
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**De la division du cercle en portions de même périmètre
ayant entre elles un rapport donné**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 57-59

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__57_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1815-1816, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*De la division du cercle en portions de même périmètre
ayant entre elles un rapport donné ;*

Par M. GERGONNE.



Dans le I.^{er} volume de ce recueil , page 240 , M. Lhuilier a donné une très-élégante et très-curieuse construction du problème où il s'agit de diviser un cercle en parties égales à la fois en contour et en surface.

Ce qu'on vient de lire m'a fait penser que la méthode de M. Lhuilier devait s'appliquer au problème plus général où il s'agit de partager un cercle en parties de même contour , ayant entre elles

(*) M. Tédénat observe qu'en divisant la hauteur du triangle à partir du sommet dans le rapport de n à m désignant par x le premier des deux segmens , par h la hauteur du triangle total , et enfin par y celle du triangle à retrancher ,¹ on a l'équation $y^2 = hx$, qui appartient à la parabole et peut fournir une construction.

A la vérité , cette construction n'est point élémentaire , mais M. Tédénat remarque que son analogue est peut-être la plus simple qu'on puisse appliquer au second problème de géométrie de la page 328 du V.^e volume , relatif à la pyramide ; problème non susceptible de solution élémentaire et qui conduit à l'équation $y^3 = h^2x$ de la première parabole cubique.

J. D. G.

des rapports donnés. Non seulement l'épreuve a justifié mon attente ; mais j'ai vu que la construction pouvait être démontrée très-brièvement, sans rien emprunter de la théorie des suites dont les termes sont des puissances semblables des termes d'une progression par différences.

Soit en effet divisé le diamètre $2r$ d'un cercle (fig. 7) en deux segmens, proportionnels à m et n ; en sorte que ces deux segmens soient

$$\frac{2mr}{m+n} , \quad \frac{2nr}{m+n} ;$$

sur ces deux segmens comme diamètres soient décrits, de part et d'autre du diamètre total $2r$, deux demi-circonférences dont les longueurs seront conséquemment

$$\frac{\pi mr}{m+n} , \quad \frac{\pi nr}{m+n} ;$$

leur somme sera ainsi πr ; c'est-à-dire que , quel que soit le rapport de m à n , la courbe continue formée par les deux demi-circonférences intérieures et se terminant aux deux extrémités du diamètre $2r$ est constamment égale à la demi-circonférence extérieure.

Cette courbe et le diamètre $2r$ divisent le cercle extérieur en quatre segmens M , N , M' , N' ; et l'on a évidemment , par ce qui précède ,

$$M = \frac{1}{2} \pi \frac{m^2 r^2}{(m+n)^2} , \quad M' = \frac{1}{2} \pi r^2 - N = \frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi \frac{n^2 r^2}{(m+n)^2} ,$$

$$N = \frac{1}{2} \pi \frac{n^2 r^2}{(m+n)^2} ; \quad N' = \frac{1}{2} \pi r^2 - M = \frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi \frac{m^2 r^2}{(m+n)^2} ;$$

ou , en réduisant ,

$$M' = \frac{1}{2} \pi r^2 m \cdot \frac{m+2n}{(m-n)^2},$$

$$N' = \frac{1}{2} \pi r^2 n \cdot \frac{n+2m}{(m+n)^2};$$

done

$$M+M' = \pi r^2 \frac{m}{m+n}; \quad N+N' = \pi r^2 \frac{n}{m+n};$$

et par conséquent

$$\frac{M+M'}{N+N'} = \frac{m}{n};$$

c'est-à-dire, que la courbe continue partage le cercle en deux segments proportionnels aux segments correspondans du diamètre.
