

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

VECTEN

**Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 7 (1816-1817), p. 321-324

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1816-1817\\_\\_7\\_\\_321\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__321_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1816-1817, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

*Extrait d'une lettre au Rédacteur des Annales ;*

Par M. VECTEN, ex-professeur de mathématiques spéciales.



.....  
 .....  
 .....

En cherchant à démontrer la première des propositions suivantes, qui l'était seulement pour le triangle rectangle, je suis parvenu à plusieurs autres, que vous serez peut-être bien aise de connaître.

Si sur les trois côtés d'un triangle quelconque  $ABC$ , (fig. 7) on construit trois carrés  $AD$ ,  $BF$ ,  $CI$ , il en résultera ;

1.° Qu'en abaissant des sommets de ce triangle des perpendiculaires  $AK$ ,  $BL$ ,  $CM$ , sur les directions des côtés opposés, et menant les droites  $AG$ ,  $BI$ ,  $BH$ ,  $CD$ ,  $CE$ ,  $AF$  ; les deux premières se couperont sur  $CM$  en  $P$ , les deux suivantes sur  $AK$  en  $N$ , et les deux dernières sur  $BL$  en  $O$ .

2.° Que ces six droites seront perpendiculaires deux à deux ; savoir :  $CD$  sur  $AG$ ,  $AF$  sur  $BH$ ,  $BI$  sur  $CE$  ; les deux premières se coupant en  $Q$ , les deux suivantes en  $R$ , et les deux dernières en  $S$ .

3.° Que, si l'on mène les droites  $EF$ ,  $IG$ ,  $HD$ , elles passeront respectivement par les points  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  et diviseront en deux parties égales les angles formés en ces points par les six premières droites.

4.° Que, si l'on mène les droites AS, BQ, CR, elles se couperont en un même point T, et seront respectivement perpendiculaires à DH, EF, GI.

5.° Que, si l'on mène les droites DG, FH, IE, on formera les trois triangles DBG, FCH, IAE, qui seront équivalens entre eux et au triangle ABC.

6.° Qu'enfin la somme des quarrés de ces trois dernières droites sera égale à trois fois la somme des quarrés des côtés du triangle ABC.

Cette dernière proposition revient à dire que, si l'on prolonge les trois côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC (fig. 8) dans le même sens, des quantités BA', CB', AC', respectivement égales aux côtés prolongés, et menant les droites A'C, B'A, C'B; on aura

$$\overline{A'C}^2 + \overline{B'A}^2 + \overline{C'B}^2 = 3(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

Je ne vous envoie pas les démonstrations de ces diverses propositions, parce qu'elles sont toutes extrêmement simples, et qu'elles se présentent, pour ainsi dire, d'elles-mêmes en construisant la figure. Seulement, comme la première partie de la quatrième proposition repose sur ce théorème que *les cordes communes à trois cercles qui se coupent deux à deux concourent en un même point*, et que la démonstration de ce théorème n'est véritablement satisfaisante que lorsque les trois cercles ont une partie de leur plan qui leur est commune (\*); j'ai pensé que vous seriez bien aise de

---

(\*) M. Vecten veut sans doute parler ici de la démonstration *géométrique* du théorème; car, pour sa démonstration analytique, elle se réduit simplement à remarquer que, si  $A=0$ ,  $B=0$ ,  $C=0$  sont les équations de trois cercles,  $A-B=0$ ,  $B-C=0$ ,  $C-A=0$  seront les équations de leurs cordes communes deux à deux, et que chacune de ces trois dernières équations est comportée par les deux autres. Cette démonstration, qui ne souffre aucune exception, s'étend même au cas où les cercles ne se coupent pas. Elle s'applique avec une égale facilité à trois cercles d'une sphère et à quatre sphères dans l'espace. Sur quoi voyez (*Annales*, tom. VI, pag. 326). J. D. G.

savoir comment on peut démontrer cette proposition par la géométrie.

