nos constructions à celles qu'on déduit des considérations purement géométriques, en jugeront d'une toute autre manière.

Dans un prochain article, nous essayerons d'étendre nos procédés au problème général où il s'agit soit d'inscrire à une ligne du second ordre un polygone de m côtés, dont les côtés passent par un même nombre de points donnés, soit de circoncrire à la même courbe un polygone de m côtés dont les sommets se trouvent sur un pareil nombre de droites données.