Nous supposons d'abord que les trois cercles, que nous désignerons simplement par leurs centres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (fig. 9), se coupent de manière à former un triangle curviligne  $A'B'C'$  qui leur soit commun. Il faut démontrer que, dans ce cas, les trois droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  se coupent en un même point. Pour cela, menons les droites  $\alpha\beta$ ,  $\beta\gamma$ ,  $\gamma\alpha$ ; puis joignons le point A aux points  $\beta$ ,  $\gamma$ ; le point B aux points  $\gamma$ ,  $\alpha$ , et le point C aux points  $\alpha$ ,  $\beta$ . On a évidemment  $\alpha B = \alpha C$ ,  $\beta C = \beta A$ ,  $\gamma A = \gamma B$ ; donc les quatre triangles  $\alpha\beta\gamma$ ,  $\alpha C\beta$ ,  $\beta A\gamma$ ,  $\gamma B\alpha$  peuvent être considérés comme les quatre faces d'un tétraèdre développé. Mais les cordes  $AA'$ ,  $BB'$  étant respectivement perpendiculaires sur les côtés  $\beta\gamma$ ,  $\gamma\alpha$  de la base du tétraèdre, il s'ensuit que leur intersection G détermine le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de cette base, du sommet du tétraèdre; et comme le pied de cette perpendiculaire est également déterminé par l'intersection de l'une ou de l'autre de ces cordes avec la troisième  $CC'$ ; il s'ensuit que les trois cordes doivent concourir au même point G, puisque, dans le cas contraire, on aurait, d'un même point hors d'un plan, plusieurs perpendiculaires à ce plan.

Mais si les trois cercles, au lieu de se couper de la manière que nous avons d'abord supposée, laissent entre eux un triangle curviligne  $a'b'c'$ , ne faisant partie d'aucun d'eux; il est facile de voir que la précédente démonstration devient illusoire. Il est donc nécessaire de faire voir que le théorème est également vrai dans ce second cas.

Pour cela, prenons, sur le prolongement de l'une quelconque des cordes, de  $aa'$  par exemple, un point A, de manière que AD soit plus grand que AG; G étant le point où la corde  $aa'$  est coupée par l'une quelconque des deux autres;  $bb'$  par exemple. Des points  $\beta$  et  $\gamma$  et avec des rayons respectivement égaux à  $\beta A$  et  $\gamma A$ , décrivons deux circonférences qui couperont respectivement les prolongemens des cordes  $cc'$  et  $bb'$  en C et B; menons les droites  $A\beta$ ,  $A\gamma$ ,  $B\gamma$ ,  $B\alpha$ ,  $C\alpha$ ,  $C\beta$ ; et nous formerons les

triangles  $\beta A\gamma$ ,  $\gamma B\alpha$ ,  $\alpha C\beta$ , qui seront tels que, si on les fait tourner respectivement autour des droites  $\beta\gamma$ ,  $\gamma\alpha$ ,  $\alpha\beta$ , on pourra toujours s'arranger de manière à ce que les trois points A, B, C se réunissent en un seul, puisqu'on a  $A\beta = \beta C$ ,  $\gamma A = \gamma B$  et  $AD > DG$ ; c'est-à-dire, que les quatre triangles  $\beta A\gamma$ ,  $\gamma B\alpha$ ,  $\alpha C\beta$ ,  $\alpha\beta\gamma$  peuvent être regardés comme les quatre faces d'un tétraèdre. Mais les trois droites  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , ou celles-ci AD, BE, CF, sont respectivement perpendiculaires sur les côtés  $\beta\gamma$ ,  $\gamma\beta$ ,  $\alpha\beta$  du triangle  $\alpha\beta\gamma$ ; donc elles se coupent en un seul et même point G, qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du tétraèdre sur le plan  $\alpha\beta\gamma$  de sa base.

On peut remarquer que, puisque le point B coïncide avec le point C, lorsque les deux triangles  $\gamma B\alpha$ ,  $\alpha C\beta$  sont relevés; il en résulte que  $B\alpha$  coïncide avec  $C\alpha$ , et par conséquent qu'on a  $B\alpha = C\alpha$ , c'est-à-dire que, si l'on décrit du point  $\alpha$  comme centre, et avec  $\alpha B$  pour rayon, une circonférence de cercle, elle passera par le point C.

Paris, le 30 juin 1817.

---